

习 题 1

1.1 选择题

(1)一运动质点在某瞬时位于矢径 $\mathbf{r}(x, y)$ 的端点处,其速度大小为

(A) $\frac{dr}{dt}$

(B) $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$

(C) $\frac{d|\mathbf{r}|}{dt}$

(D) $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

[答案:D]

(2)一质点作直线运动,某时刻的瞬时速度 $v=2\text{ m/s}$,瞬时加速度 $a=-2\text{ m/s}^2$,则一秒钟后质点的速度

(A) 等于零

(B) 等于 -2 m/s

(C) 等于 2 m/s

(D) 不能确定。

[答案:D]

(3)一质点沿半径为 R 的圆周作匀速率运动,每 t 秒转一圈,在 $2t$ 时间间隔中,其平均速度大小和平均速率大小分别为

(A) $\frac{2\pi R}{t}, \frac{2\pi R}{t}$

(B) $0, \frac{2\pi R}{t}$

(C) $0, 0$

(D) $\frac{2\pi R}{t}, 0$

[答案:B]

1.2 填空题

(1)一质点,以 $\pi\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的匀速率作半径为 5 m 的圆周运动,则该质点在 5 s 内,位移的大小是_____;经过的路程是_____。

[答案: 10 m ; $5\pi\text{ m}$]

(2)一质点沿 x 方向运动,其加速度随时间的变化关系为 $a=3+2t$ (SI),如果初始时刻质点的速度 v_0 为 $5\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$,则当 t 为 3 s 时,质点的速度 v =_____。

[答案: $23\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$]

(3)轮船在水上以相对于水的速度 $\mathbf{V}_1$ 航行,水流速度为 $\mathbf{V}_2$,一人相对于甲板以速度 $\mathbf{V}_3$ 行走。如人相对于岸静止,则 $\mathbf{V}_1$ 、 $\mathbf{V}_2$ 和 $\mathbf{V}_3$ 的关系是_____。

[答案: $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = 0$]

1.3 一个物体能否被看作质点,你认为主要由以下三个因素中哪个因素决定:

- (1) 物体的大小和形状;
- (2) 物体的内部结构;
- (3) 所研究问题的性质。

解:只有当物体的尺寸远小于其运动范围时才可忽略其大小的影响,因此主要由所研究问题的性质决定。

1.4 下面几个质点运动学方程,哪个是匀变速直线运动?

- (1) $x = 4t - 3$; (2) $x = -4t^3 + 3t^2 + 6$; (3) $x = -2t^2 + 8t + 4$; (4) $x = 2/t^2 - 4/t$ 。

给出这个匀变速直线运动在 $t = 3$ s 时的速度和加速度,并说明该时刻运动是加速的还是减速的。(x 单位为 m, t 单位为 s)

解:匀变速直线运动即加速度为不等于零的常数时的运动。加速度又是位移对时间的两阶导数。于是可得(3)为匀变速直线运动。

其速度和加速度表达式分别为

$$v = \frac{dx}{dt} = 4t + 8$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = 4$$

$t = 3$ s 时的速度和加速度分别为 $v = 20$ m/s, $a = 4$ m/s²。因加速度为正所以是加速的。

1.5 在以下几种运动中,质点的切向加速度、法向加速度以及加速度哪些为零哪些不为零?

- (1) 匀速直线运动; (2) 匀速曲线运动; (3) 变速直线运动; (4) 变速曲线运动。

解:(1) 质点作匀速直线运动时,其切向加速度、法向加速度及加速度均为零;

(2) 质点作匀速曲线运动时,其切向加速度为零,法向加速度和加速度均不为零;

(3) 质点作变速直线运动时,其法向加速度为零,切向加速度和加速度均不为零;

(4) 质点作变速曲线运动时,其切向加速度、法向加速度及加速度均不为零。

1.6 $|\Delta \mathbf{r}|$ 与 Δr 有无不同? $\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$ 和 $\left| \frac{dr}{dt} \right|$ 有无不同? $\left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|$ 和 $\left| \frac{dv}{dt} \right|$ 有无不同? 其不同在哪里? 试举例说明。

解:(1) $|\Delta \mathbf{r}|$ 是位移的模, Δr 是位矢的模的增量,即 $|\Delta \mathbf{r}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, $\Delta r = |\mathbf{r}_2| - |\mathbf{r}_1|$;

(2) $\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$ 是速度的模,即 $\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt}$ 。

$\frac{dr}{dt}$ 只是速度在径向上的分量。

$\because$ 有 $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ (式中 $\hat{\mathbf{r}}$ 叫做单位矢), 则 $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$

式中 $\frac{dr}{dt}$ 就是速度在径向上的分量,

$\therefore \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$ 与 $\frac{dr}{dt}$ 不同如题 1.6 图所示.

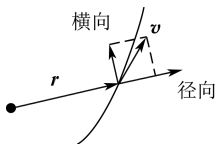
(3) $\left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|$ 表示加速度的模, 即 $|\mathbf{a}| = \left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|$, $\frac{dv}{dt}$ 是加速度 $\mathbf{a}$ 在切向上的分量.

$\because$ 有 $v = v\boldsymbol{\tau}$ ($\boldsymbol{\tau}$ 表轨道节线方向单位矢), 所以

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$$

式中 $\frac{dv}{dt}$ 就是加速度的切向分量.

($\because \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$ 与 $\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt}$ 的运算较复杂, 超出教材规定, 故不予讨论)



题 1.6 图

1.7 设质点的运动方程为 $x = x(t)$, $y = y(t)$, 在计算质点的速度和加速度时, 有人先求出 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 然后根据 $v = \frac{dr}{dt}$ 及 $a = \frac{d^2r}{dt^2}$ 而求得结果; 又有人先计算速度和加速度的分量, 再合成求得结果, 即

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

你认为两种方法哪一种正确? 为什么? 两者差别何在?

解: 后一种方法正确. 因为速度与加速度都是矢量, 在平面直角坐标系中, 有 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$,

$$\therefore \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}$$

故它们的模即为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

而前一种方法的错误可能有两点, 其一是概念上的错误, 即误把速度、加速度定义作

$$v = \frac{dr}{dt} \quad a = \frac{d^2r}{dt^2}$$

其二, 可能是将 $\frac{dr}{dt}$ 与 $\frac{d^2r}{dt^2}$ 误作速度与加速度的模. 在 1.6 题中已说明 $\frac{dr}{dt}$ 不是速度的模, 而

只是速度在径向上的分量, 同样, $\frac{d^2r}{dt^2}$ 也不是加速度的模, 它只是加速度在径向分量中的一部分

$\left[a_{\text{径}} = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$. 或者概括性地说, 前一种方法只考虑了位矢 $\mathbf{r}$ 在径向 (即量值) 方面随

时间的变化率, 而没有考虑位矢 $\mathbf{r}$ 及速度 $\mathbf{v}$ 的方向随时间的变化率对速度、加速度的贡献。

1.8 一质点在 xOy 平面上运动,运动方程为

$$x=3t+5, y=\frac{1}{2}t^2+3t-4.$$

式中 t 以 s 计, x, y 以 m 计. (1) 以时间 t 为变量, 写出质点位置矢量的表示式; (2) 求出 $t=1$ s 时刻和 $t=2$ s 时刻的位置矢量, 计算这 1 秒内质点的位移; (3) 计算 $t=0$ s 时刻到 $t=4$ s 时刻内的平均速度; (4) 求出质点速度矢量表示式, 计算 $t=4$ s 时质点的速度; (5) 计算 $t=0$ s 到 $t=4$ s 内质点的平均加速度; (6) 求出质点加速度矢量的表示式, 计算 $t=4$ s 时质点的加速度 (请把位置矢量、位移、平均速度、瞬时速度、平均加速度、瞬时加速度都表示成直角坐标系中的矢量式).

解: (1)
$$\mathbf{r} = (3t+5)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}t^2+3t-4\right)\mathbf{j} \text{ m}$$

(2) 将 $t=1, t=2$ 代入上式即有

$$\mathbf{r}_1 = 8\mathbf{i} - 0.5\mathbf{j} \text{ m}$$

$$\mathbf{r}_2 = 11\mathbf{i} + 4\mathbf{j} \text{ m}$$

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = 3\mathbf{i} + 4.5\mathbf{j} \text{ m}$$

(3) $\therefore \mathbf{r}_0 = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, \mathbf{r}_4 = 17\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$

$\therefore \mathbf{v} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_0}{4-0} = \frac{12\mathbf{i} + 20\mathbf{j}}{4} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

(4)
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 3\mathbf{i} + (t+3)\mathbf{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

则
$$\mathbf{v}_4 = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(5) $\therefore \mathbf{v}_0 = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v}_4 = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_0}{4} = \frac{4\mathbf{j}}{4} = 1\mathbf{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

(6)
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 1\mathbf{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

这说明该点只有 y 方向的加速度, 且为恒量。

1.9 质点沿 x 轴运动, 其加速度和位置的关系为 $a=2+6x^2$, a 的单位为 m/s^2 , x 的单位为 m. 质点在 $x=0$ 处, 速度为 10 m/s, 试求质点在任何坐标处的速度值.

解: $\therefore a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$

分离变量:
$$v dv = a dx = (2+6x^2) dx$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}v^2 = 2x + 2x^3 + c$$

由题知, $x=0$ 时, $v_0=10$, $\therefore c=50$

$\therefore v = 2\sqrt{x^3+x+25} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

1.10 已知一质点作直线运动, 其加速度为 $a=4+3t \text{ m/s}^2$, 开始运动时, $x=5 \text{ m}, v=0$, 求该质点在 $t=10 \text{ s}$ 时的速度和位置.

解: $\because$

$$a = \frac{dv}{dt} = 4 + 3t$$

分离变量, 得

$$dv = (4 + 3t) dt$$

积分, 得

$$v = 4t + \frac{3}{2}t^2 + c_1$$

由题知,

$$t=0, v_0=0, \therefore c_1=0$$

故

$$v = 4t + \frac{3}{2}t^2$$

又因为

$$v = \frac{dx}{dt} = 4t + \frac{3}{2}t^2$$

分离变量, $dx = \left(4t + \frac{3}{2}t^2\right) dt$

积分得

$$x = 2t^2 + \frac{1}{2}t^3 + c_2$$

由题知 $t=0, x_0=5, \therefore c_2=5$

故

$$x = 2t^2 + \frac{1}{2}t^3 + 5$$

所以 $t=10$ s 时

$$v_{10} = 4 \times 10 + \frac{3}{2} \times 10^2 = 190 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$x_{10} = 2 \times 10^2 + \frac{1}{2} \times 10^3 + 5 = 705 \text{ m}$$

1.11 一质点沿半径为 1 m 的圆周运动, 运动方程为 $\theta = 2 + 3t^3$, 式中 θ 以弧度计, t 以秒计, 求: (1) $t=2$ s 时, 质点的切向和法向加速度; (2) 当加速度的方向和半径成 45° 角时, 其角位移是多少?

解:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 9t^2, \beta = \frac{d\omega}{dt} = 18t$$

(1) $t=2$ s 时, $a_\tau = R\beta = 1 \times 18 \times 2 = 36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

$$a_n = R\omega^2 = 1 \times (9 \times 2^2)^2 = 1296 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

(2) 当加速度方向与半径成 45° 角时, 有

$$\tan 45^\circ = \frac{a_\tau}{a_n} = 1$$

即

$$R\omega^2 = R\beta$$

亦即

$$(9t^2)^2 = 18t$$

则解得

$$t^3 = \frac{2}{9}$$

于是角位移为

$$\theta = 2 + 3t^3 = 2 + 3 \times \frac{2}{9} = 2.67 \text{ rad}$$

1.12 质点沿半径为 R 的圆周按 $s = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2$ 的规律运动, 式中 s 为质点离圆周上某点的

弧长, v_0, b 都是常量, 求: (1) t 时刻质点的加速度; (2) t 为何值时, 加速度在数值上等于 b .

解: (1)

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 - bt$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -b$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

则

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{b^2 + \frac{(v_0 - bt)^4}{R^2}}$$

加速度与半径的夹角为

$$\varphi = \arctan \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{-Rb}{(v_0 - bt)^2}$$

(2) 由题意应有

$$a = b = \sqrt{b^2 + \frac{(v_0 - bt)^4}{R^2}}$$

则

$$b^2 = b^2 + \frac{(v_0 - bt)^4}{R^2}, \Rightarrow (v_0 - bt)^4 = 0$$

$\therefore$ 当 $t = \frac{v_0}{b}$ 时, $a = b$

1.13 一质点在半径为 0.4 m 的圆形轨道上自静止开始作匀角加速度转动, 其角加速度为 $\alpha = 0.2 \text{ rad/s}^2$, 求 $t = 2 \text{ s}$ 时边缘上各点的速度、法向加速度、切向加速度和合加速度。

解: 当 $t = 2 \text{ s}$ 时, $\omega = \alpha t = 0.2 \times 2 = 0.4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

则 $v = R\omega = 0.4 \times 0.4 = 0.16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

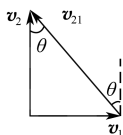
$$a_n = R\omega^2 = 0.4 \times (0.4)^2 = 0.064 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_\tau = R\alpha = 0.4 \times 0.2 = 0.08 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

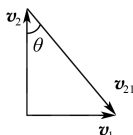
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(0.064)^2 + (0.08)^2} = 0.102 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

1.14 一船以速率 $v_1 = 30 \text{ km/h}$ 沿直线向东行驶, 另一小艇在其前方以速率 $v_2 = 40 \text{ km/h}$ 沿直线向北行驶, 问在船上看来小艇的速度为多少? 在艇上看船的速度又为多少?

解: (1) 大船看小艇, 则有 $\mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, 依题意作速度矢量图如题 1.14 图(a)



(a)



(b)

题 1.14 图

由图可知

$$v_{21} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

方向北偏西

$$\theta = \arctan \frac{v_1}{v_2} = \arctan \frac{3}{4} = 36.87^\circ$$

(2) 小艇看大船, 则有 $\boldsymbol{v}_{12} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$, 依题意作出速度矢量图如题 1.14 图(b), 同上法, 得

$$v_{12} = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

方向南偏东 36.87° .

习 题 2

2.1 选择题

(1)一质点作匀速率圆周运动时,

(A)它的动量不变,对圆心的角动量也不变。

(B)它的动量不变,对圆心的角动量不断改变。

(C)它的动量不断改变,对圆心的角动量不变。

(D)它的动量不断改变,对圆心的角动量也不断改变。

[答案:C]

(2)质点系的内力可以改变

(A)系统的总质量。

(B)系统的总动量。

(C)系统的总动能。

(D)系统的总角动量。

[答案:C]

(3)对功的概念有以下几种说法:

①保守力作正功时,系统内相应的势能增加。

②质点运动经一闭合路径,保守力对质点作的功为零。

③作用力与反作用力大小相等、方向相反,所以两者所作功的代数和必为零。

在上述说法中:

(A)①、②是正确的。

(B)②、③是正确的。

(C)只有②是正确的。

(D)只有③是正确的。

[答案:C]

2.2 填空题

(1)某质点在力 $\mathbf{F} = (4 + 5x)\mathbf{i}$ (SI) 的作用下沿 x 轴作直线运动。在从 $x = 0$ 移动到 $x = 10$ m 的过程中,力 $\mathbf{F}$ 所做功为_____。

[答案:290 J]

(2)质量为 m 的物体在水平面上作直线运动,当速度为 v 时仅在摩擦力作用下开始作匀减速运动,经过距离 s 后速度减为零。则物体加速度的大小为_____,物体与水平面间的摩擦系数为_____。

[答案: $\frac{v^2}{2s}; \frac{v^2}{2gs}$]

(3)在光滑的水平面内有两个物体 A 和 B,已知 $m_A = 2m_B$ 。(a)物体 A 以一定的动能 E_k 与静止的物体 B 发生完全弹性碰撞,则碰撞后两物体的总动能为_____;(b)物体 A 以一定的动能 E_k 与静止的物体 B 发生完全非弹性碰撞,则碰撞后两物体的总动能为_____。

[答案: E_k ; $\frac{2}{3}E_k$]

2.3 在下列情况下,说明质点所受合力的特点:

(1)质点作匀速直线运动; (2)质点作匀减速直线运动;

(3)质点作匀速圆周运动; (4)质点作匀加速圆周运动。

解:(1)所受合力为零;

(2)所受合力为大小、方向均保持不变的力,其方向与运动方向相反;

(3)所受合力为大小保持不变、方向不断改变总是指向圆心的力;

(4)所受合力为大小和方向均不断变化的力,其切向力的方向与运动方向相同,大小恒定;法向力方向指向圆心。

2.4 举例说明以下两种说法是不正确的:

(1)物体受到的摩擦力的方向总是与物体的运动方向相反;

(2)摩擦力总是阻碍物体运动的。

解:(1)人走路时,所受地面的摩擦力与人的运动方向相同;

(2)车作加速运动时,放在车上的物体受到车子对它的摩擦力,该摩擦力是引起物体相对地面运动的原因。

2.5 质点系动量守恒的条件是什么?在什么情况下,即使外力不为零,也可用动量守恒定律近似求解?

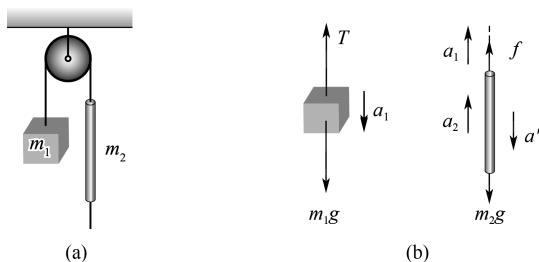
解:质点系动量守恒的条件是质点系所受合外力为零。当系统只受有限大小的外力作用,且作用时间很短时,有限大小外力的冲量可忽略,故也可用动量守恒定律近似求解。

2.6 在经典力学中,下列哪些物理量与参考系的选取有关:质量、动量、冲量、动能、势能、功?

解:在经典力学中,动量、动能、势能、功与参考系的选取有关。

2.7 一细绳跨过一定滑轮,绳的一边悬有一质量为 m_1 的物体,另一边穿在质量为 m_2 的圆柱体的竖直细孔中,圆柱可沿绳子滑动。今看到绳子从圆柱细孔中加速上升,柱体相对于绳子以匀加速度 a' 下滑,求 m_1, m_2 相对于地面的加速度、绳的张力及柱体与绳子间的摩擦力(绳轻且不可伸长,滑轮的质量及轮与轴间的摩擦不计)。

解:因绳不可伸长,故滑轮两边绳子的加速度均为 a_1 ,其对于 m_2 则为牵连加速度,又知 m_2 对绳子的相对加速度为 a' ,故 m_2 对地加速度,



题 2.7 图

由图(b)可知,为

$$a_2 = a_1 - a' \quad (1)$$

又因绳的质量不计,所以圆柱体受到的摩擦力 f 在数值上等于绳的张力 T ,由牛顿定律,有

$$m_1 g - T = m_1 a_1 \quad (2)$$

$$T - m_2 g = m_2 a_2 \quad (3)$$

联立①、②、③式,得

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_2)g + m_2 a'}{m_1 + m_2}$$

$$a_2 = \frac{(m_1 - m_2)g - m_1 a'}{m_1 + m_2}$$

$$f = T = \frac{m_1 m_2 (2g - a')}{m_1 + m_2}$$

讨论 (1) 若 $a' = 0$, 则 $a_1 = a_2$ 表示柱体与绳之间无相对滑动.

(2) 若 $a' = 2g$, 则 $T = f = 0$, 表示柱体与绳之间无任何作用力, 此时 m_1, m_2 均作自由落体运动.

2.8 一个质量为 P 的质点, 在光滑的固定斜面(倾角为 α)上以初速度 v_0 运动, v_0 的方向与斜面底边的水平线 AB 平行, 如图所示, 求这质点的运动轨道.

解: 物体置于斜面上受到重力 mg , 斜面支持力 N . 建立坐标: 取 v_0 方向为 X 轴, 平行斜面与 X 轴垂直方向为 Y 轴. 如题 2.8 图.



题 2.8 图

$$X \text{ 方向: } F_x = 0 \quad x = v_0 t \quad (1)$$

$$Y \text{ 方向: } F_y = mg \sin \alpha = m a_y \quad (2)$$

$$t = 0 \text{ 时 } y = 0 \quad v_y = 0$$

$$y = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2$$

由①、②式消去 t , 得

$$y = \frac{1}{2v_0^2} g \sin \alpha \cdot x^2$$

2.9 质量为 16 kg 的质点在 xOy 平面内运动, 受一恒力作用, 力的分量为 $f_x = 6 \text{ N}$, $f_y = -7 \text{ N}$, 当 $t = 0$ 时, $x = y = 0$, $v_x = -2 \text{ m/s}$, $v_y = 0$. 求当 $t = 2 \text{ s}$ 时质点的 (1) 位矢; (2) 速度.

解:

$$a_x = \frac{f_x}{m} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_y = \frac{f_y}{m} = \frac{-7}{16} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

(1)

$$v_x' = v_x + \int_0^2 a_x dt = -2 + \frac{3}{8} \times 2 = -\frac{5}{4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_y' = v_y + \int_0^2 a_y dt = \frac{-7}{16} \times 2 = -\frac{7}{8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

于是质点在 2 s 时的速度

$$\boldsymbol{v} = -\frac{5}{4}\boldsymbol{i} - \frac{7}{8}\boldsymbol{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \left(v_x t + \frac{1}{2} a_x t^2 \right) \boldsymbol{i} + \frac{1}{2} a_y t^2 \boldsymbol{j} \\ &= \left(-2 \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} \times 4 \right) \boldsymbol{i} + \frac{1}{2} \left(\frac{-7}{16} \right) \times 4 \boldsymbol{j} \\ &= -\frac{13}{4} \boldsymbol{i} - \frac{7}{8} \boldsymbol{j} \text{ m} \end{aligned}$$

2.10 质点在流体中作直线运动, 受与速度成正比的阻力 kv (k 为常数) 作用, $t = 0$ 时质点的速度为 v_0 , 证明 (1) t 时刻的速度为 $v = v_0 e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t}$; (2) 由 0 到 t 的时间内经过的距离为 $x = \left(\frac{mv_0}{k}\right) \left[1 - e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t}\right]$; (3) 停止运动前经过的距离为 $v_0 \left(\frac{m}{k}\right)$; (4) 当 $t = m/k$ 时速度减至 v_0 的 $\frac{1}{e}$, 式中 m 为质点的质量.

答: (1) ∵

$$a = \frac{-kv}{m} = \frac{dv}{dt}$$

分离变量, 得

$$\frac{dv}{v} = \frac{-k dt}{m}$$

即

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \int_0^t \frac{-k dt}{m}$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = \ln e^{-\frac{kt}{m}}$$

∴

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$(2) x = \int v dt = \int_0^t v_0 e^{-\frac{k}{m}t} dt = \frac{mv_0}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

(3) 质点停止运动时速度为零, 即 $t \rightarrow \infty$,

故有
$$x' = \int_0^{\infty} v_0 e^{-\frac{k}{m}t} dt = \frac{mv_0}{k}$$

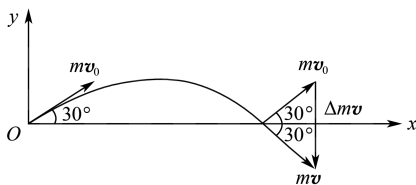
(4) 当 $t = \frac{m}{k}$ 时, 其速度为

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m} \cdot \frac{m}{k}} = v_0 e^{-1} = \frac{v_0}{e}$$

即速度减至 v_0 的 $\frac{1}{e}$.

2.11 一质量为 m 的质点以与地的仰角 $\theta = 30^\circ$ 的初速 v_0 从地面抛出, 若忽略空气阻力, 求质点落地时相对抛射时的动量的增量.

解: 依题意作出示意图如题 2.11 图



题 2.11 图

在忽略空气阻力情况下, 抛体落地瞬时的末速度大小与初速度大小相同, 与轨道相切斜向下,

而抛物线具有对 y 轴对称性, 故末速度与 x 轴夹角亦为 30° , 则动量的增量为

$$\Delta \mathbf{p} = m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0$$

由矢量图知, 动量增量大小为 $|m\mathbf{v}_0|$, 方向竖直向下.

2.12 一质量为 m 的小球从某一高度处水平抛出, 落在水平桌面上发生弹性碰撞. 并在抛出 1 s 后, 跳回到原高度, 速度仍是水平方向, 速度大小也与抛出时相等. 求小球与桌面碰撞过程中, 桌面给予小球的冲量的大小和方向. 并回答在碰撞过程中, 小球的动量是否守恒?

解: 由题知, 小球落地时间为 0.5 s. 因小球为平抛运动, 故小球落地的瞬时向下的速度大小为 $v_1 = gt = 0.5g$, 小球上跳速度的大小亦为 $v_2 = 0.5g$. 设向上为 y 轴正向, 则动量的增量

$$\Delta \mathbf{p} = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 \text{ 方向竖直向上,}$$

大小

$$|\Delta \mathbf{p}| = mv_2 - (-mv_1) = mg$$

碰撞过程中动量不守恒. 这是因为在碰撞过程中, 小球受到地面给予的冲力作用. 另外, 碰撞前初动量方向斜向下, 碰后末动量方向斜向上, 这也说明动量不守恒.

2.13 作用在质量为 10 kg 的物体上的力为 $F = (10 + 2t)\mathbf{i}$ N, 式中 t 的单位是 s, (1) 求 4 s 后, 这物体的动量和速度的变化, 以及力给予物体的冲量. (2) 为了使这力的冲量为 200 N·s, 该力应在这物体上作用多久, 试就一原来静止的物体和一个具有初速度 $-6\mathbf{j}$ m/s 的物体, 回答这两个问题.

解:(1)若物体原来静止,则

$$\Delta p_1 = \int_0^t F dt = \int_0^4 (10 + 2t) i dt = 56 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} i, \text{沿 } x \text{ 轴正向,}$$

$$\Delta v_1 = \frac{\Delta p_1}{m} = 5.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} i$$

$$i_1 = \Delta p_1 = 56 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} i$$

若物体原来具有 $-6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 初速,则

$$p_0 = -mv_0, p = m\left(-v_0 + \int_0^t \frac{m}{m} dt\right) = -mv_0 + \int_0^t F dt \text{ 于是}$$

$$\Delta p_2 = p - p_0 = \int_0^t F dt = \Delta p_1,$$

同理, $\Delta v_2 = \Delta v_1, i_2 = i_1$

这说明,只要力函数不变,作用时间相同,则不管物体有无初动量,也不管初动量有多大,那么物体获得的动量的增量(亦即冲量)就一定相同,这就是动量定理.

(2)同上理,两种情况中的作用时间相同,即

$$I = \int_0^t (10 + 2t) dt = 10t + t^2$$

亦即

$$t^2 + 10t - 200 = 0$$

解得 $t = 10 \text{ s}, (t' = 20 \text{ s 舍去})$

2.14 一质量为 m 的质点在 xOy 平面上运动,其位置矢量为

$$r = a \cos \omega t i + b \sin \omega t j$$

求质点的动量及 $t=0$ 到 $t=\frac{\pi}{2\omega}$ 时间内质点所受的合力的冲量和质点动量的改变量.

解:质点的动量为

$$p = mv = m\omega(-a \sin \omega t i + b \cos \omega t j)$$

将 $t=0$ 和 $t=\frac{\pi}{2\omega}$ 分别代入上式,得

$$p_1 = m\omega b j, p_2 = -m\omega a i,$$

则动量的增量亦即质点所受外力的冲量为

$$i = \Delta p = p_2 - p_1 = -m\omega(a i + b j)$$

2.15 一颗子弹由枪口射出时速率为 v_0 (SI),当子弹在枪筒内被加速时,它所受的合力为 $F = (a - bt) \text{ N}$ (a, b 为常数),其中 t 以秒为单位:(1)假设子弹运行到枪口处合力刚好为零,试计算子弹走完枪筒全长所需时间;(2)求子弹所受的冲量.(3)求子弹的质量.

解:(1)由题意,子弹到枪口时,有

$$F = (a - bt) = 0, \text{得 } t = \frac{a}{b}$$

(2)子弹所受的冲量

$$I = \int_0^t (a - bt) dt = at - \frac{1}{2}bt^2$$

将 $t = \frac{a}{b}$ 代入,得

$$I = \frac{a^2}{2b}$$

(3) 由动量定理可求得子弹的质量

$$m = \frac{I}{v_0} = \frac{a^2}{2bv_0}$$

2.16 一炮弹质量为 m , 以速率 v 飞行, 其内部炸药使此炮弹分裂为两块, 爆炸后由于炸药使弹片增加的动能为 T , 且一块的质量为另一块质量的 k 倍, 如两者仍沿原方向飞行, 试证其速率分别为

$$v + \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad v - \sqrt{\frac{2T}{km}}$$

证明: 设一块为 m_1 , 则另一块为 m_2 ,

$$m_1 = km_2 \text{ 及 } m_1 + m_2 = m$$

于是得

$$m_1 = \frac{km}{k+1}, m_2 = \frac{m}{k+1} \quad (1)$$

又设 m_1 的速度为 v_1 , m_2 的速度为 v_2 , 则有

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}mv^2 \quad (2)$$

$$mv = m_1v_1 + m_2v_2 \quad (3)$$

联立①、③解得

$$v_2 = (k+1)v - kv_1 \quad (4)$$

将④代入②, 并整理得

$$\frac{2T}{km} = (v_1 - v)^2$$

于是有

$$v_1 = v \pm \sqrt{\frac{2T}{km}}$$

将其代入④式, 有

$$v_2 = v \pm \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

又, 题述爆炸后, 两弹片仍沿原方向飞行, 故只能取

$$v_1 = v - \sqrt{\frac{2T}{km}}, \quad v_2 = v + \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

证毕.

2.17 设 $\mathbf{F}_{\text{合}} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ N. (1) 当一质点从原点运动到 $\mathbf{r} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$ m 时, 求 $\mathbf{F}$ 所作的功. (2) 如果质点到 r 处时需 0.6 s, 试求平均功率. (3) 如果质点的质量为 1 kg, 试求动能的变化.

解: (1) 由题知, $\mathbf{F}_{\text{合}}$ 为恒力,

$$\begin{aligned} \therefore A_{\text{合}} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = (7\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) \cdot (-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 16\mathbf{k}) \\ &= -21 - 24 = -45 \text{ J} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \bar{P} = \frac{A}{\Delta t} = \frac{45}{0.6} = 75 \text{ W}$$

(3) 由动能定理, $\Delta E_k = A = -45 \text{ J}$

2.18 以铁锤将一铁钉击入木板, 设木板对铁钉的阻力与铁钉进入木板内的深度成正比, 在铁锤击第一次时, 能将小钉击入木板内 1 cm, 问击第二次时能击入多深, 假定铁锤两次打击铁钉时的速度相同.

解: 以木板上界面为坐标原点, 向内为 y 坐标正向, 如题 2.18 图, 则铁钉所受阻力为

$$f = -ky$$

第一锤外力的功为 A_1

$$A_1 = \int_s f' dy = \int_s -f dy = \int_0^1 ky dy = \frac{k}{2} \quad (1)$$

式中 f' 是铁锤作用于钉上的力, f 是木板作用于钉上的力, 在 $dt \rightarrow 0$ 时, $f' = -f$.

设第二锤外力的功为 A_2 , 则同理, 有

$$A_2 = \int_1^{y_2} ky dy = \frac{1}{2} ky_2^2 - \frac{k}{2} \quad (2)$$

由题意, 有

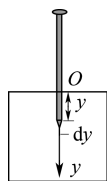
$$A_2 = A_1 = \Delta \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = \frac{k}{2} \quad (3)$$

$$\text{即} \quad \frac{1}{2} ky_2^2 - \frac{k}{2} = \frac{k}{2}$$

$$\text{所以,} \quad y_2 = \sqrt{2}$$

于是钉子第二次能进入的深度为

$$\Delta y = y_2 - y_1 = \sqrt{2} - 1 = 0.414 \text{ cm}$$



题 2.18 图

2.19 设已知一质点(质量为 m)在其保守力场中位矢为 $\mathbf{r}$ 点的势能为 $E_p(r) = -k/r^n$, 试求质点所受保守力的大小和方向.

$$\text{解:} \quad F(r) = -\frac{dE_p(r)}{dr} = -\frac{nk}{r^{n+1}}$$

方向与位矢 $\mathbf{r}$ 的方向相反, 方向指向力心.

2.20 一根劲度系数为 k_1 的轻弹簧 A 的下端, 挂一根劲度系数为 k_2 的轻弹簧 B, B 的下端又挂一重物 C, C 的质量为 M , 如题 2.20 图. 求这一系统静止时两弹簧的伸长量之比和弹性势能之比.

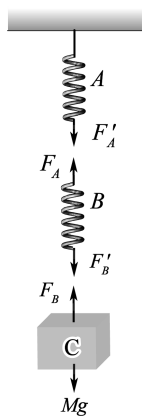
解: 弹簧 A、B 及重物 C 受力如题 2.20 图所示平衡时, 有

$$F_A = F_B = Mg$$

$$\text{又} \quad F_A = k_1 \Delta x_1$$

$$F_B = k_2 \Delta x_2$$

所以静止时两弹簧伸长量之比为



题 2.20 图

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{k_2}{k_1}$$

弹性势能之比为

$$\frac{E_{p_1}}{E_{p_2}} = \frac{\frac{1}{2}k_1\Delta x_1^2}{\frac{1}{2}k_2\Delta x_2^2} = \frac{k_2}{k_1}$$

2.21 (1) 试计算月球和地球对 m 物体的引力相抵消的一点 P , 距月球表面的距离是多少? 地球质量 $5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$, 地球中心到月球中心的距离 $3.84 \times 10^8 \text{ m}$, 月球质量 $7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$, 月球半径 $1.74 \times 10^6 \text{ m}$. (2) 如果一个 1 kg 的物体在距月球和地球均为无限远处的势能为零, 那么它在 P 点的势能为多少?

解: (1) 设在距月球中心为 r 处 $F_{\text{月引}} = F_{\text{地引}}$, 由万有引力定律, 有

$$G \frac{mM_{\text{月}}}{r^2} = G \frac{mM_{\text{地}}}{(R-r)^2}$$

经整理, 得

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sqrt{M_{\text{月}}}}{\sqrt{M_{\text{地}}} + \sqrt{M_{\text{月}}}} R \\ &= \frac{\sqrt{7.35 \times 10^{22}}}{\sqrt{5.98 \times 10^{24}} + \sqrt{7.35 \times 10^{22}}} \times 3.48 \times 10^8 \\ &= 38.32 \times 10^6 \text{ m} \end{aligned}$$

则 P 点处至月球表面的距离为

$$h = r - r_{\text{月}} = (38.32 - 1.74) \times 10^6 = 3.66 \times 10^7 \text{ m}$$

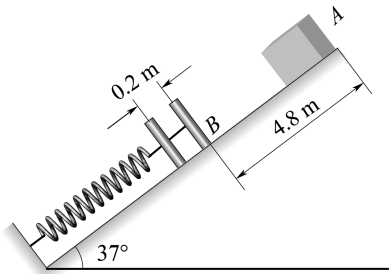
(2) 质量为 1 kg 的物体在 P 点的引力势能为

$$\begin{aligned} E_P &= -G \frac{M_{\text{月}}}{r} - G \frac{M_{\text{地}}}{(R-r)} \\ &= -6.67 \times 10^{11} \times \frac{7.35 \times 10^{22}}{3.83 \times 10^7} - 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{5.98 \times 10^{24}}{(38.4 - 3.83) \times 10^7} \\ &= 1.28 \times 10^6 \text{ J} \end{aligned}$$

2.22 如题 2.22 图所示, 一物体质量为 2 kg , 以初速度 $v_0 = 3 \text{ m/s}$ 从斜面 A 点处下滑, 它与斜面的摩擦力为 8 N , 到达 B 点后压缩弹簧 20 cm 后停止, 然后又被弹回, 求弹簧的劲度系数和物体最后能回到的高度.

解: 取木块压缩弹簧至最短处的位置为重力势能零点, 弹簧原长处为弹性势能零点。则由功能原理, 有

$$\begin{aligned} -f_r s &= \frac{1}{2} k x^2 - \left(\frac{1}{2} m v_0^2 + m g s \sin 37^\circ \right) \\ k &= \frac{\frac{1}{2} m v_0^2 + m g s \sin 37^\circ - f_r s}{\frac{1}{2} x^2} \end{aligned}$$



题 2.22 图

式中 $s=4.8+0.2=5\text{ m}$, $x=0.2\text{ m}$, 再代入有关数据, 解得

$$k=1450\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$$

再次运用功能原理, 求木块弹回的高度 h'

$$-f_r s' = mgs' \sin 37^\circ - \frac{1}{2} kx^2$$

代入有关数据, 得 $s'=1.45\text{ m}$,

则木块弹回高度

$$h'=s' \sin 37^\circ=0.87\text{ m}$$

2.23 质量为 M 的大木块具有半径为 R 的四分之一弧形槽, 如题 2.23 图所示. 质量为 m 的小立方体从曲面的顶端滑下, 大木块放在光滑水平面上, 二者都作无摩擦的运动, 而且都从静止开始, 求小木块脱离大木块时的速度.

解: m 从 M 上下滑的过程中, 机械能守恒, 以 m, M , 地球为系统, 以最低点为重力势能零点, 则有

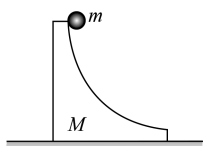
$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

又下滑过程, 动量守恒, 以 m, M 为系统, 则在 m 脱离 M 瞬间, 水平方向有

$$mv - MV = 0$$

联立以上两式, 得

$$v = \sqrt{\frac{2MgR}{m+M}}$$



题 2.23 图

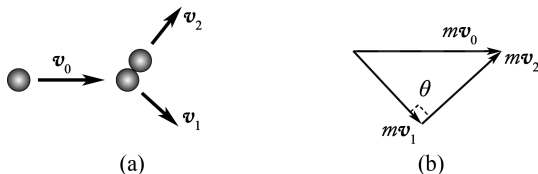
2.24 一个小球与一质量相等的静止小球发生非对心弹性碰撞, 试证碰后两小球的运动方向互相垂直.

证: 两小球碰撞过程中, 机械能守恒, 有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

即

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad (1)$$



题 2.24 图

又碰撞过程中, 动量守恒, 即有

$$mv_0 = mv_1 + mv_2$$

亦即

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad (2)$$

由②可作出矢量三角形如图(b), 又由①式可知三矢量之间满足勾股定理, 且以 $\mathbf{v}_0$ 为斜边, 故知 $\mathbf{v}_1$ 与 $\mathbf{v}_2$ 是互相垂直的.

习 题 3

3.1 选择题

(1) 有一半径为 R 的水平圆转台, 可绕通过其中心的竖直固定光滑轴转动, 转动惯量为 J , 开始时转台以匀角速度 ω_0 转动, 此时有一质量为 m 的人站在转台中心, 随后人沿半径向外跑去, 当人到达转台边缘时, 转台的角速度为

(A) $\frac{J}{J+mR^2}\omega_0$

(B) $\frac{J}{(J+m)R^2}\omega_0$

(C) $\frac{J}{mR^2}\omega_0$

(D) ω_0

[答案: (A)]

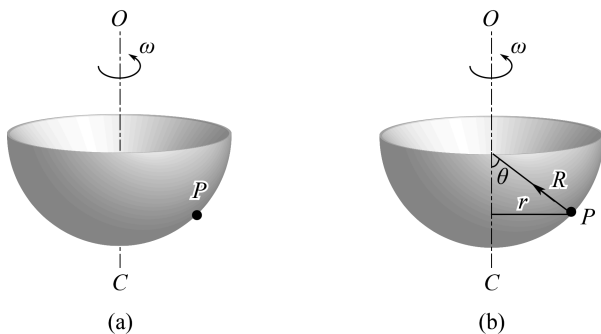
(2) 如题 3.1(2)图所示, 一光滑的内表面半径为 10cm 的半球形碗, 以匀角速度 ω 绕其对称轴 OC 旋转, 已知放在碗内表面上的一个小球 P 相对于碗静止, 其位置高于碗底 4cm , 则由此可推知碗旋转的角速度约为

(A) 13 rad/s

(B) 17 rad/s

(C) 10 rad/s

(D) 18 rad/s



题 3.1(2)图

[答案: (A)]

(3) 如 3.1(3)图所示, 有一小块物体, 置于光滑的水平桌面上, 有一绳其一端连结此物体, 另一端穿过桌面的小孔, 该物体原以角速度 ω 在距孔为 R 的圆周上转动, 今将绳从小孔缓慢往下拉, 则物体

(A) 动能不变, 动量改变。

(B) 动量不变, 动能改变。

(C) 角动量不变, 动量不变。

(D) 角动量改变, 动量改变。

(E)角动量不变,动能、动量都改变。

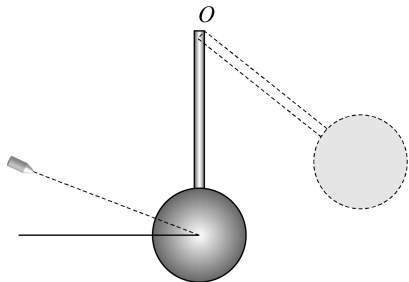
[答案:(E)]

3.2 填空题

(1)半径为 30 cm 的飞轮,从静止开始以 $0.5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$ 的匀角加速转动,则飞轮边缘上一点在飞轮转过 240° 时的切向加速度 $a_t = \underline{\hspace{2cm}}$,法向加速度 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

[答案:0.15; 1.256]

(2)如题 3.2(2)图所示,一匀质木球固结在一细棒下端,且可绕水平光滑固定轴 O 转动,今有一子弹沿着与水平面成一角度的方向击中木球而嵌于其中,则在此击中过程中,木球、子弹、细棒系统的 守恒,原因是 。木球被击中后棒和球升高的过程中,对木球、子弹、细棒、地球系统的 守恒。



题 3.2(2)图

[答案:对 O 轴的角动量守恒,因为在子弹击中木球过程中系统所受外力对 O 轴的合外力矩为零,机械能守恒]

(3)两个质量分布均匀的圆盘 A 和 B 的密度分别为 ρ_A 和 ρ_B ($\rho_A > \rho_B$),且两圆盘的总质量和厚度均相同。设两圆盘对通过盘心且垂直于盘面的轴的转动惯量分别为 J_A 和 J_B ,则有 J_A J_B 。(填 $>$ 、 $<$ 或 $=$)

[答案: $<$]

3.3 刚体平动的特点是什么? 平动时刚体上的质元是否可以作曲线运动?

解:刚体平动的特点是:在运动过程中,内部任意两质元间的连线在各个时刻的位置都和初始时刻的位置保持平行。平动时刚体上的质元可以作曲线运动。

3.4 刚体定轴转动的特点是什么? 刚体定轴转动时各质元的角速度、线速度、向心加速度、切向加速度是否相同?

解:刚体定轴转动的特点是:轴上所有各点都保持不动,轴外所有各点都在作圆周运动,且在同一时间间隔内转过的角度都一样;刚体上各质元的角量相同,而各质元的线量大小与质元到转轴的距离成正比。因此各质元的角速度相同,而线速度、向心加速度、切向加速度不一定相同。

3.5 刚体的转动惯量与哪些因素有关? 请举例说明。

解:刚体的转动惯量与刚体的质量、质量的分布、转轴的位置等有关。如对过圆心且与盘面垂直的轴的转动惯量而言,形状大小完全相同的木质圆盘和铁质圆盘中铁质的要大一些,质量相同的木质圆盘和木质圆环则是木质圆环的转动惯量大。

3.6 刚体所受的合外力为零,其合力矩是否一定为零? 相反,刚体受到的合力矩为零,其

合外力是否一定为零?

解:刚体所受的合外力为零,其合力矩不一定为零;刚体受到的合力矩为零,其合外力不一定为零。

3.7 一质量为 m 的质点位于 (x_1, y_1) 处,速度为 $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$, 质点受到一个沿 x 负方向的力 f 的作用,求相对于坐标原点的角动量以及作用于质点上的力的力矩。

解:由题知,质点的位矢为

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j}$$

作用在质点上的力为

$$\mathbf{f} = -f \mathbf{i}$$

所以,质点对原点的角动量为

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 &= \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \\ &= (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j}) \times m(v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}) \\ &= (x_1 m v_y - y_1 m v_x) \mathbf{k} \end{aligned}$$

作用在质点上的力的力矩为

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j}) \times (-f \mathbf{i}) = y_1 f \mathbf{k}$$

3.8 哈雷彗星绕太阳运动的轨道是一个椭圆,它离太阳最近距离为 $r_1 = 8.75 \times 10^{10}$ m 时的速率是 $v_1 = 5.46 \times 10^4$ m/s,它离太阳最远时的速率是 $v_2 = 9.08 \times 10^2$ m/s,这时它离太阳的距离 r_2 是多少?(太阳位于椭圆的一个焦点。)

解:哈雷彗星绕太阳运动时受到太阳的引力——即有心力的作用,所以角动量守恒;又由于哈雷彗星在近日点及远日点时的速度都与轨道半径垂直,故有

$$r_1 m v_1 = r_2 m v_2$$

$$\therefore r_2 = \frac{r_1 v_1}{v_2} = \frac{8.75 \times 10^{10} \times 5.46 \times 10^4}{9.08 \times 10^2} = 5.26 \times 10^{12} \text{ m}$$

3.9 物体质量为 3 kg, $t=0$ 时位于 $\mathbf{r} = 4\mathbf{i}$ m, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ (m/s), 如一恒力 $\mathbf{f} = 5\mathbf{j}$ N 作用在物体上,求 3 秒后, (1) 物体动量的变化; (2) 相对 z 轴角动量的变化。

$$\text{解: (1) } \Delta \mathbf{p} = \int \mathbf{f} dt = \int_0^3 5\mathbf{j} dt = 15\mathbf{j} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 解(一)

$$x = x_0 + v_{0x} t = 4 + 3 = 7$$

$$y = v_{0y} t + \frac{1}{2} a t^2 = 6 \times 3 + \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times 3^2 = 25.5 \text{ j}$$

即

$$\mathbf{r}_1 = 4\mathbf{i}, \mathbf{r}_2 = 7\mathbf{i} + 25.5\mathbf{j}$$

$$v_x = v_{0x} = 1$$

$$v_y = v_{0y} + at = 6 + \frac{5}{3} \times 3 = 11$$

即

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 6\mathbf{j}, \mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + 11\mathbf{j}$$

$\therefore$

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1 = 4\mathbf{i} \times 3(\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) = 72\mathbf{k}$$

$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2 = (7\mathbf{i} + 25.5\mathbf{j}) \times 3(\mathbf{i} + 11\mathbf{j}) = 154.5\mathbf{k}$$

$\therefore$

$$\Delta \mathbf{L} = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 = 82.5\mathbf{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

解(二) $\because M = \frac{dz}{dt}$

$$\begin{aligned}\therefore \Delta L &= \int_0^t \mathbf{M} \cdot d\mathbf{t} = \int_0^t (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) d\mathbf{t} \\ &= \int_0^3 \left[(4+t)\mathbf{i} + \left(6t + \frac{1}{2}\right) \times \frac{5}{3}t^2 \mathbf{j} \right] \times 5\mathbf{j} d\mathbf{t} \\ &= \int_0^3 5(4+t)\mathbf{k} d\mathbf{t} = 82.5\mathbf{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}\end{aligned}$$

3.10 平板中央开一小孔, 质量为 m 的小球用细线系住, 细线穿过小孔后挂一质量为 M_1 的重物. 小球作匀速圆周运动, 当半径为 r_0 时重物达到平衡. 今在 M_1 的下方再挂一质量为 M_2 的物体, 如题 3.10 图. 试问这时小球作匀速圆周运动的角速度 ω' 和半径 r' 为多少?

解: 在只挂重物时 M_1 , 小球作圆周运动的向心力为 $M_1 g$, 即

$$M_1 g = m r_0 \omega_0^2 \quad (1)$$

挂上 M_2 后, 则有

$$(M_1 + M_2) g = m r' \omega'^2 \quad (2)$$

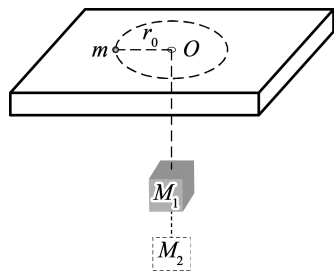
重力对圆心的力矩为零, 故小球对圆心的角动量守恒.

即

$$\begin{aligned}r_0 m v_0 &= r' m v' \\ \Rightarrow r_0^2 \omega_0 &= r'^2 \omega' \quad (3)\end{aligned}$$

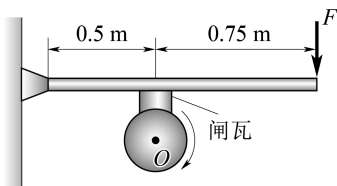
联立①、②、③得

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt{\frac{M_1 g}{m r_0}} \\ \omega' &= \sqrt{\frac{M_1 g}{m r_0}} \left(\frac{M_1 + M_2}{M_1} \right)^{\frac{2}{3}} \\ r' &= \frac{M_1 + M_2}{m \omega'^2} g = \left(\frac{M_1}{M_1 + M_2} \right) \frac{1}{3} \cdot r_0\end{aligned}$$

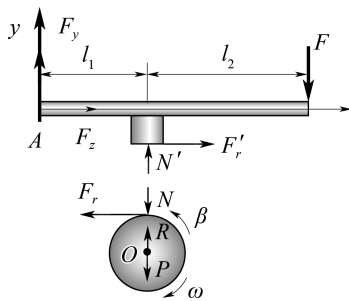


题 3.10 图

3.11 飞轮的质量 $m = 60 \text{ kg}$, 半径 $R = 0.25 \text{ m}$, 绕其水平中心轴 O 转动, 转速为 900 r/min . 现利用一制动的闸杆, 在闸杆的一端加一竖直方向的制动力 F , 可使飞轮减速. 已知闸杆的尺寸如题 3.11 图所示, 闸瓦与飞轮之间的摩擦系数 $\mu^* = 0.4$, 飞轮的转动惯量可按匀质圆盘计算. 试求:



(a)



(b)

题 3.11 图

(1) 设 $F=100\text{ N}$, 问可使飞轮在多长时间停止转动? 在这段时间里飞轮转了几转?

(2) 如果在 2 s 内飞轮转速减少一半, 需加多大的力 F ?

解: (1) 先作闸杆和飞轮的受力分析图 (如图(b)). 图中 N 、 N' 是正压力, F_r 、 F'_r 是摩擦力, F_x 和 F_y 是杆在 A 点转轴处所受支承力, R 是轮的重力, P 是轮在 O 轴处所受支承力.

杆处于静止状态, 所以对 A 点的合力矩应为零, 设闸瓦厚度不计, 则有

$$F(l_1+l_2)-N'l_1=0 \quad N'=\frac{l_1+l_2}{l_1}F$$

对飞轮, 按转动定律有 $\beta=-F_rR/I$, 式中负号表示 β 与角速度 ω 方向相反.

$$\because F_r=\mu N \quad N=N'$$

$$\therefore F_r=\mu N'=\mu \frac{l_1+l_2}{l_1}F$$

$$\text{又} \because I=\frac{1}{2}mR^2,$$

$$\therefore \beta=-\frac{F_rR}{I}=-\frac{2\mu(l_1+l_2)}{mRl_1}F \quad \text{①}$$

以 $F=100\text{ N}$ 等代入上式, 得

$$\beta=\frac{-2\times 0.40\times(0.50+0.75)}{60\times 0.25\times 0.50}\times 100=-\frac{40}{3}\text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

由此可算出自施加制动闸开始到飞轮停止转动的时间为

$$t=-\frac{\omega_0}{\beta}=\frac{900\times 2\pi\times 3}{60\times 40}=7.06\text{ s}$$

这段时间内飞轮的角位移为

$$\begin{aligned}\varphi &= \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 = \frac{900\times 2\pi}{60}\times \frac{9}{4}\pi - \frac{1}{2}\times \frac{40}{3}\times \left(\frac{9}{4}-\pi\right)^2 \\ &= 53.1\times 2\pi\text{ rad}\end{aligned}$$

可知在这段时间里, 飞轮转了 53.1 转.

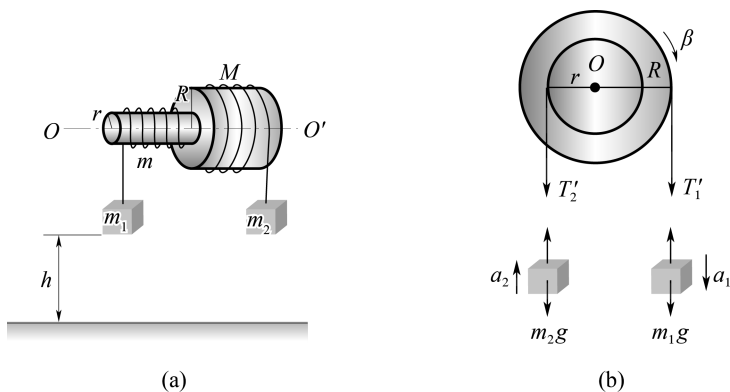
(2) $\omega_0=900\times\frac{2\pi}{60}\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, 要求飞轮转速在 $t=2\text{ s}$ 内减少一半, 可知

$$\beta=\frac{\frac{\omega_0}{2}-\omega_0}{t}=-\frac{\omega_0}{2t}=-\frac{15\pi}{2}\text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

用上面式(1)所示的关系, 可求出所需的制动力为

$$\begin{aligned}F &= -\frac{mRl_1\beta}{2\mu(l_1+l_2)} \\ &= \frac{60\times 0.25\times 0.50\times 15\pi}{2\times 0.40\times(0.50+0.75)\times 2} \\ &= 177\text{ N}\end{aligned}$$

3.12 固定在一起的两个同轴均匀圆柱体可绕其光滑的水平对称轴 OO' 转动. 设大小圆柱体的半径分别为 R 和 r , 质量分别为 M 和 m . 绕在两柱体上的细绳分别与物体 m_1 和 m_2 相连, m_1 和 m_2 则挂在圆柱体的两侧, 如题 3.12 图所示. 设 $R=0.20\text{ m}$, $r=0.10\text{ m}$, $m=4\text{ kg}$, $M=10\text{ kg}$, $m_1=m_2=2\text{ kg}$, 且开始时 m_1, m_2 离地均为 $h=2\text{ m}$. 求:



题 3.12 图

(1) 柱体转动时的角加速度;

(2) 两侧细绳的张力.

解: 设 a_1, a_2 和 β 分别为 m_1, m_2 和柱体的加速度及角加速度, 方向如图(如图 b). m_1, m_2 和柱体的运动方程如下:

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \quad ①$$

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \quad ②$$

$$T_1' R - T_2' r = I \beta \quad ③$$

式中 $T_1' = T_1, T_2' = T_2, a_2 = r\beta, a_1 = R\beta$

而

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2$$

由上式求得

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{Rm_1 - rm_2}{I + m_1 R^2 + m_2 r^2} g \\ &= \frac{0.2 \times 2 - 0.1 \times 2}{\frac{1}{2} \times 10 \times 0.20^2 + \frac{1}{2} \times 4 \times 0.10^2 + 2 \times 0.20^2 + 2 \times 0.10^2} \times 9.8 \\ &= 6.13 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

(2) 由①式

$$T_2 = m_2 r \beta + m_2 g = 2 \times 0.10 \times 6.13 + 2 \times 9.8 = 20.8 \text{ N}$$

由②式

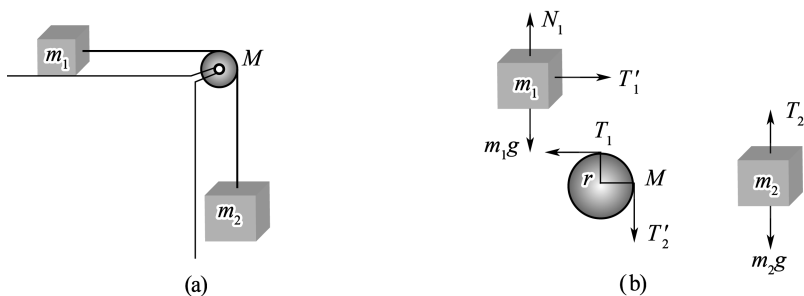
$$T_1 = m_1 g - m_1 R \beta = 2 \times 9.8 - 2 \times 0.2 \times 6.13 = 17.1 \text{ N}$$

3.13 计算题 3.13 图所示系统中物体的加速度. 设滑轮为质量均匀分布的圆柱体, 其质量为 M , 半径为 r , 在绳与轮缘的摩擦力作用下旋转, 忽略桌面与物体间的摩擦, 设 $m_1 = 50 \text{ kg}$, $m_2 = 200 \text{ kg}$, $M = 15 \text{ kg}$, $r = 0.1 \text{ m}$

解: 分别以 m_1, m_2 滑轮为研究对象, 受力图如图(b)所示. 对 m_1, m_2 运用牛顿定律, 有

$$m_2 g - T_2 = m_2 a \quad ①$$

$$T_1 = m_1 a \quad ②$$



题 3.13 图

对滑轮运用转动定律,有

$$T_2 r - T_1 r = \left(\frac{1}{2} M r^2\right) \beta \quad (3)$$

$$\text{又,} \quad a = r \beta \quad (4)$$

联立以上 4 个方程,得

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} = \frac{200 \times 9.8}{5 + 200 + \frac{15}{2}} = 7.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

3.14 如题 3.14 图所示,一匀质细杆质量为 m ,长为 l ,可绕过一端 O 的水平轴自由转动,杆于水平位置由静止开始摆下.求:

- (1) 初始时刻的角加速度;
- (2) 杆转过 θ 角时的角速度.

解: (1) 由转动定律,有

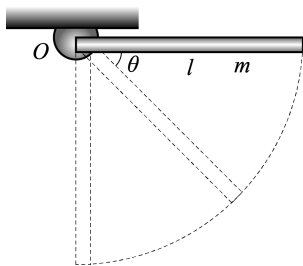
$$m g \frac{1}{2} l = \left(\frac{1}{3} m l^2\right) \beta$$

$$\therefore \quad \beta = \frac{3g}{2l}$$

(2) 由机械能守恒定律,有

$$m g \frac{l}{2} \sin \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m l^2\right) \omega^2$$

$$\therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{3g \sin \theta}{l}}$$



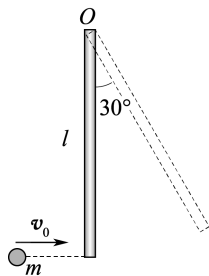
题 3.14 图

3.15 如题 3.15 图所示,质量为 M ,长为 l 的均匀直棒,可绕垂直于棒一端的水平轴 O 无摩擦地转动,它原来静止在平衡位置上.现有一质量为 m 的弹性小球飞来,正好在棒的下端与棒垂直地相撞.相撞后,使棒从平衡位置处摆动到最大角度 $\theta = 30^\circ$ 处.

(1) 设这碰撞为弹性碰撞,试计算小球初速 v_0 的值;

(2) 相撞时小球受到多大的冲量?

解: (1) 设小球的初速度为 v_0 ,棒经小球碰撞后得到的初角速度为 ω ,而小球的速度变为 v ,按题意,小球和棒作弹性碰撞,所以碰撞时遵从角动



题 3.15 图

量守恒定律和机械能守恒定律,可列式:

$$mv_0 l = I\omega + mvl \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (2)$$

上两式中 $I = \frac{1}{3}Ml^2$, 碰撞过程极为短暂, 可认为棒没有显著的角位移; 碰撞后, 棒从竖直位置上摆到最大角度 $\theta = 30^\circ$, 按机械能守恒定律可列式:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = Mgl \frac{l}{2}(1 - \cos 30^\circ) \quad (3)$$

由③式得

$$\omega = \left[\frac{Mgl}{I}(1 - \cos 30^\circ) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{3g}{l} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

由①式

$$v = v_0 - \frac{I\omega}{ml} \quad (4)$$

由②式

$$v^2 = v_0^2 - \frac{I\omega^2}{m} \quad (5)$$

所以

$$\left(v_0 - \frac{I\omega}{ml} \right)^2 = v_0^2 - \frac{I\omega^2}{m}$$

求得

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{l\omega}{2} \left(1 + \frac{I}{ml^2} \right) = \frac{l}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{M}{m} \right) \omega \\ &= \frac{\sqrt{6(2-\sqrt{3})gl}}{12} \frac{3m+M}{m} \end{aligned}$$

(2) 相碰时小球受到的冲量为

$$\int F dt = \Delta(mv) = mv - mv_0$$

由①式求得

$$\begin{aligned} \int F dt &= mv - mv_0 = -\frac{I\omega}{l} = -\frac{1}{3}Ml\omega \\ &= -\frac{\sqrt{6(2-\sqrt{3})gl}}{6}M \end{aligned}$$

负号说明所受冲量的方向与初速度方向相反。

3.16 一个质量为 M 、半径为 R 并以角速度 ω 转动着的飞轮_(可看作匀质圆盘), 在某一瞬时突然有一片质量为 m 的碎片从轮的边缘上飞出, 见题 3.16 图. 假定碎片脱离飞轮时的瞬时速度方向正好竖直向上。

(1) 问它能升高多少?

(2) 求余下部分的角速度、角动量和转动动能。

解: (1) 碎片离盘瞬时的线速度即是它上升的初速度

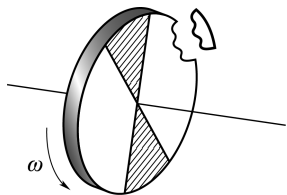
$$v_0 = R\omega$$

设碎片上升高度 h 时的速度为 v , 则有

$$v^2 = v_0^2 - 2gh$$

令 $v=0$, 可求出上升最大高度为

$$H = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{1}{2g} R^2 \omega^2$$



题 3.16 图

(2) 圆盘的转动惯量 $I = \frac{1}{2}MR^2$, 碎片抛出后圆盘的转动惯量 $I' = \frac{1}{2}MR^2 - mR^2$, 碎片脱离前, 盘的角动量为 $I\omega$, 碎片刚脱离后, 碎片与破盘之间的内力变为零, 但内力不影响系统的总角动量, 碎片与破盘的总角动量应守恒, 即

$$I\omega = I'\omega' + mv_0R$$

式中 ω' 为破盘的角速度, 于是

$$\frac{1}{2}MR^2\omega = \left(\frac{1}{2}MR^2 - mR^2\right)\omega' + mv_0R\left(\frac{1}{2}MR^2 - mR^2\right)\omega = \left(\frac{1}{2}MR^2 - mR^2\right)\omega'$$

得 $\omega' = \omega$ (角速度不变)

圆盘余下部分的角动量为

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 - mR^2\right)\omega$$

转动动能为 $E_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 - mR^2\right)\omega^2$

3.17 一质量为 m 、半径为 R 的自行车轮, 假定质量均匀分布在轮缘上, 可绕轴自由转动。另一质量为 m_0 的子弹以速度 v_0 射入轮缘 (如题 3.17 图所示方向)。

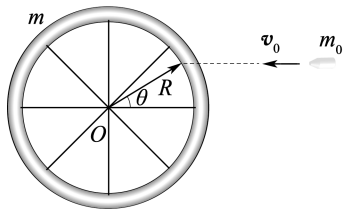
(1) 开始时轮是静止的, 在质点打入后的角速度为何值?

(2) 用 m, m_0 和 θ 表示系统 (包括轮和质点) 最后动能和初始动能之比。

解: (1) 射入的过程对 O 轴的角动量守恒

$$R \sin \theta m_0 v_0 = (m + m_0) R^2 \omega$$

$$\therefore \omega = \frac{m_0 v_0 \sin \theta}{(m + m_0) R}$$

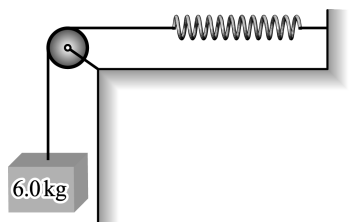


题 3.17 图

$$(2) \quad \frac{E_k}{E_{k_0}} = \frac{\frac{1}{2}[(m + m_0)R^2] \left[\frac{m_0 v_0 \sin \theta}{(m + m_0)R} \right]^2}{\frac{1}{2}m_0 v_0^2} = \frac{m_0 \sin^2 \theta}{m + m_0}$$

3.18 弹簧、定滑轮和物体的连接如题 3.18 图所示, 弹簧的劲度系数为 2.0 N/m ; 定滑轮的转动惯量是 $0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 半径为 0.30 m , 问当 6.0 kg 质量的物体落下 0.40 m 时, 它的速率为多大? 假设开始时物体静止而弹簧无伸长。

解: 以重物、滑轮、弹簧、地球为一系统, 重物下落的过程中, 机械能守恒, 以最低点为重力势能零点, 弹簧原长为弹性势能零点, 则有



题 3.18 图

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kh^2$$

$$\omega = v/R$$

又

故有

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{(2mgh - kh^2)R^2}{mR^2 + I}} \\ &= \sqrt{\frac{(2 \times 6.0 \times 9.8 \times 0.4 - 2.0 \times 0.4^2) \times 0.3^2}{6.0 \times 0.3^2 + 0.5}} \\ &= 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

习 题 4

4.1 选择题

(1)在一惯性系中观测,两个事件同时不同地,则在其他惯性系中观测,他们[]。

- (A)一定同时 (B)可能同时
(C)不可能同时,但可能同地 (D)不可能同时,也不可能同地

[答案:D]

(2)在一惯性系中观测,两个事件同地不同时,则在其他惯性系中观测,他们[]。

- (A)一定同地 (B)可能同地
(C)不可能同地,但可能同时 (D)不可能同地,也不可能同时

[答案:D]

(3)宇宙飞船相对于地面以速度 v 作匀速直线飞行,某一时刻飞船头部的宇航员向飞船尾部发出一个光讯号,经过 Δt (飞船上的钟)时间后,被尾部的接收器收到,则由此可知飞船的固有长度为(c 表示真空中光速)[]。

- (A) $c \cdot \Delta t$ (B) $v \cdot \Delta t$
(C) $\frac{c \cdot \Delta t}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ (D) $c \cdot \Delta t \cdot \sqrt{1 - (v/c)^2}$

[答案:A]

(4)一宇航员要到离地球 5 光年的星球去旅行。如果宇航员希望把这路程缩短为 3 光年,则他所乘的火箭相对于地球的速度 v 应为[]。

- (A) $0.5c$ (B) $0.6c$
(C) $0.8c$ (D) $0.9c$

[答案:C]

(5)某宇宙飞船以 $0.8c$ 的速度离开地球,若地球上测到它发出的两个信号之间的时间间隔为 $10s$ 。则宇航员测出的相应的时间间隔为[]。

- (A) $6s$ (B) $8s$
(C) $10s$ (D) $10/3s$

[答案:A]

4.2 填空题

(1) 有一速度为 u 的宇宙飞船沿 X 轴正方向飞行, 飞船头尾各有一个脉冲光源在工作, 处于船尾的观察者测得船头光源发出的光脉冲的传播速度大小为 _____; 处于船头的观察者测得船尾光源发出的光脉冲的传播速度大小为 _____。

[答案: c, c ;]

(2) S' 系相对 S 系沿 x 轴匀速运动的速度为 $0.8c$, 在 S' 中观测, 两个事件的时间间隔 $\Delta t' = 5 \times 10^{-7} s$, 空间间隔是 $\Delta x' = -120 m$, 则在 S 系中测得的两事件的空间间隔 $\Delta x =$ _____, 时间间隔 $\Delta t =$ _____。

[答案: $0, 3 \times 10^{-7} s$]

(3) 用 v 表示物体的速度, 则当 $\frac{v}{c} =$ _____ 时, $m = 2m_0$; $\frac{v}{c} =$ _____ 时, $E_k = E_0$ 。

[答案: $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$]

(4) 电子的静止质量为 m_e , 将一个电子从静止加速到速率为 $0.6c$ (c 为真空中的光速), 需做功 _____。

[答案: $0.25m_e c^2$]

(5) α 粒子在加速器中被加速, 当其质量为静止质量的 5 倍时, 其动能为静止能量的 _____ 倍。

[答案: 4]

(6) 质子在加速器中被加速, 当其动能为静止能量的 3 倍时, 其质量为静止质量的 _____ 倍。

[答案: 4]

4.3 惯性系 S' 相对另一惯性系 S 沿 x 轴作匀速直线运动, 取两坐标原点重合时刻作为计时起点. 在 S 系中测得两事件的时空坐标分别为 $x_1 = 6 \times 10^4 m$, $t_1 = 2 \times 10^{-4} s$, 以及 $x_2 = 12 \times 10^4 m$, $t_2 = 1 \times 10^{-4} s$. 已知在 S' 系中测得该两事件同时发生. 试问:

(1) S' 系相对 S 系的速度是多少?

(2) S' 系中测得的两事件的空间间隔是多少?

解: 设 (S') 相对 S 的速度为 v ,

$$(1) \quad t'_1 = \gamma \left(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 \right)$$

$$t'_2 = \gamma \left(t_2 - \frac{v}{c^2} x_2 \right)$$

由题意

$$t'_2 - t'_1 = 0$$

则
$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)$$

故
$$v = c^2 \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} = -\frac{c}{2} = -1.5 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 由洛伦兹变换
$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1), x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2)$$

代入数值,
$$x'_2 - x'_1 = 5.2 \times 10^4 \text{ m}$$

4.4 长度 $l_0 = 1 \text{ m}$ 的米尺静止于 S' 系中, 与 x' 轴的夹角 $\theta' = 30^\circ$, S' 系相对 S 系沿 x 轴运动, 在 S 系中观测者测得米尺与 x 轴夹角为 $\theta = 45^\circ$. 试求:

(1) S' 系和 S 系的相对运动速度.

(2) S 系中测得的米尺长度.

解: (1) 米尺相对 S' 静止, 它在 x', y' 轴上的投影分别为:

$$L'_x = L_0 \cos \theta' = 0.866 \text{ m}, L'_y = L_0 \sin \theta' = 0.5 \text{ m}$$

米尺相对 S 沿 x 方向运动, 设速度为 v , 对 S 系中的观察者测得米尺在 x 方向收缩, 而 y 方向的长度不变, 即

$$L_x = L'_x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, L_y = L'_y$$

故
$$\tan \theta = \frac{L_y}{L_x} = \frac{L'_y}{L'_x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

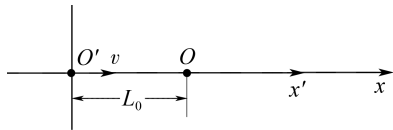
把 $\theta = 45^\circ$ 及 L'_x, L'_y 代入

则得
$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{0.5}{0.866}$$

故
$$v = 0.816 c$$

(2) 在 S 系中测得米尺长度为 $L = \frac{L_y}{\sin 45^\circ} = 0.707 \text{ m}$

4.5 两个惯性系中的观察者 O 和 O' 以 $0.6c$ (c 表示真空中光速) 的相对速度相互接近, 如果 O 测得两者的初始距离是 20 m , 则 O' 测得两者经过多少时间相遇?



题 4.5 图

解: O 测得相遇时间为 Δt

$$\therefore \Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{L_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{v} = 8.89 \times 10^{-8} \text{ s},$$

$$\beta = \frac{v}{c} = 0.6, \gamma = \frac{1}{0.8},$$

或者, O' 测得长度收缩,

$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} = L_0 \sqrt{1 - 0.6^2} = 0.8L_0, \Delta t' = \frac{L}{v}$$

$$\Delta t' = \frac{0.8L_0}{0.6c} = \frac{0.8 \times 20}{0.6 \times 3 \times 10^8} = 8.89 \times 10^{-8} \text{ s}$$

4.6 观测者甲乙分别静止于两个惯性参考系 S 和 S' 中, 甲测得在同一地点发生的两事件的时间间隔为 4 s, 而乙测得这两个事件的时间间隔为 5 s. 求:

(1) S' 相对于 S 的运动速度.

(2) 乙测得这两个事件发生的地点间的距离.

解: 甲测得 $\Delta t = 4 \text{ s}$, $\Delta x = 0$, 乙测得 $t = 5 \text{ s}$, 坐标差为 $\Delta x' = x'_2 - x'_1$

$$(1) \therefore \Delta t' = \gamma \left(\Delta t + \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = \lambda \Delta t \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \Delta t$$

$$\therefore \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{4}{5}$$

解出

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'} \right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5} \right)^2} = \frac{3}{5} c \\ = 1.8 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$(2) \Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t), \gamma = \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{5}{4}, \Delta x = 0$$

$$\therefore \Delta x' = -\gamma v \Delta t = -\frac{5}{4} \times \frac{3}{5} c \times 4 = -3c = -9 \times 10^8 \text{ m}$$

负号表示 $x'_2 - x'_1 < 0$.

4.7 6000m 的高空大气层中产生了一个 π 介子以速度 $v = 0.998c$ 飞向地球. 假定该 π 介子在其自身静止系中的寿命等于其平均寿命 $2 \times 10^{-6} \text{ s}$. 试分别从下面两个角度, 即地球上的观测者和 π 介子静止系中观测者来判断 π 介子能否到达地球.

解: π 介子在其自身静止系中的寿命 $\Delta t_0 = 2 \times 10^{-6} \text{ s}$ 是固有(本征)时间, 对地球观测者, 由于时间膨胀效应, 其寿命延长了. 衰变前经历的时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3.16 \times 10^{-5} \text{ s}$$

这段时间飞行距离为 $d = v \Delta t = 9470 \text{ m}$

因 $d > 6000 \text{ m}$, 故该 π 介子能到达地球.

或在 π 介子静止系中, π 介子是静止的. 地球则以速度 v 接近介子, 在 Δt_0 时间内, 地球接近的距离为 $d' = v \Delta t_0 = 599 \text{ m}$

$d_0 = 6000 \text{ m}$ 经洛伦兹收缩后的值为:

$$d'_0 = d_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 379 \text{ m}$$

$d' > d'_0$, 故 π 介子能到达地球.

4.8 设物体相对 S' 系沿 x' 轴正向以 $0.8c$ 运动, 如果 S' 系相对 S 系沿 x 轴正向的速度也是 $0.8c$, 问物体相对 S 系的速度是多少?

解: 根据速度合成定理, $u=0.8c, v'_x=0.8c$

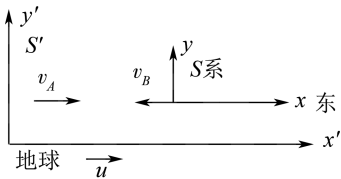
$$\therefore v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} = \frac{0.8c + 0.8c}{1 + \frac{0.8c \times 0.8c}{c^2}} = 0.98c$$

4.9 飞船 A 以 $0.8c$ 的速度相对地球向正东飞行, 飞船 B 以 $0.6c$ 的速度相对地球向正西方向飞行. 当两飞船即将相遇时 A 飞船在自己的天窗处相隔 2 s 发射两颗信号弹. 在 B 飞船的观测者测得两颗信号弹相隔的时间间隔为多少?

解: 取 B 为 S 系, 地球为 S' 系, 自西向东为 $x(x')$ 轴正向, 则 A 对 S' 系的速度 $v'_x=0.8c$, S' 系对 S 系的速度为 $u=0.6c$, 则 A 对 S 系(B 船)的速度为

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} = \frac{0.8c + 0.6c}{1 + 0.48} = 0.946c$$

发射弹是从 A 的同一点发出, 其时间间隔为固有时 $\Delta t' = 2\text{ s}$,

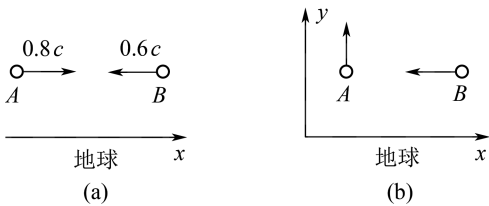


题 4.9 图

$\therefore B$ 中测得的时间间隔为:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1 - 0.946^2}} = 6.17\text{ s}$$

4.10(1)火箭 A 和 B 分别以 $0.8c$ 和 $0.6c$ 的速度相对地球向 $+x$ 和 $-x$ 方向飞行. 试求由火箭 B 测得 A 的速度. (2)若火箭 A 相对地球以 $0.8c$ 的速度向 $+y$ 方向运动, 火箭 B 的速度不变, 求 A 相对 B 的速度.



题 4.10 图

解: (1)如图 a , 取地球为 S 系, B 为 S' 系, 则 S' 相对 S 的速度 $u=0.6c$, 火箭 A 相对 S 的

速度 $v_x = 0.8c$, 则 A 相对 $S'(B)$ 的速度为:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} = \frac{0.8c - (-0.6c)}{1 - \frac{(-0.6c)(0.8c)}{c^2}} = 0.946c$$

或者取 A 为 S' 系, 则 $u = 0.8c$, B 相对 S 系的速度 $v_x = -0.6c$, 于是 B 相对 A 的速度为:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} = \frac{-0.6c - 0.8c}{1 - \frac{(0.8c)(-0.6c)}{c^2}} = -0.946c$$

(2) 如图 b , 取地球为 S 系, 火箭 B 为 S' 系, S' 系相对 S 系沿 $-x$ 方向运动, 速度 $u = -0.6c$, A 对 S 系的速度为, $v_x = 0, v_y = 0.8c$, 由洛伦兹变换式 A 相对 B 的速度为:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} = \frac{0 - (-0.6c)}{1 - 0} = 0.6c$$

$$v'_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}v_y}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} = \frac{\sqrt{1 - 0.6^2}(0.8c)}{1 - 0} = 0.64c$$

$\therefore A$ 相对 B 的速度大小为

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = 0.88c$$

速度与 x' 轴的夹角 θ' 为

$$\tan\theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = 1.07$$

$$\theta' = 46.8^\circ$$

4.11 静止在 S 系中的观测者测得一光子沿与 x 轴成 60° 角的方向飞行. 另一观测者静止于 S' 系, S' 系的 x' 轴与 x 轴一致, 并以 $0.6c$ 的速度沿 x 方向运动. 试问 S' 系中的观测者观测到的光子运动方向如何?

解: S 系中光子运动速度的分量为

$$v_x = c \cos 60^\circ = 0.500c$$

$$v_y = c \sin 60^\circ = 0.866c$$

由速度变换公式, 光子在 S' 系中的速度分量为

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} = \frac{0.5c - 0.6c}{1 - \frac{0.6c \times 0.5c}{c^2}} = -0.143c$$

$$v'_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}v_y}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} = \frac{\sqrt{1 - 0.6^2} \times 0.866c}{1 - \frac{0.6c \times 0.5c}{c^2}} = 0.990c$$

光子运动方向与 x' 轴的夹角 θ' 满足

$$\tan\theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = -0.692$$

θ' 在第二象限为 $\theta' = 98.2^\circ$

在 S' 系中, 光子的运动速度为

$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = c$ 正是光速不变.

4.12 (1) 如果将电子由静止加速到速率为 $0.1c$, 须对它作多少功? (2) 如果将电子由速率为 $0.8c$ 加速到 $0.9c$, 又须对它作多少功?

解: (1) 对电子作的功, 等于电子动能的增量, 得

$$\begin{aligned}\Delta E_k &= E_k - mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \\ &= 9.1 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0.1^2}} - 1 \right) \\ &= 4.12 \times 10^{-16} \text{ J} = 2.57 \times 10^3 \text{ eV}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad \Delta E'_k &= E_{k_2} - E_{k_1} = (m_2 c^2 - m_0 c^2) - (m_1 c^2 - m_0 c^2) \\ &= m_2 c^2 - m_1 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \right) \\ &= 9.1 \times 10^{-31} \times 3^2 \times 10^{16} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0.9^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \right) \\ &= 5.14 \times 10^{-14} \text{ J} = 3.21 \times 10^5 \text{ eV}\end{aligned}$$

4.13 μ 子静止质量是电子静止质量的 207 倍, 静止时的平均寿命 $\tau_0 = 2 \times 10^{-6} \text{ s}$, 若它在实验室参考系中的平均寿命 $\tau = 7 \times 10^{-6} \text{ s}$, 试问其质量是电子静止质量的多少倍?

解: 设 μ 子静止质量为 m_0 , 相对实验室参考系的速度为 $v = \beta c$, 相应质量为 m , 电子静止质量为 m_{0e} , 因 $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, 即 $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{7}{2}$

由质速关系, 在实验室参考系中质量为:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{207 m_{0e}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

故
$$\frac{m}{m_{0e}} = \frac{207}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 207 \times \frac{7}{2} = 725$$

4.14 一物体的速度使其质量增加了 10%, 试问此物体在运动方向上缩短了百分之几?

解: 设静止质量为 m_0 , 运动质量为 m ,

由题设
$$\frac{m - m_0}{m_0} = 0.10$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

由此二式得
$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 = 0.10$$

$$\therefore \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{1.10}$$

在运动方向上的长度和静长分别为 l 和 l_0 , 则相对收缩量为:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \sqrt{1-\beta^2} = 1 - \frac{1}{1.10} = 0.091 = 9.1\%$$

4.15 氢原子的同位素氘(${}^2_1\text{H}$)和氚(${}^3_1\text{H}$)在高温条件下发生聚变反应,产生氦(${}^4_2\text{He}$)原子核和一个中子(${}^1_0\text{n}$),并释放出大量能量,其反应方程为 ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$ 已知氘核的静止质量为 2.0135 原子质量单位(1 原子质量单位 $= 1.600 \times 10^{-27} \text{ kg}$),氚核和氦核及中子的质量分别为 3.0155, 4.0015, 1.00865 原子质量单位. 求上述聚变反应释放出来的能量.

解: 反应前总质量为 $2.0135 + 3.0155 = 5.0290 \text{ amu}$

反应后总质量为 $4.0015 + 1.0087 = 5.0102 \text{ amu}$

质量亏损 $\Delta m = 5.0290 - 5.0102 = 0.0188 \text{ amu}$
 $= 3.12 \times 10^{-29} \text{ kg}$

由质能关系得 $\Delta E = \Delta mc^2 = 3.12 \times 10^{-29} \times (3 \times 10^8)^2$
 $= 2.81 \times 10^{-21} \text{ J} = 1.75 \times 10^7 \text{ eV}$

4.16 要使电子的速率从 $1.2 \times 10^8 \text{ m/s}$ 增加到 $2.4 \times 10^8 \text{ m/s}$, 必须做多少功?

解: 由于电子的速率接近光速, 因此经典力学的动能公式已经不适用, 只能运用相对论的动能表达式

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2.$$

再根据相对论中运动质量和静止质量的关系

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}, \quad m_2 = \frac{m_0}{1 - \sqrt{\frac{v_2^2}{c^2}}}.$$

可得出

$$E_k = \frac{m_0}{1 - \sqrt{\frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = 4.7 \times 10^{-14} \text{ (J)},$$

由功能关系可知, 这就是所需要做的功。

4.17 粒子的静止质量为 m_0 , 当其动能等于其静能时, 其质量和动量各等于多少?

解: 由题意有

$$E_k = m_0 c^2,$$

再根据相对论中的动能关系: $E_k = mc^2 - m_0 c^2$, 则有

$$m = 2m_0.$$

由动量和能量的关系,

$$pc = \sqrt{(mc^2)^2 - (m_0 c^2)^2},$$

得动量为

$$p = \sqrt{3} m_0 c。$$

4.18 太阳的辐射能来自其内部的核聚变反应。太阳每秒钟向周围空间辐射出的能量约为 5×10^{26} J/s, 由于这个原因, 太阳每秒钟减少多少质量? 把这个质量同太阳目前的质量 2×10^{30} Kg 作比较, 估算太阳的寿命是多少年。

解: 由质能关系

$$\Delta E = \Delta m c^2,$$

可得出太阳每秒钟减少的质量为

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{5 \times 10^{26}}{(3 \times 10^8)^2} = 5.6 \times 10^9 \text{ (kg/s)}。$$

进而, 可估计太阳的寿命是

$$n = \frac{2 \times 10^{30}}{5.6 \times 10^9 \times 3600 \times 24 \times 365} = 1.13 \times 10^{13} \text{ (年)}。$$

习 题 5

5.1 选择题

(1)一物体作简谐振动,振动方程为 $x = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, 则该物体在 $t=0$ 时刻的动能与 $t=T/8$ (T 为振动周期)时刻的动能之比为:

- (A) 1 : 4 (B) 1 : 2
(C) 1 : 1 (D) 2 : 1

[答案:D]

(2)弹簧振子在光滑水平面上作简谐振动时,弹性力在半个周期内所作的功为

- (A) kA^2 (B) $kA^2/2$
(C) $kA^2//4$ (D) 0

[答案:D]

(3)谐振动过程中,动能和势能相等的位置的位移等于

- (A) $\pm \frac{A}{4}$ (B) $\pm \frac{A}{2}$
(C) $\pm \frac{\sqrt{3}A}{2}$ (D) $\pm \frac{\sqrt{2}A}{2}$

[答案:D]

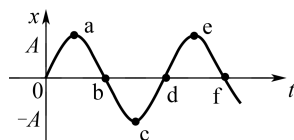
5.2 填空题

(1)一质点在 X 轴上作简谐振动,振幅 $A=4$ cm,周期 $T=2$ s,其平衡位置取作坐标原点。若 $t=0$ 时质点第一次通过 $x=-2$ cm 处且向 X 轴负方向运动,则质点第二次通过 $x=-2$ cm 处的时刻为_____ s。

[答案: $\frac{2}{3}$ s]

(2)一水平弹簧简谐振子的振动曲线如题 5.2(2)图所示。振子在位移为零,速度为 $-\omega A$ 、加速度为零和弹性力为零的状态,对应于曲线上的_____点。振子处在位移的绝对值为 A 、速度为零、加速度为 $-\omega^2 A$ 和弹性力为 $-$ 的状态,则对应曲线上的_____点。

[答案:b,f; a,e]



题 5.2(2) 图

(3)一质点沿 x 轴作简谐振动, 振动范围的中心点为 x 轴的原点, 已知周期为 T , 振幅为 A 。

(a)若 $t=0$ 时质点过 $x=0$ 处且朝 x 轴正方向运动, 则振动方程为 $x=$ _____。

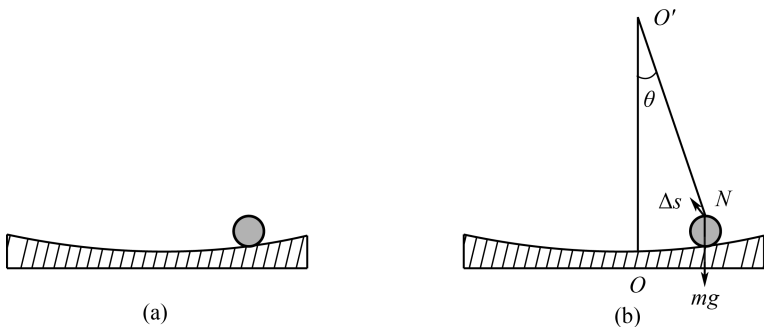
(b)若 $t=0$ 时质点过 $x=A/2$ 处且朝 x 轴负方向运动, 则振动方程为 $x=$ _____。

[答案: $x=A\cos(2\pi t/T-\pi/2)$; $x=A\cos(2\pi t/T+\pi/3)$]

5.3 符合什么规律的运动才是谐振动? 分别分析下列运动是不是谐振动:

(1)拍皮球时球的运动;

(2)如题 5.3 图所示, 一小球在一个半径很大的光滑凹球面内滚动(设小球所经过的弧线很短)。



题 5.3 图

解: 要使一个系统作谐振动, 必须同时满足以下三个条件: 一, 描述系统的各种参量, 如质量、转动惯量、摆长……等等在运动中保持为常量; 二, 系统是在自己的稳定平衡位置附近作往复运动; 三, 在运动中系统只受到内部的线性回复力的作用. 或者说, 若一个系统的运动微分方程能用

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega^2\xi = 0$$

描述时, 其所作的运动就是谐振动。

(1)拍皮球时球的运动不是谐振动. 第一, 球的运动轨道中并不存在一个稳定的平衡位置; 第二, 球在运动中所受的三个力: 重力, 地面给予的弹力, 击球者给予的拍击力, 都不是线性回复力。

(2)小球在题 5.3 图所示的情况中所作的小弧度的运动, 是谐振动. 显然, 小球在运动过程中, 各种参量均为常量; 该系统(指小球凹槽、地球系统)的稳定平衡位置即凹槽最低点, 即系统势能最小值位置点 O ; 而小球在运动中的回复力为 $-mg\sin\theta$, 如题 5.3 图(b)中所示, 因 $\Delta s \ll R$, 故 $\theta = \frac{\Delta s}{R} \rightarrow 0$, 所以回复力为 $-mg\theta$. 式中负号, 表示回复力的方向始终与角位移的方向相反. 即小球在 O 点附近的往复运动中所受回复力为线性的. 若以小球为对象, 则小球在以 O' 为圆心的竖直平面内作圆周运动, 由牛顿第二定律, 在凹槽切线方向上有

$$mR \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta$$

令 $\omega^2 = \frac{g}{R}$, 则有

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

5.4 弹簧振子的振幅增大到原振幅的两倍时, 其振动周期、振动能量、最大速度和最大加速度等物理量将如何变化?

解: 弹簧振子的振动周期、振动能量、最大速度和最大加速度的表达式分别为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$v_m = \omega A, \quad a_m = \omega^2 A$$

所以当振幅增大到原振幅的两倍时, 振动周期不变, 振动能量增大为原来的 4 倍, 最大速度增大为原来的 2 倍, 最大加速度增大为原来的 2 倍。

5.5 单摆的周期受哪些因素影响? 把某一单摆由赤道拿到北极去, 它的周期是否变化?

解: 单摆的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

因此受摆线长度和重力加速度的影响。把单摆由赤道拿到北极去, 由于摆线长度不变, 重力加速度增大, 因此它的周期是变小。

5.6 简谐振动的速度和加速度在什么情况下是同号的? 在什么情况下是异号的? 加速度为正值时, 振动质点的速率是否一定在增大?

解: 简谐振动的速度和加速度的表达式分别为

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

当 $\sin(\omega t + \varphi_0)$ 与 $\cos(\omega t + \varphi_0)$ 同号时, 即位相在第 1 或第 3 象限时, 速度和加速度同号; 当 $\sin(\omega t + \varphi_0)$ 与 $\cos(\omega t + \varphi_0)$ 异号时, 即位相在第 2 或第 4 象限时, 速度和加速度异号。

加速度为正值时, 振动质点的速率不一定增大。

5.7 质量为 $10 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 的小球与轻弹簧组成的系统, 按 $x = 0.1 \cos\left(8\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$ (SI) 的规律作谐振动, 求:

(1) 振动的周期、振幅和初位相及速度与加速度的最大值;

(2) 最大的回复力、振动能量、平均动能和平均势能, 在哪些位置上动能与势能相等?

(3) $t_2 = 5 \text{ s}$ 与 $t_1 = 1 \text{ s}$ 两个时刻的位相差;

解: (1) 设谐振动的标准方程为 $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, 则知:

$$A = 0.1 \text{ m}, \omega = 8\pi, \therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{4} \text{ s}, \varphi_0 = 2\pi/3$$

又 $|v_m| = \omega A = 0.8\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2.51 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$|a_m| = \omega^2 A = 63.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$(2) |F_m| = ma_m = 0.63 \text{ N}$$

$$E = \frac{1}{2} m v_m^2 = 3.16 \times 10^{-2} \text{ J}$$

$$\overline{E_p} = \overline{E_k} = \frac{1}{2} E = 1.58 \times 10^{-2} \text{ J}$$

当 $E_k = E_p$ 时, 有 $E = 2E_p$,

$$\text{即} \quad \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} k A^2 \right)$$

$$\therefore \quad x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A = \pm \frac{\sqrt{2}}{20} \text{ m}$$

$$(3) \Delta\varphi = \omega(t_2 - t_1) = 8\pi(5 - 1) = 32\pi$$

5.8 一个沿 x 轴作简谐振动的弹簧振子, 振幅为 A , 周期为 T , 其振动方程用余弦函数表示. 如果 $t=0$ 时质点的状态分别是:

(1) $x_0 = -A$;

(2) 过平衡位置向正向运动;

(3) 过 $x = \frac{A}{2}$ 处向负向运动;

(4) 过 $x = -\frac{A}{\sqrt{2}}$ 处向正向运动.

试求出相应的初位相, 并写出振动方程.

$$\text{解: 因为} \quad \begin{cases} x_0 = A \cos \varphi_0 \\ v_0 = -\omega A \sin \varphi_0 \end{cases}$$

将以上初值条件代入上式, 使两式同时成立之值即为该条件下的初位相. 故有

$$\varphi_1 = \pi \quad x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi\right)$$

$$\varphi_2 = \frac{3}{2}\pi \quad x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{3} \quad x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\varphi_4 = \frac{5\pi}{4} \quad x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{5}{4}\pi\right)$$

5.9 一质量为 $10 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 的物体作谐振动, 振幅为 24 cm , 周期为 4.0 s , 当 $t=0$ 时位移为 $+24 \text{ cm}$. 求:

(1) $t=0.5 \text{ s}$ 时, 物体所在的位置及此时所受力的大小和方向;

(2) 由起始位置运动到 $x=12 \text{ cm}$ 处所需的最短时间;

(3) 在 $x=12 \text{ cm}$ 处物体的总能量.

解: 由题已知 $A = 24 \times 10^{-2} \text{ m}, T = 4.0 \text{ s}$

$$\therefore \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 0.5\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

又, $t=0$ 时, $x_0 = +A$, $\therefore \varphi_0 = 0$

故振动方程为

$$x = 24 \times 10^{-2} \cos(0.5\pi t) \text{ m}$$

(1) 将 $t=0.5\text{ s}$ 代入得

$$x_{0.5} = 24 \times 10^{-2} \cos(0.5\pi t) \text{ m} = 0.17 \text{ m}$$

$$F = -ma = -m\omega^2 x$$

$$= -10 \times 10^{-3} \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times 0.17 = -4.2 \times 10^{-3} \text{ N}$$

方向指向坐标原点, 即沿 x 轴负向.

(2) 由题知, $t=0$ 时, $\varphi_0 = 0$,

$$t=t \text{ 时 } x_0 = +\frac{A}{2}, \text{ 且 } v < 0, \text{ 故 } \varphi_t = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\pi/3}{\pi/2} = \frac{2}{3} \text{ s}$$

(3) 由于谐振动中能量守恒, 故在任一位置处或任一时刻的系统的总能量均为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-3} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times (0.24)^2 \\ &= 7.1 \times 10^{-4} \text{ J} \end{aligned}$$

5.10 有一轻弹簧, 下面悬挂质量为 1.0 g 的物体时, 伸长为 4.9 cm . 用这个弹簧和一个质量为 8.0 g 的小球构成弹簧振子, 将小球由平衡位置向下拉开 1.0 cm 后, 给予向上的初速度 $v_0 = 5.0 \text{ cm/s}$, 求振动周期和振动表达式.

$$\text{解: 由题知 } k = \frac{m_1 g}{x_1} = \frac{1.0 \times 10^{-3} \times 9.8}{4.9 \times 10^{-2}} = 0.2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

而 $t=0$ 时, $x_0 = -1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$, $v_0 = 5.0 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (设向上为正)

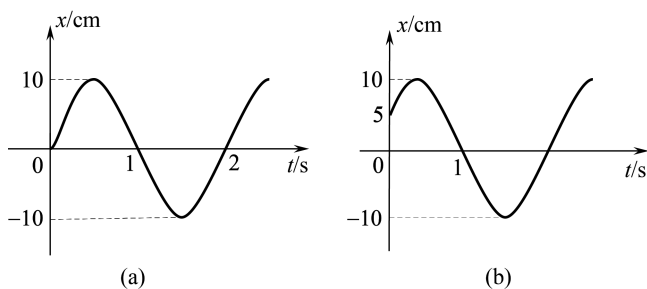
$$\text{又 } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0.2}{8 \times 10^{-3}}} = 5, \text{ 即 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.26 \text{ s}$$

$$\begin{aligned} \therefore A &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \\ &= \sqrt{(1.0 \times 10^{-2})^2 + \left(\frac{5.0 \times 10^{-2}}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{2} \times 10^{-2} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\tan \varphi_0 = -\frac{v_0}{x_0 \omega} = \frac{5.0 \times 10^{-2}}{1.0 \times 10^{-2} \times 5} = 1, \text{ 即 } \varphi_0 = \frac{5\pi}{4}$$

$$\therefore x = \sqrt{2} \times 10^{-2} \cos\left(5t + \frac{5}{4}\pi\right) \text{ m}$$

5.11 题 5.11 图为两个谐振动的 $x-t$ 曲线, 试分别写出其谐振动方程.



题 5.11 图

解:由题 5.11 图(a), $\because t=0$ 时, $x_0=0, v_0>0, \therefore \varphi_0=\frac{3}{2}\pi$, 又, $A=10\text{ cm}, T=2\text{ s}$

即
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

故
$$x_a=0.1\cos\left(\pi t+\frac{3}{2}\pi\right)\text{m}$$

由题 5.11 图(b) $\because t=0$ 时, $x_0=\frac{A}{2}, v_0>0, \therefore \varphi_0=\frac{5\pi}{3}$

$t_1=0$ 时, $x_0=\frac{A}{2}, v_0>0, \therefore \varphi_0=\frac{5\pi}{3}$

又
$$\varphi_1=\omega\times 1+\frac{5}{3}\pi=\frac{5}{2}\pi$$

$\therefore$
$$\omega=\frac{5}{6}\pi$$

故
$$x_b=0.1\cos\left(\frac{5}{6}\pi t+\frac{5\pi}{3}\right)\text{m}$$

5.12 一轻弹簧的倔强系数为 k , 其下端悬有一质量为 M 的盘子. 现有一质量为 m 的物体从离盘底 h 高度处自由下落到盘中并和盘子粘在一起, 于是盘子开始振动.

(1) 此时的振动周期与空盘子作振动时的周期有何不同?

(2) 此时的振动振幅多大?

(3) 取平衡位置为原点, 位移以向下为正, 并以弹簧开始振动时作为计时起点, 求初位相并写出物体与盘子的振动方程.

解: (1) 空盘的振动周期为 $2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$, 落下重物后振动周期为 $2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$, 即增大.

(2) 按(3)所设坐标原点及计时起点, $t=0$ 时, 则 $x_0=-\frac{mg}{k}$. 碰撞时, 以 m, M 为一系统动量守恒, 即

$$m\sqrt{2gh}=(m+M)v_0$$

则有

$$v_0=\frac{m\sqrt{2gh}}{m+M}$$

于是

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{m^2 2gh}{k(m+M)}}$$

$$= \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m+M)g}}$$

(3) $\tan\varphi_0 = -\frac{v_0}{x_0\omega} = \sqrt{\frac{2kh}{(M+m)g}}$ (第三象限), 所以振动方程为

$$x = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m+M)g}} \cos\left[\sqrt{\frac{k}{m+M}}t + \arctan \sqrt{\frac{2kh}{(M+m)g}}\right]$$

5.13 有一单摆, 摆长 $l=1.0$ m, 摆球质量 $m=10\times 10^{-3}$ kg, 当摆球处在平衡位置时, 若给小球一水平向右的冲量 $F\Delta t=1.0\times 10^{-4}$ kg·m/s, 取打击时刻为计时起点 ($t=0$), 求振动的初位相和角振幅, 并写出小球的振动方程.

解: 由动量定理, 有

$$F \cdot \Delta t = mv - 0$$

$$\therefore v = \frac{F \cdot \Delta t}{m} = \frac{1.0 \times 10^{-4}}{1.0 \times 10^{-3}} = 0.01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

按题设计时起点, 并设向右为 x 轴正向, 则知 $t=0$ 时, $x_0=0, v_0=0.01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} > 0$

$$\therefore \varphi_0 = 3\pi/2$$

$$\text{又 } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9.8}{1.0}} = 3.13 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\therefore A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \frac{v_0}{\omega} = \frac{0.01}{3.13} = 3.2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

故其角振幅

$$\Theta = \frac{A}{l} = 3.2 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

小球的振动方程为

$$\theta = 3.2 \times 10^{-3} \cos\left(3.13t + \frac{3}{2}\pi\right) \text{ rad}$$

5.14 有两个同方向、同频率的简谐振动, 其合成振动的振幅为 0.20 m, 位相与第一振动的位相差为 $\frac{\pi}{6}$, 已知第一振动的振幅为 0.173 m, 求第二个振动的振幅以及第一、第二两振动的位相差.

解: 由题意可做出旋转矢量题 5.14 图.

由图知

$$A_2^2 = A_1^2 + A^2 - 2A_1A\cos 30^\circ$$

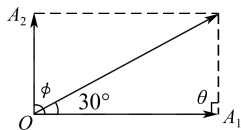
$$= (0.173)^2 + (0.2)^2 - 2 \times 0.173 \times 0.2 \times \sqrt{3}/2$$

$$= 0.01$$

$\therefore$

$$A_2 = 0.1 \text{ m}$$

设角 AA_1O 为 θ , 则



题 5.14 图

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\text{即} \quad \cos\theta &= \frac{A_1^2 + A_2^2 - A^2}{2A_1A_2} = \frac{(0.173)^2 + (0.1)^2 - (0.02)^2}{2 \times 0.173 \times 0.1} \\ &= 0\end{aligned}$$

即 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 这说明, A_1 与 A_2 间夹角为 $\frac{\pi}{2}$, 即二振动的位相差为 $\frac{\pi}{2}$.

5.15 试用最简单的方法求出下列两组谐振动合成后所得合振动的振幅:

$$(1) \begin{cases} x_1 = 5\cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)\text{cm} \\ x_2 = 5\cos\left(3t + \frac{7\pi}{3}\right)\text{cm} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 = 5\cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)\text{cm} \\ x_2 = 5\cos\left(3t + \frac{4\pi}{3}\right)\text{cm} \end{cases}$$

$$\text{解: (1) } \therefore \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi,$$

$$\therefore \text{合振幅} \quad A = A_1 + A_2 = 10 \text{ cm}$$

$$(2) \therefore \Delta\varphi = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi,$$

$$\therefore \text{合振幅} \quad A = 0$$

5.16 一质点同时参与两个在同一直线上的简谐振动, 振动方程为

$$\begin{cases} x_1 = 0.4\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)\text{m} \\ x_2 = 0.3\cos\left(2t - \frac{5\pi}{6}\right)\text{m} \end{cases}$$

试分别用旋转矢量法和振动合成法求合振动的振动幅和初相, 并写出谐振方程。

$$\text{解: } \therefore \Delta\varphi = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \pi$$

$$\therefore A_{\text{合}} = |A_1 - A_2| = 0.1 \text{ m}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = \frac{0.4 \times \sin\frac{\pi}{6} - 0.3 \sin\frac{5\pi}{6}}{0.4 \cos\frac{\pi}{6} + 0.3 \cos\frac{5\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$$

其振动方程为

$$x = 0.1\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)\text{m}$$

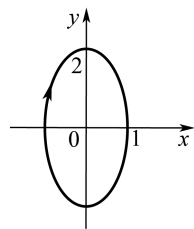
(作图法略)

* 5.17 如题 5.17 图所示, 两个相互垂直的谐振动的合振动图形为一椭圆, 已知 x 方向的振动方程为 $x = 6\cos 2\pi t \text{cm}$, 求 y 方向的振动方程。

解: 因合振动是一正椭圆, 故知两分振动的位相差为 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$; 又, 轨道是按顺时针方向旋

转,故知两分振动位相差为 $\frac{\pi}{2}$. 所以 y 方向的振动方程为

$$y = 12 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{cm}$$



题 5.17 图

习 题 6

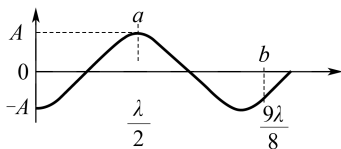
6.1 选择题

(1)一平面简谐波在弹性媒质中传播,在媒质质元从平衡位置运动到最大位移处的过程中:

- (A)它的动能转化为势能.
- (B)它的势能转化为动能.
- (C)它从相邻的一段质元获得能量其能量逐渐增大.
- (D)它把自己的能量传给相邻的一段质元,其能量逐渐减小.

[答案:D]

(2)某时刻驻波波形曲线如图所示,则 a, b 两点位相差是



- (A) π
- (B) $\pi/2$
- (C) $5\pi/4$
- (D) 0

[答案:A]

(3)设声波在媒质中的传播速度为 u ,声源的频率为 ν_s .若声源 S 不动,而接收器 R 相对于媒质以速度 V_B 沿着 S、R 连线向着声源 S 运动,则位于 S、R 连线中点的质点 P 的振动频率为

- (A) ν_s
- (B) $\frac{u+V_B}{u}\nu_s$
- (C) $\frac{u}{u+V_B}\nu_s$
- (D) $\frac{u}{u-V_B}\nu_s$

[答案:A]

6.2 填空题

(1)频率为 100 Hz,传播速度为 300 m/s 的平面简谐波,波线上两点振动的相位差为 $\pi/3$,则此两点相距_____ m。

[答案:0.5 m]

(2)一横波的波动方程是 $y = 0.02\sin 2\pi(100t - 0.4x)$ (SI),则振幅是_____,波长是_____。

_____, 频率是 _____, 波的传播速度是 _____。

[答案: 0.02 m; 2.5 m; 100 Hz; 250 m/s]

(3) 设入射波的表达式为 $y_1 = A \cos \left[2\pi \left(\nu t + \frac{x}{\lambda} \right) + \pi \right]$, 波在 $x=0$ 处反射, 反射点为一固定端, 则反射波的表达式为 _____, 驻波的表达式为 _____, 入射波和反射波合成的驻波的波腹所在处的坐标为 _____。

$$\left[\begin{array}{l} \text{答案: } y_2 = A \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right); \\ 2A \cos \left(2\pi \frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(2\pi \nu t + \frac{\pi}{2} \right) \\ x = (2k-1) \frac{\lambda}{4} \end{array} \right]$$

6.3 产生机械波的条件是什么? 两列波叠加产生干涉现象必须满足什么条件? 满足什么条件的两列波才能叠加后形成驻波? 在什么情况下会出现半波损失?

答: 产生机械波必须具备两个条件: 有作机械振动的物体即波源; 有连续的介质。

两列波叠加产生干涉现象必须满足三个相干条件: 频率相同, 振动方向相同, 在相遇点的位相差恒定。

两列波叠加后形成驻波的条件除频率相同、振动方向相同、在相遇点的位相差恒定三个相干条件外, 还要求两列波振幅相同, 在同一直线上沿相反方向传播。

出现半波损失的条件是: 波从波疏媒质入射并被波密媒质反射, 对于机械波, 还必须是正入射。

6.4 波长、波速、周期和频率这四个物理量中, 哪些量由传播介质决定? 哪些量由波源决定?

答: 波速由传播介质决定; 周期和频率由波源决定。

6.5 波速和介质质元的振动速度相同吗? 它们各表示什么意思? 波的能量是以什么速度传播的?

答: 波速和介质质元的振动速度不相同。波速是振动状态在介质中的传播速度, 而质元的振动速度是质元在其平衡位置附近运动的速度。波的能量传播的速度即为波速。

6.6 振动和波动有什么区别和联系? 平面简谐波波动方程和简谐振动方程有什么不同? 又有什么联系? 振动曲线和波形曲线有什么不同? 行波和驻波有何区别?

答: (a) 振动是指一个孤立的系统 (也可能是介质中的一个质元) 在某固定平衡位置附近所做的往复运动, 系统离开平衡位置的位移是时间的周期性函数, 即可表示为 $y = f(t)$; 波动是振动在连续介质中的传播过程, 此时介质中所有质元都在各自的平衡位置附近作振动, 因此介质中任一质元离开平衡位置的位移既是坐标位置 x , 又是时间 t 的函数, 即 $y = f(x, t)$ 。

(b) 在谐振动方程 $y = f(t)$ 中只有一个独立的变量时间 t , 它描述的是介质中一个质元偏

离平衡位置的位移随时间变化的规律;平面谐波方程 $y=f(x,t)$ 中有两个独立变量,即坐标位置 x 和时间 t ,它描述的是介质中所有质元偏离平衡位置的位移随坐标和时间变化的规律.

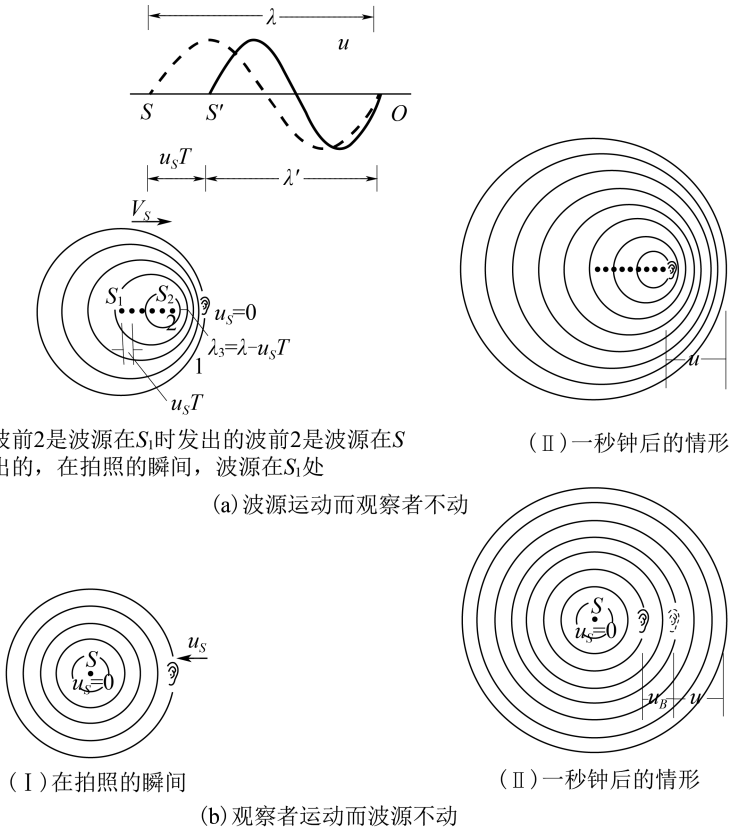
当谐波方程 $y=A\cos\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$ 中的坐标位置给定后,即可得到该点的振动方程,而波源持续不断地振动又是产生波动的必要条件之一.

(c) 振动曲线 $y=f(t)$ 描述的是一个质点的位移随时间变化的规律,因此,其纵轴为 y ,横轴为 t ;波动曲线 $y=f(x,t)$ 描述的是介质中所有质元的位移随位置,随时间变化的规律,其纵轴为 y ,横轴为 x . 每一幅图只能给出某一时刻质元的位移随坐标位置 x 变化的规律,即只能给出某一时刻的波形图,不同时刻的波动曲线就是不同时刻的波形图.

(d) 两列频率相同、振动方向相同、在相遇点的位相差恒定、振幅相同、在同一直线上沿相反方向的行波叠加后才会形成驻波. 行波伴随有能量的传播,而驻波没有能量的传播.

6.7 波源向着观察者运动和观察者向着波源运动都会产生频率增高的多普勒效应,这两种情况有何区别?

解: 波源向着观察者运动时,波面将被挤压,波在介质中的波长,将被压缩变短,(如题 6.7 图所示),因而在单位时间内接收到的完整数目 (u/λ') 会增多,所以接收频率增高;而观察者向着波源运动时,波面形状不变,但观察者测到的波速增大,即 $u'=u+v_B$,因而单位时间



题 6.7 图 多普勒效应

内通过观察者完整波的数目 $\frac{u'}{\lambda}$ 也会增多, 即接收频率也将增高. 简单地说, 前者是通过压缩波面(缩短波长)使频率增高, 后者则是观察者的运动使得单位时间内通过的波面数增加而升高频率.

6.8 已知波源在原点的一列平面简谐波, 波动方程为 $y = A \cos(Bt - Cx)$, 其中 A, B, C 为正值恒量. 求:

- (1) 波的振幅、波速、频率、周期与波长;
- (2) 写出传播方向上距离波源为 l 处一点的振动方程;
- (3) 任一时刻, 在波的传播方向上相距为 d 的两点的位相差.

解: (1) 已知平面简谐波的波动方程

$$y = A \cos(Bt - Cx) \quad (x \geq 0)$$

将上式与波动方程的标准形式

$$y = A \cos\left(2\pi\nu t - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

比较, 可知:

$$\text{波振幅为 } A, \text{ 频率 } \nu = \frac{B}{2\pi},$$

$$\text{波长 } \lambda = \frac{2\pi}{C}, \text{ 波速 } u = \lambda\nu = \frac{B}{C},$$

$$\text{波动周期 } T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{B}.$$

(2) 将 $x=1$ 代入波动方程即可得到该点的振动方程

$$y = A \cos(Bt - Cl)$$

(3) 因任一时刻 t 同一波线上两点之间的位相差为

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$$

将 $x_2 - x_1 = d$, 及 $\lambda = \frac{2\pi}{C}$ 代入上式, 即得

$$\Delta\phi = Cd.$$

6.9 沿绳子传播的平面简谐波的波动方程为 $y = 0.05 \cos(10 - \pi t - 4\pi x)$, 式中 x, y 以米计, t 以秒计. 求:

(1) 绳子上各质点振动时的最大速度和最大加速度; (2) 求 $x = 0.2 \text{ m}$ 处质点在 $t = 1 \text{ s}$ 时的位相, 它是原点在某一时刻的位相? 这一位相所代表的运动状态在 $t = 1.25 \text{ s}$ 时刻到达哪一点?

解: (1) 将题给方程与标准式

$$y = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

相比, 得振幅 $A = 0.05 \text{ m}$, 圆频率 $\omega = 10\pi$, 波长 $\lambda = 0.5 \text{ m}$, 波速 $u = \lambda\nu = \lambda \frac{\omega}{2\pi} = 2.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

绳上各点的最大振速, 最大加速度分别为

$$v_{\max} = \omega A = 10\pi \times 0.05 = 0.5\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a_{\max} = \omega^2 A = (10\pi)^2 \times 0.05 = 5\pi^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) $x=0.2 \text{ m}$ 处的振动比原点落后的时间为

$$\frac{x}{u} = \frac{0.2}{2.5} = 0.08 \text{ s}$$

故 $x=0.2 \text{ m}$, $t=1 \text{ s}$ 时的位相就是原点 ($x=0$), 在 $t_0=1-0.08=0.92 \text{ s}$ 时的位相, 即

$$\phi = 9.2\pi.$$

设这一位相所代表的运动状态在 $t=1.25 \text{ s}$ 时刻到达点, 则

$$x = x_1 + u(t - t_1) = 0.2 + 2.5(1.25 - 1.0) = 0.825 \text{ m}$$

6.10 如题 6.10 图是沿 x 轴传播的平面余弦波在 t 时刻的波形曲线. (1) 若波沿 x 轴正向传播, 该时刻 O, A, B, C 各点的振动位相是多少? (2) 若波沿 x 轴负向传播, 上述各点的振动位相又是多少?

解: (1) 波沿 x 轴正向传播, 则在 t 时刻, 有

对于 O 点: $\because y_O = 0, v_O < 0, \therefore \varphi_O = \frac{\pi}{2}$

对于 A 点: $\because y_A = +A, v_A = 0, \therefore \varphi_A = 0$

对于 B 点: $\because y_B = 0, v_B > 0, \therefore \varphi_B = -\frac{\pi}{2}$

对于 C 点: $\because y_C = 0, v_C < 0, \therefore \varphi_C = -\frac{3\pi}{2}$

(取负值: 表示 A, B, C 点位相, 应落后于 O 点的位相)

(2) 波沿 x 轴负向传播, 则在 t 时刻, 有

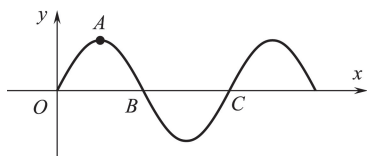
对于 O 点: $\because y'_O = 0, v'_O > 0, \therefore \varphi'_O = -\frac{\pi}{2}$

对于 A 点: $\because y'_A = +A, v'_A = 0, \therefore \varphi'_A = 0$

对于 B 点: $\because y'_B = 0, v'_B < 0, \therefore \varphi_B = \frac{\pi}{2}$

对于 C 点: $\because y'_C = 0, v'_C > 0, \therefore \varphi'_C = \frac{3\pi}{2}$

(此处取正值表示 A, B, C 点位相超前于 O 点的位相)



题 6.10 图

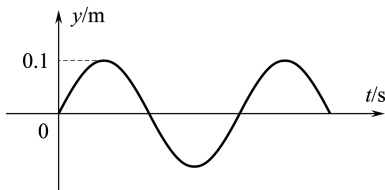
6.11 一列平面余弦波沿 x 轴正向传播, 波速为 5 m/s , 波长为 2 m , 原点处质点的振动曲线如题 6.11 图所示.

(1) 写出波动方程;

(2) 作出 $t=0$ 时的波形图及距离波源 0.5 m 处质点的振动曲线.

解: (1) 由题 6.11(a) 图知, $A=0.1 \text{ m}$, 且 $t=0$ 时, $y_0 =$

$$0, v_0 > 0, \therefore \varphi_0 = \frac{3\pi}{2},$$



题 6.11 图(a)

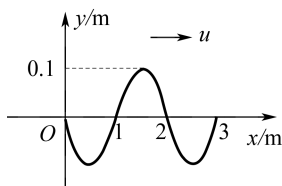
又 $v = \frac{u}{\lambda} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ Hz}$, 则 $\omega = 2\pi v = 5\pi$

取 $y = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$,

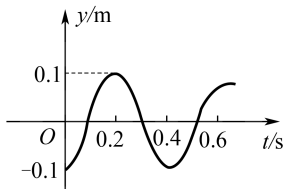
则波动方程为

$$y = 0.1 \cos \left[5\pi \left(t - \frac{x}{5} \right) + \frac{3\pi}{2} \right] \text{ m}$$

(2) $t=0$ 时的波形如题 6.11(b)图



题 6.11 图(b)



题 6.11 图(c)

将 $x=0.5 \text{ m}$ 代入波动方程, 得该点处的振动方程为

$$y = 0.1 \cos \left[5\pi t - \frac{5\pi \times 0.5}{5} + \frac{3\pi}{2} \right] = 0.1 \cos(5\pi t + \pi) \text{ m}$$

如题 6.11(c)图所示.

6.12 如题 6.12 图所示, 已知 $t=0$ 时和 $t=0.5 \text{ s}$ 时的波形曲线分别为图中曲线(a)和(b), 周期 $T > 0.5 \text{ s}$, 波沿 x 轴正向传播, 试根据图中绘出的条件求:

(1) 波动方程;

(2) P 点的振动方程.

解: (1) 由题 6.12 图可知, $A=0.1 \text{ m}$, $\lambda=4 \text{ m}$, 又,

$t=0$ 时, $y_0=0$, $v_0 < 0$, $\therefore \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, 而 $u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{0.5} = 2 \text{ m}$

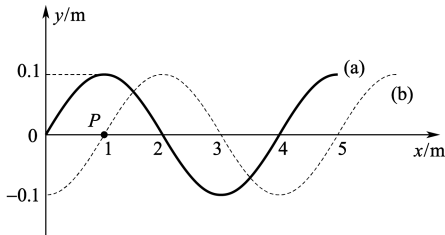
$\cdot \text{s}^{-1}$, $v = \frac{u}{\lambda} = \frac{2}{4} = 0.5 \text{ Hz}$, $\therefore \omega = 2\pi v = \pi$

故波动方程为

$$y = 0.1 \cos \left[\pi \left(t - \frac{x}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \text{ m}$$

(2) 将 $x_P = 1 \text{ m}$ 代入上式, 即得 P 点振动方程为

$$y = 0.1 \cos \left[\left(\pi t - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right] = 0.1 \cos \pi t \text{ m}$$



题 6.12 图

6.13 一列机械波沿 x 轴正向传播, $t=0$ 时的波形如题 6.13 图所示, 已知波速为 10 m/s , 波长为 2 m , 求:

(1) 波动方程;

(2) P 点的振动方程及振动曲线;

(3) P 点的坐标;

(4) P 点回到平衡位置所需的最短时间.

解: 由题 6.13 图可知 $A=0.1\text{ m}$, $t=0$ 时, $y_0=\frac{A}{2}$, $v_0<0$,

$\therefore \varphi_0=\frac{\pi}{3}$, 由题知 $\lambda=2\text{ m}$,

$u=10\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, 则 $v=\frac{u}{\lambda}=\frac{10}{2}=5\text{ Hz}$

$\therefore \omega=2\pi v=10\pi$

(1) 波动方程为

$$y=0.1\cos\left[10\pi\left(t-\frac{x}{10}\right)+\frac{\pi}{3}\right]\text{m}$$

(2) 由图知, $t=0$ 时, $y_P=-\frac{A}{2}$, $v_P<0$, $\therefore \varphi_P=-\frac{4\pi}{3}$ (P 点的位相应落后于 0 点, 故取负值)

$\therefore P$ 点振动方程为 $y_P=0.1\cos\left(10\pi t-\frac{4}{3}\pi\right)$

(3) $\therefore 10\pi\left(t-\frac{x}{10}\right)+\frac{\pi}{3}\Big|_{t=0}=-\frac{4}{3}\pi$

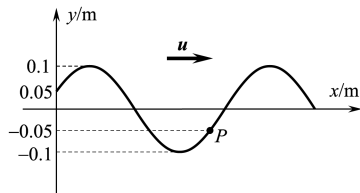
$\therefore$ 解得 $x=\frac{5}{3}=1.67\text{ m}$

(4) 根据(2)的结果可作出旋转矢量图如题 6.13 图(a), 则由 P 点回到平衡位置应经历的位相角

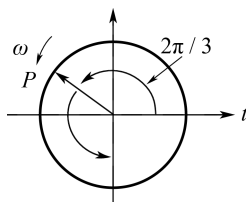
$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5}{6}\pi$$

$\therefore$ 所属最短时间为

$$\Delta t=\frac{\Delta\varphi}{\omega}=\frac{5\pi/6}{10\pi}=\frac{1}{12}\text{ s}$$



题 6.13 图

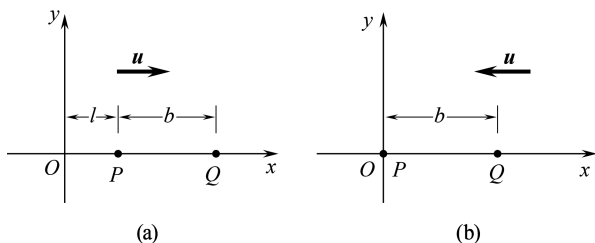


题 6.13 图(a)

6.14 如题 6.14 图所示, 有一平面简谐波在空间传播, 已知 P 点的振动方程为 $y_P=A\cos(\omega t+\varphi_0)$.

(1) 分别就图中给出的两种坐标写出其波动方程;

(2) 写出距 P 点距离为 b 的 Q 点的振动方程.



题 6.14 图

解: (1) 如题 6.14 图(a), 则波动方程为

$$y = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{l}{u} - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

如图(b), 则波动方程为

$$y = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

(2) 如题 6.14 图(a), 则 Q 点的振动方程为

$$A_Q = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{b}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

如题 6.14 图(b), 则 Q 点的振动方程为

$$A_Q = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{b}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

6.15 已知平面简谐波的波动方程为 $y = A \cos \pi(4t + 2x)$ (SI).

(1) 写出 $t = 4.2$ s 时各波峰位置的坐标式, 并求此时离原点最近一个波峰的位置, 该波峰何时通过原点?

(2) 画出 $t = 4.2$ s 时的波形曲线.

解: (1) 波峰位置坐标应满足

$$\pi(4t + 2x) = 2k\pi$$

解得 $x = (k - 8.4) \text{ m}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

所以离原点最近的波峰位置为 -0.4 m .

$\because 4\pi t + 2\pi x = \omega t + \frac{\omega x}{u}$ 故知 $u = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,

$\therefore \Delta t' = \frac{-0.4}{2} = -0.2 \text{ s}$, 这就是说该波峰在 0.2 s 前通过原点, 那么从计时时刻算起, 则应是 $4.2 - 0.2 = 4 \text{ s}$, 即该波峰是在 4 s 时通过原点的.

(2) $\because \omega = 4\pi, u = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \therefore \lambda = uT = u \frac{2\pi}{\omega} = 1 \text{ m}$, 又 $x = 0$ 处, $t = 4.2 \text{ s}$ 时,

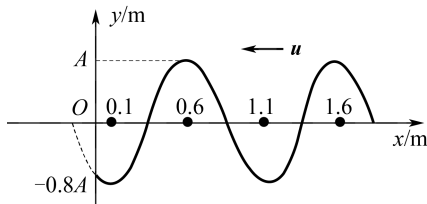
$$\varphi_0 = 4.2 \times 4\pi = 16.8\pi$$

$$y_0 = A \cos 4\pi \times 4.2 = -0.8A$$

又, 当 $y = -A$ 时, $\varphi_x = 17\pi$, 则应有

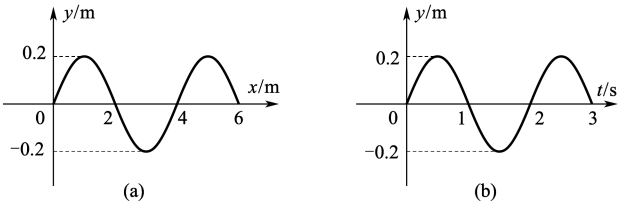
$$16.8\pi + 2\pi x = 17\pi$$

解得 $x = 0.1 \text{ m}$, 故 $t = 4.2 \text{ s}$ 时的波形图如题 6.15 图所示。



题 6.15 图

6.16 题 6.16 图中(a)表示 $t=0$ 时刻的波形图,(b)表示原点($x=0$)处质元的振动曲线,试求此波的波动方程,并画出 $x=2\text{ m}$ 处质元的振动曲线.



题 6.16 图

解: 由题 6.16(b)图所示振动曲线可知 $T=2\text{ s}$, $A=0.2\text{ m}$, 且 $t=0$ 时, $y_0=0, v_0>0$, 故知 $\varphi_0=-\frac{\pi}{2}$, 再结合题 6.16(a)图所示波动曲线可知, 该列波沿 x 轴负向传播,

且 $\lambda=4\text{ m}$, 若取 $y=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi_0\right]$ 则波动方程为

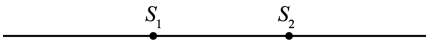
$$y=0.2\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{2}+\frac{x}{4}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

6.17 一平面余弦波,沿直径为 14 cm 的圆柱形管传播,波的强度为 $18.0\times10^{-3}\text{ J}/(\text{m}^2\cdot\text{s})$, 频率为 300 Hz , 波速为 300 m/s , 求波的平均能量密度和最大能量密度.

解: $\because I=\overline{w}u$
 $\therefore \overline{w}=\frac{I}{u}=18.0\times\frac{10^{-3}}{300}=6\times10^{-5}\text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$
 $w_{\max}=2\overline{w}=1.2\times10^{-4}\text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$

6.18 如题 6.18 图所示, S_1 和 S_2 为两相干波源, 振幅均为 A_1 , 相距 $\frac{\lambda}{4}$, S_1 较 S_2 位相超前 $\frac{\pi}{2}$, 求:

- (1) S_1 外侧各点的合振幅和强度;
- (2) S_2 外侧各点的合振幅和强度



题 6.18 图

解: (1) 在 S_1 外侧, 距离 S_1 为 r_1 的点, S_1S_2 传到该 P 点引起的位相差为

$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{\lambda}\left[r_1-\left(r_1+\frac{\lambda}{4}\right)\right]=\pi$$

$$A=A_1-A_1=0, I=A^2=0$$

(2) 在 S_2 外侧, 距离 S_2 为 r_1 的点, S_1S_2 传到该点引起的位相差.

$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{\lambda}\left(r_2+\frac{\lambda}{4}-r_2\right)=0$$

$$A = A_1 + A_1 = 2A_1, I = A^2 = 4A_1^2$$

6.19 如题 6.19 图所示, 设 B 点发出的平面横波沿 BP 方向传播, 它在 B 点的振动方程为 $y_1 = 2 \times 10^{-3} \cos 2\pi t$; C 点发出的平面横波沿 CP 方向传播, 它在 C 点的振动方程为 $y_2 = 2 \times 10^{-3} \cos(2\pi t + \pi)$, 本题中 y 以 m 计, t 以 s 计. 设 $BP = 0.4 \text{ m}$, $CP = 0.5 \text{ m}$, 波速 $u = 0.2 \text{ m/s}$, 求:

(1) 两波传到 P 点时的位相差;

(2) 当这两列波的振动方向相同时, P 处合振动的振幅;

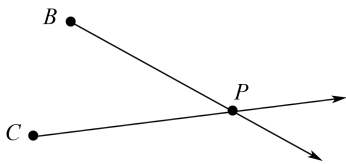
解: (1) $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{2\pi}{\lambda}(\overline{CP} - \overline{BP})$

$$= \pi - \frac{\omega}{u}(\overline{CP} - \overline{BP})$$

$$= \pi - \frac{2\pi}{0.2}(0.5 - 0.4) = 0$$

(2) P 点是相长干涉, 且振动方向相同, 所以

$$A_P = A_1 + A_2 = 4 \times 10^{-3} \text{ m}$$

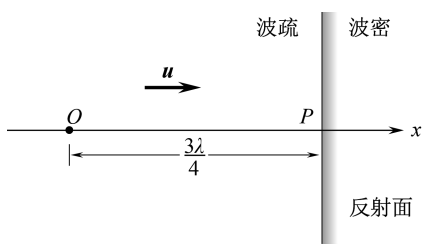


题 6.19 图

6.20 一平面简谐波沿 x 轴正向传播, 如题 6.20 图所示. 已知振幅为 A , 频率为 ν , * 波速为 u .

(1) 若 $t=0$ 时, 原点 O 处质元正好由平衡位置向位移正方向运动, 写出此波的波动方程;

(2) 若从分界面反射的波的振幅与入射波振幅相等, 试写出反射波的波动方程, 并求 x 轴上因入射波与反射波干涉而静止的各点的位置.



题 6.20 图

解: (1) $\because t=0$ 时, $y_0=0, v_0>0, \therefore \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ 故波动方程为

$$y = A \cos \left[2\pi \nu \left(t - \frac{x}{u} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \text{ m}$$

(2) 入射波传到反射面时的振动位相为 (即将 $x = \frac{3}{4}\lambda$ 代入) $-\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{3}{4}\lambda - \frac{\pi}{2}$, 再考虑到波由波疏入射而在波密界面上反射, 存在半波损失, 所以反射波在界面处的位相为

$$-\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{3}{4}\lambda - \frac{\pi}{2} + \pi = -\pi$$

若仍以 O 点为原点, 则反射波在 O 点处的位相为 $-\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{3}{4}\lambda - \pi = -\frac{5}{2}\pi$, 因只考虑 2π 以内的位相角, $\therefore$ 反射波在 O 点的位相为 $-\frac{\pi}{2}$, 故反射波的波动方程为

$$y_{\text{反}} = A \cos \left[2\pi \nu \left(t + \frac{x}{u} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

此时驻波方程为

$$\begin{aligned}
 y &= A \cos \left[2\pi v \left(t - \frac{x}{u} \right) - \frac{\pi}{2} \right] + A \cos \left[2\pi v \left(t + \frac{x}{u} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \\
 &= 2A \cos \frac{2\pi v x}{u} \cos \left(2\pi v t - \frac{\pi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

故波节位置为

$$\frac{2\pi v x}{u} = \frac{2\pi}{\lambda} x = (2k+1) \frac{\pi}{2}$$

$$\text{故 } x = (2k+1) \frac{\lambda}{4} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

根据题意, k 只能取 $0, 1$, 即 $x = \frac{1}{4}\lambda, \frac{3}{4}\lambda$

6.21 一驻波方程为 $y = 0.02 \cos 20x \cos 750t$ (SI), 求:

(1) 形成此驻波的两列行波的振幅和波速;

(2) 相邻两波节间距离.

解: (1) 取驻波方程为

$$y = 2A \cos \frac{2\pi v x}{u} \cos 2\pi v t$$

$$\text{故知 } A = \frac{0.02}{2} = 0.01 \text{ m}$$

$$2\pi v = 750, \text{ 则 } v = \frac{750}{2\pi}, \frac{2\pi v}{u} = 20$$

$$\therefore u = \frac{2\pi v}{20} = \frac{2\pi \times 750 / 2\pi}{20} = 37.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$(2) \because \lambda = \frac{u}{v} = \frac{2\pi v / 20}{v} = 0.1\pi = 0.314 \text{ m} \text{ 所以相邻两波节间距离}$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} = 0.157 \text{ m}$$

6.22 在弦上传播的横波, 它的波动方程为 $y_1 = 0.1 \cos(13t + 0.0079x)$ (SI)

试写出一个波动方程, 使它表示的波能与这列已知的横波叠加形成驻波, 并在 $x=0$ 处为波节.

解: 为使合成驻波在 $x=0$ 处形成波节, 则要反射波在 $x=0$ 处与入射波有 π 的位相差, 故反射波的波动方程为

$$y_2 = 0.1 \cos(13t - 0.0079x - \pi)$$

6.23 两列波在一根很长的细绳上传播, 它们的波动方程分别为

$$y_1 = 0.06 \cos(\pi x - 4\pi t) \text{ (SI)}, y_2 = 0.06 \cos(\pi x + 4\pi t) \text{ (SI)}.$$

(1) 试证明绳子将作驻波式振动, 并求波节、波腹的位置;

(2) 波腹处的振幅多大? $x=1.2 \text{ m}$ 处振幅多大?

解: (1) 它们的合成波为

$$y = 0.06 \cos(\pi x - 4\pi t) + 0.06 \cos(\pi x + 4\pi t)$$

$$=0.12\cos\pi x\cos 4\pi t$$

出现了变量的分离,符合驻波方程特征,故绳子在作驻波振动.

令 $\pi x=k\pi$, 则 $x=k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 此即波腹的位置;

令 $\pi x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, 则 $x=(2k+1)\frac{1}{2}, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 此即波节的位置.

(2) 波腹处振幅最大, 即为 0.12m ; $x=1.2\text{ m}$ 处的振幅由下式决定, 即

$$A_{\text{驻}} = |0.12\cos(\pi \times 1.2)| = 0.097\text{ m}$$

6.24 汽车驶过车站时, 车站上的观测者测得汽笛声频率由 1200 Hz 变到了 1000 Hz , 设空气中声速为 330 m/s , 求汽车的速率.

解: 设汽车的速度为 v_s , 汽车在驶近车站时, 车站收到的频率为

$$v_1 = \frac{u}{u - v_s} v_0$$

汽车驶离车站时, 车站收到的频率为 $v_2 = \frac{u}{u + v_s} v_0$

联立以上两式, 得

$$v_s = u \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} = 330 \times \frac{1200 - 1000}{1200 + 1000} = 30\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

6.25 两列火车分别以 72 km/h 和 54 km/h 的速度相向而行, 第一列火车发出一个 600 Hz 的汽笛声, 若声速为 340 m/s , 求第二列火车上的观测者听见该声音的频率在相遇前和相遇后分别是多少?

解: 鸣笛火车的车速为 $v_1 = 20\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 接收鸣笛的火车车速为 $v_2 = 15\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 则两者相遇前收到的频率为

$$v_1 = \frac{u + v_2}{u - v_1} v_0 = \frac{340 + 15}{340 - 20} \times 600 = 665\text{ Hz}$$

两车相遇之后收到的频率为

$$v_1 = \frac{u - v_2}{u + v_1} v_0 = \frac{340 - 15}{340 + 20} \times 600 = 541\text{ Hz}$$

习 题 7

7.1 选择题

(1) 容器中贮有一定量的理想气体, 气体分子的质量为 m , 当温度为 T 时, 根据理想气体的分子模型和统计假设, 分子速度在 x 方向的分量平方的平均值是:

$$(A) \overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (B) \overline{v_x^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

$$(C) \overline{v_x^2} = \frac{3kT}{m}. \quad (D) \overline{v_x^2} = \frac{kT}{m}.$$

[答案: D. $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$, $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$, $\overline{v^2} = \frac{3kT}{m}$.]

(2) 一瓶氢气和一瓶氮气的密度相同, 分子平均平动动能相同, 而且都处于平衡状态, 则它们

- (A) 温度相同、压强相同.
- (B) 温度、压强都不相同.
- (C) 温度相同, 但氢气的压强大于氮气的压强.
- (D) 温度相同, 但氢气的压强小于氮气的压强.

[答案: C. 由 $\overline{w} = \frac{3}{2} kT$, $\overline{w}_{\text{氢}} = \overline{w}_{\text{氮}}$, 得 $T_{\text{氢}} = T_{\text{氮}}$;

由 $\rho = \frac{pM_{\text{mol}}}{RT}$, $\rho_{\text{氢}} = \rho_{\text{氮}}$, $T_{\text{氢}} = T_{\text{氮}}$, 而 $M_{\text{mol 氢}} < M_{\text{mol 氮}}$, 故 $p_{\text{氢}} > p_{\text{氮}}$.]

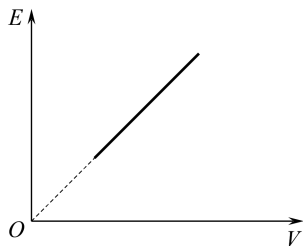
(3) 在标准状态下, 氧气和氮气体积比为 $V_1/V_2 = 1/2$, 都视为刚性分子理想气体, 则其内能之比 E_1/E_2 为:

- (A) 3 / 10. (B) 1 / 2.
- (C) 5 / 6. (D) 5 / 3.

[答案: C. 由 $E = \frac{M}{M_{\text{mol}}} \frac{i}{2} RT = \frac{i}{2} pV$, 得 $\frac{E_1}{E_2} = \frac{i_1 p V_1}{i_2 p V_2} = \frac{i_1}{i_2} \cdot \frac{V_1}{V_2}$

$= \frac{5}{6}$.]

(4) 一定质量的理想气体的内能 E 随体积 V 的变化关系为一直线, 其延长线过 $E \sim V$ 图的原点, 题 7.1 图所示, 则此直线表示的过程为:



题 7.1 图

- (A) 等温过程. (B) 等压过程.
(C) 等体过程. (D) 绝热过程.

[答案: B. 由图得 $E = kV$, 而 $E = \frac{i}{2} pV$, i 不变, $k = \frac{i}{2} p$ 为一常数.]

- (5) 在恒定不变的压强下, 气体分子的平均碰撞频率 $\bar{Z}$ 与气体的热力学温度 T 的关系为
(A) $\bar{Z}$ 与 T 无关. (B) $\bar{Z}$ 与 T 成正比.
(C) $\bar{Z}$ 与 $\sqrt{T}$ 成反比. (D) $\bar{Z}$ 与 $\sqrt{T}$ 成正比.

[答案: C. $\bar{Z} = \sqrt{2} \pi d^2 \bar{v} n = \sqrt{2} \pi d^2 \cdot \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{mol}}} \cdot \frac{p}{kT} \propto \frac{1}{\sqrt{T}}$.]

7.2 填空题

(1) 某容器内分子数密度为 10^{26} m^{-3} , 每个分子的质量为 $3 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 设其中 $1/6$ 分子数以速率 $v = 200 \text{ m/s}$ 垂直地向容器的一壁运动, 而其余 $5/6$ 分子或者离开此壁、或者平行此壁方向运动, 且分子与容器壁的碰撞为完全弹性的. 则每个分子作用于器壁的冲量 $\Delta P =$ _____; 每秒碰在器壁单位面积上的分子数 $n_0 =$ _____; 作用在器壁上的压强 $p =$ _____.

[答案: $\Delta P = -[(-mv_{ix}) - mv_{ix}] = 2mv_{ix} = 1.2 \times 10^{-24} \text{ kg m/s}$
 $n_0 = \frac{n/6}{\Delta t} = \frac{n/6}{1/v} = \frac{1}{6} n \times v = \frac{1}{3} \times 10^{28} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$;
 或 $n_0 = \frac{n_x \times v \times \Delta S}{\Delta S} = n_x v = \frac{1}{6} \times 10^{26} \times 200$
 或 $n_0 = \frac{N}{6l_2 l_3 \Delta t} = \frac{N}{6l_2 l_3 (l_1/v)} = \frac{n/6}{1/v} = \frac{1}{6} n \times v$ (见教材图 7.2)
 $p = n_0 \Delta P = 4 \times 10^3 \text{ Pa}$
 或 $p = \frac{1}{3} n m \bar{v}^2 = \frac{1}{3} \times 10^{26} \times 3 \times 10^{-27} \times 200^2 = 4 \times 10^3 \text{ Pa}$.]

(2) 有一瓶质量为 M 的氢气, 温度为 T , 视为刚性分子理想气体, 则氢分子的平均平动动能为 _____, 氢分子的平均动能为 _____, 该瓶氢气的内能为 _____.

[答案: $\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} kT$, $\bar{\epsilon} = \frac{i}{2} kT = \frac{5}{2} kT$, $E = \frac{M}{M_{mol}} \frac{i}{2} RT = \frac{5}{2} \frac{M}{M_{mol}} RT$]

(3) 容积为 $3.0 \times 10^2 \text{ m}^3$ 的容器内贮有某种理想气体 20 g , 设气体的压强为 0.5 atm . 则气体分子的最概然速率 _____, 平均速率 _____ 和方均根速率 _____.

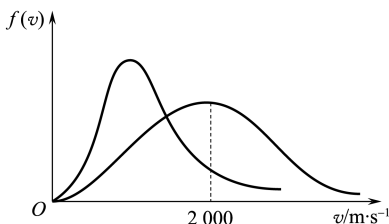
[答案: 由理想气体状态方程 $\frac{pV}{M} = \frac{RT}{M_{mol}}$

可得 $v_p = 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M_{mol}}} = 1.41 \sqrt{\frac{pV}{M}} = 3.89 \times 10^2 \text{ m/s}$

$\bar{v} = 1.60 \sqrt{\frac{RT}{M_{mol}}} = 1.60 \sqrt{\frac{pV}{M}} = 4.41 \times 10^2 \text{ m/s}$

$$\sqrt{v^2} = 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M_{mol}}} = 1.73 \sqrt{\frac{pV}{M}} = 4.77 \times 10^2 \text{ m/s}$$

(4) 题 7.2 图所示的两条 $f(v) \sim v$ 曲线分别表示氢气和氧气在同一温度下的麦克斯韦速率分布曲线. 由此可得氢气分子的最概然速率为 _____; 氧气分子的最概然速率为 _____.



题 7.2 图

[答案: 由 $v_p = 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M_{mol}}}$, 及 $M_{mol \text{ 氢}} < M_{mol \text{ 氧}}$ 可知, $v_{p \text{ 氢}} = 2000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;

$$\text{又 } \frac{v_{p \text{ 氧}}}{v_{p \text{ 氢}}} = \sqrt{\frac{M_{mol \text{ 氢}}}{M_{mol \text{ 氧}}}}, \text{ 得 } v_{p \text{ 氧}} = v_{p \text{ 氢}} \sqrt{\frac{M_{mol \text{ 氢}}}{M_{mol \text{ 氧}}}} = 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

(5) 一定量的某种理想气体, 当体积不变, 温度升高时, 则其平均自由程 $\bar{\lambda}$ _____, 平均碰撞频率 $\bar{Z}$ _____。(减少、增大、不变)

[答案: 体积不变, n 不变, 由 $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$ 可知, $\bar{\lambda}$ 不变

体积不变, n 不变, 但 T 升高, $\bar{v}$ 增大, 由 $\bar{Z} = \sqrt{2} \pi d^2 \bar{v} n$ 可知, $\bar{Z}$ 增大.]

7.3 气体在平衡态时有何特征? 气体的平衡态与力学中的平衡态有何不同?

答: 平衡态是指热力学系不受外界影响的条件下, 系统的宏观性质不随时间变化状态。

平衡态是动态平衡, 当系统处于平衡态时, 组成系统的大量粒子仍在不停地、无规则地运动着, 大量粒子运动的平均效果不变。而个别粒子所受合外力可以不为零。而力学平衡态时, 物体保持静止或匀速直线运动, 所受合外力为零。

7.4 气体动理论的研究对象是什么? 理想气体的宏观模型和微观模型各如何?

答: 气体动理论的研究对象是大量微观粒子组成的系统. 是从物质的微观结构和分子运动论出发, 运用力学规律, 通过统计平均的办法, 求出热运动的宏观结果, 再由实验确认的方法。

从宏观看, 在温度不太低, 压强不大时, 实际气体都可近似地当作理想气体来处理, 压强越低, 温度越高, 这种近似的准确度越高. 理想气体的微观模型是把分子看成弹性的自由运动的质点。

7.5 何谓微量量? 何谓宏观量? 它们之间有什么联系?

答: 用来描述个别微观粒子特征的物理量称为微量量. 如微观粒子(原子、分子等)的大小、

质量、速度、能量等.

描述大量微观粒子(分子或原子)的集体的物理量叫宏观量,如实验中观测得到的气体体积、压强、温度、热容量等都是宏观量.

气体宏观量是微观量统计平均的结果.

7.6 计算下列一组粒子平均速率和方均根速率?

N_i	21	4	6	8	2
$v_i(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	10.0	20.0	30.0	40.0	50.0

解:平均速率

$$\bar{v} = \frac{\sum N_i v_i}{\sum N_i} = \frac{21 \times 10 + 4 \times 20 + 6 \times 30 + 8 \times 40 + 2 \times 50}{21 + 4 + 6 + 8 + 2} = 21.7 \text{ m/s}$$

方均根速率

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{\sum N_i v_i^2}{\sum N_i}} = \sqrt{\frac{21 \times 10^2 + 4 \times 20^2 + 6 \times 30^2 + 8 \times 40^2 + 2 \times 50^2}{21 + 4 + 6 + 8 + 2}} = 25.6 \text{ m/s}$$

7.7 速率分布函数 $f(v)$ 的物理意义是什么? 试说明下列各量的物理意义(n 为分子数密度, N 为系统总分子数).

(1) $f(v)dv$

(2) $nf(v)dv$

(3) $Nf(v)dv$

(4) $\int_0^v f(v)dv$

(5) $\int_0^\infty f(v)dv$

(6) $\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv$

答: $f(v) = \frac{1}{N} \frac{dN}{dv}$: 表示一定质量的气体, 在温度为 T 的平衡态时, 分布在速率 v 附近单位速率区间内的分子数占总分子数的百分比.

(1) $f(v)dv = \frac{dN}{N}$ 表示分布在速率 v 附近, 速率区间 dv 内的分子数占总分子数的百分比.

(2) $Nf(v)dv = \frac{f(v)Ndv}{V} = \frac{dN}{V}$ 表示分布在速率 v 附近、速率区间 dv 内的分子数密度.

(3) $Nf(v)dv = dN$ 表示分布在速率 v 附近、速率区间 dv 内的分子数.

(4) $\int_0^v f(v)dv = \frac{1}{N} \int_0^v dN$ 表示分布在 $v_1 \sim v_2$ 区间内的分子数占总分子数的百分比.

(5) $\int_0^\infty f(v)dv = 1$ 表示分布在 $0 \sim \infty$ 的速率区间内所有分子, 其与总分子数的比值是 1.

(6) $\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv = \int_{v_1}^{v_2} dN$ 表示分布在 $v_1 \sim v_2$ 区间内的分子数.

7.8 最概然速率的物理意义是什么? 方均根速率、最概然速率和平均速率, 它们各有何用处?

答: 气体分子速率分布曲线有个极大值, 与这个极大值对应的速率叫做气体分子的最概然

速率. 物理意义是: 对所有的相等速率区间而言(或在单位速率区间内), 在含有 v_p 的那个速率区间内的分子数占总分子数的百分比最大.

分布函数的特征用最概然速率 v_p 表示; 讨论分子的平均平动能用方均根速率, 讨论平均自由程用平均速率.

7.9 容器中盛有温度为 T 的理想气体, 试问该气体分子的平均速度是多少? 为什么?

答: 该气体分子的平均速度为 0. 在平衡态, 由于分子不停地与其他分子及容器壁发生碰撞、其速度也不断地发生变化, 分子具有各种可能的速度, 而每个分子向各个方向运动的概率是相等的, 沿各个方向运动的分子数也相同. 从统计看气体分子的平均速度是 0.

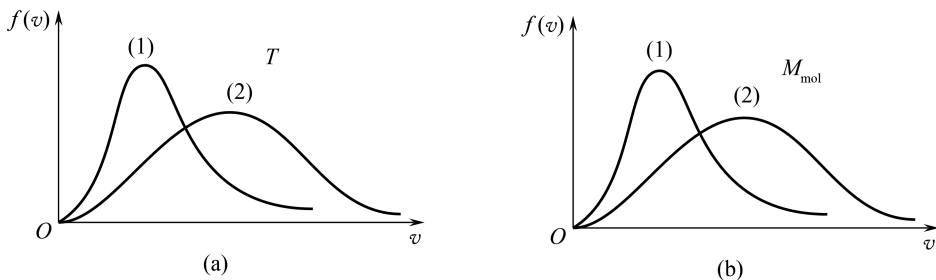
7.10 在同一温度下, 不同气体分子的平均平动能相等, 就氢分子和氧分子比较, 氧分子的质量比氢分子大, 所以氢分子的速率一定比氧分子大, 对吗?

答: 不对, 平均平动能相等是统计平均的结果. 分子速率由于不停地发生碰撞而发生变化, 分子具有各种可能的速率, 因此, 一些氢分子的速率比氧分子速率大, 也有一些氢分子的速率比氧分子速率小.

7.11 如果盛有气体的容器相对某坐标系运动, 容器内的分子速度相对这坐标系也增大了, 温度也因此而升高吗?

答: 宏观量温度是一个统计概念, 是大量分子无规则热运动的集体表现, 是分子平均平动能的量度, 分子热运动是相对质心参照系的, 平动能是系统的内动能. 温度与系统的整体运动无关. 只有当系统的整体运动的动能转变成无规则热运动时, 系统温度才会变化.

7.12 题 7.12 图(a)是氢和氧在同一温度下的两条麦克斯韦速率分布曲线, 哪一条代表氢? 题 7.12 图(b)是某种气体在不同温度下的两条麦克斯韦速率分布曲线, 哪一条的温度较高?



题 7.12 图

答: 用 $v_p = 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M_{mol}}}$ 来判断. 图(a)中(1)表示氧, (2)表示氢; 图(b)中(2)温度高.

7.13 温度概念的适用条件是什么? 温度微观本质是什么?

答: 温度是大量分子无规则热运动的集体表现, 是一个统计概念, 对个别分子无意义. 温度

微观本质是大量分子平均平动动能的量度.

7.14 下列系统各有多少个自由度:

- (1) 在一平面上滑动的粒子;
- (2) 可以在一平面上滑动并可围绕垂直于平面的轴转动的硬币;
- (3) 一弯成三角形的金属棒在空间自由运动.

答: (1) 2, (2) 3, (3) 6.

7.15 试说明下列各量的物理意义.

- (1) $\frac{1}{2}kT$
- (2) $\frac{3}{2}kT$
- (3) $\frac{i}{2}kT$
- (4) $\frac{M}{M_{\text{mol}}} \frac{i}{2}RT$
- (5) $\frac{i}{2}RT$
- (6) $\frac{3}{2}RT$

答: (1) $\frac{1}{2}kT$ 表示在平衡态下, 分子热运动能量平均地分配在分子每一个自由度上的能量.

(2) $\frac{3}{2}kT$ 表示在平衡态下, 分子的平均平动动能(或单原子分子的平均能量).

(3) $\frac{i}{2}kT$ 表示在平衡态下, 自由度为 i 的分子平均总能量均为.

(4) $\frac{M}{M_{\text{mol}}} \frac{i}{2}RT$ 表示由质量为 M , 摩尔质量为 M_{mol} , 自由度为 i 的分子组成的系统的内能.

(5) $\frac{i}{2}RT$ 表示 1 摩尔自由度为 i 的分子组成的系统内能.

(6) $\frac{3}{2}RT$ 表示 1 摩尔自由度为 3 分子组成的系统的内能, 或者说热力学体系内, 1 摩尔分子的平均平动动能之总和.

7.16 有两种不同的理想气体, 同压、同温而体积不等, 试问下述各量是否相同?

(1) 分子数密度; (2) 气体质量密度; (3) 单位体积内气体分子总平动动能; (4) 单位体积内气体分子的总动能.

答: (1) 由 $p = nkT$, $n = \frac{p}{kT}$ 知分子数密度相同;

(2) 由 $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M_{\text{mol}} p}{RT}$ 知气体质量密度不相同;

(3) 由 $n \frac{3}{2}kT$ 知单位体积内气体分子总平动动能相同;

(4) 由 $n \frac{i}{2}kT$ 知单位体积内气体分子的总动能不一定相同.

7.17 何谓理想气体的内能? 为什么理想气体的内能是温度的单值函数?

答: 理想气体内, 分子各种运动能量的总和称为理想气体的内能.

在不涉及化学反应,核反应,电磁变化的情况下,内能是指分子的热运动能量和分子间相互作用势能之总和.对于理想气体不考虑分子间相互作用能量,质量为 M 的理想气体的所有分子的热运动能量称为理想气体的内能.

由于理想气体不计分子间相互作用,内能仅为热运动能量之总和.即

$$E = \frac{M}{M_{\text{mol}}} \frac{i}{2} RT \text{ 是温度的单值函数.}$$

因为气体内部分子永远不停地运动着,所以内能不会等于零.

7.18 如果氢和氦的摩尔数和温度相同,则下列各量是否相等,为什么?

(1) 分子的平均平动动能; (2) 分子的平均动能; (3) 内能.

解: (1) 相等, 分子的平动自由度相同, 平均平动动能都为 $\frac{3}{2}kT$.

(2) 不相等, 因为平均动能为 $\frac{i}{2}kT$, 而氢分子的自由度为 $i=5$, 氦分子的自由度为 $i=3$.

(3) 不相等, 因为分子的内能 $\propto \frac{i}{2}RT$, 理由同(2)

7.19 有一水银气压计, 当水银柱为 0.76m 高时, 管顶离水银柱液面 0.12m , 管的截面积为 $2.0 \times 10^{-4}\text{m}^2$, 当有少量氦(He)混入水银管内顶部, 水银柱高下降为 0.6m , 此时温度为 27°C , 试计算有多少质量氦气在管顶(He 的摩尔质量为 0.004kg/mol)?

解: 由理想气体状态方程 $pV = \frac{M}{M_{\text{mol}}}RT$ 得

$$M = M_{\text{mol}} \frac{pV}{RT}$$

汞的重度 $d_{\text{Hg}} = 1.33 \times 10^5 \text{N} \cdot \text{m}^{-3}$

氦气的压强 $p = (0.76 - 0.60) \times d_{\text{Hg}}$

氦气的体积 $V = (0.88 - 0.60) \times 2.0 \times 10^{-4} \text{m}^3$

$$M = 0.004 \times \frac{(0.76 - 0.60) \times d_{\text{Hg}} \times (0.88 - 0.60) \times 2.0 \times 10^{-4}}{8.31 \times (273 + 27)} = 1.91 \times 10^{-6} \text{Kg}$$

7.20 设有 N 个粒子的系统, 其速率分布如题 7.20 图所示. 求

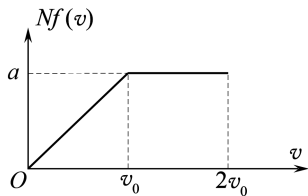
(1) 分布函数 $f(v)$ 的表达式;

(2) a 与 v_0 之间的关系;

(3) 速度在 $1.5v_0$ 到 $2.0v_0$ 之间的粒子数.

(4) 粒子的平均速率.

(5) $0.5v_0$ 到 v_0 区间内粒子平均速率.



题 7.20 图

解: (1) 从图上可得分布函数表达式

$$\begin{cases} Nf(v) = av/v_0 & (0 \leq v \leq v_0) \\ Nf(v) = a & (v_0 \leq v \leq 2v_0) \\ Nf(v) = 0 & (v \geq 2v_0) \end{cases}$$

$$f(v) = \begin{cases} av/Nv_0 & (0 \leq v \leq v_0) \\ a/N & (v_0 \leq v \leq 2v_0) \\ 0 & (v \geq 2v_0) \end{cases}$$

(2) $f(v)$ 满足归一化条件, 但这里纵坐标是 $Nf(v)$ 而不是 $f(v)$, 故曲线下的总面积为 N . 由归一化条件

$$\int_0^{v_0} N \frac{av}{v_0} dv + N \int_{v_0}^{2v_0} a dv = N,$$

可得 $a = \frac{2N}{3v_0}$

(3) 可通过面积计算 $\Delta N = a \times (2v_0 - 1.5v_0) = \frac{1}{3}N$

(4) N 个粒子平均速率

$$\bar{v} = \int_0^\infty vf(v) dv = \frac{1}{N} \int_0^\infty vNf(v) dv = \int_0^{v_0} \frac{av^2}{v_0} dv + \int_{v_0}^{2v_0} av dv$$

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{3} av_0^2 + \frac{3}{2} av_0^2 \right) = \frac{11}{9} v_0$$

(5) $0.5v_0$ 到 v_0 区间内粒子数

$$N_1 = \frac{1}{2}(a + 0.5a)(v_0 - 0.5v_0) = \frac{3}{8}av_0 = \frac{1}{4}N$$

$0.5v_0$ 到 v_0 区间内粒子平均速率

$$\bar{v} = \frac{\int_{0.5v_0}^{v_0} v dN}{N_1} = \frac{N}{N_1} \int_{0.5v_0}^{v_0} \frac{v dN}{N} = \frac{N}{N_1} \int_{0.5v_0}^{v_0} vf(v) dv$$

$$\bar{v} = \frac{N}{N_1} \int_{0.5v_0}^{v_0} \frac{av^2}{Nv_0} dv = \frac{1}{N_1} \int_{0.5v_0}^{v_0} \frac{av^2}{v_0} dv = \frac{1}{N_1} \left(\frac{av_0^3}{3v_0} - \frac{av_0^3}{24v_0} \right) = \frac{1}{N_1} \frac{7av_0^2}{24}$$

$$\bar{v} = \frac{7av_0^2}{6N} = \frac{7v_0}{9}$$

7.21 试计算理想气体分子热运动速率的大小介于 $v_p - v_p/100$ 与 $v_p + v_p/100$ 之间的分子数占总分子数的百分比。

解: 令 $u = \frac{v}{v_p}$, 则麦克斯韦速率分布函数可表示为

$$\frac{dN}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2} du$$

因为 $u = 1, \Delta u = 0.02$

由

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2} \Delta u$$

得
$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \times 1 \times e^{-1} \times 0.02 = 1.66\%$$

7.22 容器中储有氧气,其压强为 $P=0.1 \text{ MPa}$ (即 1 atm)温度为 27°C 求

(1)单位体积中的分子数 n ; (2) 氧分子的质量 m ; (3) 气体密度 ρ ; (4) 分子间的平均距离 $\bar{e}$; (5) 平均速率 $\bar{v}$; (6) 方根速率 $\sqrt{v^2}$; (7) 分子的平均动能 $\bar{\epsilon}$ 。

解:(1)由气体状态方程 $p=nkT$ 得

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{0.1 \times 1.013 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} = 2.45 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$$

(2)氧分子的质量

$$m = \frac{M_{\text{mol}}}{N_0} = \frac{0.032}{6.02 \times 10^{23}} = 5.32 \times 10^{-26} \text{ Kg}$$

(3)由气体状态方程 $pV = \frac{M}{M_{\text{mol}}}RT$ 得

$$\rho = \frac{M_{\text{mol}} p}{RT} = \frac{0.032 \times 0.1 \times 1.013 \times 10^5}{8.31 \times 300} = 0.13 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

(4)分子间的平均距离可近似计算

$$\bar{e} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2.45 \times 10^{24}}} = 7.42 \times 10^{-9} \text{ m}$$

(5)平均速率

$$\bar{v} = 1.60 \sqrt{\frac{RT}{M_{\text{mol}}}} \approx 1.60 \sqrt{\frac{8.31 \times 300}{0.032}} = 446.58 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(6)方均根速率

$$\sqrt{v^2} \approx 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M_{\text{mol}}}} = 482.87 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(7)氧分子的平均动能

$$\bar{\epsilon} = \frac{5}{2}kT = \frac{5}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 = 1.04 \times 10^{-20} \text{ J}$$

7.23 1 mol 氢气,在温度为 27°C 时,它的平动动能、转动动能和内能各是多少?

解:理想气体分子的能量

$$E = v \frac{i}{2} RT$$

平动动能 $t=3 \quad E_t = \frac{3}{2} \times 8.31 \times 300 = 3739.5 \text{ J}$

转动动能 $r=2 \quad E_r = \frac{2}{2} \times 8.31 \times 300 = 2493 \text{ J}$

内能 $i=5 \quad E_i = \frac{5}{2} \times 8.31 \times 300 = 6232.5 \text{ J}$

7.24 一瓶氧气,一瓶氢气,等压、等温,氧气体积是氢气的 2 倍,求(1)氧气和氢气分子数

密度之比;(2)氧分子和氢分子的平均速率之比。

解:(1)因为 $p=nkT$ 则

$$\frac{n_O}{n_H}=1$$

(2)由平均速率公式

$$\begin{aligned}\bar{v} &= 1.60 \sqrt{\frac{RT}{M_{\text{mol}}}} \\ \frac{\bar{v}_O}{\bar{v}_H} &= \sqrt{\frac{M_{\text{mol}H}}{M_{\text{mol}O}}} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

7.25 一真空管的真空度约为 1.38×10^{-3} Pa (即 1.0×10^{-5} mmHg), 试求在 27°C 时单位体积中的分子数及分子的平均自由程 (设分子的有效直径 $d=3 \times 10^{-10}$ m)。

解:由气体状态方程 $p=nkT$ 得

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1.38 \times 10^{-3}}{1.38 \times 10^{23} \times 300} = 3.33 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$$

由平均自由程公式 $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \times 9 \times 10^{-20} \times 3.33 \times 10^{17}} = 7.5 \text{ m}$$

7.26 (1) 求氮气在标准状态下的平均碰撞频率;(2) 若温度不变,气压降到 1.33×10^{-4} Pa, 平均碰撞频率又为多少 (设分子有效直径为 10^{-10} m)?

解:(1)碰撞频率公式 $\bar{Z} = \sqrt{2} \pi d^2 n \bar{v}$

对于理想气体有 $p=nkT$, 即 $n = \frac{p}{kT}$

所以有 $\bar{Z} = \frac{\sqrt{2} \pi d^2 \bar{v} p}{kT}$

而 $\bar{v} \approx 1.60 \sqrt{\frac{RT}{M_{\text{mol}}}}$ $\bar{v} \approx 1.60 \sqrt{\frac{8.31 \times 273}{28}} = 455.43 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

氮气在标准状态下的平均碰撞频率

$$\bar{Z} = \frac{\sqrt{2} \pi \times 10^{-20} \times 455.43 \times 1.013 \times 10^5}{1.38 \times 10^0 \times 273} = 5.44 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$$

(2)气压下降后的平均碰撞频率

$$\bar{Z} = \frac{\sqrt{2} \pi \times 10^{-20} \times 455.43 \times 1.33 \times 10^{-4}}{1.38 \times 10^{-23} \times 273} = 0.714 \text{ s}^{-1}$$

7.27 1 mol 氧气从初态出发,经过等容升压过程,压强增大为原来的 2 倍,然后又经过等温膨胀过程,体积增大为原来的 2 倍,求末态与初态之间(1)气体分子方均根速率之比;(2)分子平均自由程之比。

解:(1)由气体状态方程

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \text{及} \quad p_2 V_2 = p_3 V_3$$

方均根速率公式

$$\sqrt{v^2} = 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M_{\text{mol}}}}$$

$$\frac{\sqrt{v_{\text{初}}^2}}{\sqrt{v_{\text{末}}^2}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(2)对于理想气体, $p = nkT$, 即 $n = \frac{p}{kT}$

所以有 $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$

$$\frac{\bar{\lambda}_{\text{初}}}{\bar{\lambda}_{\text{末}}} = \frac{T_1 p_2}{p_1 T_2} = 1$$

7.28 飞机起飞前机舱中的压力计指示为 1.0 atm ($1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$), 温度为 27°C ; 起飞后压力计指示为 0.8 atm ($0.8104 \times 10^5 \text{ Pa}$), 温度仍为 27°C , 试计算飞机距地面的高度。

解: 气体压强随高度变化的规律: 由 $p = nkT$ 及 $n = n_0 e^{\frac{mgz}{kT}}$

$$p = n_0 kT e^{-\frac{mgz}{kT}} = p_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} = p_0 e^{-\frac{M_{\text{mol}} g z}{RT}}$$

$$z = \frac{RT}{M_{\text{mol}} g} \ln \frac{p_0}{p}$$

$$z = \frac{8.31 \times 300}{0.0289 \times 9.8} \ln \frac{1}{0.8} = 1.96 \times 10^3 \text{ m}$$

7.29 上升到什么高度处大气压强减为地面的 75% (设空气的温度为 0°C)。

解: 压强随高度变化的规律

$$z = \frac{RT}{M_{\text{mol}} g} \ln \frac{p_0}{p}$$

$$z = \frac{8.31 \times 273}{0.0289 \times 9.8} \ln \frac{1}{0.75} = 2.3 \times 10^3 \text{ m}$$

7.30 在标准状态下, 氮气的粘度 $\eta = 1.89 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, 摩尔质量 $M_{\text{mol}} = 0.004 \text{ kg/mol}$, 分子平均速率 $\bar{v} = 1.20 \times 10^3 \text{ m/s}$. 试求在标准状态下氮分子的平均自由程。

解: 据

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{v} \lambda$$

得

$$\bar{\lambda} = \frac{3\eta}{\bar{v} M_{\text{mol}}} = 2.65 \times 10^{-7} \text{ m}$$

7.31 在标准状态下氮气的导热系数 $\kappa = 5.79 \times 10^{-2} \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$, 分子平均自由程 $\bar{\lambda} = 2.60 \times 10^{-7} \text{ m}$, 试求氮分子的平均速率。

解:
$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{C_V}{M_{mol}} \overline{\rho v \lambda} = \frac{1}{3} \frac{C_V}{V_0} \overline{v \lambda}$$

得
$$\overline{v} = \frac{3V_0 \kappa}{C_V \lambda} = \frac{3V_0 \kappa}{\frac{3}{2} R \lambda} = \frac{2V_0 \kappa}{R \lambda} = 1.20 \times 10^3 \text{ m/s}$$

7.32 实验测得在标准状态下,氧气的扩散系数为 $1.9 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$,试根据这数据计算分子的平均自由程和分子的有效直径.

解:(1) ∵
$$D = \frac{1}{3} \overline{v \lambda}$$

氧气在标准状态下
$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{mol}}} = 425 \text{ m/s}$$

$$\overline{\lambda} = \frac{3D}{\overline{v}} = 1.3 \times 10^{-7} \text{ m}$$

(2) ∵
$$\overline{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$$

∴
$$d = \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2} \pi \overline{\lambda} p}} = 2.5 \times 10^{-10} \text{ m}$$

习 题 8

8.1 选择题

(1)关于可逆过程和不可逆过程有以下几种说法:

- ① 可逆过程一定是准静态过程.
- ② 准静态过程一定是可逆过程.
- ③ 不可逆过程发生后一定找不到另一过程使系统和外界同时复原.
- ④ 非静态过程一定是不可逆过程.

以上说法,正确的是:

- (A) ①、②、③、④.
- (B) ①、②、③.
- (C) ②、③、④.
- (D) ①、③、④.

[答案:D. 准静态过程不一定是可逆过程. 因准静态过程中可能存在耗散效应,如摩擦、粘滞性、电阻等。]

(2)热力学第一定律表明:

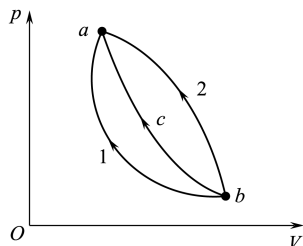
- (A) 系统对外做的功不可能大于系统从外界吸收的热量.
- (B) 系统内能的增量等于系统从外界吸收的热量.
- (C) 不可能存在这样的循环过程,在此循环过程中,外界对系统做的功不等于系统传给外界的热量.
- (D) 热机的效率不可能等于 1.

[答案:C. 热力学第一定律描述个热力学过程中的能量守恒定性质。]

(3)如题 8.1 图所示, bca 为理想气体绝热过程, $b1a$ 和 $b2a$ 是任意过程,则上述两过程中气体做功与吸收热量的情况是:

- (A) $b1a$ 过程放热,做负功; $b2a$ 过程放热,做负功.
- (B) $b1a$ 过程吸热,做负功; $b2a$ 过程放热,做负功.
- (C) $b1a$ 过程吸热,做正功; $b2a$ 过程吸热,做负功.
- (D) $b1a$ 过程放热,做正功; $b2a$ 过程吸热,做正功.

[答案:B. $b1acb$ 构成正循环, $\Delta E = 0, A_{\text{净}} > 0, Q = Q_{b1a} + Q_{acb} = A_{\text{净}} > 0$, 但 $Q_{acb} = 0, \therefore Q_{b1a} > 0$ 吸热; $b1a$ 压缩, 做负功 $b2a cb$ 构成逆循环, $\Delta E = 0, A_{\text{净}} < 0, Q = Q_{b2a} + Q_{acb} = A_{\text{净}} < 0$, 但 $Q_{acb} = 0, \therefore Q_{b2a} < 0$ 放热; $b2a$ 压缩, 做负功]



题 8.1 图

(4)根据热力学第二定律判断下列哪种说法是正确的.

(A) 功可以全部变为热, 但热不能全部变为功.

(B) 热量能从高温物体传到低温物体, 但不能从低温物体传到高温物体.

(C) 气体能够自由膨胀, 但不能自动收缩.

(D) 有规则运动的能量能够变为无规则运动的能量, 但无规则运动的能量不能变为有规则运动的能量.

[答案: C. 热力学第二定律描述自然热力学过程进行的条件和方向性。]

(5) 设有以下一些过程:

(1) 两种不同气体在等温下互相混合.

(2) 理想气体在定体下降温.

(3) 液体在等温下汽化.

(4) 理想气体在等温下压缩.

(5) 理想气体绝热自由膨胀.

在这些过程中, 使系统的熵增加的过程是:

(A) (1)、(2)、(3).

(B) (2)、(3)、(4).

(C) (3)、(4)、(5).

(D) (1)、(3)、(5).

[答案: D. 熵是系统内分子热运动的无序性的一种量度。]

8.2 填空题

(1) 一定量理想气体, 从同一状态开始把其体积由 V_0 压缩到 $\frac{1}{2}V_0$, 分别经历等压、等温、绝热三种过程. 其中: _____ 过程外界对气体做功最多; _____ 过程气体内能减小最多; _____ 过程气体放热最多.

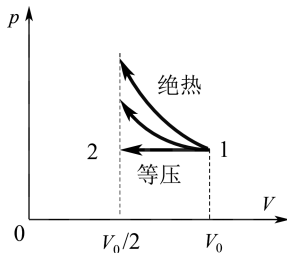
[答案: 绝热; 等压; 等压. 从 $p-V$ 图可知绝热线下面积最大, 故外界做功最多.

由 $pV = \nu RT$ 可知, 等压过程压缩后温度最低, 故内能减小最多.

$$Q_T = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = -p_0 V_0 \ln 2, Q_p = \nu C_p \Delta T$$

$$= \left(\frac{i}{2} + 1 \right) \nu R \Delta T = -\frac{i+2}{2} \frac{1}{2} p_0 V_0$$

因 $i \geq 1, \frac{i+2}{4} > \ln 2$, 且绝热 $Q_r = 0$, 故等压放热最多.]



题 8.2 图

(2) 常温常压下, 一定量的某种理想气体, 其分子可视为刚性分子, 自由度为 i , 在等压过程中吸热为 Q , 对外做功为 A , 内能增加为 ΔE , 则 $A/Q =$ _____ $\Delta E/Q =$ _____.

[答案: $\frac{2}{i+2}; \frac{i}{i+2}$. $Q_p = \nu C_p \Delta T = \frac{i+2}{2} \nu R \Delta T, A_p = p(V_2 - V_1) = \nu R \Delta T, \Delta E_p = \nu C_V \Delta T =$

$\frac{i}{2} \nu R \Delta T$.]

(3) 一理想卡诺热机在温度为 300 K 和 400 K 的两个热源之间工作。若把高温热源温度提高 100 K, 则其效率可提高为原来的 _____ 倍; 若把低温热源温度降低 100 K, 则其逆循环的致冷系数将降低为原来的 _____ 倍。

[答案: 1.6; $\frac{1}{3}$ 。由 $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ 及 $e = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ 可得。]

(4) 绝热容器被隔板分成两半, 一半是真空, 另一半是理想气体。如果把隔板撤去, 气体将进行自由膨胀, 达到平衡后气体的内能 _____, 气体的熵 _____。(增加、减小或不变)。

[答案: 不变; 增加。绝热自由膨胀中, $A=0, Q=0$, 由热力学第一定律 $Q = \Delta E + A$ 得 $\Delta E = 0$; 绝热自由膨胀为不可逆过程, 熵增加。]

(5) 1 mol 理想气体在气缸中进行无限缓慢的膨胀, 其体积由 V_1 变到 V_2 。当气缸处于绝热情况下时, 理想气体熵的增量 $\Delta S =$ _____。当气缸处于等温情况下时, 理想气体熵的增量 $\Delta S =$ _____。

[答案: 0; $R \ln \frac{V_2}{V_1}$ 。绝热系统中无限缓慢的膨胀是可逆过程, 故 $DS=0$;

等温膨胀, $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{p dV}{T} = \int_1^2 \frac{RT}{V} \frac{dV}{T} = R \ln \frac{V_2}{V_1}$]

8.3 下列表述是否正确? 为什么? 并将错误更正。

$$(1) \Delta Q = \Delta E + \Delta A \quad (2) Q = E + \int p dV$$

$$(3) \eta \neq 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (4) \eta_{\text{不可逆}} < 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

答: (1) 不正确, 因热量和功是过程量, 而内能是状态量, 应写成 $Q = \Delta E + A$ 。

(2) 不正确, 理由同(1), 应写成 $Q = \Delta E + \int p dV$

(3) 不正确, 热机效率都应写成 $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$

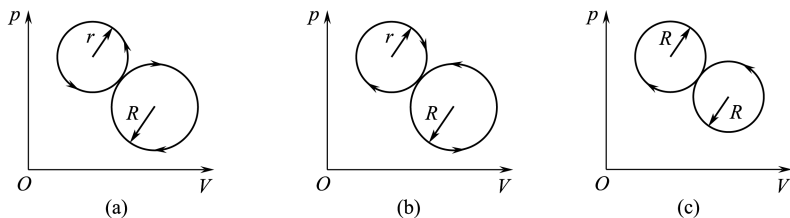
(4) 不正确, 理由同(2), $\eta_{\text{不可逆}} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$

8.4 $P-V$ 图上封闭曲线所包围的面积表示什么? 如果该面积越大, 是否效率越高?

答: 封闭曲线所包围的面积表示循环过程中所做的净功。由于 $\eta = \frac{A_{\text{净}}}{Q_1}$, $A_{\text{净}}$ 面积越大, 效率不一定高, 因为 η 还与吸热 Q_1 有关。

8.5 有三个循环过程, 如题 8.5 图所示, $R > r$, 指出每一循环过程所做的功是正的、负的, 还是零, 说明理由。

答: 在 $P-V$ 图中, 系统对外做功的多少等于曲线所包围的面积, 且顺时针循环作正功, 逆时针循环作负功。各图中整个循环分两部分, 故净功为: $A_a > 0$, $A_b < 0$, $A_c = 0$ 。



题 8.5 图

8.6 用热力学第一定律和第二定律分别证明, 在 $P-V$ 图上一绝热线与一等温线不能有两个交点。

证明: (1) 由热力学第一定律有

$$Q = \Delta E + A$$

若有两个交点 a 和 b , 则

经等温 $a \rightarrow b$ 过程有 $\Delta E_1 = Q_1 - A_1 = 0$

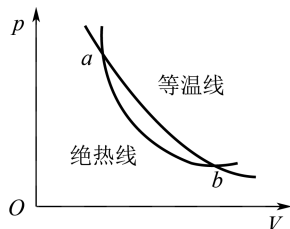
经绝热 $a \rightarrow b$ 过程 $\Delta E_2 + A_2 = 0$

$$\Delta E_2 = -A_2 < 0$$

从上得出 $\Delta E_1 \neq \Delta E_2$, 这与 a, b 两点的内能变化应该相同矛盾。

(2) 若两条曲线有两个交点, 则组成闭合曲线而构成了一循环

过程, 这循环过程只有吸热, 无放热, 且对外做正功, 热机效率为 100%, 违背了热力学第二定律。



题 8.6 图

8.7. 一循环过程如题 8.7 图所示, 试指出:

(1) ab, bc, ca 各是什么过程;

(2) 画出对应的 $p-V$ 图;

(3) 该循环是否是正循环?

(4) 该循环做的功是否等于直角三角形面积?

(5) 用图中的热量 Q_{ab}, Q_{bc}, Q_{ca} 表述其热机效率或致冷系数。

解: (1) 从图知 ab 是等体过程

bc 过程为等压过程。对于 bc , 有 $V = KT$, K 为斜率,

$$\text{由 } pV = \nu RT \text{ 得 } p = \frac{\nu R}{K} = \text{常数}$$

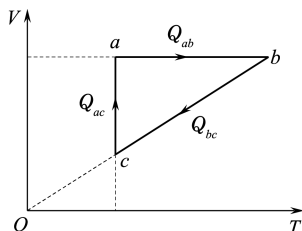
从图知 ca 是等温过程

(2) $p-V$ 图, 如题 8.7' 图

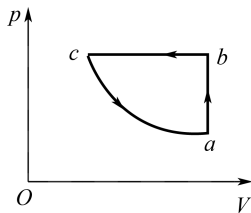
(3) 从图题图 8.7' 知该循环是逆循环

(4) 该循环作的功不等于直角三角形面积, 因为直角三角形不是 $p-V$ 图中的图形。

$$(5) e = \frac{Q_{ca} + Q_{ab}}{Q_{bc} - Q_{ca} - Q_{ab}},$$



题 8.7 图

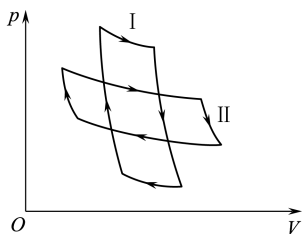


题 8.7' 图

8.8. 两个卡诺循环如题 8.8 图所示, 它们的循环面积相等, 试问:

- (1) 它们吸热和放热的差值是否相同;
 (2) 对外做的净功是否相等;
 (3) 效率是否相同?

答: 由于卡诺循环曲线所包围的面积相等, 系统对外所作的净功相等, 也就是吸热和放热的差值相等. 但吸热和放热的多少不一定相等, 效率也就不一定相同.



题 8.8 图

8.9 评论下述说法正确与否?

- (1) 功可以完全变成热, 但热不能完全变成功;
 (2) 热量只能从高温物体传到低温物体, 不能从低温物体传到高温物体.
 (3) 可逆过程就是能沿反方向进行的过程, 不可逆过程就是不能沿反方向进行的过程.

答: (1) 不正确. 有外界的帮助热能够完全变成功; 功可以完全变成热, 但热不能自动地完全变成功;

(2) 不正确. 热量能自动从高温物体传到低温物体, 不能自动地由低温物体传到高温物体. 但在外界的帮助下, 热量能从低温物体传到高温物体.

(3) 不正确. 一个系统由某一状态出发, 经历某一过程达另一状态, 如果存在另一过程, 它能消除原过程对外界的一切影响而使系统和外界同时都能回到原来的状态, 这样的过程就是可逆过程. 用任何方法都不能使系统和外界同时恢复原状态的过程是不可逆过程. 有些过程虽能沿反方向进行, 系统能回到原来的状态, 但外界没有同时恢复原状态, 还是不可逆过程.

8.10 根据 $S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ_{\text{可逆}}}{T}$ 及 $S_B - S_A > \int_A^B \frac{dQ_{\text{不可逆}}}{T}$, 这是否说明可逆过程的熵变大于不可逆过程熵变? 为什么? 说明理由.

答: 这不能说明可逆过程的熵变大于不可逆过程熵变. 熵是状态函数, 熵变只与初末状态有关, 如果可逆过程和不可逆过程初末状态相同, 具有相同的熵变. 只能说在不可逆过程中, 系统的热温比之和小于熵变.

8.11. 如题 8.11 图所示, 一系统由状态 a 沿 acb 到达状态 b 的过程中, 有 350 J 热量传入系统, 而系统做功 126 J .

- (1) 若沿 adb 时, 系统做功 42 J , 问有多少热量传入系统?
 (2) 若系统由状态 b 沿曲线 ba 返回状态 a 时, 外界对系统做功为 84 J , 试问系统是吸热还是放热? 热量传递是多少?

解: 由 abc 过程可求出 b 态和 a 态的内能之差

$$Q = \Delta E + A$$

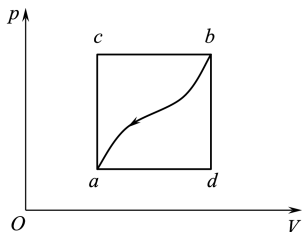
$$\Delta E = Q - A = 350 - 126 = 224 \text{ J}$$

abd 过程, 系统作功 $A = 42 \text{ J}$

$$Q = \Delta E + A = 224 + 42 = 266 \text{ J} \quad \text{系统吸收热量}$$

ba 过程, 外界对系统作功 $A = -84 \text{ J}$

$$Q = \Delta E + A = -224 - 84 = -308 \text{ J} \quad \text{系统放热}$$



题 8.11 图

8.12 1 mol 单原子理想气体从 300 K 加热到 350 K,问在下列两过程中吸收了多少热量?增加了多少内能?对外做了多少功?

(1) 容积保持不变;

(2) 压力保持不变。

解:(1) 等体过程

由热力学第一定律得 $Q = \Delta E$

$$\text{吸热} \quad Q = \Delta E = \nu C_V (T_2 - T_1) = \nu \frac{i}{2} R (T_2 - T_1)$$

$$Q = \Delta E = \frac{3}{2} \times 8.31 \times (350 - 300) = 623.25 \text{ J}$$

$$\text{对外做功} \quad A = 0$$

(2) 等压过程

$$Q = \nu C_P (T_2 - T_1) = \nu \frac{i+2}{2} R (T_2 - T_1)$$

$$\text{吸热} \quad Q = \frac{5}{2} \times 8.31 \times (350 - 300) = 1038.75 \text{ J}$$

$$\Delta E = \nu C_V (T_2 - T_1)$$

$$\text{内能增加} \quad \Delta E = \frac{3}{2} \times 8.31 \times (350 - 300) = 623.25 \text{ J}$$

$$\text{对外做功} \quad A = Q - \Delta E = 1038.75 - 623.5 = 415.5 \text{ J}$$

8.13 一个绝热容器中盛有摩尔质量为 M_{mol} , 比热容比为 γ 的理想气体, 整个容器以速度 v 运动, 若容器突然停止运动, 求气体温度的升高量 (设气体分子的机械能全部转变为内能)。

解: 整个气体有序运动的能量为 $\frac{1}{2} m v^2$, 转变为气体分子无序运动使得内能增加, 温度变化

$$\Delta E = \frac{m}{M} C_V \Delta T = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} M_{\text{mol}} v^2 \frac{1}{C_V} = \frac{1}{2R} M_{\text{mol}} v^2 (\gamma - 1)$$

8.140.01 m³ 氮气在温度为 300 K 时, 由 1 MPa 压缩到 10 MPa。试分别求氮气经等温及绝热压缩后的 (1) 体积; (2) 温度; (3) 各过程对外所做的功。

解: (1) N_2 体积

$$\text{等温: } p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2} = \frac{0.1 \times 0.01}{10} = 10^{-4} \text{ (m}^3\text{)}$$

$$\text{绝热: } p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \Rightarrow V_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma} V_1 = \left(\frac{0.1}{10}\right)^{1/1.4} \times 0.01 = 3.73 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

(2) N_2 温度

$$\text{等温: } T_2 = T_1 = 300 \text{ K}$$

$$\text{绝热: } p_1^{\gamma-1} T_1^{-\gamma} = p_2^{\gamma-1} T_2^{-\gamma} \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1118 \text{ K}$$

(3) N_2 对外做功

$$\text{等温: } W_T = Q_T = \frac{m}{M} R T \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right)$$

$$\text{又 } p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T = p_2 V_2$$

$$\therefore W_T = p_1 V_1 \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) = 1.013 \times 10^5 \times 0.01 \times \ln \left(\frac{0.1}{10} \right) = -4.67 \times 10^3 \text{ J}$$

$$\begin{aligned} \text{绝热: } W_s &= -\Delta E = -\frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1) = \frac{i}{2} (p_1 V_1 - p_2 V_2) \\ &= (1.013 \times 10^5 \times 0.01 - 100 \times 1.013 \times 10^5 \times 3.73 \times 10^{-4}) \times \frac{5}{2} \\ &\approx -6.9 \times 10^3 \text{ (J)} \end{aligned}$$

8.15 理想气体由初状态 (P_1, V_1) 经绝热膨胀至末状态 (P_2, V_2) 。试证过程中气体所做的功为

$$w = \frac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{\gamma - 1}$$

式中 γ 为气体的比热容比。

证明：由绝热方程

$$p V^\gamma = p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma = C \quad \text{得 } p = p_1 V_1^\gamma \frac{1}{V^\gamma}$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{V_1}^{V_2} C \frac{dV}{V^\gamma} = -\frac{C}{\gamma-1} \left(\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right) \\ &= -\frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{p_2 V_2^\gamma}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{p_1 V_1^\gamma}{V_1^{\gamma-1}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad A = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$$

8.16 1 mol 的理想气体的 $T-V$ 图如题 8.16 图所示, ab 为直线, 延长线通过原点 O 。求 ab 过程气体对外做的功。

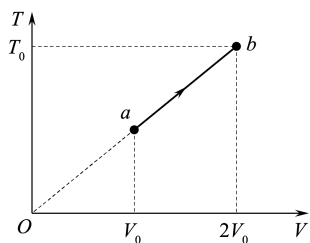
解：设 $T = kV$ 由图可求得直线的斜率 k 为

$$k = \frac{T_0}{2V_0}$$

$$\text{得过程方程} \quad T = \frac{T_0}{2V_0} V$$

$$\text{由状态方程} \quad pV = \nu RT$$

$$\text{得} \quad p = \frac{RT}{V} = \frac{R}{V} \frac{T_0}{2V_0} V = \frac{RT_0}{2V_0}$$



题 8.16 图

ab 过程气体对外做功

$$A = \int_{V_0}^{2V_0} p dV = \int_{V_0}^{2V_0} \frac{RT_0}{2V_0} dV = \frac{RT_0}{2}$$

8.17 某理想气体的过程方程为 $Vp^{1/2} = a$, a 为常数, 气体从 V_1 膨胀到 V_2 。求其所做的功。

解: 气体做功

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{a^2}{V^2} dV = \left(-\frac{a^2}{V} \right) \Big|_{V_1}^{V_2} = a^2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

8.18 设有一以理想气体为工质的热机循环, 如题 8.18 图所示。试证其循环效率为

$$\eta = 1 - \gamma \frac{\frac{V_1}{V_2} - 1}{\frac{p_1}{p_2} - 1}$$

解: 等体过程

吸热

$$Q'_1 = \nu C_V (T_2 - T_1)$$

$$Q_1 = Q'_1 = C_V \left(\frac{p_1 V_2}{R} - \frac{p_2 V_1}{R} \right)$$

绝热过程

$$Q'_3 = 0$$

等压压缩过程

放热

$$Q'_2 = \nu C_P (T_2 - T_1)$$

$$Q_2 = |Q'_2| = -\nu C_P (T_2 - T_1)$$

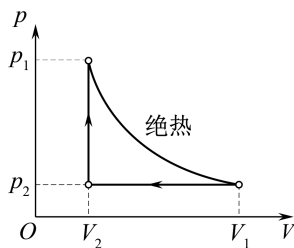
$$= C_P \left(\frac{p_2 V_1}{R} - \frac{p_2 V_2}{R} \right)$$

循环效率

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{C_P (p_2 V_1 - p_2 V_2)}{C_V (p_1 V_2 - p_2 V_2)}$$

$$\eta = 1 - \gamma \frac{(\nu_1 / \nu_2 - 1)}{(p_1 / p_2 - 1)}$$



题 8.18 图

8.19 一卡诺热机在 1000 K 和 300 K 的两热源之间工作, 试计算

(1) 热机效率;

(2) 若低温热源不变, 要使热机效率提高到 80%, 则高温热源温度需提高多少?

(3) 若高温热源不变, 要使热机效率提高到 80%, 则低温热源温度需降低多少?

解: (1) 卡诺热机效率 $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

$$\eta = 1 - \frac{300}{1000} = 70\%$$

(2) 低温热源温度不变时, 若

$$\eta = 1 - \frac{300}{T_1} = 80\%$$

要求 $T_1 = 1500 \text{ K}$, 高温热源温度需提高 500 K

(3) 高温热源温度不变时, 若

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{1000} = 80\%$$

要求 $T_2 = 200 \text{ K}$, 低温热源温度需降低 100 K

8.20 如题 8.20 图所示是一理想气体所经历的循环过程, 其中 AB 和 CD 是等压过程, BC 和 DA 为绝热过程, 已知 B 点和 C 点的温度分别为 T_2 和 T_3 . 求此循环效率. 这是卡诺循环吗?

解: (1) 热机效率 $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$

AB 等压过程 $Q'_1 = \nu C_P (T_2 - T_1)$

吸热 $Q_1 = \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_P (T_B - T_A)$

CD 等压过程 $Q'_2 = \nu C_P (T_2 - T_1)$

放热 $Q_2 = -Q'_2 = \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_P (T_C - T_D)$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_C - T_D}{T_B - T_A} = \frac{T_C(1 - T_D/T_C)}{T_B(1 - T_A/T_B)}$$

根据绝热过程方程得到

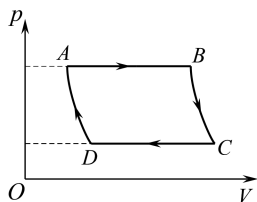
AD 绝热过程 $p_A^{\gamma-1} T_A^{\gamma-1} = p_D^{\gamma-1} T_D^{\gamma-1}$

BC 绝热过程 $p_B^{\gamma-1} T_B^{\gamma-1} = p_C^{\gamma-1} T_C^{\gamma-1}$

又 $p_A = p_B \quad p_C = p_D \quad \frac{T_D}{T_C} = \frac{T_A}{T_B}$

$$\eta = 1 - \frac{T_3}{T_2}$$

(2) 不是卡诺循环, 因为不是工作在两个恒定的热源之间.



题 8.20 图

8.21(1) 用一卡诺循环的致冷机从 7°C 的热源中提取 1000 J 的热量传向 27°C 的热源, 需要多少功? 从 -173°C 向 27°C 呢?

(2) 一可逆的卡诺机, 作热机使用时, 如果工作的两热源的温差愈大, 则对于做功就愈有利. 当作致冷机使用时, 如果两热源的温差愈大, 对于致冷是否也愈有利? 为什么?

解: (1) 卡诺循环的致冷机

$$e = \frac{Q_2}{A_{\text{静}}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

$7^\circ\text{C} \rightarrow 27^\circ\text{C}$ 时, 需作功

$$A_1 = \frac{T_1 - T_2}{T_2} Q_2 = \frac{300 - 280}{280} \times 1000 = 71.4 \text{ J}$$

$-173^{\circ}\text{C} \rightarrow 27^{\circ}\text{C}$ 时,需做功

$$A_2 = \frac{T_1 - T_2}{T_2} Q_2 = \frac{300 - 100}{100} \times 1000 = 2000 \text{ J}$$

(2) 从上面计算可看到,当高温热源温度一定时,低温热源温度越低,温度差愈大,提取同样的热量,则所需做功也越多,对致冷是不利的。

8.22 如题 8.22 图所示,1 mol 双原子分子理想气体,从初态 $V_1 = 20 \text{ L}$, $T_1 = 300 \text{ K}$,经历三种不同的过程到达末态 $V_2 = 40 \text{ L}$, $T_2 = 300 \text{ K}$. 图中 $1 \rightarrow 2$ 为等温线, $1 \rightarrow 4$ 为绝热线, $4 \rightarrow 2$ 为等压线, $1 \rightarrow 3$ 为等压线, $3 \rightarrow 2$ 为等体线. 试分别沿这三种过程计算气体的熵变。

解: $1 \rightarrow 2$ 熵变

等温过程 $dQ = dA$, $dA = p dV$

$$pV = RT$$

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_1} \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_1}{V} dV$$

$$S_2 - S_1 = R \ln \frac{V_2}{V_1} = R \ln 2 = 5.76 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ 熵变

$$S_2 - S_1 = \int_1^3 \frac{dQ}{T} + \int_3^2 \frac{dQ}{T}$$

$$S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_3} \frac{C_p dT}{T} + \int_{T_3}^{T_2} \frac{C_v dT}{T} = C_p \ln \frac{T_3}{T_1} + C_v \ln \frac{T_2}{T_3}$$

$1 \rightarrow 3$ 等压过程

$$p_1 = p_3 \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_3}$$

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

$3 \rightarrow 2$ 等体过程

$$\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_2}{T_2}$$

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{p_2}{p_3} \quad \frac{T_2}{T_3} = \frac{p_2}{p_1}$$

$$S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{V_2}{V_1} + C_v \ln \frac{p_2}{p_1}$$

在 $1 \rightarrow 2$ 等温过程中

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

所以

$$S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{V_2}{V_1} + C_v \ln \frac{V_2}{V_1} = R \ln \frac{V_2}{V_1} = R \ln 2$$

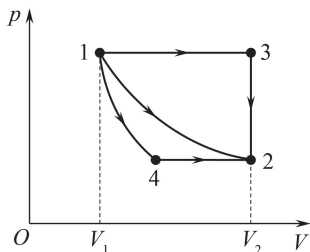
$1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ 熵变

$$S_2 - S_1 = \int_1^4 \frac{dQ}{T} + \int_4^2 \frac{dQ}{T}$$

$$S_2 - S_1 = 0 + \int_{T_4}^{T_2} \frac{C_p dT}{T} = C_p \ln \frac{T_2}{T_4} = C_p \ln \frac{T_1}{T_4}$$

$1 \rightarrow 4$ 绝热过程

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1} \quad \frac{T_1}{T_4} = \frac{V_4^{\gamma-1}}{V_1^{\gamma-1}}$$



题 8.22

$$p_1 V_1^\gamma = p_4 V_4^\gamma, \frac{V_4}{V_1} = \left(\frac{p_1}{p_4}\right)^{1/\gamma} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma}$$

在 1→2 等温过程中

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

$$\frac{V_4}{V_1} = \left(\frac{p_1}{p_4}\right)^{1/\gamma} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1/\gamma}$$

$$\frac{T_1}{T_4} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$S_2 - S_1 = C_P \ln \frac{T_1}{T_4} = C_P \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln \frac{V_2}{V_1} = R \ln 2$$

8.23 有两个相同体积的容器,分别装有 1 mol 的水,初始温度分别为 T_1 和 T_2 , ($T_1 > T_2$), 令其进行接触,最后达到相同温度 T 。求熵的变化,(设水的摩尔热容为 C_{mol})。

解:两个容器中的总熵变

$$\begin{aligned} S - S_0 &= \int_{T_1}^T \frac{C_{\text{mol}} dT}{T} + \int_{T_2}^T \frac{C_{\text{mol}} dT}{T} \\ &= C_{\text{mol}} \left(\ln \frac{T}{T_1} + \ln \frac{T}{T_2} \right) = C_{\text{mol}} \ln \frac{T^2}{T_1 T_2} \end{aligned}$$

因为是两个相同体积的容器,故

$$C_{\text{mol}}(T - T_2) = C_{\text{mol}}(T_1 - T)$$

得

$$T = \frac{T_2 + T_1}{2}$$

$$S - S_0 = C_{\text{mol}} \ln \frac{(T_2 + T_1)^2}{4 T_1 T_2}$$

8.24 把 0°C 的 0.5 kg 的冰块加热到它全部溶化成 0°C 的水,问:

(1) 水的熵变如何?

(2) 若热源是温度为 20°C 的庞大物体,那么热源的熵变化多大?

(3) 水和热源的总熵变多大? 增加还是减少? (水的熔解热 $\lambda = 334 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1}$)

解:(1) 水的熵变

$$\Delta S_1 = \frac{Q}{T} = \frac{0.5 \times 334 \times 10^3}{273} = 612 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

(2) 热源的熵变

$$\Delta S_2 = \frac{Q}{T} = \frac{-0.5 \times 334 \times 10^3}{293} = -570 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

(3) 总熵变

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 612 - 570 = 42 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$\Delta S > 0$ 熵增加。

习 题 9

9.1 选择题

(1) 正方形的两对角线处各放置电荷 Q , 另两对角线各放置电荷 q , 若 Q 所受到合力为零, 则 Q 与 q 的关系为:

(A) $Q = -2^{3/2}q$

(B) $Q = 2^{3/2}q$

(C) $Q = -2q$

(D) $Q = 2q$

[答案:A]

(2) 下面说法正确的是:

(A) 若高斯面上的电场强度处处为零, 则该面内必定没有净电荷;

(B) 若高斯面内没有电荷, 则该面上的电场强度必定处处为零;

(C) 若高斯面上的电场强度处处不为零, 则该面内必定有电荷;

(D) 若高斯面内有电荷, 则该面上的电场强度必定处处不为零。

[答案:A]

(3) 一半径为 R 的导体球表面的面点荷密度为 σ , 则在距球面 R 处的电场强度

(A) σ/ϵ_0

(B) $\sigma/2\epsilon_0$

(C) $\sigma/4\epsilon_0$

(D) $\sigma/8\epsilon_0$

[答案:C]

(4) 在电场中的导体内部的

(A) 电场和电势均为零;

(B) 电场不为零, 电势均为零;

(C) 电势和表面电势相等;

(D) 电势低于表面电势。

[答案:C]

9.2 填空题

(1) 在静电场中, 电势梯度不变的区域, 电场强度必定为_____。

[答案:零]

(2) 一个点电荷 q 放在立方体中心, 则穿过某一表面的电通量为_____, 若将点电荷由中心向外移动至无限远, 则总通量将_____。

[答案: $q/6\epsilon_0$, 将为零]

(3) 电介质在电容器中作用(a) _____ (b) _____。

[答案:(a) 提高电容器的容量;(b) 延长电容器的使用寿命]

(4) 电量 Q 均匀分布在半径为 R 的球体内, 则球内球外的静电能之比 _____。

[答案: 1 : 5]

9.3 电量都是 q 的三个点电荷, 分别放在正三角形的三个顶点. 试问: (1) 在这三角形的中心放一个什么样的电荷, 就可以使这四个电荷都达到平衡 (即每个电荷受其他三个电荷的库仑力之和都为零)? (2) 这种平衡与三角形的边长有无关系?

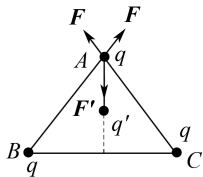
解: 如题 9.3 图示

(1) 以 A 处点电荷为研究对象, 由力平衡知: q' 为负电荷

$$2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \cos 30^\circ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}$$

解得
$$q' = -\frac{\sqrt{3}}{3}q$$

(2) 与三角形边长无关.



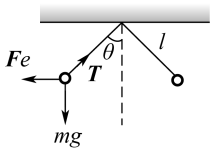
题 9.3 图

9.4 两小球的质量都是 m , 都用长为 l 的细绳挂在同一点, 它们带有相同电量, 静止时两线夹角为 2θ , 如题 9.4 图所示. 设小球的半径和线的质量都可以忽略不计, 求每个小球所带的电量.

解: 如题 9.4 图示

$$\begin{cases} T \cos \theta = mg \\ T \sin \theta = F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2l \sin \theta)^2} \end{cases}$$

解得
$$q = 2l \sin \theta \sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \tan \theta}$$



题 9.4 图

9.5 根据点电荷场强公式 $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, 当被考察的场点距源点电荷很近 ($r \rightarrow 0$) 时, 则场强 $\rightarrow \infty$, 这是没有物理意义的, 对此应如何理解?

解: $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0$ 仅对点电荷成立, 当 $r \rightarrow 0$ 时, 带电体不能再视为点电荷, 再用上式求场强是错误的, 实际带电体有一定形状大小, 考虑电荷在带电体上的分布求出的场强不会是无限大.

9.6 在真空中有 A, B 两平行板, 相对距离为 d , 板面积为 S , 其带电量分别为 $+q$ 和 $-q$. 则这两板之间有相互作用力 f , 有人说 $f = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$, 又有人说, 因为 $f = qE$, $E = \frac{q}{\epsilon_0 S}$, 所以 $f = \frac{q^2}{\epsilon_0 S}$. 试问这两种说法对吗? 为什么? f 到底应等于多少?

解: 题中的两种说法均不对. 第一种说法中把两带电板视为点电荷是不对的, 第二种说法

把合场强 $E = \frac{q}{\epsilon_0 S}$ 看成是一个带电板在另一带电板处的场强也是不对的, 正确解答应为一个板的电场为 $E = \frac{q}{2\epsilon_0 S}$, 另一板受它的作用力 $\frac{q}{2\epsilon_0 S} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S}$, 这是两板间相互作用的电场力。

9.7 长 $l = 15.0 \text{ cm}$ 的直导线 AB 上均匀地分布着线密度 $\lambda = 5.0 \times 10^{-9} \text{ C/m}$ 的正电荷. 试求: (1) 在导线的延长线上与导线 B 端相距 $a_1 = 5.0 \text{ cm}$ 处 P 点的场强; (2) 在导线的垂直平分线上与导线中点相距 $d_2 = 5.0 \text{ cm}$ 处 Q 点的场强。

解: 如题 9.7 图所示

(1) 在带电直线上取线元 dx , 其上电量 dq 在 P 点产生

$$\text{场强为 } dE_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(a-x)^2}$$

$$\begin{aligned} E_P &= \int dE_P = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{(a-x)^2} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a-\frac{l}{2}} - \frac{1}{a+\frac{l}{2}} \right] \\ &= \frac{\lambda l}{\pi\epsilon_0 (4a^2 - l^2)} \end{aligned}$$

用 $l = 15 \text{ cm}$, $\lambda = 5.0 \times 10^{-9} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$, $a = 12.5 \text{ cm}$ 代入得

$$E_P = 6.74 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1} \text{ 方向水平向右}$$

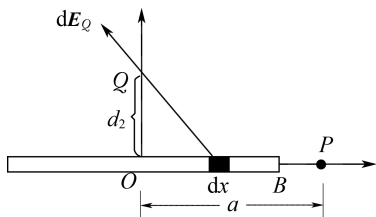
(2) 同理 $dE_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2 + d_2^2}$ 方向如题 9.7 图所示

由于对称性 $\int_l dE_{Qx} = 0$, 即 E_Q 只有 y 分量,

$$\begin{aligned} \therefore dE_{Qy} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2 + d_2^2} \frac{d_2}{\sqrt{x^2 + d_2^2}} \\ E_{Qy} &= \int_l dE_{Qy} = \frac{d_2 \lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{(x^2 + d_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0 d_2 \sqrt{l^2 + 4d_2^2}} \end{aligned}$$

以 $\lambda = 5.0 \times 10^{-9} \text{ C} \cdot \text{cm}^{-1}$, $l = 15 \text{ cm}$, $d_2 = 5 \text{ cm}$ 代入得

$$E_Q = E_{Qy} = 14.96 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}, \text{ 方向沿 } y \text{ 轴正向}$$



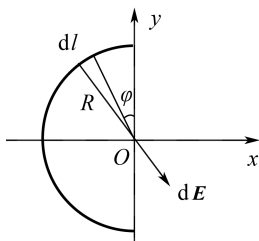
题 9.7 图

9.8 一个半径为 R 的均匀带电半圆环, 电荷线密度为 λ , 求环心处 O 点的场强。

解: 如 9.8 图在圆上取 $dl = R d\varphi$

$dq = \lambda dl = R \lambda d\varphi$, 它在 O 点产生场强大小为

$$dE = \frac{\lambda R d\varphi}{4\pi\epsilon_0 R^2} \text{ 方向沿半径向外}$$



题 9.8 图

$$\text{则 } dE_x = dE \sin \varphi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \sin \varphi d\varphi$$

$$dE_y = dE \cos(\pi - \varphi) = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \varphi d\varphi$$

$$\text{积分 } E_x = \int_0^\pi \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \sin \varphi d\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

$$E_y = \int_0^\pi \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \varphi d\varphi = 0$$

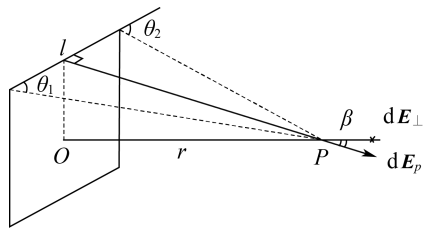
$$\therefore E = E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}, \text{方向沿 } x \text{ 轴正向.}$$

9.9 均匀带电的细线弯成正方形,边长为 l ,总电量为 q . (1)求这正方形轴线上离中心为 r 处的场强 E ; (2)证明:在 $r \gg l$ 处,它相当于点电荷 q 产生的场强 E .

解:如 9.9 图示,正方形一条边上电荷 $\frac{q}{4}$ 在 P 点产

生物强 dE_P 方向如图,大小为

$$dE_P = \frac{\lambda (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$$



题 9.9 图

$$\therefore \cos \theta_1 = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$$

$$\cos \theta_2 = -\cos \theta_1$$

$$\therefore dE_P = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}} \frac{l}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{2}}}$$

dE_P 在垂直于平面上的分量 $dE_\perp = dE_P \cos \beta$

$$\therefore dE_\perp = \frac{\lambda l}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}} \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{2}}} \frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$$

由于对称性, P 点场强沿 OP 方向, 大小为

$$E_P = 4 \times dE_\perp = \frac{4\lambda l r}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + \frac{l^2}{4}) \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{2}}}$$

$$\therefore \lambda = \frac{q}{4l}$$

$$\therefore E_P = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + \frac{l^2}{4}) \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{2}}} \quad \text{方向沿 } OP$$

9.10 (1) 点电荷 q 位于一边长为 a 的立方体中心, 试求在该点电荷电场中穿过立方体的一个面的电通量; (2) 如果该场源点电荷移动到该立方体的一个顶点上, 这时穿过立方体各面的

电通量是多少?

解: (1) 由高斯定理 $\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$

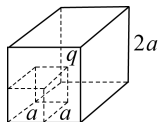
立方体六个面, 当 q 在立方体中心时, 每个面上电通量相等

$$\therefore \text{各面电通量 } \Phi_e = \frac{q}{6\epsilon_0}.$$

(2) 电荷在顶点时, 将立方体延伸为边长 $2a$ 的立方体, 使 q 处于边长 $2a$ 的立方体中心, 则边长 $2a$ 的正方形上电通量 $\Phi_e = \frac{q}{6\epsilon_0}$

对于边长 a 的正方形, 如果它不包含 q 所在的顶点, 则 $\Phi_e = \frac{q}{24\epsilon_0}$, 如果它包含 q 所在顶点则 $\Phi_e = 0$.

如题 9.10 图所示.



题 9.10 图

9.11 均匀带电球壳内半径 6 cm, 外半径 10 cm, 电荷体密度为 $2 \times 10^{-5} \text{ C/m}^3$ 求距球心 5 cm, 8 cm, 12 cm 各点的场强.

$$\text{解: 高斯定理 } \oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum q}{\epsilon_0}, E 4\pi r^2 = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$$

$$\text{当 } r = 5 \text{ cm 时, } \sum q = 0, \mathbf{E} = 0$$

$$r = 8 \text{ cm 时, } \sum q = \rho \frac{4\pi}{3} (r^3 - r_{\text{内}}^3)$$

$$\therefore E = \frac{\rho \frac{4\pi}{3} (r^3 - r_{\text{内}}^3)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \approx 3.48 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}, \text{ 方向沿半径向外.}$$

$$r = 12 \text{ cm 时, } \sum q = \rho \frac{4\pi}{3} (r_{\text{外}}^3 - r_{\text{内}}^3)$$

$$\therefore E = \frac{\rho \frac{4\pi}{3} (r_{\text{外}}^3 - r_{\text{内}}^3)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \approx 4.10 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1} \quad \text{沿半径向外.}$$

9.12 半径为 R_1 和 R_2 ($R_2 > R_1$) 的两无限长同轴圆柱面, 单位长度上分别带有电量 λ 和 $-\lambda$, 试求: (1) $r < R_1$; (2) $R_1 < r < R_2$; (3) $r > R_2$ 处各点的场强.

$$\text{解: 高斯定理 } \oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$$

取同轴圆柱形高斯面, 侧面积 $S = 2\pi r l$

$$\text{则 } \oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E 2\pi r l$$

$$\text{对 (1) } r < R_1 \quad \sum q = 0, \mathbf{E} = 0$$

$$(2) R_1 < r < R_2 \quad \sum q = \lambda l$$

$$\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{沿径向向外}$$

$$(3) r > R_2 \quad \Sigma q = 0$$

$$\therefore E = 0$$

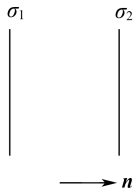
9.13 两个无限大的平行平面都均匀带电, 电荷的面密度分别为 σ_1 和 σ_2 , 试求空间各处场强.

解: 如题 9.13 图示, 两带电平面均匀带电, 电荷面密度分别为 σ_1 与 σ_2 ,

$$\text{两面间, } \mathbf{E} = \frac{1}{2\epsilon_0}(\sigma_1 - \sigma_2)\mathbf{n} \quad \text{面外, } \mathbf{E} = -\frac{1}{2\epsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2)\mathbf{n}$$

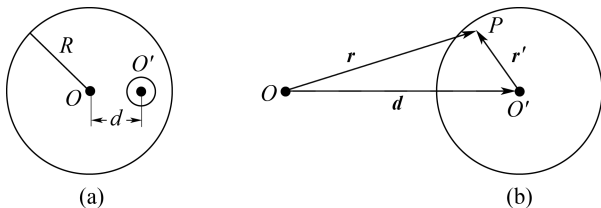
$$\sigma_2 \text{ 面外, } \mathbf{E} = \frac{1}{2\epsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2)\mathbf{n}$$

$\mathbf{n}$: 垂直于两平面由 σ_1 面指为 σ_2 面.



题 9.13 图

9.14 半径为 R 的均匀带电球体内的电荷体密度为 ρ , 若在球内挖去一块半径为 $r < R$ 的小球体, 如题 9.14 图所示. 试求: 两球心 O 与 O' 点的场强, 并证明小球空腔内的电场是均匀的.



题 9.14 图

解: 将此带电体看作带正电 ρ 的均匀球与带电 $-\rho$ 的均匀小球的组合, 见题 9.14 图(a).

(1) $+\rho$ 球在 O 点产生电场 $\mathbf{E}_{10} = 0$,

$$-\rho \text{ 球在 } O \text{ 点产生电场 } \mathbf{E}_{20} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 d^3} \overrightarrow{OO'}$$

$$\therefore O \text{ 点电场 } \mathbf{E}_0 = \frac{r^3 \rho}{3\epsilon_0 d^3} \overrightarrow{OO'};$$

$$(2) +\rho \text{ 在 } O' \text{ 产生电场 } \mathbf{E}_{10'} = \frac{\frac{4}{3}\pi d^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 d^3} \overrightarrow{OO'}$$

$-\rho$ 球在 O' 产生电场 $\mathbf{E}_{20'} = 0$

$$\therefore O' \text{ 点电场 } \mathbf{E}_{0'} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OO'}$$

(3) 设空腔任一点 P 相对 O' 的位矢为 $\mathbf{r}'$, 相对 O 点位矢为 $\mathbf{r}$ (如题 8.13(b) 图)

$$\text{则} \quad \mathbf{E}_{PO} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r},$$

$$\mathbf{E}_{PO'} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}',$$

$$\therefore \quad \mathbf{E}_P = \mathbf{E}_{PO} + \mathbf{E}_{PO'} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OO'} = \frac{\rho \mathbf{D}}{3\epsilon_0}$$

$\therefore$ 腔内场强是均匀的.

9.15 一电偶极子由 $q=1.0\times 10^{-6}\text{ C}$ 的两个异号点电荷组成,两电荷距离 $d=0.2\text{ cm}$,把这电偶极子放在 $1.0\times 10^5\text{ N/C}$ 的外电场中,求外电场作用于电偶极子上的最大力矩。

解: $\because$ 电偶极子 p 在外场 E 中受力矩

$$M=p\times E$$

$\therefore M_{\max}=pE=qlE$ 代入数字

$$M_{\max}=1.0\times 10^{-6}\times 2\times 10^{-3}\times 1.0\times 10^5=2.0\times 10^{-4}\text{ N}\cdot\text{m}$$

9.16 两点电荷 $q_1=1.5\times 10^{-8}\text{ C}$, $q_2=3.0\times 10^{-8}\text{ C}$,相距 $r_1=42\text{ cm}$,要把它之间的距离变为 $r_2=25\text{ cm}$,需作多少功?

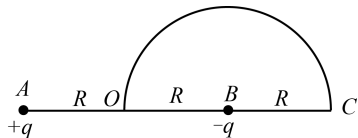
$$\begin{aligned}\text{解: } A &= \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= -6.55\times 10^{-6}\text{ J}\end{aligned}$$

外力需作的功 $A'=-A=-6.55\times 10^{-6}\text{ J}$

9.17 如题 9.17 图所示,在 A, B 两点处放有电量分别为 $+q, -q$ 的点电荷, AB 间距离为 $2R$,现将另一正试验点电荷 q_0 从 O 点经过半圆弧移到 C 点,求移动过程中电场力作的功。

解:如题 9.17 图示

$$\begin{aligned}U_O &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} - \frac{q}{R} \right) = 0 \\ U_C &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{3R} - \frac{q}{R} \right) = -\frac{q}{6\pi\epsilon_0 R}\end{aligned}$$



题 9.17 图

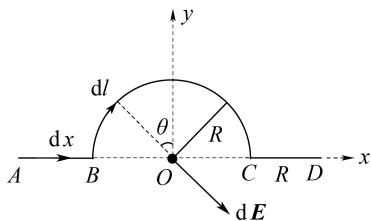
$$\therefore A = q_0 (U_O - U_C) = \frac{q_0 q}{6\pi\epsilon_0 R}$$

9.18 如题 9.18 图所示的绝缘细线上均匀分布着线密度为 λ 的正电荷,两直导线的长度和半圆环的半径都等于 R . 试求环中心 O 点处的场强和电势。

解:(1)由于电荷均匀分布与对称性, AB 和 CD 段电荷在 O 点产生的场强互相抵消,取 $dl=Rd\theta$

则 $dq=\lambda R d\theta$ 产生 O 点 $d\mathbf{E}$ 如图,由于对称性, O 点场强沿 y 轴负方向

$$\begin{aligned}E &= \int dE_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\end{aligned}$$



题 9.18 图

(2) AB 电荷在 O 点产生电势,以 $U_{\infty}=0$

$$U_1 = \int_B^A \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 x} = \int_R^{2R} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln 2$$

同理 CD 产生 $U_2 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln 2$

半圆环产生
$$U_3 = \frac{\pi R \lambda}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda}{4\epsilon_0}$$

$$\therefore U_0 = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln 2 + \frac{\lambda}{4\epsilon_0}$$

9.19 一电子绕一带均匀电荷的长直导线以 2×10^4 m/s 的匀速率作圆周运动. 求带电直线上的线电荷密度. (电子质量 $m_0 = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, 电子电量 $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C)

解: 设均匀带电直线电荷密度为 λ , 在电子轨道处场强

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

电子受力大小
$$F_e = eE = \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\therefore \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = m \frac{v^2}{r}$$

得
$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 m v^2}{e} = 12.5 \times 10^{-13} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$$

9.20 空气可以承受的场强的最大值为 $E = 30$ kV/cm, 超过这个数值时空气要发生火花放电. 今有一高压平行板电容器, 极板间距离为 $d = 0.5$ cm, 求此电容器可承受的最高电压.

解: 平行板电容器内部近似为均匀电场

$$U = Ed = 1.5 \times 10^4 \text{ V}$$

9.21 证明: 对于两个无限大的平行平面带电导体板(题 9.21 图)来说, (1) 相向的两面上, 电荷的面密度总是大小相等而符号相反; (2) 相背的两面上, 电荷的面密度总是大小相等而符号相同.

证: 如题 9.21 图所示, 设两导体 A、B 的四个平面均匀带电的电荷面密度依次为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$

(1) 则取与平面垂直且底面分别在 A、B 内部的闭合柱面为高斯面时, 有

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = (\sigma_2 + \sigma_3) \Delta S = 0$$

$$\therefore \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

说明相向两面上电荷面密度大小相等、符号相反;

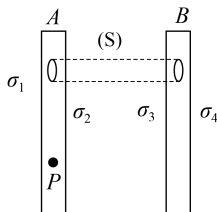
(2) 在 A 内部任取一点 P, 则其场强为零, 并且它是由四个均匀带电平面产生的场强叠加而成的, 即

$$\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0$$

又
$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

$$\therefore \sigma_1 = \sigma_4$$

说明相背两面上电荷面密度总是大小相等, 符号相同.



题 9.21 图

9.22 三个平行金属板 A, B 和 C 的面积都是 200 cm^2 , A 和 B 相距 4.0 mm , A 与 C 相距 2.0 mm , B, C 都接地, 如题 9.22 图所示. 如果使 A 板带正电 $3.0 \times 10^{-7} \text{ C}$, 略去边缘效应, 问 B 板和 C 板上的感应电荷各是多少? 以地的电势为零, 则 A 板的电势是多少?

解: 如题 9.22 图所示, 令 A 板左侧面电荷面密度为 σ_1 , 右侧面电荷面密度为 σ_2

$$(1) \because U_{AC} = U_{AB}, \text{ 即}$$

$$\therefore E_{AC} d_{AC} = E_{AB} d_{AB}$$

$$\therefore \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_{AC}}{E_{AB}} = \frac{d_{AB}}{d_{AC}} = 2$$

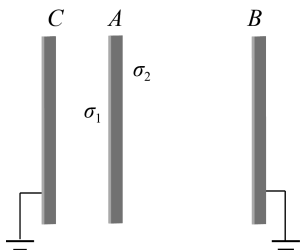
$$\text{且} \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{q_A}{S}$$

$$\text{得} \quad \sigma_2 = \frac{q_A}{3S}, \quad \sigma_1 = \frac{2q_A}{3S}$$

$$\text{而} \quad q_C = -\sigma_1 S = -\frac{2}{3} q_A = -2 \times 10^{-7} \text{ C}$$

$$q_B = -\sigma_2 S = -1 \times 10^{-7} \text{ C}$$

$$(2) \quad U_A = E_{AC} d_{AC} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} d_{AC} = 2.3 \times 10^3 \text{ V}$$



题 9.22 图

9.23 两个半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_1 < R_2$) 的同心薄金属球壳, 现给内球壳带电 $+q$, 试计算:

(1) 外球壳上的电荷分布及电势大小;

(2) 先把外球壳接地, 然后断开接地线重新绝缘, 此时外球壳的电荷分布及电势;

* (3) 再使内球壳接地, 此时内球壳上的电荷以及外球壳上的电势的改变量.

解: (1) 内球带电 $+q$; 球壳内表面带电则为 $-q$, 外表面带电为 $+q$, 且均匀分布, 其电势

$$U = \int_{R_2}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_2}^{\infty} \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

(2) 外壳接地时, 外表面电荷 $+q$ 入地, 外表面不带电, 内表面电荷仍为 $-q$. 所以球壳电势由内球 $+q$ 与内表面 $-q$ 产生:

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 0$$

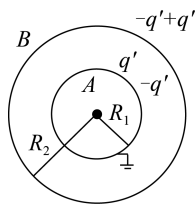
(3) 设此时内球壳带电量为 q' ; 则外壳内表面带电量为 $-q'$, 外壳外表面带电量为 $-q+q'$ (电荷守恒), 此时内球壳电势为零, 且

$$U_A = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{-q+q'}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 0$$

$$\text{得} \quad q' = \frac{R_1}{R_2} q$$

外球壳上电势

$$U_B = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R_2} - \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{-q+q'}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{(R_1 - R_2) q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2}$$



题 9.23 图

9.24 半径为 R 的金属球离地面很远,并用导线与地相联,在与球心相距为 $d=3R$ 处有一点电荷 $+q$,试求:金属球上的感应电荷的电量.

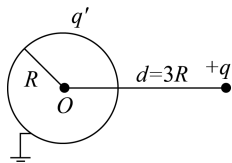
解:如题 9.24 图所示,设金属球感应电荷为 q' ,则球接地时电势 $U_O=0$

由电势叠加原理有:

$$U_O = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 3R} = 0$$

得

$$q' = -\frac{q}{3}$$



题 9.24 图

9.25 有三个大小相同的金属小球,小球 1,2 带有等量同号电荷,相距甚远,其间的库仑力为 F_0 . 试求:

- (1) 用带绝缘柄的不带电小球 3 先后分别接触 1,2 后移去,小球 1,2 之间的库仑力;
- (2) 小球 3 依次交替接触小球 1,2 很多次后移去,小球 1,2 之间的库仑力.

解:由题意知 $F_0 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

(1) 小球 3 接触小球 1 后,小球 3 和小球 1 均带电

$$q' = \frac{q}{2},$$

小球 3 再与小球 2 接触后,小球 2 与小球 3 均带电

$$q'' = \frac{3}{4}q$$

∴ 此时小球 1 与小球 2 间相互作用力

$$F_1 = \frac{q'q''}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\frac{3}{8}q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{3}{8}F_0$$

(2) 小球 3 依次交替接触小球 1,2 很多次后,每个小球带电量均为 $\frac{2q}{3}$.

∴ 小球 1,2 间的作用力 $F_2 = \frac{\frac{2}{3}q \frac{2}{3}q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{4}{9}F_0$

9.26 在半径为 R_1 的金属球之外包有一层外半径为 R_2 的均匀电介质球壳,介质相对介电常数为 ϵ_r ,金属球带电 Q . 试求:

- (1) 电介质内、外的场强;
- (2) 电介质层内、外的电势;
- (3) 金属球的电势.

解:利用有介质时的高斯定理 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q$

(1) 介质内 ($R_1 < r < R_2$) 场强

$$\mathbf{D} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi r^3}, \mathbf{E}_{\text{内}} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^3};$$

介质外($r < R_2$)场强

$$\mathbf{D} = \frac{Qr}{4\pi r^3}, \mathbf{E}_{\text{外}} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

(2) 介质外($r > R_2$)电势

$$U = \int_r^\infty \mathbf{E}_{\text{外}} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

介质内($R_1 < r < R_2$)电势

$$\begin{aligned} U &= \int_r^\infty \mathbf{E}_{\text{内}} \cdot d\mathbf{r} + \int_r^\infty \mathbf{E}_{\text{外}} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{r} + \frac{\epsilon_r - 1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

(3) 金属球的电势

$$\begin{aligned} U &= \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}_{\text{内}} \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_2}^\infty \mathbf{E}_{\text{外}} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Qdr}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} + \int_{R_2}^\infty \frac{Qdr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\epsilon_r - 1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

9.27 如题 9.27 图所示,在平行板电容器的一半容积内充入相对介电常数为 ϵ_r 的电介质。试求:在有电介质部分和无电介质部分极板上自由电荷面密度的比值。

解: 如题 9.27 图所示,充满电介质部分场强为 $\mathbf{E}_2$,真空部分场强为 $\mathbf{E}_1$,自由电荷面密度分别为 σ_2 与 σ_1

由 $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0$ 得

$$D_1 = \sigma_1, D_2 = \sigma_2$$

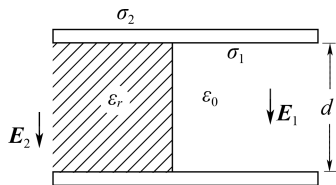
而

$$D_1 = \epsilon_0 E_1, D_2 = \epsilon_0 \epsilon_r E_2$$

$$E_1 = E_2 = \frac{U}{d}$$

$\therefore$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r E_2}{\epsilon_0 E_1} = \epsilon_r$$



题 9.27 图

9.28 两个同轴的圆柱面,长度均为 l ,半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_2 > R_1$),且 $l \gg R_2 - R_1$,两柱面之间充有介电常数 ϵ 的均匀电介质。当两圆柱面分别带等量异号电荷 Q 和 $-Q$ 时,求:

(1) 在半径 r 处 ($R_1 < r < R_2$),厚度为 dr ,长为 l 的圆柱薄壳中任一点的电场能量密度和整个薄壳中的电场能量;

(2) 电介质中的总电场能量;

(3) 圆柱形电容器的电容。

解: 取半径为 r 的同轴圆柱面(S)

则
$$\oint_{(S)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r l D$$

当 $(R_1 < r < R_2)$ 时, $\sum q = Q$

$$\therefore D = \frac{Q}{2\pi r l}$$

(1) 电场能量密度
$$w = \frac{D^2}{2\epsilon} = \frac{Q^2}{8\pi^2 \epsilon r^2 l^2}$$

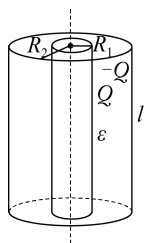
薄壳中 $dW = w dv = \frac{Q^2}{8\pi^2 \epsilon r^2 l^2} 2\pi r dr l = \frac{Q^2 dr}{4\pi \epsilon r l}$

(2) 电介质中总电场能量

$$W = \int_V dW = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2 dr}{4\pi \epsilon r l} = \frac{Q^2}{4\pi \epsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(3) 电容:
$$W = \frac{Q^2}{2C}$$

$$\therefore C = \frac{Q^2}{2W} = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln(R_2/R_1)}$$



题 9.28 图

9.29 如题 9.29 图所示, $C_1 = 0.25\mu\text{F}$, $C_2 = 0.15\mu\text{F}$, $C_3 = 0.20\mu\text{F}$. C_1 上电压为 50V . 求: U_{AB} .

解: 电容 C_1 上电量

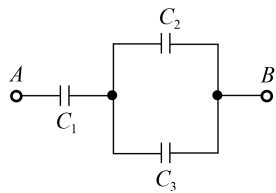
$$Q_1 = C_1 U_1$$

电容 C_2 与 C_3 并联 $C_{23} = C_2 + C_3$

其上电荷 $Q_{23} = Q_1$

$$\therefore U_2 = \frac{Q_{23}}{C_{23}} = \frac{C_1 U_1}{C_{23}} = \frac{25 \times 50}{35}$$

$$U_{AB} = U_1 + U_2 = 50 \left(1 + \frac{25}{35} \right) = 86 \text{ V}$$



题 9.29 图

9.30 C_1 和 C_2 两电容器分别标明“ 200 pF 、 500 V ”和“ 300 pF 、 900 V ”, 把它们串联起来后等值电容是多少? 如果两端加上 1000 V 的电压, 是否会击穿?

解: (1) C_1 与 C_2 串联后电容

$$C' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{200 \times 300}{200 + 300} = 120 \text{ pF}$$

(2) 串联后电压比

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{3}{2}, \text{ 而 } U_1 + U_2 = 1000$$

$$\therefore U_1 = 600 \text{ V}, U_2 = 400 \text{ V}$$

即电容 C_1 电压超过耐压值会击穿, 然后 C_2 也击穿.

9.31 半径为 $R_1 = 2.0 \text{ cm}$ 的导体球, 外套有一同心的导体球壳, 壳的内、外半径分别为 $R_2 = 4.0 \text{ cm}$ 和 $R_3 = 5.0 \text{ cm}$, 当内球带电荷 $Q = 3.0 \times 10^{-8} \text{ C}$ 时, 求:

- (1) 整个电场储存的能量;
 (2) 如果将导体壳接地, 计算储存的能量;
 (3) 此电容器的电容值.

解: 如图, 内球带电 Q , 外球壳内表面带电 $-Q$, 外表面带电 Q

(1) 在 $r < R_1$ 和 $R_2 < r < R_3$ 区域

$$E = 0$$

在 $R_1 < r < R_2$ 时

$$E_1 = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$r > R_3$ 时

$$E_2 = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$\therefore$ 在 $R_1 < r < R_2$ 区域

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2 dr}{8\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

在 $r > R_3$ 区域

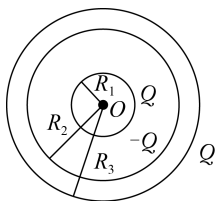
$$W_2 = \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{总能量} \quad W &= W_1 + W_2 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \\ &= 1.82 \times 10^{-4} \text{ J} \end{aligned}$$

(2) 导体壳接地时, 只有 $R_1 < r < R_2$ 时 $E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 r^3}$, $W_2 = 0$

$$\therefore W = W_1 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 1.01 \times 10^{-4} \text{ J}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 电容器电容 } C &= \frac{2W}{Q^2} = 4\pi\epsilon_0 / \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ &= 4.49 \times 10^{-12} \text{ F} \end{aligned}$$



题 9.31 图

习 题 10

10.1 选择题

(1)对于安培环路定理的理解,正确的是:

- (A)若环流等于零,则在回路 L 上必定是 H 处处为零;
- (B)若环流等于零,则在回路 L 上必定不包围电流;
- (C)若环流等于零,则在回路 L 所包围传导电流的代数和为零;
- (D)回路 L 上各点的 H 仅与回路 L 包围的电流有关。

[答案:C]

(2)对半径为 R 载流为 I 的无限长直圆柱体,距轴线 r 处的磁感应强度 B

- (A)内外部磁感应强度 B 都与 r 成正比;
- (B)内部磁感应强度 B 与 r 成正比,外部磁感应强度 B 与 r 成反比;
- (C)内外部磁感应强度 B 都与 r 成反比;
- (D)内部磁感应强度 B 与 r 成反比,外部磁感应强度 B 与 r 成正比。

[答案:B]

(3)质量为 m 电量为 q 的粒子,以速率 v 与均匀磁场 B 成 θ 角射入磁场,轨迹为一螺旋线,若要增大螺距则要

- (1)增加磁场 B ;
- (B)减少磁场 B ;
- (C)增加 θ 角;
- (D)减少速率 v 。

[答案:B]

(4)一个 100 匝的圆形线圈,半径为 5 厘米,通过电流为 0.1 安,当线圈在 1.5T 的磁场中从 $\theta=0$ 的位置转到 180 度(θ 为磁场方向和线圈磁矩方向的夹角)时磁场力做功为

- (A)0.24 J;
- (B)2.4 J;
- (C)0.14 J;
- (D)14 J。

[答案:A]

10.2 填空题

(1)边长为 a 的正方形导线回路载有电流为 I ,则其中心处的磁感应强度_____。

[答案: $\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$, 方向垂直正方形平面]

(2) 计算有限长的直线电流产生的磁场_____用毕奥——萨伐尔定律,而_____用安培环路定理求得(填能或不能)。

[答案:能,不能]

(3) 电荷在静电场中沿任一闭合曲线移动一周,电场力做功为_____。电荷在磁场中沿任一闭合曲线移动一周,磁场力做功为_____。

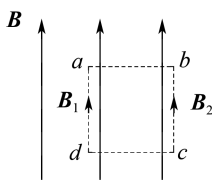
[答案:零,零]

(4) 两个大小相同的螺线管一个有铁心一个没有铁心,当给两个螺线管通以_____电流时,管内的磁力线分布相同,管内的磁感线分布将_____。

[答案:相同,不相同]

10.3 在同一磁感应线上,各点 $\mathbf{B}$ 的数值是否都相等? 为何不把作用于运动电荷的磁力方向定义为磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的方向?

解: 在同一磁感应线上,各点 $\mathbf{B}$ 的数值一般不相等. 因为磁场作用于运动电荷的磁力方向不仅与磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的方向有关,而且与电荷速度方向有关,即磁力方向并不是唯一由磁场决定的,所以不把磁力方向定义为 $\mathbf{B}$ 的方向。



题 10.3 图

10.4(1) 在没有电流的空间区域里,如果磁感应线是平行直线,磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的大小在沿磁感应线和垂直它的方向上是否可能变化(即磁场是否一定是均匀的)?

(2) 若存在电流,上述结论是否还对?

解: (1) 不可能变化,即磁场一定是均匀的. 如图作闭合回路 $abcd$ 可证明 $B_1 = B_2$

$$\oint_{abcd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_1 \overline{da} - B_2 \overline{bc} = \mu_0 \sum I = 0$$

$\therefore$

$$B_1 = B_2$$

(2) 若存在电流,上述结论不对. 如无限大均匀带电平面两侧之磁力线是平行直线,但 $\mathbf{B}$ 方向相反,即 $B_1 \neq B_2$.

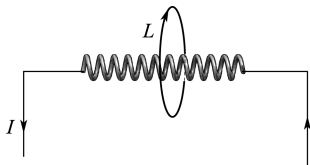
10.5 用安培环路定理能否求有限长一段载流直导线周围的磁场?

答: 不能,因为有限长载流直导线周围磁场虽然有轴对称性,但不是稳恒电流,安培环路定理并不适用。

10.6 在载流长螺线管的情况下,我们导出其内部 $B = \mu_0 nI$,外面 $B = 0$,所以在载流螺线管外面环绕一周(见题 10.6 图)的环路积分

$$\oint_L \mathbf{B}_{\text{外}} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

但从安培环路定理来看,环路 L 中有电流 I 穿过,环路积分



题 10.6 图

应为

$$\oint_L \mathbf{B}_{\text{外}} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

这是为什么?

解: 我们导出 $B_{\text{内}} = \mu_0 nI$, $B_{\text{外}} = 0$ 有一个假设的前提, 即每匝电流均垂直于螺线管轴线. 这时图中环路 L 上就一定没有电流通过, 即也是 $\oint_L \mathbf{B}_{\text{外}} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I = 0$, 与 $\oint_L \mathbf{B}_{\text{外}} \cdot d\mathbf{l} = \oint_0 \cdot d\mathbf{l} = 0$ 是不矛盾的. 但这是导线横截面积为零, 螺距为零的理想模型. 实际上以上假设并不真实存在, 所以使得穿过 L 的电流为 I , 因此实际螺线管若是无限长时, 只是 $\mathbf{B}_{\text{外}}$ 的轴向分量为零, 而垂直于轴的圆周方向分量 $B_{\perp} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, r 为管外一点到螺线管轴的距离.

10.7 如果一个电子在通过空间某一区域时不偏转, 能否肯定这个区域中没有磁场? 如果它发

生偏转能否肯定那个区域中存在着磁场?

解: 如果一个电子在通过空间某一区域时不偏转, 不能肯定这个区域中没有磁场, 也可能存在互相垂直的电场和磁场, 电子受的电场力与磁场力抵消所致. 如果它发生偏转也不能肯定那个区域存在着磁场, 因为仅有电场也可以使电子偏转.

10.8 已知磁感应强度 $B = 2.0 \text{ Wb/m}^2$ 的均匀磁场, 方向沿 x 轴正方向, 如题 9-6 图所示. 试求: (1) 通过图中 $abcd$ 面的磁通量; (2) 通过图中 $befc$ 面的磁通量; (3) 通过图中 $ae fd$ 面的磁通量.

解: 如题 10.8 图所示

(1) 通过 $abcd$ 面积 S_1 的磁通是

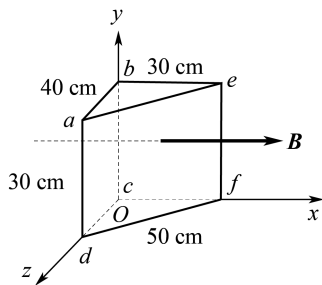
$$\Phi_1 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_1 = 2.0 \times 0.3 \times 0.4 = 0.24 \text{ Wb}$$

(2) 通过 $befc$ 面积 S_2 的磁通量

$$\Phi_2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_2 = 0$$

(3) 通过 $ae fd$ 面积 S_3 的磁通量

$$\Phi_3 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_3 = 2 \times 0.3 \times 0.5 \times \cos\theta = 2 \times 0.3 \times 0.5 \times \frac{4}{5} = 0.24 \text{ Wb (或 } -0.24 \text{ Wb)}$$



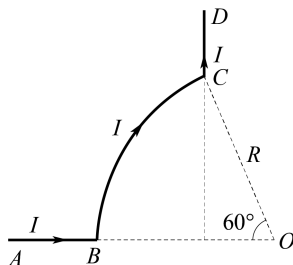
题 10.8 图

10.9 如题 10.9 图所示, AB 、 CD 为长直导线, BC 为圆心在 O 点的一段圆弧形导线, 其半径为 R . 若通以电流 I , 求 O 点的磁感应强度.

解: 如题 10.9 图所示, O 点磁场由 AB 、 BC 、 CD 三部分电流产生. 其中

AB 产生 $\mathbf{B}_1 = 0$

BC 产生 $B_2 = \frac{\mu_0 I}{12R}$, 方向垂直向里



题 10.9 图

$$CD \text{ 段产生 } B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{R}{2}} (\sin 90^\circ - \sin 60^\circ) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \text{ 方向 } \perp \text{ 向里}$$

$$\therefore B_0 = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right), \text{ 方向垂直向里.}$$

10.10 在真空中, 有两根互相平行的无限长直导线 L_1 和 L_2 , 相距 0.1 m, 通有方向相反的电流, $I_1 = 20 \text{ A}$, $I_2 = 10 \text{ A}$, 如题 10.10 图所示. A, B 两点与导线在同一平面内. 这两点与导线 L_2 的距离均为 5.0 cm. 试求 A, B 两点处的磁感应强度, 以及磁感应强度为零的点的位置.

解: 如题 10.10 图所示, B_A 方向垂直纸面向里

$$B_A = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(0.1 - 0.05)} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \times 0.05} = 1.2 \times 10^{-4} \text{ T}$$

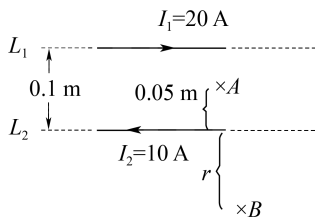
$$B_B = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(0.1 + 0.05)} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \times 0.05} = 1.33 \times 10^{-5} \text{ T}$$

(2) 设 $B = 0$ 在 L_2 外侧距离 L_2 为 r 处

$$\text{则 } \frac{\mu_0 I}{2\pi(r + 0.1)} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} = 0$$

解得

$$r = 0.1 \text{ m}$$



题 10.10 图

10.11 如题 10.11 图所示, 两根导线沿半径方向引向铁环上的 A, B 两点, 并在很远处与电源相连. 已知圆环的粗细均匀, 求环中心 O 的磁感应强度.

解: 如题 10.11 图所示, 圆心 O 点磁场由直电流 $A\infty$ 和 $B\infty$ 及两段圆弧上电流 I_1 与 I_2 所产生, 但 $A\infty$ 和 $B\infty$ 在 O 点产生的磁场为零. 且

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\text{电阻 } R_2}{\text{电阻 } R_1} = \frac{\theta}{2\pi - \theta}.$$

I_1 产生 B_1 方向 $\perp$ 纸面向外

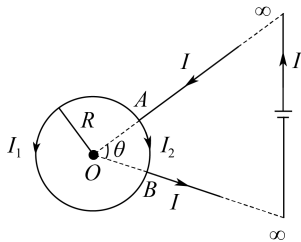
$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1 (2\pi - \theta)}{2R}, I_2 \text{ 产生 } B_2 \text{ 方向 } \perp \text{ 纸面向里}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2 \theta}{2R}$$

$$\therefore \frac{B_1}{B_2} = \frac{I_1 (2\pi - \theta)}{I_2 \theta} = 1$$

有

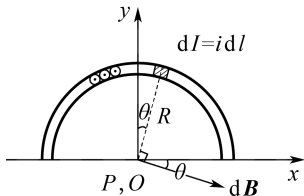
$$B_0 = B_1 + B_2 = 0$$



题 10.11 图

10.12 在一半径 $R = 1.0 \text{ cm}$ 的无限长半圆柱形金属薄片, 自上而下地有电流 $I = 5.0 \text{ A}$ 通过, 电流分布均匀. 如题 10.12 图所示. 试求圆柱轴线任一点 P 处的磁感应强度.

解: 因为金属片无限长, 所以圆柱轴线上任一点 P 的磁感应强度方向都在圆柱截面上, 取坐标如题 10.12 图所示, 取宽为 dl 的一



题 10.12 图

无限长直电流 $dI = \frac{I}{\pi R} dl$, 在轴上 P 点产生 $d\mathbf{B}$ 与 R 垂直, 大小为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 \frac{I}{\pi R} R d\theta}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I d\theta}{2\pi^2 R}$$

$$dB_x = dB \cos\theta = \frac{\mu_0 I \cos\theta d\theta}{2\pi^2 R}$$

$$dB_y = dB \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{\mu_0 I \sin\theta d\theta}{2\pi^2 R}$$

$$\therefore B_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I \cos\theta d\theta}{2\pi^2 R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} = 6.37 \times 10^{-5} \text{ T}$$

$$B_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\mu_0 I \sin\theta d\theta}{2\pi^2 R} \right) = 0$$

$$\therefore \mathbf{B} = 6.37 \times 10^{-5} \mathbf{i} \text{ T}$$

10.13 氢原子处在基态时, 它的电子可看作是在半径 $a = 0.52 \times 10^{-8} \text{ cm}$ 的轨道上作匀速圆周运动, 速率 $v = 2.2 \times 10^8 \text{ cm/s}$. 求电子在轨道中心所产生的磁感应强度和电子磁矩的值.

解: 电子在轨道中心产生的磁感应强度

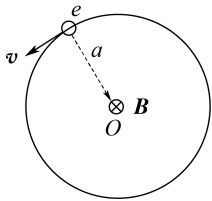
$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 e \mathbf{v} \times \mathbf{a}}{4\pi a^3}$$

如题 10.13 图, 方向垂直向里, 大小为

$$B_0 = \frac{\mu_0 e v}{4\pi a^2} = 13 \text{ T}$$

电子磁矩 $\mathbf{P}_m$ 在图中也是垂直向里, 大小为

$$P_m = \frac{e}{T} \pi a^2 = \frac{e v a}{2} = 9.2 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$



题 10.13 图

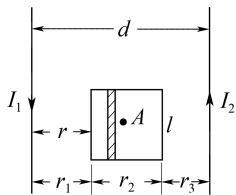
10.14 两平行长直导线相距 $d = 40 \text{ cm}$, 每根导线载有电流 $I_1 = I_2 = 20 \text{ A}$, 如题 10.14 图所示. 求:

- (1) 两导线所在平面内与该两导线等距的一点 A 处的磁感应强度;
- (2) 通过图中斜线所示面积的磁通量. ($r_1 = r_3 = 10 \text{ cm}$, $l = 25 \text{ cm}$).

解: (1) $B_A = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \left(\frac{d}{2}\right)} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \left(\frac{d}{2}\right)} = 4 \times 10^{-5} \text{ T}$ 方向 $\perp$ 纸面向外

(2) 取面元 $dS = l dr$

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_1+r_2} \left[\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d-r)} \right] l dr = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \ln 3 - \frac{\mu_0 I_2 l}{2\pi} \ln \frac{1}{3} = \frac{\mu I_1 l}{\pi} \ln 3 = 2.2 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$



题 10.14 图

10.15 一根很长的铜导线载有电流 10 A , 设电流均匀分布. 在导线内部作一平面 S , 如题 10.15 图所示. 试计算通过 S 平面的磁通量 (沿导线长度方向取长为 1 m 的一段作计算). 铜的

磁导率 $\mu = \mu_0$.

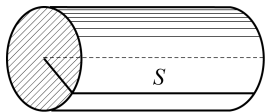
解:由安培环路定律求距圆导线轴为 r 处的磁感应强度

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$$

$$B2\pi r = \mu_0 \frac{Ir^2}{R^2}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$$

磁通量 $\Phi_m = \int_{(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^R \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2} dr = \frac{\mu_0 I}{4\pi} = 10^{-6} \text{ Wb}$



题 10.15 图

10.16 设题 10.16 图中两导线中的电流均为 8A,对图示的三条闭合曲线 a, b, c ,分别写出安培环路定理等式右边电流的代数和.并讨论:

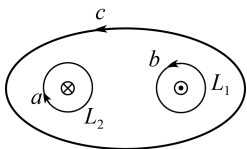
(1)在各条闭合曲线上,各点的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的大小是否相等?

(2)在闭合曲线 c 上各点的 $\mathbf{B}$ 是否为零?为什么?

解: $\oint_a \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 8\mu_0$

$$\oint_{ba} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 8\mu_0$$

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$



题 10.16 图

(1)在各条闭合曲线上,各点 $\mathbf{B}$ 的大小不相等.

(2)在闭合曲线 C 上各点 $\mathbf{B}$ 不为零.只是 $\mathbf{B}$ 的环路积分为零而非每点 $\mathbf{B}=0$.

10.17 题 10.17 图中所示是一根很长的长直圆管形导体的横截面,内、外半径分别为 a, b ,导体内载有沿轴线方向的电流 I ,且 I 均匀地分布在管的横截面上.设导体的磁导率 $\mu \approx \mu_0$,试证明导体内部各点 ($a < r < b$) 的磁感应强度的大小由下式给出:

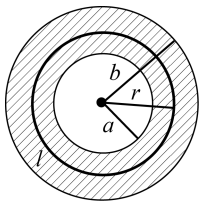
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b^2 - a^2)} \frac{r^2 - a^2}{r}$$

解:取闭合回路 $l = 2\pi r$ ($a < r < b$)

则 $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B2\pi r$

$$\sum I = (\pi r^2 - \pi a^2) \frac{I}{\pi b^2 - \pi a^2}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I (r^2 - a^2)}{2\pi r (b^2 - a^2)}$$



题 10.17 图

10.18 一根很长的同轴电缆,由一导体圆柱(半径为 a)和一同轴的导体圆管(内、外半径分别为 b, c)构成,如题 10.18 图所示.使用时,电流 I 从一导体流去,从另一导体流回.设电流都是均匀地分布在导体的横截面上,求:(1)导体圆柱内 ($r < a$), (2)两导体之间 ($a < r < b$), (3)导体圆筒内 ($b < r < c$) 以及 (4)电缆外 ($r > c$) 各点处磁感应强度的大小

解:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$$

$$(1) r < a \quad B 2\pi r = \mu_0 \frac{I r^2}{R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

$$(2) a < r < b \quad B 2\pi r = \mu_0 I$$

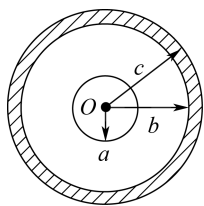
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$(3) b < r < c \quad B 2\pi r = -\mu_0 I \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} + \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I (c^2 - r^2)}{2\pi r (c^2 - b^2)}$$

$$(4) r > c \quad B 2\pi r = 0$$

$$B = 0$$



题 10.18 图

10.19 在半径为 R 的长直圆柱形导体内部,与轴线平行地挖成一半径为 r 的长直圆柱形空腔,两轴间距离为 a ,且 $a > r$,横截面如题 10.19 图所示.现在电流 I 沿导体管流动,电流均匀分布在管的横截面上,而电流方向与管的轴线平行.求:

(1) 圆柱轴线上的磁感应强度的大小;

(2) 空心部分轴线上的磁感应强度的大小.

解:空间各点磁场可看作半径为 R ,电流 I_1 均匀分布在横截面上的圆柱导体和半径为 r 电流 $-I_2$ 均匀分布在横截面上的圆柱导体磁场之和.

(1) 圆柱轴线上的 O 点 B 的大小:

电流 I_1 产生的 $B_1 = 0$, 电流 $-I_2$ 产生的磁场

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} = \frac{\mu_0}{2\pi a} \frac{I r^2}{R^2 - r^2}$$

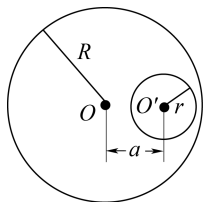
$$\therefore B_0 = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi a (R^2 - r^2)}$$

(2) 空心部分轴线上 O' 点 B 的大小:

电流 I_2 产生的 $B'_2 = 0$,

$$\text{电流 } I_1 \text{ 产生的 } B'_2 = \frac{\mu_0}{2\pi a} \frac{I a^2}{R^2 - r^2} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi (R^2 - r^2)}$$

$$\therefore B'_0 = \frac{\mu_0 I a}{2\pi (R^2 - r^2)}$$



题 10.19 图

10.20 如题 10.20 图所示,长直电流 I_1 附近有一等腰直角三角形线框,通以电流 I_2 ,二者共面.求 $\triangle ABC$ 的各边所受的磁力.

解:

$$\mathbf{F}_{AB} = \int_B^A I_2 d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$F_{AB} = I_2 a \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi d} \quad \text{方向垂直 } AB \text{ 向左}$$

$F_{AC} = \int_A^C I_2 dl \times \mathbf{B}$ 方向垂直 AC 向下, 大小为

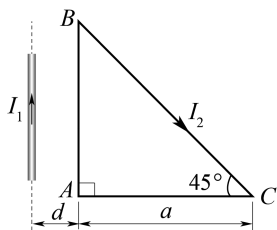
$$F_{AC} = \int_d^{d+a} I_2 dr \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}$$

同理 F_{BC} 方向垂直 BC 向上, 大小

$$F_{BC} = \int_d^{d+a} I_2 dl \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

$$\because dl = \frac{dr}{\cos 45^\circ}$$

$$\therefore F_{BC} = \int_a^{d+a} \frac{\mu_0 I_2 I_1 dr}{2\pi r \cos 45^\circ} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\sqrt{2}\pi} \ln \frac{d+a}{d}$$



题 10.20 图

10.21 在磁感应强度为 $\mathbf{B}$ 的均匀磁场中, 垂直于磁场方向的平面内有一段载流弯曲导线, 电流为 I , 如题 10.21 图所示. 求其所受的安培力.

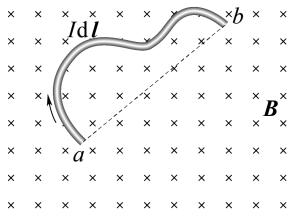
解: 在曲线上取 $d\mathbf{l}$

$$\text{则 } \mathbf{F}_{ab} = \int_a^b I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$\because d\mathbf{l}$ 与 $\mathbf{B}$ 夹角 $\langle d\mathbf{l}, \mathbf{B} \rangle = \frac{\pi}{2}$ 不变, $\mathbf{B}$ 是均匀的.

$$\therefore \mathbf{F}_{ab} = \int_a^b I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I \left(\int_a^b d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B} = I \mathbf{ab} \times \mathbf{B}$$

方向 $\perp \mathbf{ab}$ 向上, 大小 $F_{ab} = B I ab$



题 10.21 图

10.22 如题 10.22 图所示, 在长直导线 AB 内通以电流 $I_1 = 20 \text{ A}$, 在矩形线圈 CDEF 中通有电流 $I_2 = 10 \text{ A}$, AB 与线圈共面, 且 CD, EF 都与 AB 平行. 已知 $a = 9.0 \text{ cm}$, $b = 20.0 \text{ cm}$, $d = 1.0 \text{ cm}$, 求:

(1) 导线 AB 的磁场对矩形线圈每边所作用的力;

(2) 矩形线圈所受合力和合力矩.

解: (1) F_{CD} 方向垂直 CD 向左, 大小

$$F_{CD} = I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = 8.0 \times 10^{-4} \text{ N}$$

同理 F_{FE} 方向垂直 FE 向右, 大小

$$F_{FE} = I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+a)} = 8.0 \times 10^{-5} \text{ N}$$

F_{CF} 方向垂直 CF 向上, 大小为

$$F_{CF} = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d} = 9.2 \times 10^{-5} \text{ N}$$

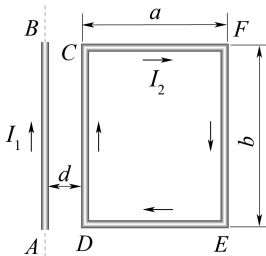
F_{ED} 方向垂直 ED 向下, 大小为

$$F_{ED} = F_{CF} = 9.2 \times 10^{-5} \text{ N}$$

(2) 合力 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{CD} + \mathbf{F}_{FE} + \mathbf{F}_{CF} + \mathbf{F}_{ED}$ 方向向左, 大小为

$$F = 7.2 \times 10^{-4} \text{ N}$$

合力矩 $\mathbf{M} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{B}$



题 10.22 图

∴ 线圈与导线共面

∴

$$\mathbf{P}_m // \mathbf{B}$$

$$\mathbf{M} = 0.$$

10.23 边长为 $l=0.1\text{ m}$ 的正三角形线圈放在磁感应强度 $B=1\text{ T}$ 的均匀磁场中, 线圈平面与磁场方向平行, 如题 10.23 图所示, 使线圈通以电流 $I=10\text{ A}$, 求:

(1) 线圈每边所受的安培力;

(2) 对 OO' 轴的磁力矩大小;

(3) 从所在位置转到线圈平面与磁场垂直时磁力所作的功.

解: (1) $\mathbf{F}_{bc} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B} = 0$

$\mathbf{F}_{bc} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B} = 0$ 方向 $\perp$ 纸面向外, 大小为

$$F_{ab} = IlB \sin 120^\circ = 0.866\text{ N}$$

$\mathbf{F}_{ca} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ 方向 $\perp$ 纸面向里, 大小

$$F_{ca} = IlB \sin 120^\circ = 0.866\text{ N}$$

(2) $P_m = IS$

$\mathbf{M} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{B}$ 沿 OO' 方向, 大小为

$$M = ISB = I \frac{\sqrt{3}l^2}{4} B = 4.33 \times 10^{-2}\text{ N} \cdot \text{m}$$

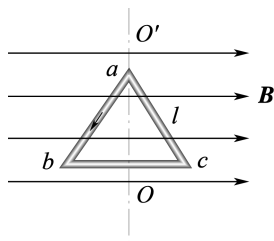
(3) 磁力功 $A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$

∴

$$\Phi_1 = 0 \quad \Phi_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 B$$

∴

$$A = I \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 B = 4.33 \times 10^{-2}\text{ J}$$



题 10.23 图

10.24 一正方形线圈, 由细导线做成, 边长为 a , 共有 N 匝, 可以绕通过其相对两边中点的一个竖直轴自由转动. 现在线圈中通有电流 I , 并把线圈放在均匀的水平外磁场 $\mathbf{B}$ 中, 求线圈磁矩与磁场 $\mathbf{B}$ 的夹角为 θ 时, 线圈受到的转动力矩.

解: 由线圈所受磁力矩 $\mathbf{M} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{B}$ 得到

$$M = P_m B \sin \theta = NIa^2 B \sin \theta$$

10.25 一长直导线通有电流 $I_1=20\text{ A}$, 旁边放一导线 ab , 其中通有电流 $I_2=10\text{ A}$, 且两者共面, 如题 10.25 图所示. 求导线 ab 所受作用力对 O 点的力矩.

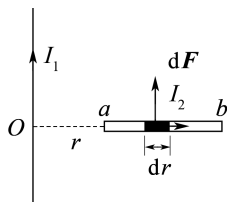
解: 在 ab 上取 dr , 它受力

$d\mathbf{F} \perp ab$ 向上, 大小为

$$dF = I_2 dr \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

$d\mathbf{F}$ 对 O 点力矩 $d\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$d\mathbf{M}$ 方向垂直纸面向外, 大小为



题 10.25 图

$$dM = r dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} dr$$

$$M = \int_a^b dM = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_a^b dr = 3.6 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}$$

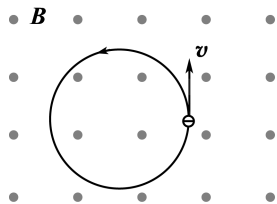
10.26 电子在 $B = 70 \times 10^{-4} \text{ T}$ 的匀强磁场中作圆周运动, 圆周半径 $r = 3.0 \text{ cm}$. 已知 $\mathbf{B}$ 垂直于纸面向外, 某时刻电子在 A 点, 速度 $\mathbf{v}$ 向上, 如题 10.26 图.

(1) 试画出这电子运动的轨道;

(2) 求这电子速度 $\mathbf{v}$ 的大小;

(3) 求这电子的动能 E_k .

解: (1) 轨迹如图



题 10.26 图

(2) $\because evB = m \frac{v^2}{r}$

$\therefore v = \frac{eBr}{m} = 3.7 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

(3) $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 6.2 \times 10^{-16} \text{ J}$

10.27 一电子在 $B = 20 \times 10^{-4} \text{ T}$ 的磁场中沿半径为 $R = 2.0 \text{ cm}$ 的螺旋线运动, 螺距 $h = 5.0 \text{ cm}$, 如题 10.27 图.

(1) 求这电子的速度;

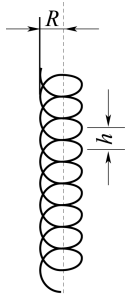
(2) 磁场 $\mathbf{B}$ 的方向如何?

解: (1) $\because R = \frac{mv \cos \theta}{eB}$

$$h = \frac{2\pi m}{eB} v \sin \theta$$

$\therefore v = \sqrt{\left(\frac{eBR}{m}\right)^2 + \left(\frac{eBh}{2\pi m}\right)^2} = 7.57 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

(3) 磁场 $\mathbf{B}$ 的方向沿螺旋线轴线. 或向上或向下, 由电子旋转方向确定.



题 10.27 图

10.28 在霍尔效应实验中, 一宽 1.0 cm , 长 4.0 cm , 厚 $1.0 \times 10^{-3} \text{ cm}$ 的导体, 沿长度方向载有 3.0 A 的电流, 当磁感应强度大小为 $B = 1.5 \text{ T}$ 的磁场垂直地通过该导体时, 产生 $1.0 \times 10^{-5} \text{ V}$ 的横向电压. 试求:

(1) 载流子的漂移速度;

(2) 每立方米的载流子数目.

解: (1) $\because eE_H = evB$

$\therefore v = \frac{E_H}{B} = \frac{U_H}{lB}$ l 为导体宽度, $l = 1.0 \text{ cm}$

$\therefore v = \frac{U_H}{lB} = \frac{1.0 \times 10^{-5}}{10^{-2} \times 1.5} = 6.7 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

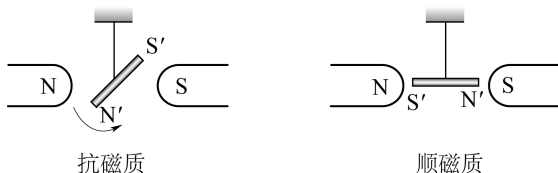
(2) $\because I = nevS$

$\therefore n = \frac{I}{evS}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{1.6 \times 10^{-19} \times 6.7 \times 10^{-4} \times 10^{-2} \times 10^{-5}} \\
 &= 2.8 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}
 \end{aligned}$$

10.29 两种不同磁性材料做成的小棒,放在磁铁的两个磁极之间,小棒被磁化后在磁极间处于不同的方位,如题 10.29 图所示.试指出哪一个是由顺磁质材料做成的,哪一个是由抗磁质材料做成的?

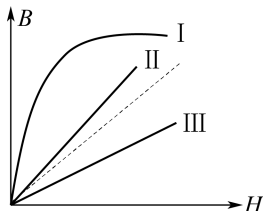
解:见题 10.29 图所示.



题 10.29 图

10.30 题 10.30 图中的三条线表示三种不同磁介质的 $B-H$ 关系曲线,虚线是 $B=\mu_0 H$ 关系的曲线,试指出哪一条是表示顺磁质?哪一条是表示抗磁质?哪一条是表示铁磁质?

答:曲线 II 是顺磁质,曲线 III 是抗磁质,曲线 I 是铁磁质.



题 10.30 图

10.31 螺绕环中心周长 $L=10\text{cm}$,环上线圈匝数 $N=200$ 匝,线圈中通有电流 $I=100\text{mA}$.

(1)当管内是真空时,求管中心的磁场强度 H 和磁感应强度 B_0 ;

(2)若环内充满相对磁导率 $\mu_r=4200$ 的磁性物质,则管内的 B 和 H 各是多少?

* (3)磁性物质中心处由导线中传导电流产生的 B_0 和由磁化电流产生的 B' 各是多少?

解:(1)

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$$

$$HL = NI$$

$$H = \frac{NI}{L} = 200 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$B_0 = \mu_0 H = 2.5 \times 10^{-4} \text{ T}$$

$$(2) H = 200 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1} \quad B = \mu H = \mu_r \mu_0 H = 1.05 \text{ T}$$

$$(3) \text{由传导电流产生的 } B_0 \text{ 即(1)中的 } B_0 = 2.5 \times 10^{-4} \text{ T}$$

$$\therefore \text{由磁化电流产生的 } B' = B - B_0 \approx 1.05 \text{ T}$$

10.32 螺绕环的导线内通有电流 20A ,利用冲击电流计测得环内磁感应强度的大小是 1.0Wb/m^2 .已知环的平均周长是 40cm ,绕有导线 400 匝.试计算:

(1)磁场强度;

(2) 磁化强度;

* (3) 磁化率;

* (4) 相对磁导率.

解: (1) $H = nI = \frac{N}{l}I = 2 \times 10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$

(2) $M = \frac{B}{\mu_0} - H \approx 7.76 \times 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$

(3) $x_m = \frac{M}{H} \approx 38.8$

(3) 相对磁导率 $\mu_r = 1 + x_m = 39.8$

10.33 一铁制的螺绕环, 其平均圆周长 $L = 30 \text{ cm}$, 截面积为 1.0 cm^2 , 在环上均匀绕以 300 匝导线, 当绕组内的电流为 0.032 安培时, 环内的磁通量为 $2.0 \times 10^{-6} \text{ Wb}$. 试计算:

(1) 环内的平均磁通量密度;

(2) 圆环截面中心处的磁场强度;

解: (1) $B = \frac{\Phi}{S} = 2 \times 10^{-2} \text{ T}$

(2) $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI_0$

$$H = \frac{NI_0}{L} = 32 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

习 题 11

11.1 选择题

(1) 一圆形线圈在均匀磁场中作下列运动时, 哪些情况会产生感应电流

- (A) 沿垂直磁场方向平移; (B) 以直径为轴转动, 轴跟磁场垂直;
(C) 沿平行磁场方向平移; (D) 以直径为轴转动, 轴跟磁场平行。

[答案: B]

(2) 下列哪些矢量场为保守力场

- (A) 静电场; (B) 稳恒磁场;
(C) 感生电场; (D) 变化的磁场。

[答案: A]

(3) 用线圈的自感系数 L 来表示载流线圈磁场能量的公式 $W_m = \frac{1}{2}LI^2$

- (A) 只适用于无限长密绕线管;
(B) 只适用于一个匝数很多, 且密绕的螺线环;
(C) 只适用于单匝圆线圈;
(D) 适用于自感系数 L 一定的任意线圈。

[答案: D]

(4) 对于涡旋电场, 下列说法不正确的是

- (A) 涡旋电场对电荷有作用力; (B) 涡旋电场由变化的磁场产生;
(C) 涡旋场由电荷激发; (D) 涡旋电场的电力线闭合的。

[答案: C]

(5) 对于位移电流, 下列说法正确的是

- (A) 与电荷的定向运动有关; (B) 变化的电场;
(C) 产生焦耳热; (D) 与传导电流一样。

[答案: B]

(6) 对于平面电磁波, 下列说法不正确的是

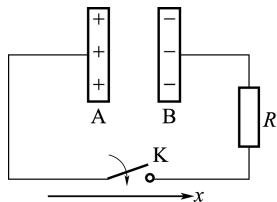
- (A) 平面电磁波为横波; (B) 电磁波是偏振波;
(C) 同一点 E 和 H 的量值关系为 $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$; (D) 电磁波的波速等于光速。

[答案:D]

(7) 图示为一充电后的平行板电容器, A 板带正电, B 板带负电, 开关 K 合上时, A、B 位移电流方向为(按图上所标 x 轴正方向回答)

- (1) x 轴正向
- (2) x 轴负向
- (3) x 轴正向或负向
- (4) 不确定

[答案:B]



11.2 填空题

(1) 将金属圆环从磁极间沿与磁感应强度垂直的方向抽出时, 圆环将受到_____。

[答案: 磁力]

(2) 产生动生电动势的非静电场力是_____, 产生感生电动势的非静电场力是_____, 激发感生电场的场源是_____。

[答案: 洛伦兹力, 涡旋电场力, 变化的磁场]

(3) 长为 l 的金属直导线在垂直于均匀的平面内以角速度 ω 转动, 如果转轴的位置在_____, 这个导线上的电动势最大, 数值为_____; 如果转轴的位置在_____, 整个导线上的电动势最小, 数值为_____。

[答案: 端点, $\frac{1}{2}B\omega l^2$; 中点, 0]

(4) 一个变化的电场必定有一个磁场伴随它, 方程为_____。

[答案: $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \frac{d\varphi_D}{dt} = \int_{s_1} \left(\mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s}$]

(5) 一个变化的磁场必定有一个电场伴随它, 方程为_____。

[答案: $\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\varphi_m}{dt} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$]

(6) 磁力线必定是无头无尾的闭合曲线, 方程为_____。

[答案: $\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$]

(7) 静电平衡的导体内部不可能有电荷的分布, 方程为_____。

[答案: $\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \sum q_0 = \int_V \rho_0 dV$]

11.3 一半径 $r=10\text{ cm}$ 的圆形回路放在 $B=0.8\text{ T}$ 的均匀磁场中. 回路平面与 $\mathbf{B}$ 垂直. 当回路半径以恒定速率 $\frac{dr}{dt}=80\text{ cm/s}$ 收缩时, 求回路中感应电动势的大小.

解: 回路磁通

$$\Phi_m = BS = B\pi r^2$$

感应电动势大小

$$\epsilon = \frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{d}{dt}(B\pi r^2) = B2\pi r \frac{dr}{dt} = 0.40\text{ V}$$

11.4 一对互相垂直的相等的半圆形导线构成回路, 半径 $R=5\text{ cm}$, 如题 11.4 图所示. 均匀磁场 $B=80\times 10^{-3}\text{ T}$, B 的方向与两半圆的公共直径(在 Oz 轴上)垂直, 且与两个半圆构成相等的角 α 当磁场在 5 ms 内均匀降为零时, 求回路中的感应电动势的大小及方向.

解: 取半圆形 cba 法向为 $\mathbf{i}$,

$$\text{则} \quad \Phi_{m_1} = \frac{\pi R^2}{2} B \cos \alpha$$

同理, 半圆形 adc 法向为 $\mathbf{j}$, 则

$$\Phi_{m_2} = \frac{\pi R^2}{2} B \cos \alpha$$

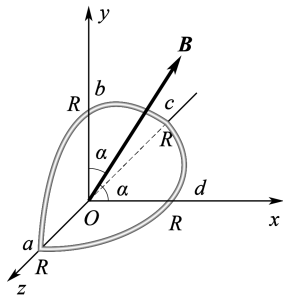
$\because \mathbf{B}$ 与 $\mathbf{i}$ 夹角和 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{j}$ 夹角相等,

$$\therefore \quad \alpha = 45^\circ$$

$$\text{则} \quad \Phi_m = B\pi R^2 \cos \alpha$$

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\pi R^2 \cos \alpha \frac{dB}{dt} = -8.89 \times 10^{-2}\text{ V}$$

方向与 $cbadc$ 相反, 即顺时针方向.



题 11.4 图

11.5 如题 11.5 图所示, 载有电流 I 的长直导线附近, 放一导体半圆环 MeN 与长直导线共面, 且端点 MN 的连线与长直导线垂直. 半圆环的半径为 b , 环心 O 与导线相距 a . 设半圆环以速度 v 平行导线平移. 求半圆环内感应电动势的大小和方向及 MN 两端的电压 $U_M - U_N$.

解: 作辅助线 MN , 则在 $MeNM$ 回路中, 沿 v 方向运动时 $d\Phi_m$

$=0$

$$\therefore \quad \epsilon_{MeNM} = 0$$

$$\text{即} \quad \epsilon_{MeN} = \epsilon_{MN}$$

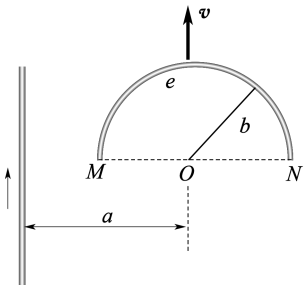
$$\text{又} \because \epsilon_{MN} = \int_{a-b}^{a+b} vB \cos \pi d \quad l = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b} < 0$$

所以 ϵ_{MeN} 沿 NeM 方向,

$$\text{大小为} \quad \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}$$

M 点电势高于 N 点电势, 即

$$U_M - U_N = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}$$



题 11.5 图

11.6 如题 11.6 所示, 在两平行载流的无限长直导线的平面内有一矩形线圈. 两导线中的

电流方向相反、大小相等,且电流以 $\frac{dI}{dt}$ 的变化率增大,求:

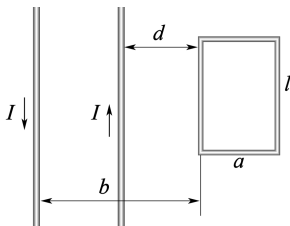
(1)任一时刻线圈内所通过的磁通量;

(2)线圈中的感应电动势.

解:以向外磁通为正则

$$\begin{aligned} (1) \Phi_m &= \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr - \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr \\ &= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left[\ln \frac{b+a}{b} - \ln \frac{d+a}{d} \right] \end{aligned}$$

$$(2) \epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\ln \frac{d+a}{d} - \ln \frac{b+a}{b} \right] \frac{dI}{dt}$$



题 11.6 图

11.7 如题 11.7 图所示,用一根硬导线弯成半径为 r 的一个半圆.令这半圆形导线在磁场中以频率 f 绕图中半圆的直径旋转.整个电路的电阻为 R .求:感应电流的最大值.

$$\text{解: } \Phi_m = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = B \frac{\pi r^2}{2} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

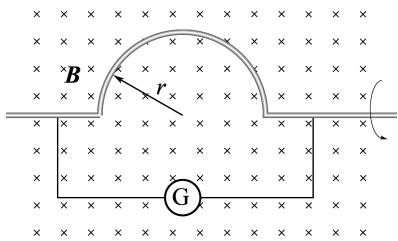
$$\epsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{B\pi r^2 \omega}{2} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$\therefore$

$$\epsilon_m = \frac{B\pi r^2 \omega}{2} = \frac{B\pi r^2}{2} 2\pi f = \pi^2 r^2 B f$$

$\therefore$

$$I = \frac{\epsilon_m}{R} = \frac{\pi^2 r^2 B f}{R}$$



题 11.7 图

11.8 如题 11.8 图所示,长直导线通以电流 $I=5\text{ A}$,在其右方放一长方形线圈,两者共面.线圈长 $b=0.06\text{ m}$,宽 $a=0.04\text{ m}$,线圈以速度 $v=0.03\text{ m/s}$ 垂直于直线平移远离.求: $d=0.05\text{ m}$ 时线圈中感应电动势的大小和方向.

解: AB 、 CD 运动速度 $\mathbf{v}$ 方向与磁力线平行,不产生感应电动势.

DA 产生电动势

$$\epsilon_1 = \int_D^A (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = vBb = vb \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

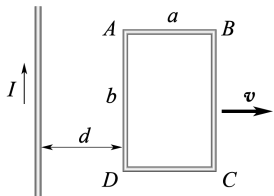
BC 产生电动势

$$\epsilon_2 = \int_B^C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -vb \frac{\mu_0 I}{2\pi(a+d)}$$

$\therefore$ 回路中总感应电动势

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 = \frac{\mu_0 I b v}{2\pi} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right) = 1.6 \times 10^{-8} \text{ V}$$

方向沿顺时针.



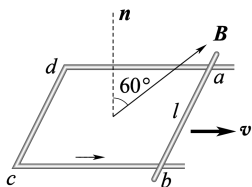
题 11.8 图

11.9 长度为 l 的金属杆 ab 以速率 v 在导电轨道 $abcd$ 上平行移动.已知导轨处于均匀磁场 $\mathbf{B}$ 中, $\mathbf{B}$ 的方向与回路的法线成 60° 角(如题 11.9 图所示), $\mathbf{B}$ 的大小为 $B=kt$ (k 为正常).设 $t=0$ 时杆位于 cd 处,求:任一时刻 t 导线回路中感应电动势的大小和方向.

$$\text{解: } \Phi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = Blvt \cos 60^\circ = kt^2 lv \frac{1}{2} = \frac{1}{2} klvt^2$$

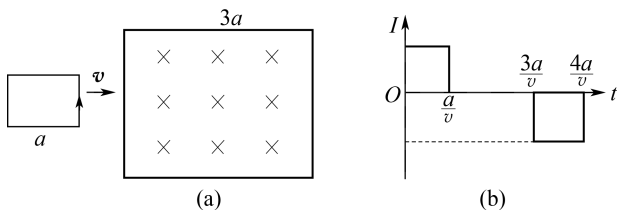
$$\therefore \quad \epsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -klv$$

即沿 $abcd$ 方向顺时针方向.



题 11.9 图

11.10 一矩形导线框以恒定的加速度向右穿过一均匀磁场区, $\mathbf{B}$ 的方向如题 11.10 图所示. 取逆时针方向为电流正方向, 画出线框中电流与时间的关系 (设导线框刚进入磁场区时 $t=0$).



题 11.10 图

解: 如图逆时针为矩形导线框正向, 则进入时 $\frac{d\Phi}{dt} < 0, \epsilon > 0$;

在磁场中时 $\frac{d\Phi}{dt} = 0, \epsilon = 0$;

出场时 $\frac{d\Phi}{dt} > 0, \epsilon < 0$, 故 $I-t$ 曲线如题 10-9 图(b)所示.

11.11 导线 ab 长为 l , 绕过 O 点的垂直轴以匀角速 ω 转动, $aO = \frac{l}{3}$ 磁感应强度 B 平行于转轴, 如图 11.11 所示. 试求:

(1) ab 两端的电势差;

(2) a, b 两端哪一点电势高?

解: (1) 在 Ob 上取 $r \rightarrow r+dr$ 一小段

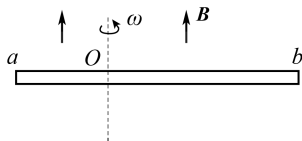
$$\text{则} \quad \epsilon_{Ob} = \int_0^{\frac{2l}{3}} \omega r B dr = \frac{2B\omega}{9} l^2$$

$$\text{同理} \quad \epsilon_{Oa} = \int_0^{\frac{l}{3}} \omega r B dr = \frac{1}{18} B\omega l^2$$

$$\therefore \quad \epsilon_{ab} = \epsilon_{aO} + \epsilon_{Ob} = \left(-\frac{1}{18} + \frac{2}{9} \right) B\omega l^2 = \frac{1}{6} B\omega l^2$$

$$(2) \therefore \quad \epsilon_{ab} > 0 \quad \text{即} \quad U_a - U_b < 0$$

$\therefore b$ 点电势高.



题 11.11 图

11.12 如题 11.12 图所示, 长度为 $2b$ 的金属杆位于两无限长直导线所在平面的正中间, 并以速度 v 平行于两直导线运动. 两直导线通以大小相等、方向相反的电流 I , 两导线相距 $2a$. 试求: 金属杆两端的电势差及其方向.

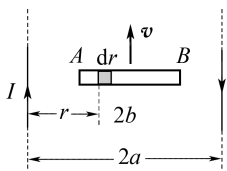
解:在金属杆上取 dr 距左边直导线为 r , 则

$$\epsilon_{AB} = \int_A^B (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{a-b}^{a+b} -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2a-r} \right) dr = -\frac{\mu_0 I v}{\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}$$

$$\therefore \epsilon_{AB} < 0$$

$\therefore$ 实际上感应电动势方向从 $B \rightarrow A$, 即从图中从右向左,

$$\therefore U_{AB} = \frac{\mu_0 I v}{\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}$$



题 11.12 图

11.13 磁感应强度为 $\mathbf{B}$ 的均匀磁场充满一半径为 R 的圆柱形空间, 一金属杆放在题 11.13 图中位置, 杆长为 $2R$, 其中一半位于磁场内、另一半在磁场外. 当 $\frac{dB}{dt} > 0$ 时, 求: 杆两端的感应电动势的大小和方向.

解: $\therefore$

$$\epsilon_{ac} = \epsilon_{ab} + \epsilon_{bc}$$

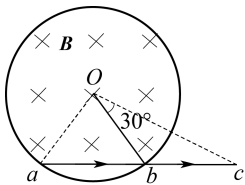
$$\epsilon_{ab} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d}{dt} \left[-\frac{\sqrt{3}}{4} R^2 B \right] = \frac{\sqrt{3} R}{4} \frac{dB}{dt}$$

$$\epsilon_{bc} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d}{dt} \left[-\frac{\pi R^2}{12} B \right] = \frac{\pi R^2}{12} \frac{dB}{dt}$$

$$\therefore \epsilon_{ac} = \left[\frac{\sqrt{3} R^2}{4} + \frac{\pi R^2}{12} \right] \frac{dB}{dt}$$

$$\therefore \frac{dB}{dt} > 0$$

$$\therefore \epsilon_{ac} > 0 \text{ 即 } \epsilon \text{ 从 } a \rightarrow c$$



题 11.13 图

11.14 半径为 R 的直螺线管中, 有 $\frac{dB}{dt} > 0$ 的磁场, 一任意闭合导线 $abca$, 一部分在螺线管内绷直成 ab 弦, a, b 两点与螺线管绝缘, 如题 11.14 图所示. 设 $ab = R$, 试求: 闭合导线中的感应电动势.

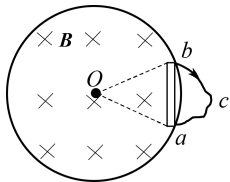
解: 如图, 闭合导线 $abca$ 内磁通量

$$\Phi_m = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = B \left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{\sqrt{3} R^2}{4} \right)$$

$$\therefore \epsilon_i = - \left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{\sqrt{3} R^2}{4} \right) \frac{dB}{dt}$$

$$\therefore \frac{dB}{dt} > 0$$

$$\therefore \epsilon_i < 0, \text{ 即感应电动势沿 } acba, \text{ 逆时针方向.}$$



题 11.14 图

11.15 如题 11.15 图所示, 在垂直于直螺线管管轴的平面上放置导体 ab 于直径位置, 另一导体 cd 在一弦上, 导体均与螺线管绝缘. 当螺线管接通电源的一瞬间管内磁场如题 11.15 图示方向. 试求:

(1) ab 两端的电势差;

(2) cd 两点电势高低的情况.

解: 由 $\oint_l \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S}$ 知, 此时 $\mathbf{E}_{\text{旋}}$ 以 O 为中心沿逆时针方向.

(1) $\because ab$ 是直径, 在 ab 上处处 $\mathbf{E}_{\text{旋}}$ 与 ab 垂直

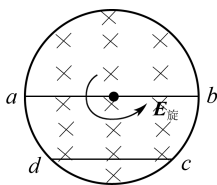
$$\therefore \oint_l \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\therefore \epsilon_{ab} = 0, \text{ 有 } U_a = U_b$$

(2) 同理,

$$\epsilon_{dc} = \int_d^c \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l} > 0$$

$$\therefore U_d - U_c < 0 \text{ 即 } U_c > U_d$$



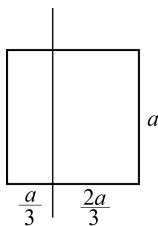
题 11.15 图

11.16 一无限长的直导线和一正方形的线圈如题 11.16 图所示放置(导线与线圈接触处绝缘). 求: 线圈与导线间的互感系数.

解: 设长直电流为 I , 其磁场通过正方形线圈的互感磁通为

$$\Phi_{12} = \int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}} \frac{\mu_0 I a}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 2$$

$$\therefore M = \frac{\Phi_{12}}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 2$$



题 11.16 图

11.17 两线圈顺串联后总自感为 1.0 H , 在它们的形状和位置都不变的情况下, 反串联后总自感为 0.4 H . 试求: 它们之间的互感.

解: $\because$ 顺串时 $L = L_1 + L_2 + 2M$

反串联时 $L' = L_1 + L_2 - 2M$

$$\therefore L - L' = 4M$$

$$M = \frac{L - L'}{4} = 0.15 \text{ H}$$

11.18 一矩形截面的螺绕环如题 11.18 图所示, 共有 N 匝. 试求:

(1) 此螺线环的自感系数;

(2) 若导线内通有电流 I , 环内磁能为多少?

解: 如题 11.18 图示

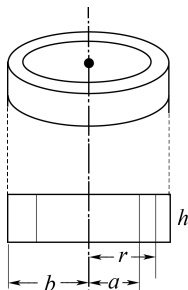
(1) 通过横截面的磁通为

$$\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\text{磁链 } \Psi = N\Phi = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\therefore L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$(2) \because W_m = \frac{1}{2} L I^2$$



题 11.18 图

$$\therefore W_m = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

11.19 一无限长圆柱形直导线,其截面各处的电流密度相等,总电流为 I . 求:导线内部单位长度上所储存的磁能.

解:在 $r < R$ 时 $B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$

$$\therefore w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4}$$

取 $dV = 2\pi r dr$ ($\because$ 导线长 $l=1$)

则 $W = \int_0^R w_m 2\pi r dr = \int_0^R \frac{\mu_0 I^2 r^3}{4\pi R^4} dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$

11.20 圆柱形电容器内、外导体截面半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_1 < R_2$), 中间充满介电常数为 ϵ 的电介质. 当两极板间的电压随时间的变化 $\frac{dU}{dt} = k$ 时 (k 为常数), 求介质内距圆柱轴线为 r 处的位移电流密度.

解:圆柱形电容器电容 $C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$

$$q = CU = \frac{2\pi\epsilon l U}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$D = \frac{q}{S} = \frac{2\pi\epsilon l U}{2\pi r \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{\epsilon U}{r \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$\therefore j = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\epsilon k}{r \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

11.21 试证:平行板电容器的位移电流可写成 $I_d = C \frac{dU}{dt}$. 式中 C 为电容器的电容, U 是电容器两极板的电势差. 如果不是平板电容器, 以上关系还适用吗?

解: $\because$

$$q = CU$$

$$D = \sigma_0 = \frac{CU}{S}$$

$$\therefore \Phi_D = DS = CU$$

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

不是平板电容器时 $D = \sigma_0$ 仍成立

$$\therefore I_D = C \frac{dU}{dt} \text{ 还适用.}$$

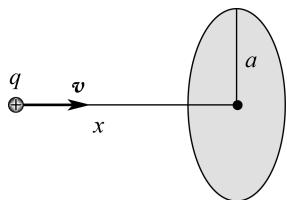
11.22 如题 11.22 图所示,电荷 $+q$ 以速度 v 向 O 点运动, $+q$ 到 O 点的距离为 x , 在 O 点处作半径为 a 的圆平面, 圆平面与 v 垂直. 求: 通过此圆的位移电流.

解: 如题 11.22 图所示, 当 q 离平面 x 时, 通过圆平面的电位移通量

$$\Phi_D = \frac{q}{2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right)$$

$\therefore$

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{qa^2v}{2(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$



题 11.22 图

11.23 如题 11.23 图所示, 设平行板电容器内各点的交变电场强度 $E = 720 \sin 10^5 \pi t \text{ V/m}$, 正方向规定如图. 试求:

(1) 电容器中的位移电流密度;

(2) 电容器内距中心连线 $r = 10^{-2} \text{ m}$ 的一点 P , 当 $t = 0$ 和 $t = \frac{1}{2} \times 10^{-5} \text{ s}$ 时磁场强度的大小及方向 (不考虑传导电流产生的磁场).

解: (1) $j_D = \frac{\partial D}{\partial t}, D = \epsilon_0 E$

$$\begin{aligned} \therefore j_D &= \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (720 \sin 10^5 \pi t) \\ &= 720 \times 10^5 \pi \epsilon_0 \cos 10^5 \pi t \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \end{aligned}$$

(2) $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0 + \int_{(S)} \mathbf{j}_D \cdot d\mathbf{S}$

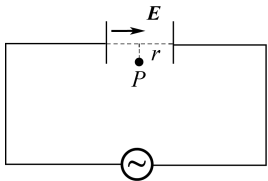
取与极板平行且以中心连线为圆心, 半径 r 的圆周 $l = 2\pi r$, 则

$$H 2\pi r = \pi r^2 j_D$$

$$H = \frac{r}{2} j_D$$

$$t = 0 \text{ 时 } H_P = \frac{r}{2} \times 720 \times 10^5 \pi \epsilon_0 = 3.6 \times 10^5 \pi \epsilon_0 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$t = \frac{1}{2} \times 10^{-5} \text{ s 时, } H_P = 0$$



题 11.23 图

习 题 12

12.1 选择题

(1) 在双缝干涉实验中, 为使屏上的干涉条纹间距变大, 可以采取的办法是

- (A) 使屏靠近双缝. (B) 使两缝的间距变小.
(C) 把两个缝的宽度稍微调窄. (D) 改用波长较小的单色光源.

[答案: B]

(2) 两块平玻璃构成空气劈形膜, 左边为棱边, 用单色平行光垂直入射. 若上面的平玻璃以棱边为轴, 沿逆时针方向作微小转动, 则干涉条纹的

- (A) 间隔变小, 并向棱边方向平移. (B) 间隔变大, 并向远离棱边方向平移.
(C) 间隔不变, 向棱边方向平移. (D) 间隔变小, 并向远离棱边方向平移.

[答案: A]

(3) 一束波长为 λ 的单色光由空气垂直入射到折射率为 n 的透明薄膜上, 透明薄膜放在空气中, 要使反射光得到干涉加强, 则薄膜最小的厚度为

- (A) $\lambda/4$. (B) $\lambda/(4n)$.
(C) $\lambda/2$. (D) $\lambda/(2n)$.

[答案: B]

(4) 在迈克耳孙干涉仪的一条光路中, 放入一折射率为 n , 厚度为 d 的透明薄片, 放入后, 这条光路的光程改变了

- (A) $2(n-1)d$. (B) $2nd$.
(C) $2(n-1)d + \lambda/2$. (D) nd .
(E) $(n-1)d$.

[答案: A]

(5) 在迈克耳孙干涉仪的一条光路中, 放入一折射率为 n 的透明介质薄膜后, 测出两束光的光程差的改变量为一个波长 λ , 则薄膜的厚度是

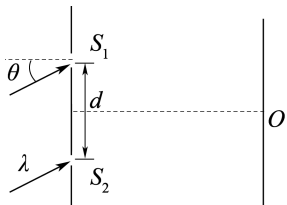
- (A) $\lambda/2$. (B) $\lambda/(2n)$.
(C) λ/n . (D) $\lambda/[2(n-1)]$.

[答案: D]

12.2 填空题

(1) 如图所示, 波长为 λ 的平行单色光斜入射到距离为 d 的双缝上, 入射角为 θ . 在图中的屏中央 O 处 ($\overline{S_1O} = \overline{S_2O}$), 两束相干光的相位差为_____.

[答案: $2\pi d \sin \theta / \lambda$]



(2) 在双缝干涉实验中, 所用单色光波长为 $\lambda = 562.5 \text{ nm}$ ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$), 双缝与观察屏的距离 $D = 1.2 \text{ m}$, 若测得屏上相邻明条纹间距为 $\Delta x = 1.5 \text{ mm}$, 则双缝的间距 $d =$ _____.

[答案: 0.45 mm]

(3) 波长 $\lambda = 600 \text{ nm}$ 的单色光垂直照射到牛顿环装置上, 第二个明环与第五个明环所对应的空气膜厚度之差为_____ nm . ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$)

[答案: 900 nm]

(4) 在杨氏双缝干涉实验中, 整个装置的结构不变, 全部由空气中浸入水中, 则干涉条纹的间距将变_____. (填疏或密)

[答案: 变密]

(5) 在杨氏双缝干涉实验中, 光源作平行于缝 S_1, S_2 连线方向向下微小移动, 则屏幕上的干涉条纹将向_____方移动.

[答案: 向上]

(6) 在杨氏双缝干涉实验中, 用一块透明的薄云母片盖住下面的一条缝, 则屏幕上的干涉条纹将向_____方移动.

[答案: 向下]

(7) 由两块平玻璃构成空气劈形膜, 左边为棱边, 用单色平行光垂直入射. 若上面的平玻璃以垂直于下平玻璃的方向离开平移, 则干涉条纹将向_____平移, 并且条纹的间距将_____.

[答案: 棱边, 保持不变]

12.3 某单色光从空气射入水中, 其频率、波速、波长是否变化? 怎样变化?

解: v 不变, 为波源的振动频率; $\lambda_n = \frac{\lambda_{\text{空}}}{n}$ 变小; $u = \lambda_n v$ 变小.

12.4 什么是光程? 在不同的均匀媒质中, 若单色光通过的光程相等时, 其几何路程是否相同? 其所需时间是否相同? 在光程差与位相差的关系式 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s$ 中, 光波的波长要用真

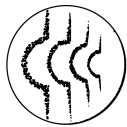
空中波长,为什么?

解: $\Delta = nr$. 不同媒质若光程相等,则其几何路程定不相同;其所需时间相同,为 $\Delta t = \frac{\Delta}{C}$.

因为 Δ 中已经将光在介质中的路程折算为光在真空中所走的路程。

12.5 用劈尖干涉来检测工件表面的平整度,当波长为 λ 的单色光垂直入射时,观察到的干涉条纹如题 12.5 图所示,每一条纹的弯曲部分的顶点恰与左邻的直线部分的连线相切. 试说明工件缺陷是凸还是凹? 并估算该缺陷的程度。

解: 工件缺陷是凹的. 故各级等厚线(在缺陷附近的)向棱边方向弯曲. 按题意,每一条纹弯曲部分的顶点恰与左邻的直线部分连线相切,说明弯曲部分相当于条纹向棱边移动了一条,故相应的空气隙厚度差为 $\Delta e = \frac{\lambda}{2}$,这也是工件缺陷的程度。



题 12.5 图

12.6 如题 12.6 图,牛顿环的平凸透镜可以上下移动,若以单色光垂直照射,看见条纹向中心收缩,问透镜是向上还是向下移动?

解: 条纹向中心收缩,透镜应向上移动. 因相应条纹的膜厚 e_k 位置向中心移动。



题 12.6 图

12.7 在杨氏双缝实验中,双缝间距 $d=0.20\text{ mm}$,缝屏间距 $D=1.0\text{ m}$,试求:

(1)若第二级明条纹离屏中心的距离为 6.0 mm ,计算此单色光的波长;

(2)相邻两明条纹间的距离.

解: (1)由 $x_{\text{明}} = \frac{D}{d}k\lambda$ 知, $6.0 = \frac{1 \times 10^3}{0.2} \times 2\lambda$,

$$\therefore \lambda = 0.6 \times 10^{-3} \text{ mm} = 600 \text{ nm}$$

$$(2) \Delta x = \frac{D}{d}\lambda = \frac{1 \times 10^3}{0.2} \times 0.6 \times 10^{-3} = 3 \text{ mm}$$

12.8 在双缝装置中,用一很薄的云母片($n=1.58$)覆盖其中的一条缝,结果使屏幕上的第七级明条纹恰好移到屏幕中央原零级明纹的位置. 若入射光的波长为 550 nm ,求此云母片的厚度.

解: 设云母片厚度为 e ,则由云母片引起的光程差为

$$\delta = ne - e = (n-1)e$$

按题意 $\delta = 7\lambda$

$$\therefore e = \frac{7\lambda}{n-1} = \frac{7 \times 550 \times 10^{-9}}{1.58-1} = 6.6 \times 10^{-6} \text{ m} = 6.6 \text{ }\mu\text{m}$$

12.9 洛埃镜干涉装置如题 12.9 图所示,镜长 30 cm ,狭缝光源 S 在离镜左边 20 cm 的平

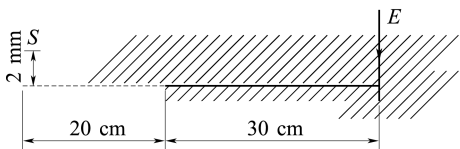
面内,与镜面的垂直距离为 2.0 mm ,光源波长 $\lambda = 7.2 \times 10^{-7}\text{ m}$,试求位于镜右边缘的屏幕上第一条明条纹到镜边缘的距离.

解: 镜面反射光有半波损失,且反射光可视为虚光源 S' 发出. 所以由 S 与 S' 发出的两光束到达屏幕上距镜边缘为 x 处的光程差为

$$\delta = (r_2 - r_1) + \frac{\lambda}{2} = d \frac{x}{D} + \frac{\lambda}{2}$$

第一明纹处,对应 $\delta = \lambda$

$$\therefore x = \frac{\lambda D}{2d} = \frac{7.2 \times 10^{-7} \times 50}{2 \times 0.4} = 4.5 \times 10^{-2}\text{ mm}$$



题 12.9 图

12.10 一平面单色光波垂直照射在厚度均匀的薄油膜上,油膜覆盖在玻璃板上. 油的折射率为 1.30 ,玻璃的折射率为 1.50 ,若单色光的波长可由光源连续可调,可观察到 500 nm 与 700 nm 这两个波长的单色光在反射中消失. 试求油膜层的厚度.

解: 油膜上、下两表面反射光的光程差为 $2ne$,由反射相消条件有

$$2ne = (2k+1) \frac{\lambda}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad (k=0,1,2,\dots) \quad ①$$

当 $\lambda_1 = 500\text{ nm}$ 时,有

$$2ne = \left(k_1 + \frac{1}{2}\right) \lambda_1 = k_1 \lambda_1 + 250 \quad ②$$

当 $\lambda_2 = 700\text{ nm}$ 时,有

$$2ne = \left(k_2 + \frac{1}{2}\right) \lambda_2 = k_2 \lambda_2 + 350 \quad ③$$

因 $\lambda_2 > \lambda_1$, 所以 $k_2 < k_1$; 又因为 λ_1 与 λ_2 之间不存在 λ_3 满足

$$2ne = \left(k_3 + \frac{1}{2}\right) \lambda_3 \text{ 式}$$

即不存在 $k_2 < k_3 < k_1$ 的情形,所以 k_2, k_1 应为连续整数,

$$\text{即} \quad k_2 = k_1 - 1 \quad ④$$

由②、③、④式可得:

$$k_1 = \frac{k_2 \lambda_2 + 100}{\lambda_1} = \frac{7k_2 + 1}{5} = \frac{7(k_1 - 1) + 1}{5}$$

$$\text{得} \quad k_1 = 3$$

$$k_2 = k_1 - 1 = 2$$

可由②式求得油膜的厚度为

$$e = \frac{k_1 \lambda_1 + 250}{2n} = 673.1\text{ nm}$$

12.11 白光垂直照射到空气中一厚度为 380 nm 的肥皂膜上,设肥皂膜的折射率为 1.33 ,试问该膜的正面呈现什么颜色? 背面呈现什么颜色?

解: 由反射干涉相长公式有

$$2ne + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (k=1, 2, \dots)$$

得

$$\lambda = \frac{4ne}{2k-1} = \frac{4 \times 1.33 \times 380}{2k-1} = \frac{2021.6}{2k-1}$$

$$k=2, \lambda_2 = 673.9 \text{ nm (红色)}$$

$$k=3, \lambda_3 = 404.3 \text{ nm (紫色)}$$

所以肥皂膜正面呈现紫红色.

由透射干涉相长公式 $2ne = k\lambda (k=1, 2, \dots)$

所以

$$\lambda = \frac{2ne}{k} = \frac{1010.8}{k}$$

当 $k=2$ 时, $\lambda = 505.4 \text{ nm}$ (绿色)

故背面呈现绿色.

12.12 在折射率 $n_1 = 1.52$ 的镜头表面涂有一层折射率 $n_2 = 1.38$ 的 MgF_2 增透膜, 如果此膜适用于波长 $\lambda = 550 \text{ nm}$ 的光, 问膜的厚度应取何值?

解: 设光垂直入射增透膜, 欲透射增强, 则膜上、下两表面反射光应满足干涉相消条件, 即

$$2n_2e = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} e &= \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda}{2n_2} = \frac{k\lambda}{2n_2} + \frac{\lambda}{4n_2} \\ &= \frac{550}{2 \times 1.38}k + \frac{550}{4 \times 1.38} = (199.3k + 99.6) \text{ nm} \end{aligned}$$

令 $k=0$, 得膜的最薄厚度为 99.6 nm .

当 k 为其他整数倍时, 也都满足要求.

12.13 如题 12.13 图, 波长为 680 nm 的平行光垂直照射到 $L = 0.12 \text{ m}$ 长的两块玻璃片上, 两玻璃片一边相互接触, 另一边被直径 $d = 0.048 \text{ mm}$ 的细钢丝隔开. 求:

(1) 两玻璃片间的夹角 $\theta = ?$

(2) 相邻两明条纹间空气膜的厚度差是多少?

(3) 相邻两暗条纹的间距是多少?

(4) 在这 0.12 m 内呈现多少条明条纹?

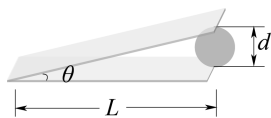
解: (1) 由图知, $L \sin \theta = d$, 即 $L\theta = d$

$$\text{故 } \theta = \frac{d}{L} = \frac{0.048}{0.12 \times 10^3} = 4.0 \times 10^{-4} \text{ (弧度)}$$

$$(2) \text{ 相邻两明条纹空气膜厚度差为 } \Delta e = \frac{\lambda}{2} = 3.4 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$(3) \text{ 相邻两暗条纹间距 } l = \frac{\lambda}{2\theta} = \frac{680 \times 10^{-9}}{2 \times 4.0 \times 10^{-4}} = 85 \times 10^{-5} \text{ m} = 0.85 \text{ mm}$$

$$(4) \Delta N = \frac{L}{l} \approx 141 \text{ 条}$$



题 12.13 图

12.14 用 $\lambda = 500 \text{ nm}$ 的平行光垂直入射劈形薄膜的上表面,从反射光中观察,劈尖的棱边是暗纹.若劈尖上面媒质的折射率 n_1 大于薄膜的折射率 $n(n=1.5)$.求:

(1)膜下面媒质的折射率 n_2 与 n 的大小关系;

(2)第 10 条暗纹处薄膜的厚度;

(3)使膜的下表面向下平移一微小距离 Δe ,干涉条纹有什么变化?若 $\Delta e = 2.0 \mu\text{m}$,原来的第 10 条暗纹处将被哪级暗纹占据?

解:(1) $n_2 > n$. 因为劈尖的棱边是暗纹,对应光程差 $\Delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$,膜厚 $e=0$ 处,有 $k=0$,只能是下面媒质的反射光有半波损失 $\frac{\lambda}{2}$ 才合题意;

$$(2) \Delta e = 9 \times \frac{\lambda_n}{2} = \frac{9\lambda}{2n} = \frac{9 \times 500}{2 \times 1.5} = 1.5 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

(因 10 个条纹只有 9 个条纹间距)

(3)膜的下表面向下平移,各级条纹向棱边方向移动.若 $\Delta e = 2.0 \mu\text{m}$,原来第 10 条暗纹处现对应的膜厚为 $\Delta e' = (1.5 \times 10^{-3} + 2.0 \times 10^{-3}) \text{ mm}$

$$\Delta N = \frac{\Delta e'}{\frac{\lambda_n}{2}} = \frac{3.5 \times 10^{-3} \times 2 \times 1.5}{5.0 \times 10^{-4}} = 21$$

现被第 21 级暗纹占据.

12.15 (1)若用波长不同的光观察牛顿环, $\lambda_1 = 600 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 450 \text{ nm}$,观察到用 λ_1 时的第 k 个暗环与用 λ_2 时的第 $k+1$ 个暗环重合,已知透镜的曲率半径是 190 cm .求用 λ_1 时第 k 个暗环的半径.

(2)又如在牛顿环中用波长为 500 nm 的第 5 个明环与用波长为 λ_2 的第 6 个明环重合,求未知波长 λ_2 .

解:(1)由牛顿环暗环公式

$$r_k = \sqrt{kR\lambda}$$

据题意有 $r = \sqrt{kR\lambda_1} = \sqrt{(k+1)R\lambda_2}$

$$\therefore k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \text{代入上式得}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{R\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}} \\ &= \sqrt{\frac{190 \times 10^{-2} \times 600 \times 10^{-10} \times 450 \times 10^{-10}}{600 \times 10^{-10} - 450 \times 10^{-10}}} \\ &= 1.85 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

(2)用 $\lambda_1 = 500 \text{ nm}$ 照射, $k_1 = 5$ 级明环与 λ_2 的 $k_2 = 6$ 级明环重合,则有

$$r = \sqrt{\frac{(2k_1-1)R\lambda_1}{2}} = \sqrt{\frac{(2k_2-1)R\lambda_2}{2}}$$

$$\therefore \lambda_2 = \frac{2k_1-1}{2k_2-1}\lambda_1 = \frac{2 \times 5 - 1}{2 \times 6 - 1} \times 500 = 409.1 \text{ nm}$$

12.16 当牛顿环装置中的透镜与玻璃之间的空间充以液体时,第十个亮环的直径由 $d_1 = 1.40 \times 10^{-2} \text{ m}$ 变为 $d_2 = 1.27 \times 10^{-2} \text{ m}$,求液体的折射率.

解:由牛顿环明环公式

$$r_{\text{空}} = \frac{D_1}{2} = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}}$$

$$r_{\text{液}} = \frac{D_2}{2} = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2n}}$$

两式相除得 $\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{n}$, 即 $n = \frac{D_1^2}{D_2^2} = \frac{1.96}{1.61} \approx 1.22$

12.17 利用迈克耳逊干涉仪可测量单色光的波长. 当 M_1 移动距离为 0.322 mm 时,观察到干涉条纹移动数为 1024 条,求所用单色光的波长.

解:由 $\Delta d = \Delta N \frac{\lambda}{2}$

得
$$\lambda = 2 \frac{\Delta d}{\Delta N} = 2 \times \frac{0.322 \times 10^{-3}}{1024} \\ = 6.289 \times 10^{-7} \text{ m} = 628.9 \text{ nm}$$

12.18 把折射率为 $n = 1.632$ 的玻璃片放入迈克耳逊干涉仪的一条光路中,观察到有 150 条干涉条纹向一方移过. 若所用单色光的波长为 $\lambda = 500 \text{ nm}$,求此玻璃片的厚度.

解:设插入玻璃片厚度为 d ,则相应光程差变化为

$$2(n-1)d = \Delta N \lambda$$

$\therefore d = \frac{\Delta N \lambda}{2(n-1)} = \frac{150 \times 500 \times 10^{-9}}{2(1.632-1)} = 5.9 \times 10^{-5} \text{ m} = 5.9 \times 10^{-2} \text{ mm}$

习 题 13

13.1 选择题

(1)在夫琅禾费单缝衍射实验中,对于给定的入射单色光,当缝宽度变小时,除中央亮纹的中心位置不变外,各级衍射条纹

- (A)对应的衍射角变小. (B)对应的衍射角变大.
(C)对应的衍射角也不变. (D)光强也不变.

[答案:B]

(2)波长 $\lambda = 500 \text{ nm}$ ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) 的单色光垂直照射到宽度 $a = 0.25 \text{ mm}$ 的单缝上,单缝后面放一凸透镜,在凸透镜的焦平面上放置一屏幕,用以观测衍射条纹.今测得屏幕上中央明条纹一侧第三个暗条纹和另一侧第三个暗条纹之间的距离为 $d = 12 \text{ mm}$,则凸透镜的焦距是

- (A) 2 m. (B) 1 m. (C) 0.5 m.
(D) 0.2 m. (E) 0.1 m

[答案:B]

(3)波长为 λ 的单色光垂直入射于光栅常数为 d 、缝宽为 a 、总缝数为 N 的光栅上.取 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,则决定出现主极大的衍射角 q 的公式可写成

- (A) $N a \sin q = k \lambda$. (B) $a \sin q = k \lambda$.
(C) $N d \sin q = k \lambda$. (D) $d \sin q = k \lambda$.

[答案:D]

(4)设光栅平面、透镜均与屏幕平行.则当入射的平行单色光从垂直于光栅平面入射变为斜入射时,能观察到的光谱线的最高级次 k

- (A) 变小. (B) 变大.
(C) 不变. (D) 的改变无法确定.

[答案:B]

(5)在光栅光谱中,假如所有偶数级次的主极大都恰好在单缝衍射的暗纹方向上,因而实际上不出现,那么此光栅每个透光缝宽度 a 和相邻两缝间不透光部分宽度 b 的关系为

- (A) $a = 0.5b$ (B) $a = b$
(C) $a = 2b$ (D) $a = 3b$

[答案:B]

13.2 填空题

(1) 将波长为 λ 的平行单色光垂直投射于一狭缝上, 若对应于衍射图样的第一级暗纹位置的衍射角的绝对值为 θ , 则缝的宽度等于_____.

[答案: $\lambda/\sin\theta$]

(2) 波长为 λ 的单色光垂直入射在缝宽 $a = 4\lambda$ 的单缝上. 对应于衍射角 $\varphi = 30^\circ$, 单缝处的波面可划分为_____个半波带.

[答案: 4]

(3) 在夫琅禾费单缝衍射实验中, 当缝宽变窄, 则衍射条纹变_____; 当入射波长变长时, 则衍射条纹变_____。(填疏或密)

[答案: 变疏, 变疏]

(4) 在单缝夫琅禾费衍射实验中, 设第一级暗纹的衍射角很小, 若钠黄光 ($\lambda_1 = 589 \text{ nm}$) 中央明条纹为 4.0 nm , 则 $\lambda_2 = 442 \text{ nm}$ ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) 的蓝紫色光的中央明纹宽度为_____ nm .

[答案: 3.0 nm]

(5) 在透光缝数为 N 的平面光栅的衍射实验中, 中央主极大的光强是单缝衍射中央主极大光强的_____倍, 通过 N 个缝的总能量是通过单缝的能量的_____倍.

[答案: N^2, N]

13.3 衍射的本质是什么? 衍射和干涉有什么联系和区别?

答: 波的衍射现象是波在传播过程中经过障碍物边缘或孔隙时所发生的展衍现象. 其实质是由被障碍物或孔隙的边缘限制的波阵面上各点发出的无数子波相互叠加而产生. 而干涉则是由同频率、同方向及位相差恒定的两列波的叠加形成.

13.4 在夫琅禾费单缝衍射实验中, 如果把单缝沿透镜光轴方向平移时, 衍射图样是否会跟着移动? 若把单缝沿垂直于光轴方向平移时, 衍射图样是否会跟着移动?

答: 把单缝沿透镜光轴方向平移时, 衍射图样不会跟着移动. 单缝沿垂直于光轴方向平移时, 衍射图样不会跟着移动.

13.5 什么叫半波带? 单缝衍射中怎样划分半波带? 对应于单缝衍射第 3 级明条纹和第 4 级暗条纹, 单缝处波面各可分成几个半波带?

答: 半波带由单缝 A 、 B 首尾两点向 φ 方向发出的衍射线的光程差用 $\frac{\lambda}{2}$ 来划分. 对应于第 3 级明纹和第 4 级暗纹, 单缝处波面可分成 7 个和 8 个半波带.

$$\therefore \text{由 } a \sin \varphi = (2k+1) \frac{\lambda}{2} = (2 \times 3 + 1) \frac{\lambda}{2} = 7 \times \frac{\lambda}{2}$$

$$a \sin \varphi = 4\lambda = 8 \times \frac{\lambda}{2}$$

13.6 在单缝衍射中,为什么衍射角 φ 愈大(级数愈大)的那些明条纹的亮度愈小?

答:因为衍射角 φ 愈大则 $a \sin \varphi$ 值愈大,分成的半波带数愈多,每个半波带透过的光通量就愈小,而明条纹的亮度是由一个半波带的光能量决定的,所以亮度减小.

13.7 单缝衍射暗条纹条件与双缝干涉明条纹的条件在形式上类似,两者是否矛盾? 怎样说明?

答:不矛盾. 单缝衍射暗纹条件为 $a \sin \varphi = k\lambda = 2k \frac{\lambda}{2}$, 是用半波带法分析(子波叠加问题). 相邻两半波带上对应点向 φ 方向发出的光波在屏上会聚点一一相消,而半波带为偶数,故形成暗纹;而双缝干涉明纹条件为 $d \sin \theta = k\lambda$, 描述的是两路相干波叠加问题,其波程差为波长的整数倍,相干加强为明纹.

13.8 光栅衍射与单缝衍射有何区别? 为何光栅衍射的明条纹特别明亮而暗区很宽?

答:光栅衍射是多光束干涉和单缝衍射的总效果. 其明条纹主要取决于多光束干涉. 光强与缝数 N^2 成正比,所以明纹很亮;又因为在相邻明纹间有 $(N-1)$ 个暗纹,而一般很大,故实际上在两相邻明纹间形成一片黑暗背景.

13.9 试指出当衍射光栅的光栅常数为下述三种情况时,哪些级次的衍射明条纹缺级?

(1) $a+b=2a$; (2) $a+b=3a$; (3) $a+b=4a$.

解:由光栅明纹条件和单缝衍射暗纹条件同时满足时,出现缺级. 即

$$\begin{cases} (a+b) \sin \varphi = \pm k\lambda & (k=0, 1, 2, \dots) \\ a \sin \varphi = \pm k'\lambda & (k'=1, 2, \dots) \end{cases}$$

可知,当 $k = \frac{a+b}{a}k'$ 时明纹缺级.

(1) $a+b=2a$ 时, $k=2, 4, 6, \dots$ 偶数级缺级;

(2) $a+b=3a$ 时, $k=3, 6, 9, \dots$ 级次缺级;

(3) $a+b=4a$, $k=4, 8, 12, \dots$ 级次缺级.

13.10 若以白光垂直入射光栅,不同波长的光将会有不同的衍射角. 问(1)零级明条纹能否分开不同波长的光?(2)在可见光中哪种颜色的光衍射角最大? 不同波长的光分开程度与什么因素有关?

解:(1)零级明纹不会分开不同波长的光. 因为各种波长的光在零级明纹处均各自相干加强.

(2)可见光中红光的衍射角最大,因为由 $(a+b) \sin \varphi = k\lambda$, 对同一 k 值,衍射角 $\varphi \propto \lambda$.

13.11 一单色平行光垂直照射一单缝,若其第三级明条纹位置正好与 600 nm 的单色平行光的第二级明条纹位置重合,求前一种单色光的波长.

解:单缝衍射的明纹公式为

$$a \sin \varphi = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

当 $\lambda = 600 \text{ nm}$ 时, $k = 2$

$\lambda = \lambda_x$ 时, $k = 3$

重合时 φ 角相同, 所以有

$$a \sin \varphi = (2 \times 2 + 1) \frac{600}{2} = (2 \times 3 + 1) \frac{\lambda_x}{2}$$

$$\text{得} \quad \lambda_x = \frac{5}{7} \times 600 = 428.6 \text{ nm}$$

13.12 用橙黄色的平行光垂直照射一宽为 $a = 0.60 \text{ mm}$ 的单缝, 缝后凸透镜的焦距 $f = 40.0 \text{ cm}$, 观察屏幕上形成的衍射条纹. 若屏上离中央明条纹中心 1.40 mm 处的 P 点为一明条纹; 求:

- (1) 入射光的波长;
- (2) P 点处条纹的级数;
- (3) 从 P 点看, 对该光波而言, 狭缝处的波面可分成几个半波带?

解: (1) 由于 P 点是明纹, 故有 $a \sin \varphi = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$, $k = 1, 2, 3 \dots$

$$\text{由} \frac{x}{f} = \frac{1.4}{400} = 3.5 \times 10^{-3} = \tan \varphi \approx \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} \text{故} \lambda &= \frac{2a \sin \varphi}{2k+1} = \frac{2 \times 0.6}{2k+1} \times 3.5 \times 10^{-3} \\ &= \frac{1}{2k+1} \times 4.2 \times 10^{-3} \text{ mm} \end{aligned}$$

当 $k = 3$, 得 $\lambda_3 = 600 \text{ nm}$

$k = 4$, 得 $\lambda_4 = 470 \text{ nm}$

(2) 若 $\lambda_3 = 600 \text{ nm}$, 则 P 点是第 3 级明纹;

若 $\lambda_4 = 470 \text{ nm}$, 则 P 点是第 4 级明纹.

(3) 由 $a \sin \varphi = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$ 可知,

当 $k = 3$ 时, 单缝处的波面可分成 $2k+1 = 7$ 个半波带;

当 $k = 4$ 时, 单缝处的波面可分成 $2k+1 = 9$ 个半波带.

13.13 用 $\lambda = 590 \text{ nm}$ 的钠黄光垂直入射到每毫米有 500 条刻痕的光栅上, 问最多能看到第几级明条纹?

$$\text{解: } a + b = \frac{1}{500} \text{ mm} = 2.0 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

由 $(a+b) \sin \varphi = k\lambda$ 知, 最多见到的条纹级数 $k_{\max}$ 对应的 $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{所以有 } k_{\max} = \frac{a+b}{\lambda} = \frac{2.0 \times 10^3}{590} \approx 3.39, \text{ 即实际见到的最高级次为 } k_{\max} = 3.$$

13.14 波长 $\lambda=600\text{ nm}$ 的单色光垂直入射到一光栅上,第二、第三级明条纹分别出现在 $\sin\varphi_2=0.20$ 与 $\sin\varphi_3=0.30$ 处,第四级缺级.求:

(1)光栅常数;

(2)光栅上狭缝的宽度;

(3)在 $90^\circ > \varphi > -90^\circ$ 范围内,实际呈现的全部级数.

解:(1)由 $(a+b)\sin\varphi=k\lambda$ 式

对应于 $\sin\varphi_1=0.20$ 与 $\sin\varphi_2=0.30$ 处满足:

$$0.20(a+b)=2\times 600\times 10^{-9}$$

$$0.30(a+b)=3\times 600\times 10^{-9}$$

得
$$a+b=6.0\times 10^{-6}\text{ m}$$

(2)因第四级缺级,故此须同时满足

$$(a+b)\sin\varphi=k\lambda$$

$$a\sin\varphi=k'\lambda$$

解得
$$a=\frac{a+b}{4}k'=1.5\times 10^{-6}k'$$

取 $k'=1$,得光栅狭缝的最小宽度为 $1.5\times 10^{-6}\text{ m}$

(3)由 $(a+b)\sin\varphi=k\lambda$

$$k=\frac{(a+b)\sin\varphi}{\lambda}$$

当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$,对应 $k=k_{\max}$

$$\therefore k_{\max}=\frac{a+b}{\lambda}=\frac{6.0\times 10^{-6}}{600\times 10^{-9}}=10$$

因 $\pm 4, \pm 8$ 缺级,所以在 $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$ 范围内实际呈现的全部级数为

$k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 9$ 共 15 条明条纹($k=\pm 10$ 在 $k=\pm 90^\circ$ 处看不到).

13.15 一双缝,两缝间距为 0.1 mm ,每缝宽为 0.02 mm ,用波长为 480 nm 的平行单色光垂直入射双缝,双缝后放一焦距为 50 cm 的透镜.试求:(1)透镜焦平面上单缝衍射中央明条纹的宽度;(2)单缝衍射的中央明条纹包迹内有多少条双缝衍射明条纹?

解:(1)中央明纹宽度为

$$l_0=2\frac{\lambda}{a}f=2\times\frac{480\times 10^{-6}\times 50\times 10}{0.02}\text{ mm}=2.4\text{ cm}$$

(2)由缺级条件

$$a\sin\varphi=k'\lambda$$

$$(a+b)\sin\varphi=k\lambda$$

知

$$k=k'\frac{a+b}{a}=k'\frac{0.1}{0.02}=5k' \quad k'=1,2,\dots$$

即 $k=5, 10, 15, \dots$ 缺级.

中央明纹的边缘对应 $k'=1$, 所以单缝衍射的中央明纹包迹内有 $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ 共 9 条双缝衍射明条纹.

13.16 在夫琅禾费圆孔衍射中, 设圆孔半径为 0.10 mm, 透镜焦距为 50 cm, 所用单色光波长为 500 nm, 求在透镜焦平面处屏幕上呈现的艾里斑半径.

解: 由爱里斑的半角宽度

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.22 \times \frac{500 \times 10^{-6}}{0.2} = 30.5 \times 10^{-4}$$

$$\therefore \text{爱里斑半径} \frac{d}{2} = f \tan \theta \approx f \theta = 500 \times 30.5 \times 10^{-4} = 1.5 \text{ mm}$$

13.17 已知天空中两颗星相对于一望远镜的角距离为 $4.84 \times 10^{-6} \text{ rad}$, 它们都发出波长为 550 nm 的光, 试问望远镜的口径至少要多大, 才能分辨出这两颗星?

解: 由最小分辨角公式

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

$$\therefore D = 1.22 \frac{\lambda}{\theta} = 1.22 \times \frac{5.5 \times 10^{-5}}{4.84 \times 10^{-6}} = 13.86 \text{ cm}$$

13.18 已知入射的 X 射线束含有从 0.095~1.3 nm 范围内的各种波长, 晶体的晶格常数为 0.275 nm, 当 X 射线以 45° 角入射到晶体时, 问对哪些波长的 X 射线能产生强反射?

解: 由布喇格公式 $2d \sin \varphi = k\lambda$

得 $\lambda = \frac{2d \sin \varphi}{k}$ 时满足干涉相长

当 $k=1$ 时, $\lambda = 2 \times 0.275 \times \sin 45^\circ = 0.389 \text{ nm}$

$k=2$ 时, $\lambda = \frac{2 \times 0.275 \times \sin 45^\circ}{2} = 0.191 \text{ nm}$

$k=3$ 时, $\lambda = \frac{3.89}{3} = 0.130 \text{ nm}$

$k=4$ 时, $\lambda = \frac{3.89}{4} = 0.097 \text{ nm}$

故只有 $\lambda_3 = 0.130 \text{ nm}$ 和 $\lambda_4 = 0.097 \text{ nm}$ 的 X 射线能产生强反射.

习 题 14

14.1 选择题

(1)一束光强为 I_0 的自然光垂直穿过两个偏振片,且此两偏振片的偏振化方向成 45° 角,则穿过两个偏振片后的光强 I 为

- (A) $I_0/4\sqrt{2}$. (B) $I_0/4$.
(C) $I_0/2$. (D) $\sqrt{2}I_0/2$.

[答案:B]

(2)自然光以布儒斯特角由空气入射到一玻璃表面上,反射光是

- (A)在入射面内振动的完全线偏振光.
(B)平行于入射面的振动占优势的部分偏振光.
(C)垂直于入射面振动的完全线偏振光.
(D)垂直于入射面的振动占优势的部分偏振光.

[答案:C]

(3)在双缝干涉实验中,用单色自然光,在屏上形成干涉条纹.若在两缝后放一个偏振片,则

- (A)干涉条纹的间距不变,但明纹的亮度加强.
(B)干涉条纹的间距不变,但明纹的亮度减弱.
(C)干涉条纹的间距变窄,且明纹的亮度减弱.
(D)无干涉条纹.

[答案:B]

(4)一束自然光自空气射向一块平板玻璃(如图),设入射角等于布儒斯特角 i_0 ,则在界面2的反射光是

- (A)自然光。
(B)线偏振光且光矢量的振动方向垂直于入射面。
(C)线偏振光且光矢量的振动方向平行于入射面。
(D)部分偏振光。

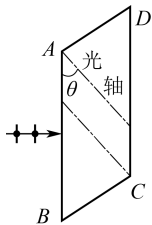
[答案:B]

* (5) $ABCD$ 为一块方解石的一个截面, AB 为垂直于纸面的晶体平面与纸面的交线. 光轴方向在纸面内且与 AB 成一锐角 q , 如图所示. 一束平行的单色自然光垂直于 AB 端面入射.

在方解石内折射光分解为 o 光和 e 光, o 光和 e 光的

- (A) 传播方向相同, 电场强度的振动方向互相垂直.
- (B) 传播方向相同, 电场强度的振动方向不互相垂直.
- (C) 传播方向不同, 电场强度的振动方向互相垂直.
- (D) 传播方向不同, 电场强度的振动方向不互相垂直.

[答案: C]



14.2 填空题

(1) 马吕斯定律的数学表达式为 $I = I_0 \cos^2 \alpha$. 式中 I 为通过检偏器的透射光的强度; I_0 为入射_____的强度; α 为入射光_____方向和检偏器_____方向之间的夹角。

[答案: 线偏振光(或完全偏振光, 或平面偏振光), 光(矢量)振动, 偏振化(或透光轴);]

(2) 当一束自然光以布儒斯特角入射到两种媒质的分界面上时, 就偏振状态来说反射光为_____光, 其振动方向_____于入射面。

[答案: 完全偏振光(或线偏振光), 垂直;]

(3) 一束自然光从空气投射到玻璃表面上(空气折射率为 1), 当折射角为 30° 时, 反射光是完全偏振光, 则此玻璃板的折射率等于_____。

[答案: $\sqrt{3}$]

(4) 光的干涉和衍射现象反映了光的_____性质. 光的偏振现象说明光波是_____波。

[答案: 波动, 横波;]

* (5) 在光学各向异性晶体内部有一确定的方向, 沿这一方向寻常光和非寻常光的_____相等, 这一方向称为晶体的光轴. 只有一个光轴方向的晶体称为_____晶体。

[答案: 传播速度, 单轴]

14.3 自然光是否一定不是单色光? 线偏振光是否一定是单色光?

答: 自然光不能说一定不是单色光. 因为它只强调存在大量的、各个方向的光矢量, 并未要求各方向光矢量的频率不一样. 线偏振光也不一定是单色光. 因为它只要求光的振动方向同一, 并未要求各光矢的频率相同.

14.4 用哪些方法可以获得线偏振光? 怎样用实验来检验线偏振光、部分偏振光和自然光?

答: 略.

14.5 一束光入射到两种透明介质的分界面上时, 发现只有透射光而无反射光, 试说明这束光是怎样入射的? 其偏振状态如何?

答:这束光是以布儒斯特角入射的. 其偏振态为平行入射面的线偏振光.

14.6 什么是光轴、主截面和主平面? 什么是寻常光线和非常光线? 它们的振动方向和各自主平面有何关系?

答:略.

14.7 在单轴晶体中, e 光是否总是以 c/n_e 的速率传播? 哪个方向以 c/n_o 的速率传播?

答: e 光沿不同方向传播速率不等, 并不是以 c/n_o 的速率传播. 沿光轴方向以 c/n_o 的速率传播.

14.8 是否只有自然光入射晶体时才能产生 O 光和 e 光?

答: 否. 线偏振光不沿光轴入射晶体时, 也能产生 O 光和 e 光.

14.9 投射到起偏器的自然光强度为 I_0 , 开始时, 起偏器和检偏器的透光轴方向平行. 然后使检偏器绕入射光的传播方向转过 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$, 试分别求出在上述三种情况下, 透过检偏器后光的强度是 I_0 的几倍?

解: 由马吕斯定律有

$$I_1 = \frac{I_0}{2} \cos^2 30^\circ = \frac{3}{8} I_0$$

$$I_2 = \frac{I_0}{2} \cos^2 45^\circ = \frac{1}{4} I_0$$

$$I_3 = \frac{I_0}{2} \cos^2 60^\circ = \frac{1}{8} I_0$$

所以透过检偏器后光的强度分别是 I_0 的 $\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ 倍.

14.10 使自然光通过两个偏振化方向夹角为 60° 的偏振片时, 透射光强为 I_1 , 今在这两个偏振片之间再插入一偏振片, 它的偏振化方向与前两个偏振片均成 30° , 问此时透射光 I 与 I_1 之比为多少?

解: 由马吕斯定律

$$I_1 = \frac{I_0}{2} \cos^2 60^\circ = \frac{I_0}{8}$$

$$I = \frac{I_0}{2} \cos^2 30^\circ \cos^2 30^\circ = \frac{9I_0}{32}$$

$$\therefore \frac{I}{I_1} = \frac{9}{4} = 2.25$$

14.11 自然光入射到两个重叠的偏振片上. 如果透射光强为, (1) 透射光最大强度的三分之一, (2) 入射光强的三分之一, 则这两个偏振片透光轴方向间的夹角为多少?

解: (1)
$$I_1 = \frac{I_0}{2} \cos^2 \alpha_1 = \frac{1}{3} I_{\max}$$

$$\text{又} \quad I_{\max} = \frac{I_0}{2}$$

$$\therefore \quad I_1 = \frac{I_0}{6},$$

$$\text{故} \quad \cos^2 \alpha_1 = \frac{1}{3}, \cos \alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \alpha_1 = 54^\circ 44'.$$

$$(2) \quad I_2 = \frac{I_0}{2} \cos^2 \alpha_2 = \frac{1}{3} I_0$$

$$\therefore \quad \cos \alpha_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \alpha_2 = 35^\circ 16'$$

14.12 一束自然光从空气入射到折射率为 1.40 的液体表面上,其反射光是完全偏振光.试求:(1)入射角等于多少?(2)折射角为多少?

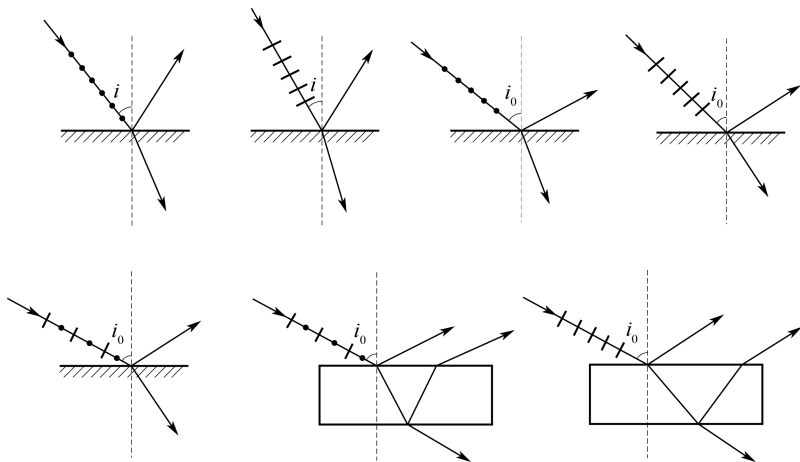
$$\text{解: (1)} \tan i_0 = \frac{1.40}{1}, \therefore i_0 = 54^\circ 28'$$

$$(2) r = 90^\circ - i_0 = 35^\circ 32'$$

14.13 利用布儒斯特定律怎样测定不透明介质的折射率?若测得釉质在空气中的起偏振角为 58° ,求釉质的折射率.

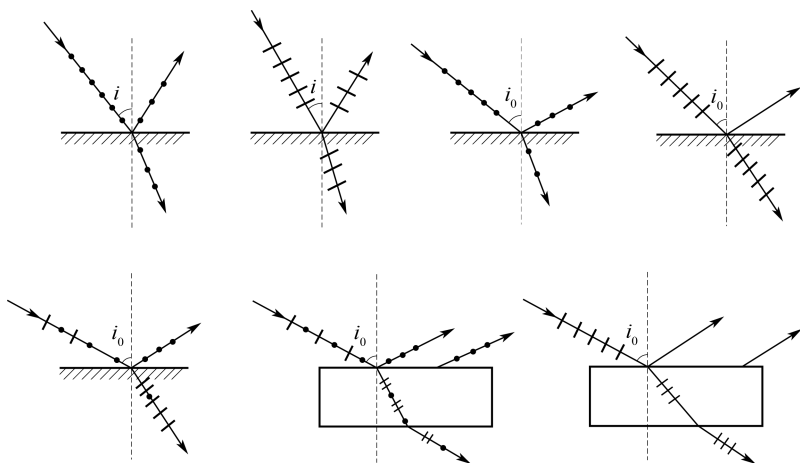
$$\text{解: 由 } \tan 58^\circ = \frac{n}{1}, \text{ 故 } n = 1.60$$

14.14 光由空气射入折射率为 n 的玻璃.在题 15.14 图所示的各种情况中,用黑点和短线把反射光和折射光的振动方向表示出来,并标明是线偏振光还是部分偏振光.图中 $i \neq i_0, i_0 = \arctan n$.



题图 14.14

解: 见图.



题图 14.14

* 14.15 如果一个二分之一波片或四分之一波片的光轴与起偏器的偏振化方向成 30° 角, 试问从二分之一波片还是从四分之一波片透射出来的光将是: (1) 线偏振光? (2) 圆偏振光? (3) 椭圆偏振光? 为什么?

解: 从偏振片出射的线偏振光进入晶(波)片后分解为 o, e 光, 仍沿原方向前进, 但振方向相互垂直(o 光矢垂直光轴, e 光矢平行光轴). 设入射波片的线偏振光振幅为 A , 则有

$$A_e = A \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} A,$$

$$A_o = A \sin 30^\circ = \frac{1}{2} A.$$

$\therefore$

$$A_o \neq A_e$$

o, e 光虽沿同一方向前进, 但传播速度不同, 因此两光通过晶片后有光程差.

若为二分之一波片, o, e 光通过它后有光程差 $\Delta = \frac{\lambda}{2}$, 位相差 $\Delta\varphi = \pi$, 所以透射的是线偏振光. 因为由相互垂直振动的合成得

$$\frac{x^2}{A_o^2} + \frac{y^2}{A_e^2} - 2 \frac{xy}{A_o A_e} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi$$

$\therefore$

$$\left(\frac{x}{A_o} + \frac{y}{A_e} \right)^2 = 0$$

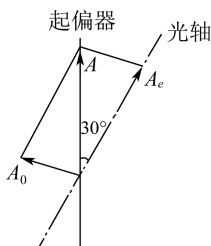
即

$$y = -\frac{A_e}{A_o} x$$

若为四分之一波片, 则 o, e 光的 $\Delta = \frac{\lambda}{4}$, 位相差 $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, 此时 $\cos \Delta\varphi = 0$, $\sin \Delta\varphi = 1$

$\therefore$

$$\frac{x^2}{A_o^2} + \frac{y^2}{A_e^2} = 1$$



题图 14.15

即透射光是椭圆偏振光.

* 14.16 将厚度为 1 mm 且垂直于光轴切出的石英晶片,放在两平行的偏振片之间,对某一波长的光波,经过晶片后振动面旋转了 20° . 问石英晶片的厚度变为多少时,该波长的光将完全不能通过?

解:通过晶片的振动面旋转的角度 φ 与晶片厚度 d 成正比. 要使该波长的光完全不能通过第二偏振片,必须使通过晶片的光矢量的振动面旋转 90° .

$\therefore$

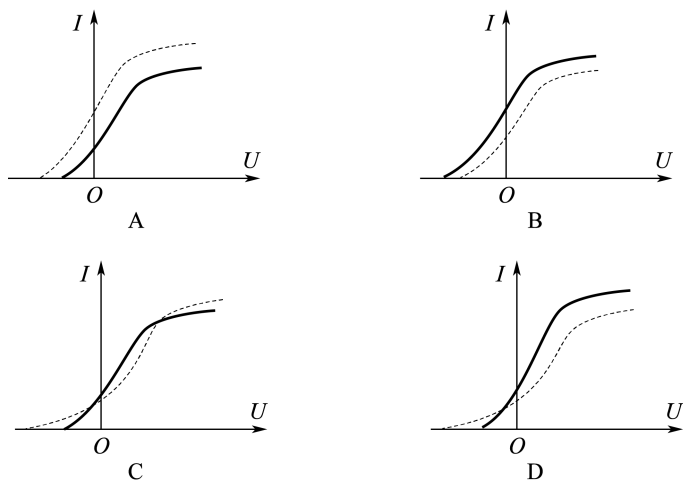
$$\varphi_2 : \varphi_1 = d_2 : d_1$$

$$d_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} d_1 = \frac{90^\circ}{20^\circ} \times 1 = 4.5 \text{ mm}$$

习 题 15

15.1 选择题

(1)用一定频率的单色光照射在某种金属上,测出其光电流 I 与电势差 U 的关系曲线如题 15.1 图中实线所示.然后在光强度 I 不变的条件下增大照射光的频率,测出其光电流的曲线用虚线表示.符合题意的图是:



题 15.1 图

[答案:D。光强度 I_0 不变,光的频率 ν 增大,光子数(光子密度) N_0 减少,则逸出光电子数 N_e 减少,饱和光电流 I_e 减少;光的频率 ν 增大,由爱因斯坦光电效应方程 $\frac{1}{2}mv_m^2 = h\nu - A$ 知初动能增大,则遏止电压增加。]

(2)康普顿散射的主要特点是:

(A)散射光的波长均与入射光的波长相同,与散射角、散射体性质无关.

(B)散射光中既有与入射光波长相同的,也有比入射光波长长的和比入射光波长短的.这与散射体性质有关.

(C)散射光的波长均比入射光的波长短,且随散射角增大而减小,但与散射体的性质无关.

(D)散射光中有些波长比入射光的波长长,且随散射角增大而增大,有些散射光波长与入射光波长相同.这都与散射体的性质无关.

[答案:D。]

(3) 假定氢原子原是静止的, 质量为 $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 则氢原子从 $n=3$ 的激发状态直接通过辐射跃迁到基态时的反冲速度大约是

- (A) 4 m/s. (B) 10 m/s.
(C) 100 m/s. (D) 400 m/s.

[答案: A。动量守恒 $-mv + h/\lambda$

$$v = \frac{h}{m} R_H \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{6.626 \times 10^{-34} \times 1.096 \times 10^7}{1.67 \times 10^{-27}} \times \frac{8}{9} \approx 4 \text{ m/s}]$$

(4) 关于不确定关系 $\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$, 有以下几种理解:

- (a) 粒子的动量不可能确定.
(b) 粒子的坐标不可能确定.
(c) 粒子的动量和坐标不可能同时准确地确定.
(d) 不确定关系不仅适用于电子和光子, 也适用于其它粒子.

其中正确的是:

- (A) (a), (b). (B) (c), (d).
(C) (a), (d). (D) (b), (d).

[答案: B。]

(5) 直接证实了电子自旋存在的最早的实验之一是

- (A) 康普顿散射实验. (B) 卢瑟福散射实验.
(C) 戴维孙—革末实验. (D) 斯特恩—革拉赫实验.

[答案: D。]

15.2 填空题

(1) 氢原子从能量为 -0.85 eV 的状态跃迁到能量为 -3.4 eV 的状态时, 所发射的光子能量是 $\underline{\hspace{2cm}} \text{ eV}$, 这是电子从 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 的能级到 $n=2$ 的能级的跃迁.

[答案: 2.55 ; 4. $E = h\nu = E_2 - E_1 = -0.85 - (-3.4) = 2.55 \text{ eV}$; $E = \frac{-13.58}{n^2} = -0.85$,

则 $n=4$ 。]

(2) 光子波长为 λ , 则其能量 $\epsilon = \underline{\hspace{2cm}}$; 动量的大小 $p = \underline{\hspace{2cm}}$; 质量 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

[答案: hc/λ ; h/λ ; $h/(c\lambda)$ 。德布罗意关系式, $\epsilon = h\nu = hc/\lambda$; $p = h/\lambda$; $mc = p = h/\lambda$]

(3) 设描述微观粒子运动的波函数为 $\Psi(\mathbf{r}, t)$, 则 $\Psi\Psi^*$ 表示 $\underline{\hspace{2cm}}$; $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 须满足的条件是 $\underline{\hspace{2cm}}$; 其归一化条件是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

[答案: 粒子在 t 时刻在 (x, y, z) 处出现的概率密度; 单值、有限、连续; $\iiint |\Psi|^2 dx dy dz = 1$ 。]

(4) 根据量子力学理论, 氢原子中电子的动量矩为 $L = \sqrt{l(l+1)} \hbar$, 当主量子数 $n=3$ 时, 电子动量矩的可能取值为_____.

[答案: $0, \sqrt{2}\hbar, \sqrt{6}\hbar$. 当 $n=3$ 时, $l=0, 1, 2$.]

(5) 锂($Z=3$)原子中含有 3 个电子, 电子的量子态可用 (n, l, m_l, m_s) 四个量子数来描述, 若已知基态锂原子中一个电子的量子态为 $(1, 0, 0, \frac{1}{2})$, 则其余两个电子的量子态分别为(_____)和(_____).

[答案: $1, 0, 0, -\frac{1}{2}$; $2, 0, 0, \frac{1}{2}$ 或 $2, 0, 0, -\frac{1}{2}$. 根据泡利原理和能量最低原理.]

15.3 将星球看做绝对黑体, 利用维恩位移定律测量 λ_m 便可求得 T . 这是测量星球表面温度的方法之一. 设测得: 太阳的 $\lambda_m = 0.55 \mu\text{m}$, 北极星的 $\lambda_m = 0.35 \mu\text{m}$, 天狼星的 $\lambda_m = 0.29 \mu\text{m}$, 试求这些星球的表面温度.

解: 将这些星球看成绝对黑体, 则按维恩位移定律:

$$\lambda_m T = b, b = 2.897 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

$$\text{对太阳: } T_1 = \frac{b}{\lambda_{m_1}} = \frac{2.897 \times 10^{-3}}{0.55 \times 10^{-6}} = 5.3 \times 10^3 \text{ K}$$

$$\text{对北极星: } T_2 = \frac{b}{\lambda_{m_2}} = \frac{2.897 \times 10^{-3}}{0.35 \times 10^{-6}} = 8.3 \times 10^3 \text{ K}$$

$$\text{对天狼星: } T_3 = \frac{b}{\lambda_{m_3}} = \frac{2.897 \times 10^{-3}}{0.29 \times 10^{-6}} = 1.0 \times 10^4 \text{ K}$$

15.4 用辐射高温计测得炉壁小孔的辐射出射度(总辐射本领)为 22.8 W/cm^2 , 求炉内温度.

解: 炉壁小孔视为绝对黑体, 其辐出度

$$M_B(T) = 22.8 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2} = 22.8 \times 10^4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

按斯特藩—玻尔兹曼定律:

$$\begin{aligned} M_B(T) &= \sigma T^4 \\ T &= \sqrt[4]{\frac{M_B(T)}{\sigma}} = \left(\frac{22.8 \times 10^4}{5.67 \times 10^{-8}} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(\frac{22.8}{5.67} \right)^{\frac{1}{4}} \times 10^3 = 1.42 \times 10^3 \text{ K} \end{aligned}$$

15.5 从铝中移出一个电子需要 4.2 eV 的能量, 今有波长为 200 nm 的光投射到铝表面. 试问: (1) 由此发射出来的光电子的最大动能是多少? (2) 遏止电势差为多大? (3) 铝的截止(红限)波长有多大?

解: (1) 已知逸出功 $A = 4.2 \text{ eV}$, 据光电效应公式 $h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + A$

则光电子最大动能:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{kmax}} &= \frac{1}{2} m v_m^2 = h\nu - A = \frac{hc}{\lambda} - A \\
 &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{2000 \times 10^{-10}} - 4.2 \times 1.6 \times 10^{-19} = 3.23 \times 10^{-19} \text{ J} = 2.0 \text{ eV}
 \end{aligned}$$

(2) 由实验可知 $eU_a = E_{\text{kmax}} = \frac{1}{2} m v_m^2$

得遏止电势差 $U_a = \frac{3.23 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19}} = 2.0 \text{ V}$

(3) 红限频率 ν_0 , $h\nu_0 = A$, 又 $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$

截止波长 $\lambda_0 = \frac{hc}{A} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{4.2 \times 1.60 \times 10^{-19}} = 2.96 \times 10^{-7} \text{ m} = 296 \text{ nm}$

15.6 在一定条件下, 人眼视网膜能够对 5 个蓝绿光光子 ($\lambda = 500 \text{ nm}$) 产生光的感觉. 此时视网膜上接收到光的能量为多少? 如果每秒钟都能吸收 5 个这样的光子, 则到达眼睛的功率为多大?

解: 5 个蓝绿光子的能量

$$\begin{aligned}
 E &= nh\nu = n \frac{hc}{\lambda} \\
 &= \frac{5 \times 6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{5.0 \times 10^{-7}} = 1.99 \times 10^{-18} \text{ J}
 \end{aligned}$$

功率 $P = \frac{E}{t} = 1.99 \times 10^{-18} \text{ W}$

15.7 设太阳照射到地球上光的强度为 $8 \text{ J}/(\text{s} \cdot \text{m}^2)$, 如果平均波长为 500 nm , 则每秒钟落到地面上 1 m^2 的光子数量是多少? 若人眼瞳孔直径为 3 mm , 每秒钟进入人眼的光子数是多少?

解: 一个光子能量 $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$

1 秒钟落到 1 m^2 地面上的光子数为

$$n = \frac{8}{E} = \frac{8\lambda}{hc} = \frac{8 \times 5 \times 10^{-7}}{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}$$

$$= 2.01 \times 10^{19} \text{ s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

每秒进入人眼的光子数为

$$\begin{aligned}
 N &= n \frac{\pi d^2}{4} = 2.01 \times 10^{19} \times 3.14 \times 3^2 \times 10^{-6} / 4 \\
 &= 1.42 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}
 \end{aligned}$$

15.8 若一个光子的能量等于一个电子的静能, 试求该光子的频率、波长、动量.

解: 电子的静止质量 $m_0 = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

当 $h\nu = m_0 c^2$ 时, 则

$$v = \frac{m_0 c^2}{h} = \frac{9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2}{6.63 \times 10^{-34}} = 1.236 \times 10^{20} \text{ Hz}$$

$$\lambda = \frac{c}{v} = 2.4271 \times 10^{-12} \text{ m} = 0.0024271 \text{ nm}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = 2.73 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

或 $E = cp$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{m_0 c^2}{c} = m_0 c = 9.11 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8 = 2.73 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

15.9 光电效应和康普顿效应都包含了电子和光子的相互作用,试问这两个过程有什么不同?

答:光电效应是指金属中的电子吸收了光子的全部能量而逸出金属表面,是电子处于原子中束缚态时所发生的现象,遵守能量守恒定律.而康普顿效应则是光子与自由电子(或准自由电子)的弹性碰撞,同时遵守能量与动量守恒定律.

15.10 在康普顿效应的实验中,若散射光波长是入射光波长的 1.2 倍,则散射光子的能量 ϵ 与反冲电子的动能 E_k 之比 ϵ/E_k 等于多少?

解:能量守恒 $h\nu_0 + m_0 c^2 = h\nu + mc^2$

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 = h\nu_0 - h\nu = h(\nu_0 - \nu)$$

$$\epsilon = h\nu$$

$$\frac{\epsilon}{E_k} = \frac{h\nu}{h(\nu_0 - \nu)} = \frac{\nu}{\nu_0 - \nu}$$

已知 $\frac{\lambda}{\lambda_0} = 1.2$, 由 $c = \lambda\nu$ $\frac{\nu_0}{\nu} = 1.2$, 则 $\frac{\nu}{\nu_0 - \nu} = \frac{1}{1.2 - 1} = \frac{1}{0.2} = 5$

故 $\frac{\epsilon}{E_k} = 5$

15.11 波长 $\lambda_0 = 0.0708 \text{ nm}$ 的 X 射线在石蜡上受到康普顿散射,求在 $\pi/2$ 和 π 方向上所散射的 X 射线波长各是多大?

解:在 $\varphi = \pi/2$ 方向上:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{2 \times 6.63 \times 10^{-34}}{9.11 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8} \sin^2 \frac{\pi}{4} = 0.00243 \text{ nm}$$

散射波长 $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = 0.0708 + 0.00243 = 0.0731 \text{ nm}$

在 $\varphi = \pi$ 方向上

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{2h}{m_0 c} = 0.00486 \text{ nm}$$

散射波长 $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = 0.0708 + 0.00486 = 0.0756 \text{ nm}$

15.12 已知 X 光光子的能量为 0.60 MeV,在康普顿散射之后波长变化了 20%,求反冲电子的能量.

解:已知 X 射线的初能量 $\epsilon_0 = 0.6 \text{ MeV}$ 又有

$$\epsilon = \frac{hc}{\lambda_0}, \lambda_0 = \frac{hc}{\epsilon_0}$$

经散射后

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0 + 0.020\lambda_0 = 1.020\lambda_0$$

此时能量为

$$\epsilon = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{1.02\lambda_0} = \frac{1}{1.02}\epsilon_0$$

反冲电子能量

$$E = \epsilon_0 - \epsilon = \left(1 - \frac{1}{1.02}\right) \times 0.60 = 0.10 \text{ MeV}$$

15.13 在康普顿散射中,入射光子的波长为 0.003 nm ,反冲电子的速度为 $0.60 c$,求散射光子的波长及散射角.

解:反冲电子的能量增量为

$$\Delta E = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-0.6^2}} - m_0c^2 = 0.25m_0c^2$$

由能量守恒定律,电子增加的能量等于光子损失的能量.

故有

$$\frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = 0.25m_0c^2$$

散射光子波长

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h\lambda_0}{h - 0.25m_0c\lambda_0} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 0.030 \times 10^{-10}}{6.63 \times 10^{-34} - 0.25 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8 \times 0.030 \times 10^{-10}} \\ &= 4.3 \times 10^{-12} \text{ m} = 0.0043 \text{ nm} \end{aligned}$$

由康普顿散射公式

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2 \times 0.0243 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

可得

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{0.043 - 0.030}{2 \times 0.0243} = 0.2675$$

散射角为

$$\varphi = 62^\circ 17'$$

15.14 实验发现基态氢原子可吸收能量为 12.75 eV 的光子.试问

(1)氢原子吸收光子后将被激发到哪个能级?

(2)受激发的氢原子向低能级跃迁时,可发出哪几条谱线? 请将这些跃迁画在能级图上.

解:(1) $\Delta E = E_n - E_1 = 12.75 \text{ eV}$,

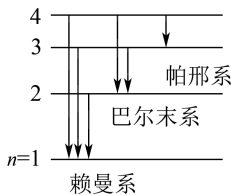
$$E_n = -13.6 + 12.75 = -0.85 \text{ eV} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}$$

解得

$$n = 4$$

或者

$$\begin{aligned} \Delta E &= Rhc \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \\ &= 136. \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = 12.75 \end{aligned}$$



题 15.14 图

解出

$$n=4$$

(2) 可发出谱线赖曼系 3 条, 巴尔末系 2 条, 帕邢系 1 条, 共计 6 条.

15.15 以动能 12.5 eV 的电子通过碰撞使氢原子激发时, 最高能激发到哪一能级? 当回到基态时能产生哪些谱线?

解: 设氢原子全部吸收 12.5 eV 能量后, 最高能激发到第 n 个能级, 则

$$E_n - E_1 = Rhc \left[\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right],$$

$$Rhc = 13.6 \text{ eV}, \text{ 即 } 12.5 = 13.6 \left[1 - \frac{1}{n^2} \right]$$

得 $n=3.5$, 只能取整数,

$\therefore$ 最高激发到 $n=3$, 当然也能激发到 $n=2$ 的能级. 于是

$$n \text{ 从 } 3 \rightarrow 1: \quad \tilde{\nu}_1 = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{8}{9} R$$

$$\lambda_1 = \frac{9}{8R} = \frac{9}{8 \times 1.097 \times 10^7} = 1.026 \times 10^{-7} \text{ m} = 102.6 \text{ nm}$$

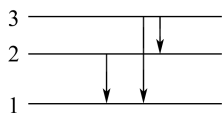
$$n \text{ 从 } 2 \rightarrow 1: \quad \tilde{\nu}_2 = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} R$$

$$\lambda_2 = \frac{4}{3R} = \frac{4}{3 \times 1.097 \times 10^7} = 121.6 \text{ nm}$$

$$n \text{ 从 } 3 \rightarrow 2: \quad \tilde{\nu}_3 = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{5}{36} R$$

$$\lambda_3 = \frac{36}{5R} = \frac{36}{5 \times 1.097 \times 10^7} = 656.3 \text{ nm}$$

可以发出以上三条谱线.



题 15.15 图

15.16 处于基态的氢原子被外来单色光激发后发出巴尔末线系中只有两条谱线, 试求这两条谱线的波长及外来光的频率.

解: 巴尔末系是由 $n > 2$ 的高能级跃迁到 $n=2$ 的能级发出的谱线. 只有二条谱线说明激发后最高能级是 $n=4$ 的激发态.

$$E_4 = -\frac{13.6}{4^2} = -0.85 \text{ eV}, E_3 = -\frac{13.6}{3^2} = -1.51 \text{ eV}, E_2 = -\frac{13.6}{2^2} = -3.4 \text{ eV}.$$

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_n - E_m$$

$$\therefore \lambda = \frac{hc}{E_n - E_m}$$

$$\therefore \lambda_a = \frac{hc}{E_3 - E_2} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{(3.4 - 1.51) \times 1.60 \times 10^{-19}} = 657.3 \text{ nm}$$

$$\lambda_\beta = \frac{hc}{E_4 - E_2} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{(3.4 - 0.85) \times 1.6 \times 10^{-19}} = 487.2 \text{ nm}$$

基态氢原子吸收一个光子 $h\nu$ 被激发到 $n=4$ 的能态

$$\therefore \quad h\nu = E_4 - E_1 = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\nu = \frac{E_4 - E_1}{h} = \frac{(13.6 - 0.85) \times 1.6 \times 10^{-19}}{6.626 \times 10^{-34}} = 3.08 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

15.17 当基态氢原子被 12.09 eV 的光子激发后,其电子的轨道半径将增加多少倍?

解:

$$E_n - E_1 = 13.6 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = 12.09 \text{ eV}$$

$$13.6 - 12.09 = \frac{13.6}{n^2}$$

$$n^2 = \frac{13.6}{13.6 - 12.09} = \frac{13.6}{1.51}, \quad n = 3$$

$$r = n^2 r_1 = 9r_1$$

轨道半径增加到 9 倍.

15.18 德布罗意波的波函数与经典波的波函数的本质区别是什么?

答:德布罗意波是概率波,波函数不表示实在的物理量在空间的波动,其振幅无实在的物理意义.波函数 Ψ 的模方 $|\Psi|^2$ 表示粒子某时刻在空间某点附近单位体积内出现的概率,称为概率密度.而经典波波函数描述实在的物理量.

15.19 为使电子的德布罗意波长为 0.1 nm,需要多大的加速电压?

解: $\lambda = \frac{1.225}{\sqrt{U}} \text{ nm} = 0.1 \text{ nm} \quad \sqrt{U} = 12.25$

$\therefore$ 加速电压 $U = 150 \text{ 伏}$

15.20 具有能量 15 eV 的光子,被氢原子中处于第一玻尔轨道的电子所吸收,形成一个光电子.问此光电子远离质子时的速度为多大? 它的德布罗意波长是多少?

解:使处于基态的电子电离所需能量为 13.6 eV,因此,该电子远离质子时的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = E_\varphi + E_1 = 15 - 13.6 = 1.4 \text{ eV}$$

它的速度为

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.4 \times 1.6 \times 10^{-19}}{9.11 \times 10^{-31}}} = 7.0 \times 10^5 \text{ m/s}$$

其德布罗意波长为:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{9.11 \times 10^{-31} \times 7.0 \times 10^5} = 1.04 \text{ nm}$$

15.21 光子与电子的波长都是 0.2 nm,它们的动量和总能量各为多少?

解:由德布罗意关系: $E = mc^2$, $p = mv = \frac{h}{\lambda}$ 波长相同它们的动量相等.

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2.0 \times 10^{-10}} = 3.3 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

光子的能量

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = pc = 3.3 \times 10^{-24} \times 3 \times 10^8 = 9.9 \times 10^{-16} \text{ J} = 6.2 \times 10^3 \text{ eV}$$

电子的总能量 $E = \sqrt{(cp)^2 + (m_0 c^2)^2}$, $cp = 6.2 \times 10^3 \text{ eV}$

而 $m_0 c^2 = 0.51 \text{ MeV} = 0.51 \times 10^6 \text{ eV}$

$\therefore m_0 c^2 \gg cp$

$\therefore E = \sqrt{(cp)^2 + (m_0 c^2)^2} = m_0 c^2 = 0.51 \text{ MeV}$

15.22 已知中子的质量 $m_n = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 当中子的动能等于温度 300 K 的热平衡中子气体的平均动能时, 其德布罗意波长为多少?

解: $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

中子的平均动能 $E_k = \frac{3}{2} kT = \frac{p^2}{2m}$

德布罗意波长 $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}} = 0.1456 \text{ nm}$

15.23 一个质量为 m 的粒子, 约束在长度为 L 的一维线段上. 试根据测不准关系估算这个粒子所具有的最小能量的值.

解: 按测不准关系, $\Delta x \Delta p_x \geq h$, $\Delta p_x = m \Delta v_x$, 则

$$m \Delta x \Delta v_x \geq h, \Delta v_x \geq \frac{h}{m \Delta x}$$

这粒子最小动能应满足

$$E_{\min} = \frac{1}{2} m (\Delta v_x)^2 \geq \frac{1}{2} m \left(\frac{h}{m \Delta x} \right)^2 = \frac{h^2}{2m \Delta x^2} = \frac{h^2}{2mL^2}$$

15.24 从某激发能级向基态跃迁而产生的谱线波长为 400 nm , 测得谱线宽度为 10^{-5} nm , 求该激发能级的平均寿命.

解: 光子的能量 $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$

由于激发能级有一定的宽度 ΔE , 造成谱线也有一定宽度 $\Delta \lambda$, 两者之间的关系为:

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda^2} \Delta \lambda$$

由测不准关系, $\Delta E \cdot \Delta t \geq h$, 平均寿命 $\tau = \Delta t$, 则

$$\tau = \Delta t = \frac{h}{\Delta E} = \frac{\lambda^2}{c \Delta \lambda} = \frac{(4000 \times 10^{-10})^2}{3 \times 10^8 \times 10^{-4} \times 10^{-10}} = 5.3 \times 10^{-8} \text{ s}$$

15.25 一波长为 300 nm 的光子, 假定其波长的测量精度为百万分之一, 求该光子位置的测不准量.

解: 光子 $p = \frac{h}{\lambda}$, $\Delta p = \left| -\frac{h}{\lambda^2} \Delta \lambda \right| = \frac{h}{\lambda^2} \Delta \lambda$

由测不准关系, 光子位置的不准确量为

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta p} = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} = \frac{\lambda}{\Delta \lambda / \lambda} = \frac{3000}{10^{-6}} = 30 \text{ cm}$$

15.26 波函数在空间各点的振幅同时增大 D 倍, 则粒子在空间分布的概率会发生什么变化?

答: 不变. 不考虑粒子的产生和湮灭, 粒子必然在空间某点出现, 那么在空间各点出现的概率总和应等于 1, 即 $\int_V |\Psi|^2 dV = 1$, 因此粒子在空间各点出现的概率只决定于德布罗意波在空间各点强度的比例, 而不决定于强度的绝对大小.

因为波函数是计算粒子 t 时刻空间各点出现概率的数学量. 概率是相对值. 则 1、2 点的概率比值为:

$$\frac{|\psi_1|^2}{|\psi_2|^2} = \frac{|D\psi_1|^2}{|D\psi_2|^2}$$

如果把德布罗意波在空间各点的振幅都增大 D 倍, 粒子在空间各点的概率密度还是和原来一样, 并不改变.

15.27 有一宽度为 a 的一维无限深势阱, 用测不准关系估算其中质量为 m 的粒子的零点能.

解: 位置不确定量为 $\Delta x = a$, 由测不准关系:

$$\Delta x \Delta p_x \geq h, \text{ 可得: } \Delta p_x \geq \frac{h}{\Delta x}, p_x \geq \Delta p_x \geq \frac{h}{\Delta x}$$

$$\therefore E_x = \frac{p_x^2}{2m} \geq \frac{h^2}{2m(\Delta x)^2} = \frac{h^2}{2ma^2}, \text{ 即零点能为 } \frac{h^2}{2ma^2}.$$

15.28 已知粒子在一维矩形无限深势阱中运动, 其波函数为:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{3\pi x}{2a} \quad (-a \leq x \leq a)$$

那么, 粒子在 $x = \frac{5}{6}a$ 处出现的概率密度为多少?

解: $\psi\psi^* = \psi^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{3\pi x}{2a} \right)^2$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a} \cos^2 \frac{3\pi}{2} \frac{5}{6} a = \frac{1}{a} \cos^2 \frac{5\pi}{4} \\ &= \frac{1}{a} \cos^2 \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{a} \cos^2 \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

15.29 粒子在一维无限深势阱中运动,其波函数为:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (0 < x < a)$$

若粒子处于 $n=1$ 的状态,在 $0 \sim \frac{1}{4}a$ 区间发现粒子的概率是多少?

$$\text{解: } d\omega = |\psi|^2 dx = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx$$

$\therefore$ 在 $0 \sim \frac{a}{4}$ 区间发现粒子的概率为:

$$\begin{aligned} p &= \int_0^{\frac{a}{4}} d\omega = \int_0^{\frac{a}{4}} \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \int_0^{\frac{a}{4}} \frac{2a}{a\pi} \sin^2 \frac{\pi x}{a} d\left(\frac{\pi x}{a}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{a/4} \frac{1}{2} \left[1 - \cos 2 \frac{\pi x}{a}\right] d\left(\frac{\pi x}{a}\right) = 0.091 \end{aligned}$$

15.30 宽度为 a 的一维无限深势阱中粒子的波函数为 $\psi(x) = A \sin \frac{n\pi x}{a}$, 求: (1) 归一化系数 A ; (2) 在 $n=2$ 时何处发现粒子的概率最大?

$$\text{解: (1) 归一化系数 } \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = \int_0^a |\psi|^2 dx = 1$$

$$\begin{aligned} \text{即 } \int_0^a A^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx &= \frac{a}{n\pi} A^2 \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} d\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\ &= \frac{a}{2n\pi} A^2 \int_0^a \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{a}\right) d\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\ &= \frac{a}{2n\pi} A^2 n\pi = \frac{a}{2} A^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\text{粒子的波函数 } \psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$(2) \text{ 当 } n=2 \text{ 时, } \psi_2 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}$$

$$\text{几率密度 } w = |\psi_2|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi x}{a} = \frac{1}{a} \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{a}\right)$$

$$\text{令 } \frac{dw}{dx} = 0, \text{ 即 } \frac{4\pi}{a} \sin \frac{4\pi x}{a} = 0, \text{ 即 } \sin \frac{4\pi x}{a} = 0, ,$$

$$\frac{4\pi}{a} x = k\pi, k=0, 1, 2, \dots$$

$$\therefore x = k \frac{a}{4}$$

又因 $0 < x < a, k < 4$.

$\therefore$ 当 $x = \frac{a}{4}$ 和 $x = \frac{3}{4}a$ 时 w 有极大值,

当 $x = \frac{a}{2}$ 时, $w = 0$.

∴ 极大值的地方为 $a/4, 3a/4$ 处

15.31 原子内电子的量子态由 n, l, m_l, m_s 四个量子数表征. 当 n, l, m_l 一定时, 不同的量子态数目是多少? 当 n, l 一定时, 不同的量子态数目是多少? 当 n 一定时, 不同的量子态数目是多少?

解: (1) 2. 因当 n, l, m_l 一定时, 电子只有 2 个自旋方向 $\left(\because m_s = \pm \frac{1}{2} \right)$

(2) $2(2l+1)$. 每个 l 有 $(2l+1)$ 个 m_l , 每个 m_l 可容纳 $m_s = \pm \frac{1}{2}$ 的 2 个量子态.

(3) $2n^2$

15.32 求出能够占据一个 d 分壳层的最大电子数, 并写出这些电子的 m_l, m_s 值.

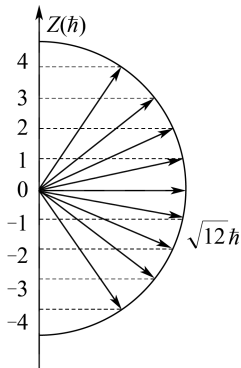
解: d 分壳层的量子数 $l=2$, 可容纳最大电子数为 $Z_l = 2(2l+1) = 2(2 \times 2 + 1) = 10$ 个, 这些电子的:

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2.$$

$$m_s = \pm \frac{1}{2}$$

15.33 试描绘: 原子中 $l=4$ 时, 电子角动量 L 在磁场中空间量子化的示意图, 并写出 L 在磁场方向分量 L_z 的各种可能的值.

解: $l=4$ 时, $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar = \sqrt{4(4+1)}\hbar = \sqrt{20}\hbar$



题 15.33 图

磁场为 Z 方向, $L_z = m_l \hbar, m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$.

∴ $L_z = (4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4)\hbar$

15.34 写出以下各电子态的角动量的大小: (1) $1s$ 态; (2) $2p$ 态; (3) $3d$ 态; (4) $4f$ 态.

解: (1) $l=0, L=0$

(2) $l=1, L = \sqrt{1(1+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$

(3) $l=2, L = \sqrt{2(2+1)}\hbar = \sqrt{6}\hbar$

$$(4) l=2, L=\sqrt{3(3+1)}\hbar=\sqrt{12}\hbar$$

15.35 在元素周期表中为什么 n 较小的壳层尚未填满而 n 较大的壳层上就开始有电子填入? 对这个问题我国科学工作者总结出怎样的规律? 按照这个规律说明 $4s$ 态应比 $3d$ 态先填入电子.

答: 由于原子能级不仅与 n 有关, 还与 l 有关, 所以有些情况虽 n 较大, 但 l 较小的支壳层能级比 n 较小而 l 较大的能级低, 所以先填入电子. 我国科学工作者总结的规律: 对于原子的外层电子, 能级高低以 $(n+0.7l)$ 确定, 数值大的能级较高.

$$4s(\text{即 } n=4, l=0), \text{代入 } (n+0.7l) = (4+0.7 \times 0) = 4$$

$$3d(n=3, l=2), \text{代入 } (n+0.7l) = (3+0.7 \times 2) = 4.4$$

$4s$ 低于 $3d$ 能级, 所以先填入 $4s$ 壳层.

习 题 16

16.1 选择题

(1)由实验得知,原子核的半径 R 近似地与质量数 A 的立方根成正比, $R=R_0 A^{1/3}$ (R_0 是常数),由此得出:

- A. 各原子核的密度是相同的
- B. 在各种不同元素的原子核内,核子间隔不同
- C. 质子和中子的质量,体积近似相等
- D. 质子数和中子数的比例在各种不同元素的原子核内近似相等

[答案:A]

(2)放射性同位素有天然的和人工的两类,其中

- A. 天然的轻、重核都有,人工的多为轻核
- B. 天然的多为重核,人工的轻、重核皆有
- C. 天然的多为轻核,人工的可任意选择;
- D. 人工的多为重核,天然的可任意选择

[答案:B]

(3)下述说法不正确的是:

- A. 核力具有饱和性;
- B. 核力与电荷有关;
- C. 核力是短程力;
- D. 核力是强作用力。

[答案:B]

(4)原子核自旋角动量的确切含义应该是:

- A. 核子自旋角动量和电子自旋角动量的矢量和;
- B. 由于核子没有轨道角动量,故核自旋角动量意义与电子的相同;
- C. 核子自旋角动量和轨道角动量的矢量和;
- D. 原子总自旋角动量扣除电子自旋角动量的结果。

[答案:C]

(5)欲使 ^{238}U 发生裂变,入射中子应为

- A. 热中子;
- B. 快中子;
- C. 热中子和快中子;
- D. 任意速度的中子。

[答案: B]

16.2 填空题

(1) 原子核发生 β 衰变时,其电子是从_____转化为_____时放出的。

[答案:中子;质子]

(2) 基本粒子之间主要存在着下列三种相互作用:_____,_____,_____.

[答案:强相互作用;电磁相互作用;弱相互作用]

(3) 基本粒子之间的强相互作用只是发生在_____之间,强相互作用是通过交换_____来实现的.

[答案:强子与强子;介子;]

(4) 基本粒子的电磁相互作用是在_____之间发生的,电磁相互作用是通过交换_____来实现的.

[答案:带电粒子及具有磁矩的粒子;光子;]

(5) 除重子与轻子以外,所有实物粒子之间都存在弱相互作用,其强度极弱,相对其它作用是微不足道的,它只是在_____和_____过程中才起作用.

[答案:衰变;俘获]

16.3 按照原子核的质子—中子模型,组成原子核 ${}_Z^AX$ 的质子数和中子数各是多少?核内共有多少个核子?这种原子核的质量数和电荷数各是多少?

答:组成原子核 ${}_Z^AX$ 的质子数是 Z ,中子数是 $A-Z$.核内共有 A 个核子.原子核的质量数是 A ,核电荷数是 Z .

16.4 原子核的体积与质量数之间有何关系?这关系说明什么?

答:实验表明,把原子核看成球体,其半径 R 与质量数 A 的关系为 $R=R_0A^{1/3}$,说明原子核的体积与质量数 A 成正比关系.这一关系说明一切原子核中核物质的密度是一个常数.即单位体积内核子数近似相等,并由此推知核的平均结合能相等.结合能正比于核子数,就表明核力是短程力.如果核力象库仑力那样,按照静电能的公式,结合能与核子数 A 的平方成正比,而不是与 A 成正比.

16.5 什么叫原子核的质量亏损?如果原子核 ${}_Z^AX$ 的质量亏损是 Δm ,其平均结合能是多少?

答:原子核的质量小于组成原子核的核子的质量之和,它们的差额称为原子核的质量亏损.设原子核的质量为 M_x ,原子核 ${}_Z^AX$ 的质量亏损为:

$$\Delta m = [Zm_p + (A-Z)m_n] - M_x$$

平均结合能为

$$\overline{E}_0 = \frac{\Delta E}{A} = \frac{\Delta mc^2}{A}$$

16.6 已知 ${}_{90}^{232}\text{Th}$ 的原子质量为 $232.03821u$,计算其原子核的平均结合能.

解:结合能为 $\Delta E = [Zm_H + (A-Z)m_n - M] \times 931.5 \text{ MeV}$

${}_{90}^{232}\text{Th}$ 原子 $M = 232.03821u$, $Z = 90$, $A = 232$.

氢原子质量 $m_H = 1.007825u$, $m_n = 1.008665u$.

$$\therefore \Delta E = [90 \times 1.007825 + (232 - 90) \times 1.008665 - 232.03821] \times 931.5 \text{ MeV} \\ = 1.766.56 \text{ MeV}$$

$$\therefore \text{平均结合能为 } \bar{E}_0 = \frac{\Delta E}{A} = \frac{1766.56}{232} = 7.614 \text{ MeV}$$

16.7 什么叫核磁矩? 什么叫核磁子(μ_N)? 核磁子 μ_N 和玻尔磁子 μ_B 有何相似之处? 有何区别? 质子的磁矩等于多少核磁子? 平常用来衡量核磁矩大小的核磁矩 μ'_I 的物理意义是什么? 它和核的 g 因子、核自旋量子数的关系是什么?

答:原子核自旋运动的磁矩叫核磁矩,核磁子是原子核磁矩的单位,定义为:

$$\mu_N = \frac{eh}{4\pi m_p} = \frac{1}{1836.1} \mu_B = 5.05 \times 10^{-27} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

式中 m_p 是质子的质量.

核磁子与玻尔磁子形式上相似,玻尔磁子定义为 $\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e}$,式中 m_e 是电子的质量.

质子的磁矩不等于 μ_N . 质子的磁矩 $\mu_P = 2.79273\mu_N$.

平常用来衡量核磁矩大小的是核磁矩在外磁场方向分量的最大值 μ'_I ,它和原子核 g 因子、自旋量子数的关系是 $\mu'_I = g_I I \mu_N$.

16.8 核自旋量子数等于整数或半奇整数是由核的什么性质决定? 核磁矩与核自旋角动量有什么关系? 核磁矩的正负是如何规定的?

答:原子核是由质子和中子组成. 质子和中子的自旋均为 $\frac{1}{2}$. 因此组成原子核的质子和中子数的奇、偶数决定了核自旋量子数为零或 $\frac{1}{2}$ 的奇、偶倍数.

核磁矩与自旋角动量的关系是: $\mu_I = g_I \frac{e}{2m_p} P_I$

μ_I 的正负取决于 g_I 的正负,当 μ_I 与 P_I 平行时 μ_I 为正,当 μ_I 与 P_I 反平行时, μ_I 为负.

16.9 什么叫核磁共振? 怎样利用核磁共振来测量核磁矩?

答:原子核置于磁场中,磁场和核磁矩相互作用的附加能量使原子核能级发生分裂. 当核在电磁辐射场中时,辐射场是光子组成的,当光子的能量 $h\nu$ 等于核能级间隔时,原子核便吸收电磁场的能量,称为共振吸收,这一现象称为核磁共振. 在磁场中核能级间隔为:

$$\Delta E = g_I \mu_N B$$

共振吸收时, $h\nu = \Delta E = g_I \mu_N B$

通常用核磁矩在磁场方向分量的最大值 μ'_I 来衡量磁矩的大小, $\mu'_I = g_I I \mu_N$,则有

$$h\nu = \frac{\mu'_1}{I} B$$

$\therefore \mu'_1 = I \frac{h\nu}{B}$, 已测出 I, ν , 现测得 B 就可以算出 μ'_1 .

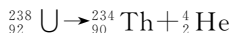
16.10 什么叫核力? 核力具有哪些主要性质?

答: 组成原子核的核子之间的强相互作用力称为核力.

核力的主要性质: (1) 是强相互作用力, 主要是引力. (2) 是短程力, 作用距离小于 10^{-15} m , (3) 核力与核子的带电状况无关. (4) 具有饱和性.

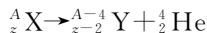
16.11 什么叫放射性衰变? α, β, γ 射线是什么粒子流? 写出 $^{238}_{92}\text{U}$ 的 α 衰变和 $^{234}_{90}\text{Th}$ 的 β 衰变的表示式. 写出 α 衰变和 β 衰变的位移定则.

答: 不稳定的原子核都会自发地转变成另一种核而同时放出射线, 这种变化叫放射性衰变. α 射线是带正电的氦核 ^4_2He 粒子流, β 射线是高速运动的正、负电子流, γ 射线是光子流.

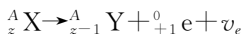
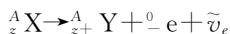


α 衰变和 β 衰变的位移定则为:

α 衰变



β 衰变



16.12 什么叫原子核的稳定性? 哪些经验规则可以预测核的稳定性?

答: 原子核的稳定性是指原子核不会自发地从核中发出射线而转变成另一种原子核的性质. 以下经验规则可预测核的稳定性:

(1) 原子序数大于 84 的核是不稳定的.

(2) 原子序数小于 84 的核中质子数和中子数都是偶数的核稳定.

(3) 质子或中子数等于幻数 2、8、20、28、50、82、126 的原子核特别稳定.

(4) 质子数和中子数之比 $\frac{n}{p} = 1$ 的核稳定. 比值越大, 稳定性越差.

16.13 写出放射性衰变定律的公式. 衰变常数 λ 的物理意义是什么? 什么叫半衰期 $T_{1/2}$? $T_{1/2}$ 和 λ 有什么关系? 什么叫平均寿命 τ ? 它和半衰期 $T_{1/2}$ 、和 λ 有什么关系?

答: $N = N_0 e^{-\lambda t}$, 衰变常数 $\lambda = -\frac{dN/dt}{N}$ 的物理意义是: 表示在某时刻, 单位时间内衰变的原子数与该时刻原子核数的比值. 是表征衰变快慢的物理常数.

原子核每衰变一半所需的时间叫半衰期.

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

平均寿命 τ 是每个原子核衰变前存在时间的平均值.

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

$$T_{1/2} = \tau \ln 2.$$

16.14 测得地壳中铀元素 ${}_{92}^{235}\text{U}$ 只占0.72%,其余为 ${}_{92}^{238}\text{U}$,已知 ${}_{92}^{238}\text{U}$ 的半衰期为 $4.468 \times 10^9 \text{ y}$, ${}_{92}^{235}\text{U}$ 的半衰期为 $7.038 \times 10^8 \text{ y}$,设地球形成时地壳中的 ${}_{92}^{235}\text{U}$ 和 ${}_{92}^{238}\text{U}$ 是同样多,试估计地球的年龄.

解:按半衰期
$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

对 ${}_{92}^{235}\text{U}$: $\lambda_1 = \frac{0.693}{T_1} = \frac{0.693}{7.038 \times 10^{18}} = 9.847 \times 10^{-10} \text{ 1/y}$

对 ${}_{92}^{238}\text{U}$: $\lambda_2 = \frac{0.693}{T_2} = \frac{0.693}{4.468 \times 10^9} = 1.551 \times 10^{-10} \text{ 1/y}$

按衰变定律 $N = N_0 e^{-\lambda t}$, 可得

16.15 放射性同位素主要应用有哪些?

答:放射性同位素主要在以下几个方面应用较广泛:医学上用于放射性治疗和诊断;工业上用于无损检测;农业上用放射性育种;考古学、地质学中用于计算生物或地质年代;生物学中作示踪原子等等.

16.16 为什么重核裂变或轻核聚变能够放出原子核能?

答:轻核和重核的平均结合能较小,而中等质量($A=40 \sim 60$)的核平均结合能较大,因此将重核裂变成两个中等质量的核或轻核聚变成质量数较大的核时平均结合能升高,从而放出核能.

16.17 原子核裂变的热中子反应堆主要由哪几部分组成? 它们各起什么作用?

答:热中子反应堆的主要组成部份有堆芯、中子反射层、冷却系统、控制系统、防护层.

堆芯是放置核燃料和中子减速剂的核心部份,维持可控链式反应,释放原子核能.

冷却系统与换能系统合二为一,再通过冷却系统将堆芯释放出的核能输送到堆芯以外.

控制系统是通过控制棒插入堆芯的长度,控制参加反应的中子数,使反应堆保持稳定的功率.

中子反射层是阻挡中子从反应堆中逸出.

防护层是反应堆的安全屏障.

16.18 试举出在自然界中存在负能态的例子. 这些状态与狄拉克的负能态有什么区别?

答:例如物体在引力场中所具有的引力势能;正电荷在负电荷电场中的静电能,都是自然界中的负能态. 这些负能态是能够观测到的,具有可观测效应. 狄拉克的负能态是观测不到的,没有可观测效应.

16.19 将 3 MeV 能量的 γ 光子引入狄拉克真空,结果产生 1 MeV 的电子,此时还将产生

什么? 它的能量是多少?

答: 把能量大于电子静能两倍 $E > 2m_0c^2 = 1.022 \text{ MeV}$ 的 γ 光子引入真空, 它有可能被负能量电子的一个电子所吸收, 吸收了这么多能量的电子有可能越过禁区而跃迁到正能量区, 并表现为一个正能量的负电子 e^- ; 同时, 留下的空穴表现为一个正能量的正电子 e^+ . 这一过程称为电子偶的产生, 可写为

$$\gamma \rightarrow e^+ + e^-$$

按题意, 根据能量守恒, 正电子的能量为 2 MeV

16.20 试证明任何能量的 γ 光子在真空中都不可能产生正、负电子对.

证明: 设由 γ 光子转化成的一对正负电子其动量分别为 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$, 在电子的质心系中应有 $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = 0$

并且正负电子的总能量应大于 $2m_0c^2$. 按照相对论, 光子动量与能量的关系为 $E = pc$, 动量等于零而能量不等于零的光子是不存在的. 显然 γ 光子转换成正负电子, 同时满足能量守恒和动量守恒是不可能的, 即在真空中无论 γ 光子能量多大, 都不可能产生正负电子对. 但是 γ 光子与重原子核作用时便可转化为正负电子对.