

目 录

前言

第1篇 力 学

第1章 质点运动学	3
1-1 质点运动的描述	3
1-2 几种典型的运动	8
1-3 相对运动	14
思考题	15
习题	15
第2章 质点动力学	17
2-1 牛顿运动定律	17
2-2 惯性系 力学相对性原理	22
2-3 动量 动量守恒定律	25
2-4 功和能	32
思考题	41
习题	41
第3章 刚体力学基础	44
3-1 刚体的平动和定轴转动	44
3-2 力矩 转动定律 转动惯量	46
3-3 刚体定轴转动的功和能	51
3-4 角动量和角动量守恒定律	55
思考题	61
习题	62

第2篇 热 学

第4章 气体动理论	67
4-1 热力学系统的基本概念与性质	67
4-2 物质的微观模型	71
4-3 理想气体的压强公式	73
4-4 气体分子的平均平动动能与温度的关系	76

4-5 能量均分定理和理想气体的内能	77
4-6 麦克斯韦气体分子速率分布律	81
4-7 气体分子平均碰撞频率及平均自由程	87
思考题	89
习题	90
第5章 热力学基础	92
5-1 热力学过程 功 热量 内能	92
5-2 热力学第一定律及其应用	96
5-3 理想气体的绝热过程和多方过程	101
5-4 循环过程 卡诺循环 卡诺定理	105
5-5 热力学第二定律	111
思考题	117
习题	118
第3篇 振动与波动	
第6章 机械振动	123
6-1 简谐振动的描述	123
6-2 简谐振动的能量	132
6-3 简谐振动的合成	135
6-4 阻尼振动 受迫振动 共振	142
思考题	145
习题	146
第7章 机械波	149
7-1 机械波的产生及其特征量	149
7-2 平面简谐波的波动表达式	153
7-3 波的能量	158
7-4 惠更斯原理 波的叠加和干涉	163
7-5 驻波	168
7-6 多普勒效应	171
思考题	175
习题	176
第4篇 波动光学	
第8章 光的干涉	181
8-1 光的干涉基础	181

8-2 杨氏双缝干涉 半波损失·····	186
8-3 薄膜干涉·····	191
8-4 迈克耳孙干涉仪·····	198
思考题·····	201
习题·····	202
第9章 光的衍射 ·····	204
9-1 光的衍射现象 惠更斯-菲涅耳原理·····	204
9-2 单缝夫琅禾费衍射·····	206
9-3 圆孔的夫琅禾费衍射 光学仪器的分辨率·····	211
9-4 光栅衍射·····	215
9-5 晶体对 X 射线的衍射·····	221
思考题·····	224
习题·····	224
第10章 光的偏振 ·····	226
10-1 自然光和偏振光·····	226
10-2 起偏和检偏 马吕斯定律·····	229
10-3 由光的反射和散射引起的光的偏振·····	231
10-4 由双折射引起的光的偏振·····	235
10-5 人为双折射和旋光现象简介·····	236
思考题·····	238
习题·····	238
习题参考答案 ·····	240

着科技的发展,人们发现了经典力学的局限性,在高速运动领域创立了相对论力学,在微观领域创立了量子力学,然而包括狭义相对论、广义相对论和量子力学的现代物理学的出现并没有使经典力学失去存在的价值。例如,当质点速度远低于光速时,狭义相对论又回到牛顿的经典力学;当引力较弱时,广义相对论的引力理论又回到牛顿的万有引力定律。现代物理学使经典力学得以进一步扩展和修正,却丝毫没有减弱经典力学的重要性。在自然科学和工程技术领域,甚至在某些高新技术领域(如航空航天),经典力学仍能解决许多理论和实际问题。

质点和刚体是经典力学在研究物体机械运动过程中根据物体的特点及运动规律提炼出的两个理想模型。经典力学就质点和刚体的运动学、动力学和静力学方面开展研究,从而形成了质点力学和刚体力学两部分研究内容。本章三章内容分别对质点运动学、质点动力学和刚体转动等相关内容展开讲述。通过本章的学习,掌握力学研究内容和研究方法,可以为学好物理学的其他部分奠定基础。

第1篇 力学

小到原子的内部世界、大到宇宙世界，自然界中的万物都在永不停息地运动着，物质有着各种各样的运动形式，比如机械运动、热运动、波动等，其中最简单、最普遍的一种运动形式是物体位置的变动——机械运动，确切地是指物体相对于其他物体的位置(距离和方向)的变化以及物体各部分之间的相对运动(如形变)。力学是研究物体机械运动规律的学科，是物理学和许多工程技术学科的基础。

力学的历史悠久，但其成为一门科学理论则始于 17 世纪伽利略论述惯性运动，经牛顿等人逐步完善，到 1687 年牛顿发表的《自然哲学的数学原理》一书，是力学发展史上一个重要的里程碑，奠定了力学的基础。以牛顿运动定律为基础的力学理论称为牛顿力学或经典力学，经典力学研究在弱引力场中宏观物体的低速运动。经典力学包含运动学、动力学和静力学。运动学研究的是物体在运动过程中位置和时间关系，不追究运动发生的原因；动力学研究的是物体的运动与物体间相互作用的内在联系和规律；静力学则研究物体在相互作用下的平衡问题。

经典力学能在相当广阔的尺度和速率范围内使用，是最普遍的理论。然而随着科技的发展，人们发现了经典力学的局限性，在高速运动领域创立了相对论力学，在微观领域创立了量子力学，然而包括狭义相对论、广义相对论和量子力学的现代物理学的出现并没有使经典力学失去存在的价值。例如，当质点速度远低于光速时，狭义相对论又回到牛顿的经典力学；当引力较弱时，广义相对论的引力理论又回到牛顿的万有引力定律。现代物理学使经典力学得以进一步扩展和修正，却丝毫没有减弱经典力学的重要性，在自然科学和工程技术领域，甚至在一些高新科技领域(如航空航天)，经典力学仍能解决许多理论和实际问题。

质点和刚体是经典力学在研究物体机械运动过程中根据物体的特点及运动规律提炼出的两个理想模型。经典力学就质点和刚体的运动学、动力学和静力学方面开展研究，从而形成了质点力学和刚体力学两部分研究内容。本篇三章内容分别对质点运动学、质点动力学和刚体转动等相关内容展开讲述。通过本章的学习，掌握力学的研究内容和研究方法，可以为学好物理学的其他部分奠定基础。

第1章 质点运动学

质点运动学主要是研究和描述机械运动的物体位置随时间变化的关系。本章首先在引入质点、参考系和坐标系等概念的基础上，定义位置矢量、位移、速度和加速度等描述质点运动的物理量，讨论这些量随时间的变化以及相互关系，并进而讨论曲线运动中的切向加速度和法向加速度，最后介绍质点的相对运动。

1-1 质点运动的描述

一、质点 参考系与坐标系

1. 质点

物体的大小和形状各有不同，运动形式也各不相同。如果在所研究的问题中，物体的大小和形状无关紧要，就可以把物体当作一个只有质量的点，称之为**质点**。质点是一个理想化的力学模型，能否把物体当作质点是有条件的，必须根据具体情况进行分析。例如，研究地球绕太阳公转时，由于地球到太阳的平均距离约为地球半径的 10^4 倍，故可以将地球视为质点，而研究地球自转时，则不能将地球视为质点。

2. 参考系与坐标系

要描述一个物体的运动必须有其他物体作为参照，这个作为参照的物体就叫做**参考系**。确定了参考系之后，为了定量描述物体相对参考系的位置，需要在参考系上建立一个与之关联的**坐标系**。最常见的坐标系有直角坐标系、极坐标系、球坐标系、柱坐标系和自然坐标系。物体的运动与选择的参考系密切相关，通常按惯例约定：若不明确指出选用什么物体为参考系，一般选择地面为参考系。

质点位置的空间坐标值通常用长度来量度。在国际单位制中，长度的基本单位是米(符号是m)。1m是光在真空中 $1/299792458$ s内所经路径的长度。

表示质点到达空间某一位置的时刻在国际单位制中是以秒(符号是s)为基本单位计量的。秒是铯-133原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射周期9192631770倍的时间。

二、位置矢量 位移

1. 位置矢量

选定参考系和坐标系之后, 就可以描述质点在空间的位置了. 如图 1-1-1 所示, 在直角坐标系中, 设质点在时刻 t 运动到 P 点. 质点的位置可以用 P 点的坐标表示, 即

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

这样一组函数称为质点的运动方程. 将质点的运动方程消去参数 t , 得到坐标相关的方程称为质点的轨道方程, 坐标系中可以画出相应的轨道曲线.

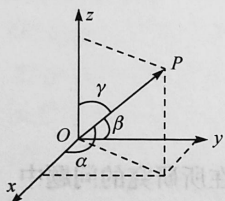


图 1-1-1 位置矢量

质点的位置用矢量表示更简洁清楚. 把从坐标原点指向 P 点的有向线段 OP 记作矢量 $\mathbf{r}$. $\mathbf{r}$ 的方向说明了 P 点相对于坐标原点的方位, $\mathbf{r}$ 的大小表明 P 点到原点的距离. 矢量 $\mathbf{r}$ 就叫做质点的位置矢量, 简称位矢. 质点运动时, 位矢随时间变化, 即

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

上式称为运动方程的矢量式.

注意: 本书中矢量用加粗的字母表示, 如 $\mathbf{r}$, 手写体为了便于区别, 通常写作 $\vec{r}$.

直角坐标系中, 位矢 $\mathbf{r}$ 可表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1-1-1)$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为 x, y, z 方向的单位矢量. 位矢的大小为

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos \beta = \frac{y}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{r}$$

α, β, γ 分别是位矢 $\mathbf{r}$ 与 x, y, z 轴正方向的夹角.

2. 位移

质点在某段时间内位置矢量的增量叫做它在该时间内的位移矢量, 简称位移. 如图 1-1-2 所示, 质点沿曲线运动, t_1 时刻位于 A 点, 位矢为 $\mathbf{r}_A$, t_2 时刻位于 B 点, 位矢为 $\mathbf{r}_B$, $\Delta t = t_2 - t_1$, 则位移为

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \quad (1-1-2)$$

在直角坐标系中

$$\mathbf{r}_A = x_A \mathbf{i} + y_A \mathbf{j} + z_A \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_B = x_B \mathbf{i} + y_B \mathbf{j} + z_B \mathbf{k}$$

则

$$\Delta \mathbf{r} = (x_B - x_A) \mathbf{i} + (y_B - y_A) \mathbf{j} + (z_B - z_A) \mathbf{k} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k} \quad (1-1-3)$$

位移的大小

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

位移的方向为从 A 点指向 B 点.

注意 $|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta r$, Δr 是位矢大小的增量, $|\Delta \mathbf{r}|$ 为位移大小, 如图 1-1-2 所示.

同样应当注意, 位移 $\Delta \mathbf{r}$ 和路程 Δs 是两个不同的物理量. 位移是矢量, 它是描述质点位置变化的物理量. 路程是标量, 描述质点实际运动轨迹长度的变化. 在曲线运动中, 位移的大小与路程并不相同, 甚至可以相差很大. 例如, 当质点经过一条闭合路径回到起始位置时, 其位移为零, 但路程不为零. 只有质点做单方向的直线运动时, 才有 $|\Delta \mathbf{r}| = \Delta s$, 曲线运动中, 在 Δt 取得无穷小的极限情况下有 $|\mathrm{d}\mathbf{r}| = \mathrm{d}s$, 位置矢量和位移的单位是米(m).



位矢路程等
概念辨析

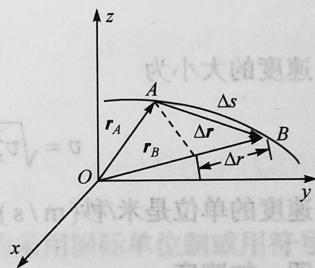


图 1-1-2 位移

三、速度

质点的位置随时间变化, 从而产生位移, 而位移一般也随时间变化. 我们把质点的位移与发生这段位移所用时间之比称为质点在这段时间内的平均速度, 用 $\bar{\mathbf{v}}$ 表示. 质点的平均速度为

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A}{\Delta t}$$

平均速度是矢量, 大小为 $\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}$, 方向与 $\Delta \mathbf{r}$ 方向相同. 平均速度描述质点在一段

时间内或一段位移内运动的平均快慢程度和方向的变化. 如果想要描述某一时刻, 即瞬时的运动状态, 就要求 Δt 趋于零, 对平均速度取极限, 也就是质点位置矢量对时间的变化率, 将其定义为质点在 t 时刻的瞬时速度(简称速度), 用 $\mathbf{v}$ 表示, 即

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \quad (1-1-4)$$

速度的方向就是 Δt 趋于零时 $\Delta \mathbf{r}$ 的方向. 如图 1-1-2 所示, 当 Δt 趋于零时, B 点向 A 点趋近, 而 $\Delta \mathbf{r}$ 方向将与质点运动轨道在 A 点的切线方向一致. 因此质点在 t 时刻的速度方向沿运动轨道质点所在位置的切线并指向运动前进的方向.

速度的大小定义为速率, 以 v 表示, 因为 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $|\mathrm{d}\mathbf{r}| = \mathrm{d}s$, 则

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{|\mathrm{d}\mathbf{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

速率等于质点所走过的路程对时间的变化率. 但平均速率并不是平均速度的大小, 平均速率定义为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

在直角坐标系中

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \quad (1-1-5)$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

速度的大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

速度的单位是米/秒(m/s).

四、加速度

质点运动的速度一般也随时间变化, 速度的变化情况可以用加速度来描述. 如图 1-1-3 所示, 在 Δt 时间内, 质点的速度由 $\mathbf{v}_A$ 变化到 $\mathbf{v}_B$, 则速度增量为

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$$

把 $\Delta \mathbf{v} / \Delta t$ 定义为质点在这段时间内的平均加速度, 用 $\bar{\mathbf{a}}$ 表示, 即

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

当 Δt 趋于零时, 平均加速度的极限, 即速度对时间的变化率, 称为质点在 t 时刻的瞬时加速度(简称加速度)用 $\mathbf{a}$ 表示, 即

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} \quad (1-1-6)$$

在直角坐标系中

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \mathbf{k} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (1-1-7)$$

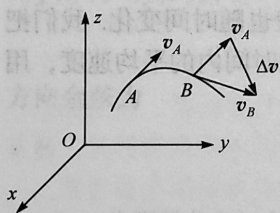


图 1-1-3 加速度

加速度大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

加速度是矢量, 它既能反映速度大小的变化, 又能反映速度方向的变化, 单位是米/秒² (m/s²).

五、运动学中的两类问题

运动学的问题大体上可分为两类.

(1) 如果已知质点的运动学方程, 就可以通过微分方法分别求出质点的速度和加速度.

(2) 如果已知质点的加速度 a 、初始速度 v_0 和初始位矢 r_0 , 则由 $dv = a dt$, 积分可得质点的速度

$$v = v_0 + \int_{t_1}^{t_2} a dt$$

由 $v = \frac{dr}{dt}$ 或 $dr = v dt$ 积分可得质点的位矢

$$r = r_0 + \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

处理具体问题时, 如不做特别说明, 上述物理量均采用国际单位制或用符号 SI 简略表示.

例 1-1-1 一个质点在 x 轴上做直线运动, 运动方程为 $x = 2t^3 + 4t^2 + 8$ (SI), 求:

- (1) 任意时刻的速度和加速度;
- (2) 在 $t = 2$ s 和 $t = 3$ s 时刻, 物体的位置、速度和加速度;
- (3) 在 $t = 2$ s 到 $t = 3$ s 时间内, 物体的平均速度和平均加速度.

解 (1) 由速度和加速度的定义式, 可求得

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 + 8t \text{ (SI)}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t + 8 \text{ (SI)}$$

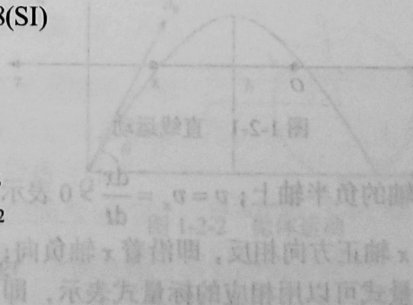
(2) $t = 2$ s 时, 得

$$x = 40 \text{ m}$$

$$v = 40 \text{ m/s}$$

$$a = 32 \text{ m/s}^2$$

同理可得, $t = 3$ s 时



$$x = 98\text{m}$$

$$v = 78\text{m/s}$$

$$a = 44\text{m/s}^2$$

$$(3) \quad \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{98 - 40}{3 - 2} = 58(\text{m/s})$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{78 - 40}{3 - 2} = 38(\text{m/s}^2)$$

例 1-1-2 一个质点沿 x 轴运动, 其加速度为 $a = 4t(\text{SI})$, 已知 $t = 0$ 时, 质点位于 x_0 处, 初速 $v_0 = 0$, 试求其位置与时间的关系式.

解 $a = 4t = \frac{dv}{dt}$, 分离变量, $4t dt = dv$, 积分得

$$\int_0^t 4t dt = \int_{v_0}^v dv$$

得

$$v = 2t^2(\text{SI})$$

由式(1-1-4)有 $v = 2t^2 = \frac{dx}{dt}$, 积分得 $\int_0^t 2t^2 dt = \int_{x_0}^x dx$, 所以

$$x = \frac{2}{3}t^3 + x_0(\text{SI})$$

1-2 几种典型的运动

一、直线运动

质点做直线运动时, 通常选取坐标轴, 如 x 轴, 与直线运动轨道重合, 如图 1-2-1 所示质点在 x 轴上任意点时, 其位矢、速度、加速度只有 x 分量, 可表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = v_x\mathbf{i} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i}, \quad \mathbf{a} = a_x\mathbf{i} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} \quad (1-2-1)$$

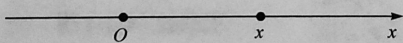


图 1-2-1 直线运动

注意到, 上述矢量的方向只能取两个: x 轴正向或 x 轴负向. 例如, $x > 0$ 表示质点位于 x 轴的正半轴上, $x < 0$ 表示质点位于 x

轴的负半轴上; $v = v_x = \frac{dx}{dt} > 0$ 表示 v 与 x 轴正方向一致, $v = v_x = \frac{dx}{dt} < 0$ 表示 v 与 x 轴正方向相反, 即沿着 x 轴负向; 加速度的情形也是如此. 因此, 直线运动的矢量式可以用相应的标量式表示, 即

$$r = x, \quad v = v_x = \frac{dx}{dt}, \quad a = a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1-2-2)$$

如果已知任意时刻的加速度, 则由加速度的定义可得 $dv = a dt$, 积分有 $\int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a dt$, 得到任意时刻的速度表达式

$$v = v_0 + \int_{t_0}^t a dt \quad (1-2-3)$$

又由速度的定义式可得 $dx = v dt$, 积分有 $\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v dt$, 得到任意时刻的位置坐标表达式

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t v dt \quad (1-2-4)$$

对于匀变速直线运动, $a = \text{恒量}$, 容易得到它的速度、位置坐标(即运动学方程)的表达式

$$v = v_0 + at, \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

以及速度、加速度和位置坐标之间的关系

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

以上三式在中学物理中学过, 是用图示图解法得到的, 这里指出了它们不过是式(1-2-3)和式(1-2-4)的特例.

二、抛体运动

物体以某一初速度抛出, 则它在竖直平面内的运动叫做抛体运动. 通常把抛出点作为坐标原点, 水平方向和竖直方向分别作为 x 轴和 y 轴, 如图 1-2-2 所示. 设抛体的初速度为 v_0 , 与水平方向的夹角为 θ , 则 v_0 沿 x 轴和 y 轴的分量为

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta, \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

物体的加速度分别为

$$a_x = 0, \quad a_y = -g$$

由此可得物体在任意时刻的速度

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta, \quad v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \theta - gt$$

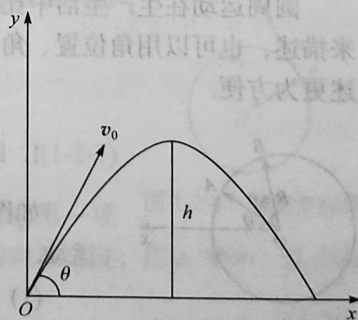


图 1-2-2 抛体运动

和任意时刻的坐标

$$x = v_{0x}t = (v_0 \cos \theta)t, \quad y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

消去时间 t , 得到轨道方程

$$y = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2$$

上式 $y=0$ 时对应的 x 的非零解代表抛体的射程, 即水平方向所走过的路程

$$x_m = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$$

在给定初速度的条件下, 射程与抛射角 θ 有关. $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, 抛体的射程最大, 其值为 $x_m = \frac{v_0^2}{g}$.

抛体达到最高点时 $v_y = 0$, 因 $v_y = v_0 \sin \theta - gt$, 则经过的时间为 $t = v_0 \sin \theta / g$, 因此抛体的射高, 即所能达到的最大高度为

$$y_m = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta$$

初速度一定时, $\theta = \pi/2$, 物体射高最大为 $v_0^2/(2g)$, 也就是说竖直上抛时的射高是最大的.

上述关于抛体运动的讨论, 都是在忽略空气阻力的情况下进行的. 实际应用子弹和炮弹等抛体在空中飞行的规律与上述结果有很大差别.

三、圆周运动

圆周运动在生产生活中比较常见, 可以用位矢、位移、速度和加速度等线量来描述, 也可以用角位置、角位移、角速度和角加速度等角量来描述, 用角量描述更为方便.

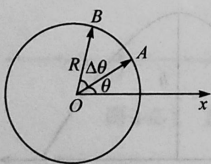


图 1-2-3 圆周运动

1. 圆周运动的角量描述

如图 1-2-3 所示, 一个质点绕 O 点做半径为 R 的圆周运动.

(1) 角位置和角位移. 设 t 时刻质点位于 A 点, 半径 OA 与 Ox 之间的夹角为 θ , θ 称为质点在该时刻的角位置. 在 $t + \Delta t$ 时刻质点位于 B 点, 在 Δt 时间内质点沿圆周转过了 $\Delta \theta$, $\Delta \theta$ 称为质点在 Δt 时间内转过的角位移.

通常规定,沿逆时针方向的角位移为正值,顺时针方向为负值,角位移单位为弧度(rad).

(2) 角速度. 角位移 $\Delta\theta$ 与时间 Δt 之比称为平均角速度 $\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. 平均角速度描述质点转动的平均快慢. 取 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 平均角速度的极限即为瞬时角速度, 简称角速度.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (1-2-5)$$

角速度是角位置对时间的变化率, 即角位置对时间的一阶导数. 角速度单位为弧度/秒(rad/s).

(3) 角加速度. 角速度的增量 $\Delta\omega$ 与时间 Δt 之比称为平均角加速度 $\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$. 平均角加速度描述角速度变化的平均快慢. 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 平均角加速度的极限即为瞬时角加速度, 简称角加速度.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1-2-6)$$

角加速度是角速度对时间的变化率, 它等于角速度对时间的一阶导数、角位置对时间的二阶导数. 角加速度的单位是弧度/秒²(rad/s²).

2. 切向加速度和法向加速度

描述曲线运动时, 为分析问题方便可以沿质点的轨道建立自然坐标系. 把一对正交坐标轴建立在质点运动的轨道上, 沿着速度方向的坐标轴叫做切向轴, 用 e_t 表示切向单位矢量; 与速度方向垂直且指向曲线凹侧的坐标轴叫做法向轴, 用 e_n 表示法向单位矢量, 如图 1-2-4 所示.

在自然坐标系下, 质点在 P 点时的速度矢量可以表示为

$$v = v e_t$$

把上式对时间求导, 得加速度矢量

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} e_t + v \frac{de_t}{dt} \quad (1-2-7)$$

可以看出, 加速度 a 具有两个分矢量, 式(1-2-7)右边第一项反映速度大小的变化, 其方向为 e_t 的方向, 称为切向加速度, 用 a_t 表示, 从而有

$$a_t = \frac{dv}{dt} e_t \quad (1-2-8)$$

式(1-2-7)右边第二项 $v \frac{de_t}{dt}$ 反映速度方向的变化. 下面具体分析它的大小和方向,



圆周运动的切向和法向加速度

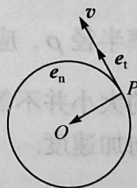


图 1-2-4 自然坐标系

如图 1-2-5 所示, t 时刻质点位于 A 点, 速度为 v_1 , 切向单位矢量为 e_{t1} ; $t + \Delta t$ 时刻质点位于 B 点, 其速度为 v_2 , 切向单位矢量为 e_{t2} . 在时间 Δt 内, 角位移为 $\Delta\theta$, 速度增量为 Δv . 切向单位矢量的增量为

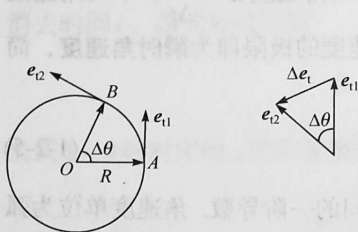


图 1-2-5 切向单位矢量对时间求导

$$\Delta e_t = e_{t2} - e_{t1}$$

考虑到 $|e_t| = 1$, 由图可得 $|\Delta e_t| = \Delta\theta$. 当 $\Delta t \rightarrow 0$

时, $\Delta\theta$ 亦趋于零, 即 $\left| \frac{de_t}{dt} \right| = \frac{d\theta}{dt}$, 这时, Δe_t 方

向趋于与 e_{t1} 垂直, 即与 v_1 垂直, 并且指向圆心沿 A 点的法向, 故式(1-2-7)右边第二项, 叫做法向加速度, 用 a_n 表示

$$a_n = v \frac{de_t}{dt} = v \frac{d\theta}{dt} e_n$$

对于圆周运动, $v = \omega R$, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, 有

$$a_n = \frac{v^2}{R} e_n \quad (1-2-9)$$

加速度可以写为

$$a = a_t + a_n = \frac{dv}{dt} e_t + \frac{v^2}{R} e_n \quad (1-2-10)$$

其中

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \quad \tan \beta = \frac{a_n}{a_t}$$

式中 β 为 a 与 v 的夹角.

上述结果对于一般平面曲线运动也是适用的. 只是半径 R 换为曲线所在点的曲率半径 ρ . 应该指出的是, $a = |a| = \left| \frac{dv}{dt} \right| \neq \frac{dv}{dt} = a_t$. 也就是说, 曲线运动中加速度的大小并不等于速率对时间的变化率, 这一变化率只是加速度的一个分量, 即切向加速度.

3. 圆周运动的线量与角量的关系

质点沿圆周运动时的速度也称为线速度, 它的方向沿运动轨道的切线方向. 若在 dt 时间内通过的弧长为 ds , 则质点的线速度大小为

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{Rd\theta}{dt} = R\omega$$

切向加速度大小为

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{Rd\omega}{dt} = R\alpha$$

法向加速度大小为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

对于匀速圆周运动, 若 $t=0$, $\omega=\omega_0$, $\theta=\theta_0$, 则任意时刻 t 有

$$\omega = \omega_0, \quad \theta = \theta_0 + \omega t$$

对于匀变速圆周运动, $\alpha = \text{恒量}$, 若 $t=0$, $\omega=\omega_0$, $\theta=\theta_0$, 则任意时刻 t 有

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

与匀变速直线运动规律的形式类似.

例 1-2-1 一台吊扇翼片长 $R=0.50\text{m}$, 以 $n=180\text{r/min}$ 的转速转动. 关闭电源开关后, 吊扇均匀减速, 经 $t=1.50\text{min}$ 转动停止. 求:

- (1) 关闭电源开关前吊扇翼尖的角速度 ω_0 与线速度 v_0 ;
- (2) 关闭电源开关后, $t=80\text{s}$ 时翼尖的角加速度 α , 切向加速度 a_t , 法向加速度 a_n 和总加速度 a .

解 (1) 关闭电源开关前吊扇翼尖的角速度为

$$\omega_0 = 2\pi n = 18.84\text{rad/s}$$

$$v_0 = \omega_0 R = 9.42\text{m/s}$$

(2) 由于均匀减速, 翼尖的角加速度恒定

$$\alpha = \frac{\omega_t - \omega_0}{t} \approx -0.209\text{rad/s}^2$$

翼尖的切向加速度也是恒定的

$$a_t = R\alpha \approx -0.105\text{m/s}^2$$

负号表示方向与角速度方向相反.

为求法向加速度, 先求 t 时刻的角速度 ω , 即

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 2.12\text{rad/s}$$

法向加速度为

$$a_n = \omega^2 R = 2.25\text{m/s}^2$$

总加速度大小为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 2.25 \text{ m/s}^2$$

加速度偏向翼尖运动的后方. 加速度与法向的夹角 θ 为

$$\theta = \arctan \left| \frac{a_t}{a_n} \right| = 2.67^\circ$$

1-3 相对运动

描述质点运动的位移、速度和加速度一般都与参考系有关. 设有两个参考系 S 和 S' , 与之关联的坐标系分别为 $Oxyz$ 和 $O'x'y'z'$, 且相应坐标轴互相平行. 设 S 系为固定参考系, S' 系相对 S 系沿 x 轴正方向运动, 如图 1-3-1 所示.

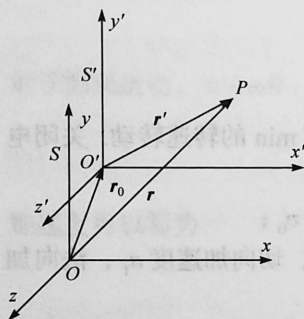


图 1-3-1 相对运动

设 t 时刻质点位于 P 点, 在 S 系和 S' 系中的位矢分别为 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}'$, 则有

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0$$

$\mathbf{r}_0$ 是 O' 相对于 O 的位矢. 上式两边对时间求导, 得到

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$$

即

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 \quad (1-3-1)$$

$\mathbf{v}$ 是质点相对 S 系的速度, $\mathbf{v}'$ 是质点相对 S' 系的速度, $\mathbf{v}_0$ 是 S' 系相对 S 系的速度. 式(1-3-1)两边对时间求导, 得到加速度之间的关系

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0$$

容易看出, 任意三个运动质点 A , B , C 之间的相对运动关系

$$\mathbf{v}_{A \text{ 对 } C} = \mathbf{v}_{A \text{ 对 } B} + \mathbf{v}_{B \text{ 对 } C}, \quad \mathbf{a}_{A \text{ 对 } C} = \mathbf{a}_{A \text{ 对 } B} + \mathbf{a}_{B \text{ 对 } C}$$

例 1-3-1 雨天一列客车 V 在水平马路上以 20 m/s 的速度向东行驶, 雨滴 R 在空中以 10 m/s 的速度竖直下落. 求雨滴相对于车厢的速度大小和方向.

解 如图 1-3-2 所示, 以 Oxy 表示地面参考系, 以 $O'x'y'$ 表示车厢参考系, 以 v_{VE} 表示客车对地的速度, 以 v_{RE} 表示雨滴对地的速度, 则 $v_{VE} = 20 \text{ m/s}$, $v_{RE} = 10 \text{ m/s}$. 以 v_{RV} 表示雨滴对车厢的速度, 则有 $\mathbf{v}_{RE} = \mathbf{v}_{RV} + \mathbf{v}_{VE}$.

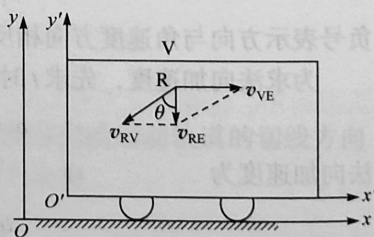


图 1-3-2 例 1-3-1 图

可得雨滴对车厢的速度的大小为

$$v_{RV} = \sqrt{v_{RE}^2 + v_{VE}^2} = 22.4 \text{ m/s}$$

方向用它与竖直方向的夹角 θ 表示, 则

$$\tan \theta = \frac{v_{VE}}{v_{RE}} = 2$$

得 $\theta = 63.4^\circ$, 即雨滴对车厢的速度偏向车厢尾部 63.4° .

思考题

- 1-1 位移和路程有什么不同? 什么情况下位移的大小和同时间内质点经过的路程相等?
- 1-2 质点沿直线运动, 其位置矢量方向是否一定不变?
- 1-3 速度矢量大小不变而方向改变, 质点做何种运动?
- 1-4 “瞬时速度就是很短时间内的平均速度”这一说法是否正确?
- 1-5 匀速率圆周运动中质点的加速度是否是常量?
- 1-6 切向加速度和法向加速度对质点的运动状态有何影响?
- 1-7 物体的加速度不断减小, 而速度却不断增大, 可能吗?
- 1-8 某物体具有大小、方向不变的加速度时, 该物体做什么运动?

习题

1-1 已知质点沿 x 轴做直线运动, 其运动方程为 $x = 2 + 6t^2 - 2t^3$ (SI), 式中 x 的单位为 m, t 的单位为 s. 求:

- (1) 质点在运动开始后 4.0s 内的位移的大小;
- (2) 质点在该时间内所通过的路程;
- (3) $t = 4\text{s}$ 时质点的速度和加速度.

1-2 已知质点的运动方程为 $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + (2 - t^2)\mathbf{j}$ (SI), 式中 r 的单位为 m, t 的单位为 s. 求:

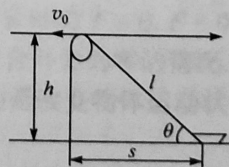
- (1) 质点的运动轨迹;
- (2) $t = 0$ 及 $t = 2\text{s}$ 时, 质点的位矢;
- (3) 由 $t = 0$ 到 $t = 2\text{s}$ 内质点的位移 $\Delta\mathbf{r}$ 大小和径向增量 Δr ;
- (4) 2s 内质点所走过的路程 s .

1-3 质点在 Oxy 平面内运动, 运动方程为 $x = 3t$ (SI), $y = 2 - t^2$ (SI).

- (1) 写出质点运动轨道方程;
- (2) 求 $t = 2\text{s}$ 时, 质点的位矢、速度和加速度.

1-4 一质点沿 x 方向运动, 其加速度随时间变化关系为 $a = 3 + 2t$ (SI), 如果初始时质点的速度 v_0 为 5m/s, 求第 3s 末质点的速度.

1-5 在离水面高为 h 的岸边, 有人用绳拉船靠岸, 船在离岸边 s 处, 当人以 v_0 速率收绳时, 如题 1-5 图所示, 试求船的速度大小和加速度大小各是多少?



题 1-5 图

1-6 一质点沿直线运动, 其坐标 x 与时间 t 有如下关系: $x = Ae^{-\beta t} \cos \omega t$ (SI) (A 、 β 皆为常数), 求任意时刻 t 质点的加速度 a 和质点通过原点的时刻 t .

1-7 一艘正在沿直线行驶的电艇, 在发动机关闭后, 电艇的加速度方向与速度方向相反, 其大小与它的速度平方成正比, 即 $a = -kv^2$ (SI), 式中 k 为常数. 求电艇在关闭发动机后又行驶距离 x 时的速度. 设 v_0 是发动机关闭时的速度.

1-8 汽车在半径 $R = 400\text{m}$ 的圆弧弯道上减速行驶. 设某一时刻, 汽车的速率为 $v = 10\text{m/s}$, 切向加速度的大小为 $a_t = 0.2\text{m/s}^2$. 求汽车的法向加速度和总加速度的大小及方向.

1-9 质点沿半径为 R 的圆周运动, 运动学方程为 $\theta = 3 + 2t^2$ (SI), 求 t 时刻质点的法向加速度大小和角加速度.

1-10 一质点从静止出发沿半径 $R = 1\text{m}$ 的圆周运动, 其角加速度随时间 t 的变化规律是 $\alpha = 12t^2 - 6t$ (SI), 求质点的角速度和切向加速度.

1-11 一质点沿半径为 R 的圆周按规律 $s = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2$ (SI) 而运动, 其中 v_0 、 b 都是常量.

(1) 求 t 时刻质点的总加速度;

(2) t 为何值时总加速度在数值上等于 b ?

(3) 当加速度达到 b 时, 质点已沿圆周运行了多少圈?

1-12 当一列火车以 10m/s 的速率向东行驶时, 若相对于地面竖直下落的雨滴在列车的窗子上形成的雨迹偏离竖直方向 30° , 求雨滴相对于地面的速率和相对于列车的速率.

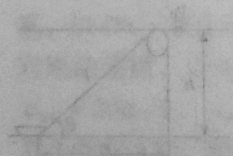


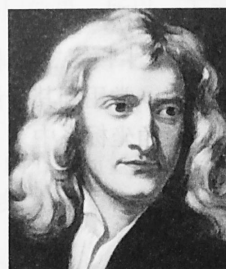
图 1-12

第2章 质点动力学

质点运动学只对质点运动状态及状态变化进行描述. 本章则在质点运动学的基础上, 研究质点运动状态变化的原因及其运动过程中遵循的规律.

2-1 牛顿运动定律

牛顿运动定律是质点动力学的核心. 宏观低速的机械运动, 都可以根据牛顿运动定律进行分析. 牛顿(I. Newton, 1643~1727)是杰出的英国物理学家、数学家、天文学家, 经典物理学的奠基人, 是科学发展史上举世闻名的巨人. 他奠定了近代科学理论基础. 在数学方面, 牛顿是微积分的创始人之一, 同莱布尼茨一道名垂千古. 在物理学方面, 牛顿取得了力学、热学、光学等多方面的巨大成就.



牛顿(I. Newton, 1643~1727)

一、牛顿第一定律

任何物体总保持静止或匀速直线运动状态, 直到有外力迫使它改变这种状态为止, 这就是牛顿第一定律. 牛顿第一定律的数学形式表示为

$$\boldsymbol{F} = 0 \text{ 时, } \boldsymbol{v} = \text{恒矢量}$$

牛顿第一定律表明任何物体在不受外力时都具有保持其运动状态不变的性质, 这种性质叫做惯性, 因此第一定律又称为惯性定律, 惯性是物体的固有属性; 如果物体的运动状态有改变, 该物体一定受到了其他物体的作用, 即该物体受到了外力, 可见力是改变物体运动状态的原因.

学习牛顿第一定律需注意以下几点:

- (1) 物体由于有惯性, 在不受外力时会保持原有运动状态(静止或匀速直线运动).
- (2) 物体如果处于静止或匀速直线运动状态, 则物体所受合外力 $\boldsymbol{F} = 0$. $\boldsymbol{F} = 0$ 可能是物体不受任何外力的情况, 也可能是物体受多个外力但合外力为零的情况.
- (3) $\boldsymbol{F} \neq 0$ 时, 物体的运动状态(速度)将发生改变, 因此力是改变物体运动状态的原因.

二、牛顿第二定律

物体受到外力的作用时,物体所获得的加速度 a 的大小与合外力 F 的大小成正比,与物体的质量 m 成反比, a 的方向与合外力 F 的方向一致,这就是牛顿第二定律. 写成矢量形式为

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \quad (2-1-1)$$

关于牛顿第二定律,作如下理解:

(1) 牛顿第二定律中物体的质量是惯性质量,它是物体惯性大小的量度. 一切有质量的物体都有惯性,物体的质量越大,物体运动状态越难改变,物体的惯性越大. 比如运动场上抛起铅球和皮球,用很大的力才能抛起铅球,而如果抛皮球就很轻松.

(2) 牛顿第二定律用矢量式表达物理规律形式简洁,物理意义明了. 处理实际问题时,常用到其分量式如下:

直角坐标系中

$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{cases} \quad (2-1-2)$$

自然坐标系中

$$\begin{cases} F_t = ma_t \\ F_n = ma_n \end{cases} \quad (2-1-3)$$

(3) 牛顿第二定律表明力与加速度的因果关系. 力对物体作用的效果是使之产生加速度,合外力是产生加速度的原因,加速度是合外力作用的结果.

(4) 牛顿第二定律为瞬时性作用定律,即合外力与加速度的关系具有瞬时性.

(5) 力的叠加原理: 当几个外力同时作用于物体时,合外力产生的加速度等于每个分力所产生加速度的矢量和.

三、牛顿第三定律

两个物体之间的作用力 $\mathbf{F}$ 与反作用力 $\mathbf{F}'$, 大小相等, 方向相反, 并且作用在同一条直线上, 即

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}' \quad (2-1-4)$$

这就是牛顿第三定律, 也叫作用与反作用定律.

关于牛顿第三定律, 作如下说明:

(1) 作用力与反作用力分别作用在两个不同的物体上, 它们互以对方的存在

为自己存在的前提,它们同时产生,同时消失.

(2) 作用力与反作用力是同种性质的力.

(3) 第三定律与参考系的选择无关,因为只涉及相互作用性质,而不涉及对运动的描述.

四、几种常见力

自然界中存在四种相互作用力——万有引力、电磁相互作用、强相互作用和弱相互作用. 引力存在于一切物体之间. 电磁力发生在带电体或载流体之间,力学中的接触力——弹簧的弹性力、绳中张力、摩擦力、压力等,均起源于构成物体的微观粒子之间的电磁力. 强相互作用和弱相互作用只存在于 10^{-15}m 距离之内的基本粒子之间. 在牛顿力学中,只考虑物体之间的宏观作用效果,所以,下面只介绍引力、弹性力、摩擦力这几种常见力.

1. 引力

任何两个质点之间都存在着相互吸引力,引力的大小与两质点质量的乘积成正比,与质点之间的距离平方成反比,方向沿着两质点的连线. 以 m_1, m_2 表示两质点的质量, r 表示两质点之间的距离,则引力的大小为

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2-1-5)$$

这就是牛顿于1686年提出的著名的万有引力定律. 式中 $G = 6.672 \times 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$,是引力常量.

地球表面物体受到的重力,是引力的一个特例. 把地球看作一个匀质球体,质量 M 集中在它的地心处,它对地面上质量为 m 的物体的引力为

$$F = G \frac{Mm}{R^2} = mg$$

式中 R 为地球半径, $g = GM / R^2 = 9.8 \text{m/s}^2$.

2. 弹性力

两个物体相互接触发生形变,物体因形变而产生的恢复力称为弹性力. 弹性力产生的先决条件是弹性形变,弹性力的大小取决于形变的程度.

弹簧被拉伸或压缩时,弹力遵守胡克定律:在弹性限度内,弹簧的弹性力大小与弹簧的形变量(伸长量或压缩量)成正比,弹性力的方向与形变的方向相反,即

$$F = -kx \quad (2-1-6)$$

k 为弹簧的劲度系数, 与弹簧的材料和形状有关. 弹簧的弹性力总是指向使它恢复原长的方向.

3. 摩擦力

两个相互接触的物体沿接触面有相对运动或相对运动趋势时, 在接触面之间会产生阻碍它们相对运动的摩擦力. 相互接触的两个物体只有相对运动的趋势而没有产生相对运动时的摩擦力叫静摩擦力. 静摩擦力与外力大小相等、方向相反. 外力增大到某一值时, 物体间开始有相对运动, 这时的静摩擦力称为最大静摩擦力. 最大静摩擦力 $f_{\max}$ 正比于压力 N , 即

$$f_{\max} = \mu_0 N \quad (2-1-7)$$

式中, μ_0 是最大静摩擦系数, 与材料性质和接触面的粗糙程度有关. 两个接触物体间有相对滑动时, 产生的摩擦力叫做滑动摩擦力. 滑动摩擦力的大小也与压力的大小成正比

$$f = \mu N \quad (2-1-8)$$

式中 μ 为滑动摩擦系数. 对于确定的两个物体, 其滑动摩擦系数 μ 比静摩擦系数 μ_0 略小.

例 2-1-1 一辆质量为 m , 速度为 v_0 的摩托车, 在关闭发动机后沿直线滑行, 受到的阻力为 $f = -kv$, 其中 k 为大于零的常量. 求:

- (1) 关闭发动机后摩托车在 t 时刻的速度;
- (2) 关闭发动机后 t 时间内摩托车走过的路程.

解 (1) 关闭发动机后, 由牛顿第二定律可得摩托车的动力学方程为

$$f = m \frac{dv}{dt} = -kv$$

分离变量有

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt$$

两边积分

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt, \quad \ln \frac{v}{v_0} = -\frac{k}{m} t$$

得

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m} t}$$

(2) 由于 $v = \frac{ds}{dt} = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$, 则

$$\int_0^s ds = \int_0^t v_0 e^{-\frac{k}{m}t} dt$$

因此关闭发动机后 t 时间内摩托车所走的路程为

$$s = \frac{mv_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

例 2-1-2 已知一个质量为 m 的质点在 x 轴上运动, 质点只受到指向原点的引力作用, 引力的大小与质点离原点的距离平方成反比, 即 $f = -k/x^2$, k 是比例常数. 设质点在 $x = A$ 处的速度为零, 求 $x = A/4$ 处速度的大小.

解 根据牛顿第二定律有

$$f = \frac{-k}{x^2} = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$$

分离变量

$$-\frac{k}{m} \frac{dx}{x^2} = v dv$$

积分

$$\int_A^{A/4} -\frac{k}{m} \frac{dx}{x^2} = \int_0^v v dv$$

解得

$$v = \left(\frac{6k}{mA} \right)^{1/2}$$

例 2-1-3 一个质量为 m 的珠子系在线的一端, 线的另一端系在墙上的钉子上, 线长为 l , 先拉动珠子使线保持水平静止, 然后松手使珠子下落. 求线下摆 θ 角时珠子的速率和绳子的张力.

解 如图 2-1-1 所示, 珠子受到拉力 T 和重力 G 的作用, 牛顿运动方程为 $T + G = ma$.

珠子做圆周运动, 我们在自然坐标系中求解更为方便.

任意角位置处, 牛顿第二定律的切向分量方程为

$$mg \cos \theta = m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{ds}$$

分离变量并积分

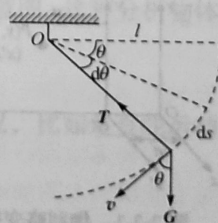


图 2-1-1 单摆的张力

$$\int_0^\theta gl \cos \theta d\theta = \int_0^v v dv$$

解得

$$v = \sqrt{2gl \sin \theta}$$

任意角位置处, 牛顿第二定律的法向分量方程为

$$T - mg \sin \theta = m \frac{v^2}{l}$$

由此可得线中张力为

$$T = 3mg \sin \theta$$

2-2 惯性系 力学相对性原理

一、惯性系

在运动学中, 我们可以任意选取参考系来描述物体的运动. 但是在动力学中参考系的选取还能不能任意呢? 例如, 地面上的房子在水平方向上不受力, 在地面上观察, 房子是静止的, 牛顿运动定律是适用的. 但在一系列加速运动的火车上观察, 地面上的房子沿反方向做加速运动, 牛顿运动定律不再适用. 由此可见, 牛顿运动定律的应用与参考系的选择有关. 我们把牛顿运动定律成立的参考系叫做惯性系. 相对惯性系做匀速直线运动的参考系也是惯性系. 牛顿运动定律不成立的参考系叫做非惯性系.

要确定一个参考系是不是惯性系, 只能依靠观察和实验. 生活实践和实验表明, 地球可以看作惯性系, 但考虑到地球的自转和公转, 地球又不是一个严格的惯性系.

二、力学相对性原理

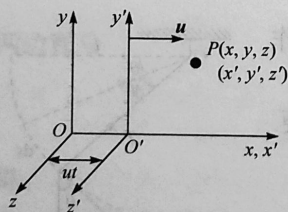


图 2-2-1 伽利略变换

设有两个参考系 $S(Oxyz)$ 和 $S'(O'x'y'z')$, 它们对应的坐标轴都是相互平行的, 且 Ox 轴与 $O'x'$ 轴重合, 如图 2-2-1 所示. 其中 S 系是惯性系, S' 系以恒定的速度 u 沿 x 轴正向相对于 S 系做匀速直线运动, 所以 S' 系也是惯性系. $t = t' = 0$ 时, O 与 O' 重合, 任意时刻 t , 质点 P 在两个坐标系中的坐标分别为 (x, y, z) 和 (x', y', z') , 它们之间的关系为

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

上式称为伽利略变换. 将它对时间求两次导数, 得到加速度的变换式

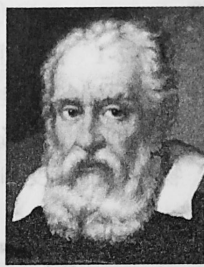
$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = a_z$$

即 $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$. 考虑到经典力学中, 质点的质量及其受力与参考系无关, 所以

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\mathbf{a}' = \mathbf{F}' \quad (2-2-1)$$

即在两个惯性系中, 牛顿第二定律的数学表达式具有相同形式.

由此可见, 在所有的惯性系中, 牛顿运动定律都是等价的. 也就是说, 对于不同的惯性系, 牛顿力学的规律都具有相同的形式. 或者说在一个惯性系中所做的任何力学实验, 都不能确定该惯性系相对于其他的惯性系是否在运动, 这就是**力学相对性原理**, 也叫**伽利略相对性原理**.



伽利略(G. Galilei, 1564~1642)

三、牛顿定律应用举例

牛顿三大定律是经典物理学中分析物体做机械运动的基本定律, 它在实践中有着广泛的应用. 本节将通过举例来说明如何应用牛顿定律分析问题和解决问题.

如果物体的初始状态已知, 受力情况明确, 应用牛顿第二定律, 便可知物体的加速度, 再由加速度和速度的关系, 就可得到物体的运动状态, 因此物体的初始状态和受力情况决定着物体的运动情况. 在对物体运动过程的分析中对物体受力分析和牛顿第二定律的应用是重点.

若研究对象受到多个力, 需要画出该物体的受力示意图, 一般可采用隔离体法, 分析物体受力. 首先把研究对象从与之相联系的其他物体中“隔离”出来, 然后至少要把作用在该物体上的关键力找出来, 画出力的示意图. 这种分析物体受力的方法, 叫做隔离体法.

应用牛顿定律的一般步骤为:

(1) 确定研究对象, 根据已知条件描述物体大致运动情况, 比如是直线运动还是曲线运动, 运动方向如何等.

(2) 采用隔离体法, 画出研究对象的受力示意图.

找物体的受力可从物体周围的事物着手, 同时结合物体的运动情况. 比如在地球表面物体有质量会受重力, 与绳子相连可能受拉力, 与弹簧相连可能受弹簧

弹性力, 与其他物体有接触可能受支持力、压力, 接触面不光滑时, 可能有摩擦力等. 到后面的电学和磁学时, 还可能有电场力、洛伦兹力和安培力等.

(3) 建立坐标系. 标出物体的加速度($a \neq 0$ 时); 列牛顿第二定律关系式.

选择加速度为零的参照物为参考系, 即惯性系为参考系, 在合适位置点建立坐标系, 坐标系常用的有直角坐标系和自然坐标系; 列牛顿第二定律关系式时, 一般列分量关系式.

(4) 列补充方程. 常用的关系有: 作用力与反作用力大小相等, 滑动摩擦力或最大静摩擦力与正压力的关系, 弧长与圆心角的关系等.

(5) 求解计算. 求解时最好先用文字符号得出结果, 而后再代入已知数据进行运算.

例 2-2-1 滑轮组合, 如图 2-2-2 所示, 一套滑轮系统, 一根轻绳跨过一个定滑轮, 绳两端各悬挂一物体, 物体质量分别为 m_1 、 m_2 , 假定 $m_1 > m_2$, 滑轮的质量、绳子的质量忽略不计, 滑轮与绳的摩擦力、轮轴的摩擦力略去. 求物体释放后, 物体的加速度和绳中的张力?

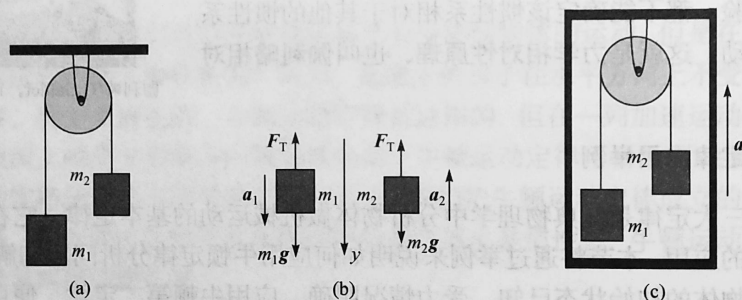


图 2-2-2 滑轮组合

解 物体与绳子分开, 分别画出物体受力示意图, 如图 2-2-2(b)所示. 由于滑轮的质量、绳子的质量忽略不计, 滑轮与绳的摩擦力、轮轴的摩擦力略去, 则跨过滑轮的同一根绳子各处张力相等, 则两物体受到的绳子拉力相等; 两物体均在竖直方向上运动, 因此建立 y 轴坐标系; 标出物体相对地面的加速度, 分别是 a_1 和 a_2 . 以地球为参考系, 把牛顿第二定律分别应用到两物体, 由 $F_y = ma_y$ 得

$$\begin{cases} m_1g - F_T = m_1a_1 \\ m_2g - F_T = -m_2a_2 \end{cases}$$

两物体由同一根绳子相连, 则物体 m_1 相对于轮轴向下的加速度和物体 m_2 相对于轮轴向上的加速度大小相等, 又轮轴固定未动, 则两物体相对地面的加速度 $a_1 = a_2$. 解得

$$a_1 = a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad F_T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

例 2-2-2 如图 2-2-2(c) 整套系统固定电梯中, 电梯以加速度 a 向上加速, 求此时绳的张力和物体的加速度?

解 两物体相对轮轴的加速度大小依然相等, 用 a_r 表示. 假如 m_1 相对轮轴向下加速, 则 m_2 相对轮轴就应向上加速, 结合图 2-2-2(b) 中 a_1 和 a_2 方向可得

$$a_1 = a_r - a, \quad a_2 = a_r + a$$

联合例 2-2-1 中结论, 解得

$$a_r = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (g + a), \quad F_T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (g + a)$$

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_2)g - 2m_2 a}{m_1 + m_2}, \quad a_2 = \frac{(m_1 - m_2)g + 2m_2 a}{m_1 + m_2}$$

在牛顿第二定律的关系式中, 物体的加速度必须是物体相对于惯性参考系的.

2-3 动量 动量守恒定律

力作用于质点或者质点系往往会持续一段时间或者一段距离, 这时需要考虑的不是力的瞬时作用, 而是力对时间的累积作用和力对空间的累积作用. 在这两种累积作用中, 质点或质点系的运动状态也会发生变化.

一、冲量

1. 恒力的冲量

设有恒力 F 作用于质点, 其作用时间为 $\Delta t = t_2 - t_1$, 恒力 F 与其作用时间 Δt 的乘积称为力的冲量, 用 I 来表示

$$I = F(t_2 - t_1) = F\Delta t$$

其大小为 $F\Delta t$, 方向与力 F 相同.

2. 变力的冲量

设有随时间变化的力 F 作用于质点, 作用时间为 $\Delta t = t_2 - t_1$. 可以把作用时间 Δt 分为无数多个微元过程, 每一个微元过程中的力可以看作恒力, 元冲量为

$$dI = Fdt$$

Δt 时间内, 力 F 作用的总冲量为

$$I = \int_{t_1}^{t_2} Fdt \quad (2-3-1)$$

冲量是矢量, 计算冲量时通常用到上式的分量式. 在直角坐标中

$$\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt \end{cases}$$

3. 合力的冲量

合力的冲量等于各分力冲量的矢量和, 即

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (\sum F_i) dt = \sum \int_{t_1}^{t_2} F_i dt$$

二、动量、动量定理

1. 动量、质点的动量定理

由牛顿第二定律

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$$

得

$$Fdt = d(mv)$$

由上式可以看到, 冲量的作用使物体的状态量 mv 发生了变化. 把质量与速度的乘积定义为质点的动量, 用 p 表示, 即

$$p = mv \quad (2-3-2)$$

牛顿第二定律可以写成

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (2-3-3)$$

式(2-3-3)比 $F = ma$ 更普遍, 因为在相对论力学中, 质点的质量不再是常量, 而是随速率发生变化, 这时式(2-3-3)仍然成立.

动量是矢量, 它的方向为速度的方向; 动量是一个状态量, 是指某一时刻的动量, 而冲量是过程量; 动量具有相对性, 与参考系的选择有关.

由式(2-3-3)可得质点动量定理的微分形式

$$Fdt = dp \quad (2-3-4)$$

考虑质点在 t_1 到 t_2 这段时间内, 在外力的作用下, 速度从 v_1 变化到 v_2 , 则冲量为

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F dt = mv_2 - mv_1 = p_2 - p_1 = \Delta p \quad (2-3-5)$$

即质点所受合外力的冲量等于质点动量的增量, 这就是质点的动量定理. 在相同冲量作用下, 不同质点的速度变化可以不同, 但它们的动量增量却是相同的.

为了理解质点的动量定理, 需指出以下三点:

(1) 动量定理是矢量式, I 的方向决定了 Δp 的方向. 物体在某方向上获得冲量, 只能改变该方向上的动量.

(2) 冲量是过程量, 动量是状态量. 冲量是力在一段时间内的积累, 动量是由质点在某一时刻的状态决定的.

(3) 动量定理只适用于惯性系.

在实际计算时, 常用式(2-3-5)的分量式. 在直角坐标系中, 有

$$\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{2x} - mv_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = mv_{2y} - mv_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = mv_{2z} - mv_{1z} \end{cases}$$

动量定理常用于打击、碰撞过程, 这种过程的相互作用力很大且作用力随时间的变化关系很复杂. 如图 2-3-1 所示, 为使问题简化, 引入平均力的概念, 即力在一段时间内的平均值. 用 $\bar{F}$ 表示平均力, 由数学中的积分中值定理有

$$\bar{F} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} F dt}{t_2 - t_1}$$

由动量定理, 平均力为

$$\bar{F} = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} \quad (2-3-6)$$

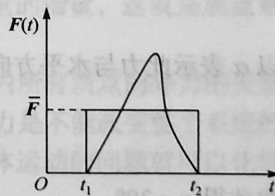


图 2-3-1 冲力变化曲线

平均力只是冲力的平均值, 它和实际冲力的极大值可能有较大的差别, 因此它不能完全说明碰撞可能引起的破坏性.

例 2-3-1 一个质量 $m = 140\text{g}$ 的垒球以 $v = 40\text{m/s}$ 的速率沿水平方向飞向击球手, 被击打后它以相同速率沿 $\theta = 60^\circ$ 的仰角飞出, 设球和棒的接触时间为 $\Delta t = 1.2\text{ms}$, 求垒球受棒的平均打击力.

本题属碰撞问题, 下面分别给出两种解法.

解法一 用矢量式(2-3-6)求解. 按式(2-3-6), mv_2, mv_1 以及 $\bar{F}\Delta t$ 形成如图 2-3-2(a) 中的矢量三角形, 其中 $mv_2 = mv_1 = mv$. 由等腰三角形可知, $\bar{F}$ 与水平面的夹角 $\alpha = \theta/2 = 30^\circ$, 且 $\bar{F}\Delta t = 2mv \cos \alpha$, 于是

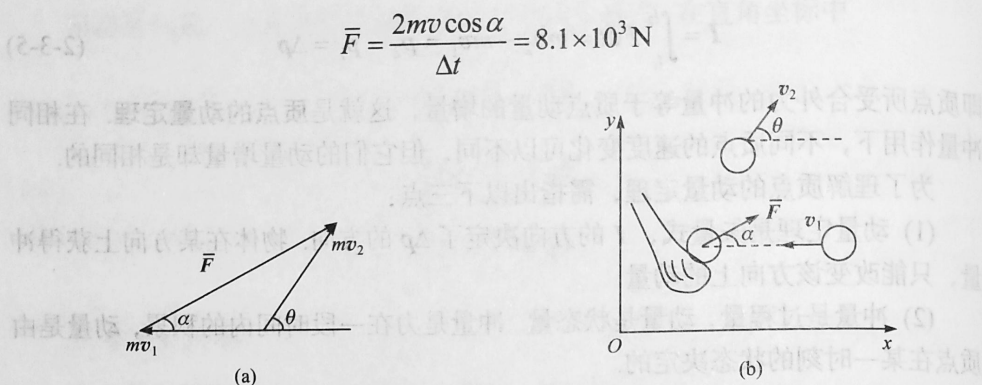


图 2-3-2 碰撞问题

解法二 用分量式求解. 已知 $v_2 = v_1 = v$, 选如图 2-3-2(b)所示坐标系, 利用式(2-3-6)分量式, 由于 $v_{1x} = -v$, $v_{2x} = v \cos \theta$, 可得垒球受棒的平均打击力的 x 方向分量为

$$\bar{F}_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{mv_{2x} - mv_{1x}}{\Delta t} = \frac{mv \cos \theta - m(-v)}{\Delta t} = 7.0 \times 10^3 \text{ N}$$

又由于 $v_{1y} = 0$, $v_{2y} = v \sin \theta$, 可得平均打击力的 y 方向分量为

$$\bar{F}_y = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{mv_{2y} - mv_{1y}}{\Delta t} = \frac{mv \sin \theta}{\Delta t} = 4.0 \times 10^3 \text{ N}$$

球受棒的平均打击力的大小为

$$\bar{F} = \sqrt{\bar{F}_x^2 + \bar{F}_y^2} = 8.1 \times 10^3 \text{ N}$$

以 α 表示此力与水平方向的夹角, 则

$$\tan \alpha = \frac{\bar{F}_y}{\bar{F}_x} \approx 0.57$$

由此得 $\alpha = 30^\circ$.

2. 质点系的动量定理

质点系是由多个相互作用着的质点所组成的系统. 上面讨论了质点的动量定理, 然而在许多问题中我们还需要研究由一些质点构成的质点系的动量变化与作用在质点系上的力之间的关系.

首先讨论由两个质点组成的质点系, 如图 2-3-3 所示. 设两个质点质量分别为 m_1 和 m_2 , 它们之间的相互作用力即内力为 f 和 f' , 所受外力分别为 F_1 和 F_2 , 速度由 v_{10}, v_{20} 分别变为 v_1, v_2 . 根据质点的动量定理, 对两质点分别应用质

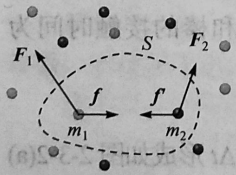


图 2-3-3 内力和外力

点的动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2} (F_1 + f) dt = m_1 v_1 - m_1 v_{10}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (F_2 + f') dt = m_2 v_2 - m_2 v_{20}$$

将上面两式相加

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} (F_1 + F_2) dt + \int_{t_1}^{t_2} (f + f') dt \\ &= (m_1 v_1 + m_2 v_2) - (m_1 v_{10} + m_2 v_{20}) \end{aligned}$$

由于 $f = -f'$, 故上式为

$$\int_{t_1}^{t_2} (F_1 + F_2) dt = (m_1 v_1 + m_2 v_2) - (m_1 v_{10} + m_2 v_{20}) \quad (2-3-7)$$

上式表明, 作用于两质点组成的系统的合外力的冲量等于系统内两质点动量之和的增量, 即系统的动量增量. 内力不改变系统的总动量.

若质点系由 n 个质点组成, 则式(2-3-7)可以写成

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n F_i dt = \sum_{i=1}^n m_i v_i - \sum_{i=1}^n m_i v_{i0}$$

或

$$I = p - p_0 \quad (2-3-8)$$

式(2-3-8)表明, 作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量, 这就是质点系的动量定理.

需要强调指出: 作用于系统的合外力是作用于系统内所有质点的外力的矢量和, 只有外力才对系统的动量变化有贡献, 而系统的内力是不能改变整个系统的动量的. 这样, 对于研究由多个物体组成的质点系的总体运动的问题就可以化繁为简了.

在无限小的时间间隔内, 质点系的动量定理可写成

$$F^{\text{ex}} = \frac{dp}{dt}$$

即作用于质点系的合外力等于质点系的动量随时间的变化率.

在人造卫星定轨和运行过程中, 常需要调整同步卫星的运行轨道. 离子推进器产生的推力, 能使卫星保持在适当的方位上, 其基本原理就是质点系的动量定理.

例 2-3-2 一条柔软链条长为 l , 单位长度的质量为 λ , 链条放在有一小孔的桌上, 如图 2-3-4 所示. 链条一端由小孔稍伸下, 其余部分堆在小孔周围. 由于某

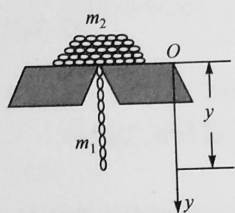


图 2-3-4 链条下滑

种扰动, 链条因自身重量开始下落. 求链条下落速度 v 与 y 之间的关系. 设各处摩擦均不计, 且认为链条柔软得可以自由伸开.

解 以竖直悬挂的链条和桌面上的链条为一系统, 建立坐标系, 则此系统的外力仅为竖直悬挂的链条所受的重力, 即

$$F^{\text{ex}} = m_1 g = \lambda y g$$

由质点系动量定理可得

$$F^{\text{ex}} dt = dp$$

设在时刻 t , 链条下垂长度为 y , 下落速度为 v , 因此这部分链条的动量为

$$p = m_1 v = \lambda y v$$

在 dt 时间里, 下垂部分链条动量的增量为

$$dp = \lambda d(yv)$$

$$\lambda y g dt = \lambda d(yv)$$

即

$$y g = \frac{d(yv)}{dt}$$

两边同乘以 $y dy$, 则

$$y^2 g dy = y dy \frac{d(yv)}{dt} = y v d(yv)$$

在开始时, 链条尚未下落, 其下落速度为零, 即 $(yv)_{y=0} = 0$, 所以

$$g \int_0^y y^2 dy = \int_0^{yv} y v d(yv)$$

得

$$v = \left(\frac{2}{3} g y \right)^{1/2}$$

这就是链条下落速度与下落距离之间的关系.

三、动量守恒定律

若质点或质点系不受外力或所受合外力为零, 即 $F^{\text{ex}} = 0$, 由动量定理有

$$p = p_0 = \text{恒矢量} \quad (2-3-9)$$

即系统的总动量保持不变, 称为动量守恒定律.

应用动量守恒定律解题时, 应注意以下几点:

(1) 动量守恒的条件是合外力为零. 但在外力远小于内力的情况下, 外力对系统总动量的影响很小, 这时也可以近似认为动量守恒, 如碰撞、打击问题.

(2) 质点系的动量守恒是指系统的总动量保持不变, 而系统内各个质点的动量可以变化.

(3) 动量守恒定律是一个矢量式. 例如, 炸弹在爆炸前后总动量为零, 有 $\sum \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_0 = 0$, 爆炸后, 弹片向各方向飞散, 各有不同的动量, 而 $\sum \mathbf{p}_i = 0$.

(4) 如果在某一方向上的合外力为零, 则在此方向上的动量守恒. 例如, $\sum F_x = 0$ 或 $\sum F_x \ll \sum F_{\text{内}x}$ 时

$$p_x = p_{x0} = \text{恒量}$$

(5) 动量守恒定律是物理学中的普遍规律, 不仅适用于宏观系统, 而且适用于微观粒子系统.

例 2-3-3 如图 2-3-5 所示, 水平光滑铁轨上有平板车, 长度为 l , 质量为 m_2 , 平板车的一端有一人(包括所骑自行车), 质量为 m_1 , 人和平板车原来都静止不动. 当人从平板车的一端走到另一端时, 人、平板车各移动了多少距离?

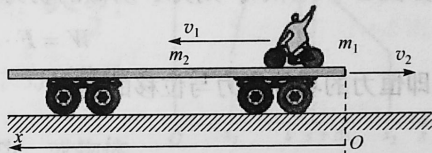


图 2-3-5 运动的平板车

解 以人、平板车为系统, 在水平方向上不受外力作用, 动量守恒. 建立如图 2-3-5 所示的坐标系, 有

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0 \quad \text{或} \quad v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2}$$

人相对平板车的速度 $u = v_1 + v_2 = \frac{(m_1 + m_2)v_1}{m_2}$, 设人在时间 t 内从平板车的一端走到另一端, 则有

$$l = \int_0^t u dt$$

在这段时间内人相对于地面的位移为

$$x_1 = \int_0^t v_1 dt = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l$$

平板车相对于地面的位移为

$$x_2 = -l + x_1 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} l$$

2-4 功 和 能

力对空间的积累用功来表示. 功的作用效果是使物体的能量发生变化. 本节讨论功与能量之间的关系.

一、功

力在位移方向上的分量与位移大小的乘积定义为功. 物体在力的作用下, 沿着力的方向发生了一段位移, 说明力对物体做了功.

1. 恒力的功

设有恒力 $\mathbf{F}$ 作用于质点, 质点实现位移 $\Delta \mathbf{r}$, 力 $\mathbf{F}$ 与位移 $\Delta \mathbf{r}$ 的夹角为 θ , 如图 2-4-1 所示, 则力 $\mathbf{F}$ 所做的功为

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = F |\Delta \mathbf{r}| \cos \theta \quad (2-4-1)$$

即恒力的功等于力与位移的标积.

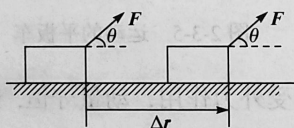


图 2-4-1 功的定义

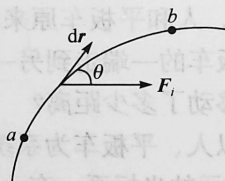


图 2-4-2 变力的功

2. 变力的功

设一质点在变力作用下做曲线运动, 从 a 点运动到 b 点, 如图 2-4-2 所示, 在任一无限小位移 $d\mathbf{r}$ 上, 力可以看作恒力 $\mathbf{F}$, 则该力对质点所做元功为

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F |d\mathbf{r}| \cos \theta$$

整个路径力 $\mathbf{F}$ 做的总功为

$$W = \int_L dW = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F |d\mathbf{r}| \cos \theta \quad (2-4-2)$$

在直角坐标系下

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}, \quad d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$$

元功和总功分别为

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_a}^{x_b} F_x dx + \int_{y_a}^{y_b} F_y dy + \int_{z_a}^{z_b} F_z dz \quad (2-4-3)$$

在自然坐标系中

$$\mathbf{F} = F_t \mathbf{e}_t + F_n \mathbf{e}_n, \quad d\mathbf{r} = |d\mathbf{r}| \mathbf{e}_t = ds \mathbf{e}_t$$

则

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int F_t ds \quad (2-4-4)$$

即力对质点所做的功等于力的切线分量对路径的线积分。

功也可以用图示法来求解。如图 2-4-3 所示, 纵坐标表示作用在物体上的力在切向方向上的分量, 横坐标表示质点沿曲线运动的路程大小, 则图中小矩形面积为在元位移内所做的元功, 而曲线下的面积等于力所做的功。

对功的意义, 应理解如下几点:

(1) 功是标量, 没有方向, 有大小和正负。 $\theta < \frac{\pi}{2}$,

$W > 0$, 即力对物体做正功; $\theta = \frac{\pi}{2}$, $W = 0$, 力对物体

不做功; $\theta > \frac{\pi}{2}$, $W < 0$, 即力对物体做负功, 或物体克服该力做功。

(2) 功与参考系的选择有关。因为对于不同的参考系, 位移不同。功的单位是焦耳(J), $1\text{J} = 1\text{N} \cdot \text{m}$ 。

(3) 合力的功等于各分力沿同一路径所做功的代数和, 即

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int (\sum \mathbf{F}_i) \cdot d\mathbf{r} = \sum \left(\int \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r} \right) = \sum W_i$$

力在单位时间内所做的功定义为功率, 用 P 表示, 则

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv \cos \theta \quad (2-4-5)$$

功率的单位是瓦特(W), $1\text{W} = 1\text{J/s}$ 。

例 2-4-1 设作用在质量为 2kg 的物体上的力 $F = 6t$, 如果物体由静止出发沿直线运动, 问在前 2s 时间内, 这个力对物体做的功。

解 注意到已知力 F 是时间的函数, 故先求位移 x 与时间 t 的关系。根据牛顿第二定律 $F = ma = m \frac{dv}{dt} = 6t$ 可知物体的加速度为 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = 3t$, 整理得

$$dv = 3t dt$$

两边积分得

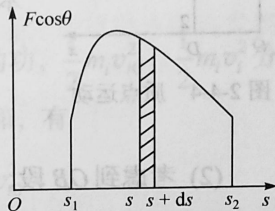


图 2-4-3 功的图示



功的定义
及变力做功

$$v = \int_0^v dv = \int_0^t 3t dt = 1.5t^2$$

由 $v = \frac{dx}{dt}$, $dx = 1.5t^2 dt$, 则功为

$$W = \int F dx = \int 6t \cdot 1.5t^2 dt = \int_0^2 9t^3 dt = 36J$$

例 2-4-2 一个质点沿如图 2-4-4 所示的路径运动, 求: 力 $F = (4-2y)i$ (SI) 对该质点所做的功, (1) 沿 ODC 路径; (2) 沿 OBC 路径.

解 由已知, $F_x = 4-2y$, $F_y = 0$, 则

$$\int F_y dy = 0$$

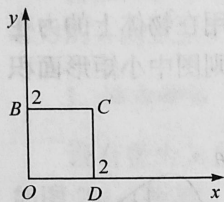


图 2-4-4 质点运动

本例中, $W = \int F_x dx$.

(1) 考虑到 DC 段, $dx = 0$, 有

$$W_{ODC} = \int_{ODC} F_x dx = \int_{OD} F_x dx = \int_0^2 (4-2 \times 0) dx = 8(J)$$

(2) 考虑到 OB 段, $dx = 0$, 有

$$W_{OBC} = \int_{OBC} F_x dx = \int_{BC} F_x dx = \int_2^0 (4-2 \times 2) dx = 0$$

二、动能和动能定理

1. 动能和质点的动能定理

如图 2-4-5 所示, 设质量为 m 的质点在合外力的作用下沿曲线从 a 点运动到 b 点, 质点在 a 点和 b 点的速率分别为 v_a 和 v_b , 则合外力 F 所做的功为

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F |d\mathbf{r}| \cos \theta = \int_a^b F_t |d\mathbf{r}|$$

由牛顿第二定律有

$$F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt}$$

又由于 $|d\mathbf{r}| = ds = v dt$, 所以有

$$W = \int_a^b m \frac{dv}{dt} \cdot v dt = \int_a^b m v dv = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2$$

定义 $\frac{1}{2} m v^2$ 为质点的动能, 用 E_k 表示, 即 $E_k = \frac{1}{2} m v^2$. 从而有

$$W = E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k \quad (2-4-6)$$

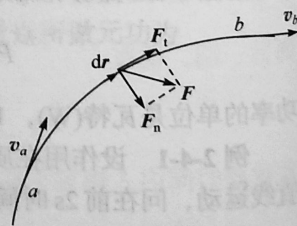


图 2-4-5 动能定理

上式表明合外力对质点所做的功等于质点动能的增量, 这就是**质点的动能定理**。

对质点的动能定理, 需指出的是:

(1) 动能定理是描述物体间相互作用的过程和物体在相互作用前后状态的变化关系。

(2) 功和动能是两个不同的概念. 功是过程量, 动能是状态量. 功是物体能量变化的一种量度, 动能是能量的一种形式, 是物体具有的对其他物体做功的本领。

(3) 动能定理只适用于惯性系。

2. 质点系的动能定理

设质点系由 N 个质点组成, 对任意一个质点 i , 应用动能定理有

$$W_i^{\text{ex}} + W_i^{\text{in}} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \frac{1}{2} m_i v_{i0}^2$$

式中 W_i^{ex} , W_i^{in} 分别为第 i 个质点所受外力和内力对它做的功, $\frac{1}{2} m_i v_{i0}^2$, $\frac{1}{2} m_i v_i^2$ 分别为第 i 个质点始、末状态的动能. 将上式对所有质点求和, 有

$$\sum W_i^{\text{ex}} + \sum W_i^{\text{in}} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \sum \frac{1}{2} m_i v_{i0}^2$$

所有外力对系统做的功 $\sum W_i^{\text{ex}}$ 记为 W^{ex} , 所有内力对系统做的功 $\sum W_i^{\text{in}}$ 记为 W^{in} , 系统初态的动能 $\sum \frac{1}{2} m_i v_{i0}^2$ 记为 E_{k0} , 系统末态的动能 $\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$ 记为 E_k , 得到质点系的动能定理

$$W^{\text{ex}} + W^{\text{in}} = E_k - E_{k0} = \Delta E_k \quad (2-4-7)$$

即质点系所受外力和内力对系统做的功等于质点系动能的增量。

应该注意系统内力做功之和可以不为零, 因而可以改变系统的总动能。

例 2-4-3 应用动能定理重解例 2-1-3, 求线下摆 θ 角时珠子的速度。

解 如图 2-4-6 所示, 珠子从 A 下摆 θ 角到 B 的过程中, 合外力对珠子所做

的功为

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B (\mathbf{T} + \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_A^B mg \cos \theta |d\mathbf{r}| = \int_0^\theta mgl \cos \theta d\theta \\ &= mgl \sin \theta \end{aligned}$$

应用动能定理, 得

$$mgl \sin \theta = \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2$$

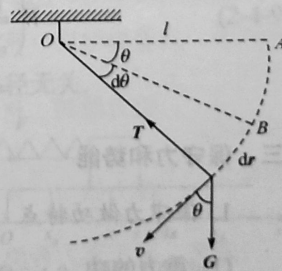


图 2-4-6 单摆的受力

$$v_A = 0, \quad v_B = v$$

得 $v = \sqrt{2gl \sin \theta}$.

例 2-4-4 力 F 作用在质量为 1kg 的质点上, 已知在此力作用下质点的运动方程为 $x = 3t - 4t^2 + t^3 (\text{SI})$, 求在 0 到 4s 内, 力 F 对质点所做的功.

解法一 根据动能定理来求解. 由运动方程可得质点的速度

$$v = \frac{dx}{dt} = 3 - 8t + 3t^2$$

$t = 0$ 时

$$v_0 = 3\text{m/s}$$

$t = 4\text{s}$ 时

$$v = 19\text{m/s}$$

得质点始末状态的动能分别为

$$E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2 = 4.5\text{J}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 180.5\text{J}$$

由质点的动能定理, 可知力 F 对质点所做的功为

$$W = E_k - E_{k0} = 176\text{J}$$

解法二 根据功的定义求解. 由解法一中求得的速度可得加速度为 $a = \frac{dv}{dt} =$

$-8 + 6t$, 则质点受力

$$F = ma = -8 + 6t$$

将运动方程对 t 求全微分

$$dx = (3 - 8t + 3t^2)dt$$

则力 F 对质点做功为

$$\begin{aligned} W &= \int_0^4 F dx = \int_0^4 (-8 + 6t)(3 - 8t + 3t^2) dt \\ &= \int_0^4 (18t^3 - 72t^2 + 82t - 24) dt = 176\text{J} \end{aligned}$$

三、保守力和势能

1. 保守力做功特点

(1) 重力的功.

质量为 m 的质点与地球组成重力相互作用系统, 从 a 点沿曲线 acb 运动到 b

点,如图 2-4-7 所示,在竖直平面内建立直角坐标系与运动平面重合,则元位移为

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$$

重力的元功为

$$dW = \mathbf{mg} \cdot d\mathbf{r} = -mgj \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = -mgdy$$

从点 a 沿 acb 路径运动到点 b , 重力的功为

$$W = \int_{y_1}^{y_2} -mgdy = -mg(y_2 - y_1) = -(mg y_2 - mg y_1) \quad (2-4-8)$$

重力的功只与质点的始末位置有关,而与路径无关.

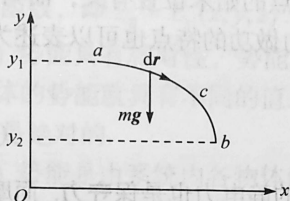


图 2-4-7 重力的功

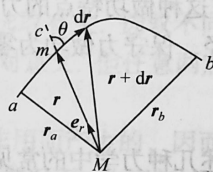


图 2-4-8 引力的功

(2) 万有引力的功.

如图 2-4-8 所示,质量分别为 m 和 M 的两个质点组成引力相互作用系统. m 在引力的作用下,相对 M 从 a 点沿曲线运动到 b 点, m 相对 M 的始末距离分别为 r_a 和 r_b . 当它们相距 r 时,引力大小为 $F = G \frac{Mm}{r^2}$. 任意元位移过程中,引力所做的元功为

$$\begin{aligned} dW &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -G \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} \\ &= -G \frac{mM}{r^2} |\mathbf{e}_r| \cdot |d\mathbf{r}| \cos \theta = -G \frac{mM}{r^2} dr \end{aligned}$$

整个过程中,引力的功为

$$W = \int_{r_a}^{r_b} -G \frac{mM}{r^2} dr = GMm \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) \quad (2-4-9)$$

可见,引力做功只与质点的始末位置有关,而与质点路径无关.

(3) 弹性力的功.

在光滑水平面上放置一个弹簧,弹簧一端固定,另一端与一个质量为 m 的质点相连. 选取弹簧的原长为坐标原点,建立如图 2-4-9 所示的坐标系. 弹簧形变 x 时,弹性力为

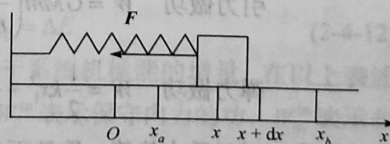


图 2-4-9 弹性力的功

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$$

取任意元过程 $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i}$, 弹性力的元功为

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -kx\mathbf{i} \cdot dx\mathbf{i} = -kxdx$$

物体从点 x_a 运动到点 x_b , 弹性力的功为

$$W = \int_{x_a}^{x_b} -kxdx = -\frac{1}{2}kx_a^2 + \frac{1}{2}kx_b^2 \quad (2-4-10)$$

不难看出, 弹性力做功也只与质点的始末位置有关, 而与路径无关.

综上, 重力、弹性力、万有引力做功只与质点的始末位置有关, 而与路径无关. 把具有这种做功特点的力叫做保守力. 保守力做功的特点也可以表述为: 沿任意闭合路径, 保守力做功为零, 即

$$W = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (2-4-11)$$

除上述几种力学中的常见保守力, 电磁学中的静电力也是保守力. 而摩擦力、非静电力、安培力等都是非保守力, 它们做功都与路径有关.

2. 势能

由保守力做功的特点得知, 保守力的功是相互作用系统相对位置变化的量度. 因此可以引入由相对位置决定的能量——势能, 用 E_p 表示.

势能增量的负值为保守力的功, 即

$$-\Delta E_p = -(E_{pb} - E_{pa}) = W_{ab} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

选取 b 点为势能零点, 即 $E_{pb} = 0$, 则质点在空间某点 a 的势能 E_{pa} 等于质点从该点移动到势能零点的过程中保守力的功, 即

$$E_{pa} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

改写式(2-4-8)~式(2-4-10), 形式如下:

$$\text{重力做功 } W = mgy_1 - mgy_2 = -(mgy_2 - mgy_1)$$

$$\text{引力做功 } W = GMm \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) = - \left[\left(-G \frac{Mm}{r_b} \right) - \left(-G \frac{Mm}{r_a} \right) \right]$$

$$\text{弹力做功 } W = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = - \left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \right)$$

通常, 对于重力势能, 取地面作为零势能点; 对于引力势能, 取无穷远处作为零势能点; 对于弹性势能, 取弹簧的平衡位置处为零势能点. 三种势能形式为

$$\text{重力势能 } E_p = mgy$$

$$\text{引力势能 } E_p = -G \frac{Mm}{r}$$

$$\text{弹性势能 } E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

对势能做如下说明:

(1) 势能是状态的函数, 在保守力作用下, 只要质点的始末位置确定了, 保守力所做的功也就确定了, 而与所经过的路径无关. 势能是坐标的函数, 亦即是状态的函数, 即 $E_p = E_p(x, y, z)$.

(2) 势能具有相对性, 势能大小与势能零点的选取有关. 选取不同的势能零点, 物体的势能就具有不同的值. 所以, 势能具有相对意义. 但任意两点之间的势能之差是绝对的.

(3) 势能是由系统内各物体间存在保守力相互作用而产生的, 因而它是属于系统的. 单独谈单个质点的势能是没有意义的. 通常情况下, 为了叙述方便, 也常说某物体的重力势能、万有引力势能等, 但是读者必须明确势能是属于系统的这一概念.

四、功能原理和机械能守恒

1. 功能原理

质点系的内力一般分为保守内力和非保守内力, 相应地, 内力的功也分为保守内力的功和非保守内力的功, 即

$$W^{\text{in}} = W_{\text{c}}^{\text{in}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}}$$

由质点系的动能定理, 有 $W^{\text{ex}} + W_{\text{c}}^{\text{in}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = E_k - E_{k0}$, 又由于 $W_{\text{c}}^{\text{in}} = -(E_p - E_{p0})$, 则

$$W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = (E_k - E_{k0}) + (E_p - E_{p0}) = (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0})$$

质点系的动能与势能之和定义为质点系的**机械能**, 记为 E , $E = E_k + E_p$. 得到质点系的功能原理, 即

$$W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = E - E_0 = \Delta E \quad (2-4-12)$$

即合外力与非保守内力对质点系所做的功等于系统机械能的增量. 在以上表述中, W^{in} 表示内力的功, W^{ex} 表示外力的功, W_{c}^{in} 表示保守内力的功, $W_{\text{nc}}^{\text{in}}$ 表示非保守内力的功.



功能原理
和机械能
守恒定律

2. 机械能守恒定律

若质点系所受外力的功和非保守内力的功之和为零, 即 $W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = 0$, 由功能原理式(2-4-12)有

$$E = E_k + E_p = \text{恒量} \quad (2-4-13)$$

即系统的机械能保持不变, 称为质点系的机械能守恒定律.

对于一个力学系统而言, 如果外力做功和非保守内力做功不为零, 则系统的机械能不守恒, 这就意味着系统的机械能的增量来自于其他形式的能量, 或机械能将变化为其他形式的能量. 其他形式的能量可能是热能、电磁能、原子能、核能等. 通过大量的观察实践, 人们发现, 孤立系统内发生的任何过程, 系统的总能量保持不变, 能量只能从一种形式转化为另一种形式, 或者从系统的一个物体传递给另一个物体, 这就是能量守恒定律.

例 2-4-5 利用机械能守恒定律再解例 2-1-3. 求线下摆 θ 角时珠子的速率.

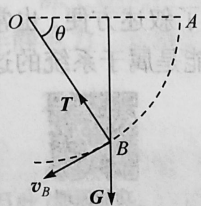


图 2-4-10 单摆的受力

解 如图 2-4-10 所示, 取珠子和地球为研究对象. 以线的悬点 O 所在高度为重力势能零点. 在珠子下落过程中, 绳拉珠子的力 T 总是垂直于珠子的速度 v , 所以此外力不做功, 只有重力做功, 所以机械能守恒. 此系统初态的机械能为零, 线摆下 θ 角时系统的机械能为

$$E_B = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

由于 $h_B = -l \sin \theta$, 由机械能守恒定律, 有

$$-mgl \sin \theta + \frac{1}{2}mv_B^2 = 0$$

可得

$$v_B = \sqrt{2gl \sin \theta}$$

与前面的结果相同. 比较三种方法, 第一种方法直接应用牛顿第二定律, 需要进行积分运算; 第二种方法应用了动能定理, 仍需积分运算求功, 动能可以直接计算; 第三种方法中没有积分, 只需代数计算, 因而计算大大简化了. 处理具体问题时, 可视情况选择合适的定理和定律.

例 2-4-6 如图 2-4-11 所示, 在竖直平面内有一半径为 R 的圆形轨道, 一个质量为 m 的小球, 从 $2R$ 高处的 A 点沿轨道无摩擦滑下, 求:

- (1) 小球在何处脱离轨道?
- (2) 小球脱离轨道后, 上升的最大高度.

解 以小球和地球为研究系统. 小球在运

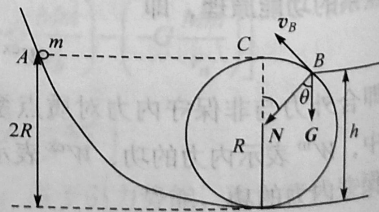


图 2-4-11 轨道运动

动过程中,重力是保守内力,外力压力不做功,所以系统的机械能守恒.可以判断在到达 C 点之前小球脱离轨道.

(1) 设小球在 B 点脱离轨道,在该处轨道的压力为零,即 $N=0$. 由机械能守恒

$$2mgR = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg(R + R\cos\theta)$$

由牛顿第二定律有 $\frac{mv_B^2}{R} = mg\cos\theta$, 得到 $\cos\theta = \frac{2}{3}$, 则

$$h = R + R\cos\theta = R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R$$

(2) 设小球上升到 P 点为最大高度 h' , 由机械能守恒定律,有

$$mgh' + \frac{1}{2}mv_P^2 = 2mgR$$

又因为 $v_P = v_B \cos\theta$, 则

$$h' = 2R - \frac{1}{2}R\cos^3\theta = 2R - \frac{1}{2}R\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{50}{27}R$$

思 考 题

- 2-1 摩擦力一定阻碍物体的运动吗?
- 2-2 “质点受到的力越大,则速度越大”这一说法正确吗?
- 2-3 用天平测出的物体质量,是引力质量还是惯性质量?两汽车相撞时,其撞击力的产生是源于引力质量还是惯性质量?
- 2-4 两个质量相同的物体从同一高度自由下落,与水平地面相碰,一个反弹回去,另一个却贴在地上,问哪一个物体给地面的冲量大?
- 2-5 内力对改变系统的总动量有作用吗?内力对系统内各质点的动量改变有作用吗?
- 2-6 一人用力 F 推地上的木箱,经时间 Δt 未能推动.问推力的冲量为多少?木箱既然受力 F 的冲量,为何动量没变?

习 题

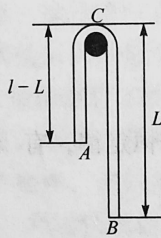
- 2-1 一质量为 10kg 的质点沿 x 轴运动,其所受到的力为 $F = 120t + 40(\text{SI})$, $t = 0$ 时的速度为 6m/s ,求第 3s 末质点的速度.
- 2-2 质量为 m 的小球,在水中所受浮力的大小为常量 F .当它从静止开始沉降时,受到水的阻力为 $f = -kv$ (k 为常量).以沉降开始计时,求小球在水中竖直沉降的速度与时间的关系.
- 2-3 一条长为 l ,质量均匀分布的细链条 AB (题 2-3 图),挂在半径可忽略的光滑钉子 C 上,

开始时处于静止状态. BC 段长为 L ($2l/3 > L > l/2$), 释放后链条将做加速运动, 试求当

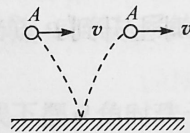
$BC = \frac{2}{3}l$ 时链条的加速度大小和运动速度大小.

2-4 质量 $m = 2\text{kg}$ 的物体沿 x 轴做直线运动, 所受合外力 $F = 10 + 6x^2$ (SI). 如果在 $x = 0$ 处速度 $v_0 = 0$; 试求该物体运动到 $x = 4\text{m}$ 处时速度的大小.

2-5 一质量为 m 的小球 A , 在距离地面某一高度处以速度 v 水平抛出, 触地后反跳. 在抛出 t 秒后小球 A 跳回原高度, 速度仍沿水平方向, 速度大小也与抛出时相同, 如题 2-5 图所示. 求小球 A 与地面碰撞过程中, 地面给它的冲量.



题 2-3 图



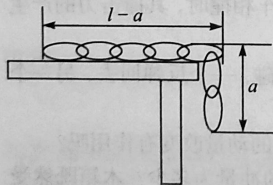
题 2-5 图

2-6 质量为 20g 的子弹沿 x 轴正向以 500m/s 的速率射入一木块后, 与木块一起仍沿 x 轴正向以 50m/s 的速率前进, 求此过程中木块所受冲量的大小.

2-7 质量为 m 的子弹以速度 v_0 水平射入沙土中, 设子弹所受阻力与速度反向, 大小与速度成正比, 比例系数为 k , 忽略子弹的重力, 求: (1) 子弹速度随时间变化的函数式; (2) 子弹进入沙土的最大深度.

2-8 一人从 10m 深的井中提水, 开始时桶中装有 10kg 的水, 桶的质量为 1kg . 由于水桶漏水, 每升高 1m 漏去 0.2kg 的水. 求把水桶匀速地从井中提到井口, 人所做的功.

2-9 某质点在力 $F = 4 + 5x$ (SI) 的作用下沿 x 轴做直线运动, 求从 $x = 0$ 移动到 $x = 10\text{m}$ 的过程中, 力 F 所做的功.



题 2-11 图

2-10 一质点在两恒力共同作用下, 位移为 $\Delta\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ (SI); 在此过程中, 动能增量为 24J , 已知其中一恒力 $\mathbf{F}_1 = 12\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ (SI), 则另一恒力所做的功为多少.

2-11 一链条总长度为 l , 质量为 m , 放在桌面上靠边处 (题 2-11 图), 并使其一端下垂的长度为 a . 设链条与桌面之间的动摩擦系数为 μ , 链条由静止开始运动. 求:

- (1) 到链条离开桌边的过程中, 摩擦力对链条做的功;
- (2) 链条离开桌边时的速率.

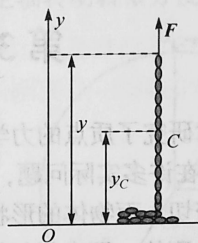
2-12 已知地球质量为 M , 半径为 R , 质量为 m 的火箭从地面上升到距离地面高度为 $3R$ 处, 求在此过程中, 地球引力对火箭做的功.

2-13 在倾角为 30° 的光滑斜面上 (题 2-13 图), 质量为 1.8kg 的物体由静止开始下滑, 到达底部时将一沿斜面放置的劲度系数 $k = 2000\text{N/m}$ 的弹簧压缩了 0.20m 后瞬时静止. 求:

- (1) 物体瞬时静止前在斜面上滑过的路程;
- (2) 它与弹簧开始接触时的速率.

A diagram showing a block of mass m on an inclined plane. The incline makes an angle of 30° with the horizontal. A spring is attached to the block and the incline. A segment of the spring is labeled 0.2m .

题 2-13 图



题 2-14 图

第3章 刚体力学基础

前两章研究了质点的力学问题，在这些问题中我们没有考虑实际物体的形状和大小。但在许多实际问题，如建筑、机械等工程领域中，物体的运动与其形状、大小关系密切，而物体的形状、大小的变化又很小，可以忽略，因此引入一个理想模型——**刚体**，即在任何情况下形状和大小都不发生变化的物体。刚体由连续分布的大量质点(质元)组成，因此刚体又被形象地称为“冻结”的质点系。例如，在研究火车车轮上各点的速度和加速度时，又如在研究飞轮的运动规律时，我们常把车轮、飞轮看作刚体。本章首先在引入刚体概念的基础上，讨论描述刚体运动状态的物理量，并进而分析刚体运动状态改变的原因及其在运动过程中所遵循的规律。

3-1 刚体的平动和定轴转动

一、刚体的平动

如果运动过程中，刚体上任意一条直线在各个时刻的位置都相互平行，这种

运动就称为刚体的**平动**，如图 3-1-1 所示。电梯的升降、活塞的往返、刨床刀具的运动等都是刚体平动的例子。显然，刚体平动时，其上各点运动状态相同，任意质点(质元)的运动都可以用来表示刚体的平动，一般选用质心。刚体平动的力学问题就是质点力学问题。

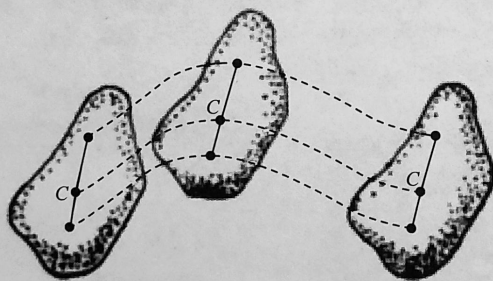


图 3-1-1 刚体的平动

二、刚体的定轴转动

刚体运动时，若其上各点都绕同一条直线做圆周运动，这种运动称为刚体的**转动**，这条直线称为**转轴**。任何复杂的刚体运动都可以看作是平动和转动的叠加。若转轴在所选参考系中的位置和方向始终不变，该转动就是**定轴转动**。例如，机器上齿轮的转动、门窗的启闭、钟摆的运动等都是定轴转动。

刚体定轴转动时，轴上各点都保持不动，轴外各质元都在垂直于转轴的平面

(称为刚体的转动平面)内做半径不同的圆周运动, 在 Δt 时间内转过的弧长不同, 所以各质元的线量(位移、速度、加速度)各不相同, 而各质元的角量(角位移、角速度、角加速度)完全相同. 因此用角量描述刚体的定轴转动就很方便了.

考察过 P 点的转动平面, 如图 3-1-2 所示. 当质元 P 在 Oxy 平面内绕 Oz 轴做逆时针转动时, 设 t 时刻矢径 r 与 Ox 轴的夹角为 θ , $t+dt$ 时刻的夹角为 $\theta+d\theta$, 质点 P 到转轴的距离为 r . θ 称为 t 时刻的角位置, $d\theta$ 称为 dt 时间内的角位移. 显然, θ 是时间 t 的函数, 即 $\theta(t)$.

角位置 $\theta(t)$ 随时间的变化率称为角速度, 用 ω 表示, 则有

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (3-1-1) \quad \text{图 3-1-2 刚体的定轴转动}$$

ω 的单位为弧度每秒(rad/s), 并约定逆时针转动为角速度的正方向, 角速度描述了刚体转动的快慢. 定义角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$, 用右手螺旋定则判断其方向, 四指绕向为转动方向, 大拇指方向为 $\boldsymbol{\omega}$ 方向.

角速度 ω 随时间的变化率称为角加速度, 用 α 表示, 则有

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3-1-2)$$

α 的单位称为弧度每二次方秒(rad/s^2). 角加速度描述了刚体角速度变化的快慢.

三、线量与角量的关系

由图 3-1-2 容易看出

$$ds = r d\theta \quad (3-1-3)$$

则有 $v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega$, 即

$$v = r\omega \quad (3-1-4)$$

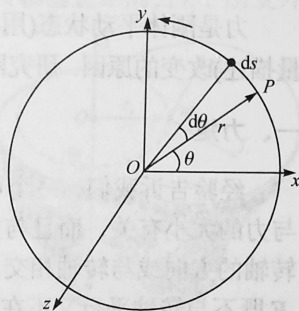
利用角速度矢量, 可进一步以矢量矢积表示刚体上 P 点的线速度 $\boldsymbol{v}$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的关系, 即

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \quad (3-1-5)$$

加速度 a_t 、法向加速度 a_n 与角量的关系分别为

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha, \quad a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \quad (3-1-6)$$

以上公式称为线量与角量的关系.



3-2 力矩 转动定律 转动惯量

力是刚体平动状态(用动量描述)改变的原因, 力矩则是刚体转动状态(用角动量描述)改变的原因. 研究刚体定轴转动动力学则须引入力矩和转动惯量的概念.

一、力矩

经验告诉我们, 一个可绕定轴转动的刚体, 外力对它转动状态的影响, 不仅与力的大小有关, 而且与力的方向及力的作用点的位置有关. 如果力的方向沿着转轴的方向或与转轴相交, 无论如何都不能改变刚体的转动状态. 如果所施外力 $\boldsymbol{F}$ 既不与转轴平行又不在转动平面内(图 3-2-1(a)), 对定轴转动有作用的仅仅是该力在转动平面内的分量 $\boldsymbol{F}_1$. 这样只考虑在转动平面内的力就可以了.

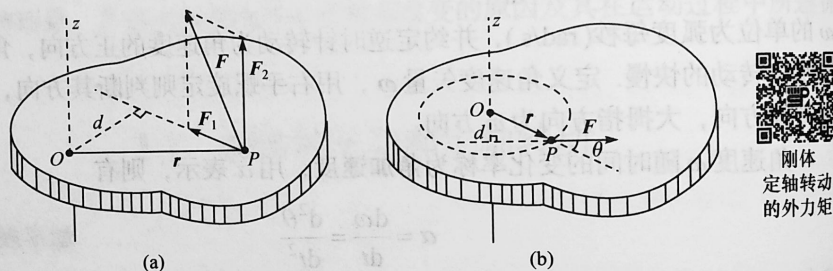


图 3-2-1 力矩

设 $\boldsymbol{F}$ 在转动平面内(图 3-2-1(b)), 通过 P 点作用于刚体, $\boldsymbol{r}$ 为 P 点的位矢. 位矢 $\boldsymbol{r}$ 与力 $\boldsymbol{F}$ 的矢积定义为力 $\boldsymbol{F}$ 对转轴 Oz 的力矩, 用 $\boldsymbol{M}$ 表示, 即

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \quad (3-2-1)$$

力矩是矢量, 既有大小, 又有方向. 其大小为

$$M = Fr \sin \theta \quad (3-2-2)$$

θ 为 $\boldsymbol{F}$ 、 $\boldsymbol{r}$ 的夹角. 力矩的方向为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 矢积($\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$)的方向, 即满足右手螺旋定则, 显然力矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向沿着转轴 Oz , 定轴转动时, 通常把力矩方向与刚体转动的右手螺旋前进方向一致的力矩作为正的, 反之则为负值. 力矩的单位是牛顿·米($\text{N} \cdot \text{m}$).

当有 n 个力同时作用于刚体上, 且在同一转动平面内时, 总力矩的量值应等于这 n 个外力对转轴产生的分力矩的代数和, 其和为正值时, 表明总力矩方向与右手螺旋的前进方向一致, 反之则相反.

二、转动定律

如图 3-2-2 所示, 刚体绕定轴 Oz 转动, 某时刻 t , 角速度为 ω , 角加速度为 α . 选择定轴转动的刚体上第 i 个质元, 其质量为 Δm_i , 距转轴垂直距离为 r_i , 所受外力(来自刚体以外的一切力的合力)为 F_i , 内力(来自刚体内各质元对质元 i 作用力的合力)为 f_i , 且 r_i , f_i , F_i 在同一转动平面内. 刚体绕 Oz 轴转动过程中, 质点 i 以 r_i 为半径做圆周运动, 速度为 v_i , 根据牛顿第二定律, 有

$$F_i + f_i = \Delta m_i \frac{dv_i}{dt}$$

切向分量式为

$$F_{it} + f_{it} = \Delta m_i a_{it} = \Delta m_i r_i \alpha$$

方程两边乘以 r_i , 并对整个刚体求和, 则有

$$\sum_i F_{it} r_i + \sum_i f_{it} r_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \alpha$$

等式左边第一项为所有作用在刚体上的外力对 Oz 轴的力矩和, 称为合外力矩, 用 M 表示; 第二项为所有内力对 Oz 轴的力矩和, 由于内力总是成对出现, 而且每对内力大小相等、方向相反, 且在一条作用直线上, 因此所有内力矩之和为零. 则上式变为

$$M = \sum_i (\Delta m_i r_i^2) \alpha$$

式中 $\sum_i (\Delta m_i r_i^2)$ 称为刚体对 Oz 轴的转动惯量, 记为

$$J = \sum_i (\Delta m_i r_i^2) \quad (3-2-3)$$

J 的单位是 $\text{千克} \cdot \text{米}^2 (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$. 由此得到刚体绕定轴转动的转动定律

$$M = J \alpha \quad (3-2-4)$$

即刚体定轴转动的角加速度与它所受的合外力矩成正比, 与刚体的转动惯量成反比, 这一定律简称为转动定律. 它是刚体定轴转动动力学的基本方程.

把转动定律与牛顿第二定律作形式上的比较: 刚体所受的合外力矩与质点所受的合力相对应, 刚体的角加速度与质点的加速度相对应, 那么刚体的转动惯量就与质点的质量相对应. 由此可以看出, 转动惯量是刚体对确定轴转动惯性大小的量度, 合外力矩是改变刚体转动状态的原因.

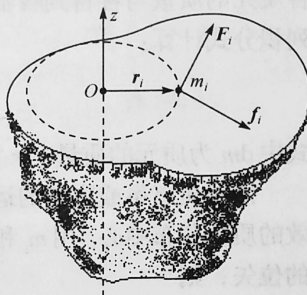


图 3-2-2 转动定律



刚体定轴
转动定律

三、转动惯量

由转动惯量的定义 $J = \sum_i (\Delta m_i r_i^2)$ 可知, 刚体对定轴的转动惯量等于组成刚体各质元的质量与各自到转轴距离平方的乘积之和. 当刚体质量连续分布时可由下列积分式计算:

$$J = \int r^2 dm \quad (3-2-5)$$

式中 dm 为质元的质量, r 为质元到转轴的距离.

研究质点系或刚体的运动时, 常常用到质心的概念. 质心是质点系或刚体等效的质量分布中心. 用 m_i 和 $\mathbf{r}_i$ 表示质点系中任意质点的质量和位矢, $\mathbf{r}_C$ 表示质心的位矢, 则

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad (3-2-6)$$

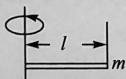
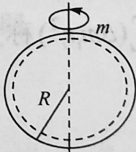
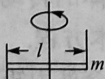
对于质量连续分布的刚体, 其质心为

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{M} \quad (3-2-7)$$

式中 M 是质点系或刚体的总质量.

表 3-2-1 列举了几种常见形状刚体的转动惯量.

表 3-2-1 几种刚体的转动惯量

 均匀细杆, 转轴过杆一端垂直于杆 $J = \frac{1}{3} ml^2$	 均质薄圆环(或均质薄圆桶), 转轴过环心垂直于环面 $J = mR^2$	 均质薄球壳, 转轴过球壳中心 $J = \frac{2}{3} mR^2$
 均匀细杆, 转轴过杆中心垂直于杆 $J = \frac{1}{12} ml^2$	 均质圆盘(或均质圆柱), 转轴过盘心垂直于盘面 $J = \frac{1}{2} mR^2$	 均质球体, 转轴过球心 $J = \frac{2}{5} mR^2$

例 3-2-1 求质量为 m 、长为 l 的均匀细棒对下面三种转轴的转动惯量:

- (1) 转轴通过棒的中心并与棒垂直;
- (2) 转轴通过棒的一端并与棒垂直;
- (3) 转轴通过棒上距中心为 h 的一点并与棒垂直.

解 如图 3-2-3 所示, 在棒上离轴 x 处, 取一长度元 dx , 如棒的质量线密度为 λ , 该长度元的质量为

$$dm = \lambda dx$$

- (1) 当转轴通过中心并与棒垂直时, 有

$$J_0 = \int r^2 dm = \int_{-l/2}^{+l/2} \lambda x^2 dx = \frac{\lambda l^3}{12}$$

因 $\lambda l = m$, 代入得 $J_0 = \frac{1}{12} ml^2$.

- (2) 当转轴通过棒的一端 A 并与棒垂直时, 有

$$J_A = \int_0^l \lambda x^2 dx = \frac{\lambda l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

- (3) 当转轴通过棒上距中心为 h 的一点 B 并与棒垂直时, 有

$$J_B = \int_{-l/2}^{+l/2} \lambda (x+h)^2 dx = \frac{ml^2}{12} + mh^2$$

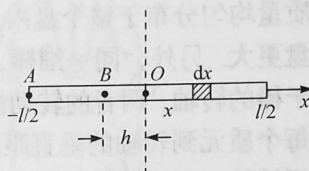


图 3-2-3

例 3-2-2 求圆盘对于通过中心并与盘面垂直的转轴的转动惯量. 设圆盘的半径为 R , 质量为 m , 密度均匀.

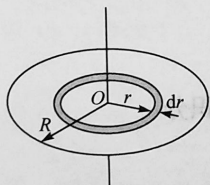


图 3-2-4 例 3-2-2 图

解 如图 3-2-4 所示, 设圆盘的质量面密度为 σ , 在圆盘上取一半径为 r 、宽度为 dr 的圆环, 环的面积为 $2\pi r dr$, 环的质量 $dm = \sigma 2\pi r dr$. 可得

$$J = \int r^2 dm = \int_0^R 2\pi \sigma r^3 dr = \frac{\pi \sigma R^4}{2} = \frac{1}{2} m R^2$$

平行轴定理 刚体对与过质心轴平行的任一轴的转动惯量 J 等于对过质心 C 轴的转动惯量与二轴间垂直距离 d 的平方和刚体质量乘积之和, 即

$$J = J_C + md^2 \quad (3-2-8)$$

式中, m 表示刚体的总质量, d 表示两平行轴间的垂直距离.

正交轴定理 过薄板状刚体上任意一点且垂直于板面的轴的转动惯量等于过板面上同一点的两条正交轴的转动惯量之和, 若板位于 xOy 平面, 则

$$J_z = J_x + J_y \quad (3-2-9)$$

影响转动惯量大小的因素归纳起来有三个: ①刚体的总质量; ②质量对轴的分布; ③转轴的位置. 第一个因素容易理解, 至于第二个因素, 看这样一个例子,

对中心轴, 质量相同、半径也相同的圆盘和圆环. 两者的质量分布不同, 圆盘的质量均匀分布于整个盘内, 圆环质量集中分布在边缘, 所以圆环的转动惯量比圆盘更大. 另外, 同一细棒, 对通过中心且垂直于棒的转轴, 与对通过棒端且垂直于棒的转轴, 两者的转动惯量是大不相同的, 后者较大. 这是因为轴的位置不同, 每个质元到转轴的垂直距离 r_i 也就不同, 因而转动惯量大小不同. 所以, 只有指明转轴, 刚体的转动惯量才是确定的.

转动惯量的这些性质, 在日常生活和工程实际问题中随时随地都可以观察到. 例如, 为了使机器工作时运转平稳(当然还有储能的作用), 常在回转轴上装置飞轮, 一般这种飞轮的质量都非常大, 而且飞轮的质量绝大部分都集中在轮的边缘上, 所有这些措施都是为了增大飞轮对转轴的转动惯量. 又如为了减少转动惯量以提高仪器的灵敏度, 各种指针式仪表的指针都采用密度较小的轻型材料制成.

四、转动定律应用举例

例 3-2-3 已知某飞轮转动惯量为 J , 受到的制动力矩为 $M = -K\omega^2$, K 为常量. 在 $t=0$ 时刻, 其角速度为 ω_0 , 求:

- (1) 当 $\omega = \omega_0/3$ 时刻的角加速度 α ;
- (2) 角速度由 ω_0 减小到 $\omega_0/3$ 所需时间 T .

解 (1) 根据转动定律, $\alpha = \frac{M}{J} = \frac{-K\omega^2}{J}$, 将 $\omega = \omega_0/3$ 代入, 得到角加速度

$$\alpha = -\frac{K\omega_0^2}{9J}.$$

(2) 根据转动定律, $-K\omega^2 = J \frac{d\omega}{dt}$, 即 $-\frac{K}{J} dt = \frac{d\omega}{\omega^2}$, 两边积分

$$\int_0^T -\frac{K}{J} dt = \int_{\omega_0}^{\omega_0/3} \frac{d\omega}{\omega^2}$$

整理得

$$T = \frac{2J}{K\omega_0}$$

例 3-2-4 如图 3-2-5 所示, 已知滑轮质量为 m , 半径为 R , 一轻质绳跨过滑轮两边各系一物体, 质量分别为 m_1 , m_2 ($m_2 > m_1$), 绳与轮间无滑动, 不计轮与轴间摩擦. 试求绳中张力, 物体 m_1 , m_2 的加速度, 滑轮的角加速度.

解 根据题意, 对 m , m_1 , m_2 各物体分别进行受力分析, 如图 3-2-6 所示. 从图中可以看出, 轴对轮的支持力 N 对转轴的力矩为零. m_1 端绳中张力设为 T_1 , T_1' ($T_1 = T_1'$), m_2 端绳中张力设为 T_2' , T_2 ($T_2 = T_2'$). 滑轮和物体 m_1 , m_2 通过细绳发生物理联系, 对滑轮应用转动定律(取逆时针转动方向为正), 对 m_1 , m_2 应用牛顿

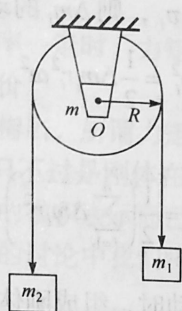


图 3-2-5 例 3-2-5 图

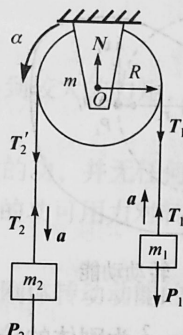


图 3-2-6 受力分析

第二定律, 得

$$T_2 R - T_1 R = \frac{1}{2} m R^2 \alpha$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$

$$T_1 - m_1 g = m_1 a$$

其中, $a = R\alpha$, 解上述方程得

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}, \quad \alpha = \frac{(m_2 - m_1)g}{\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m\right)R}$$

$$T_1 = \frac{\left(2m_1 m_2 + \frac{mm_1}{2}\right)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}, \quad T_2 = \frac{\left(2m_1 m_2 + \frac{mm_2}{2}\right)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$$

讨论: 如果不计滑轮的质量, 即令 $m = 0$, 则有

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2}, \quad T_1 = T_2 = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

如果 $m \neq 0$, 但 $m_1 = m_2$, 绳中的张力 T_1, T_2 关系如何? 或者 $m_1 \neq m_2$, 且轮轴间存在摩擦阻力矩为 M_f , T_1, T_2 关系又如何?

刚体
转动例题

3-3 刚体定轴转动的功和能

一、刚体定轴转动的动能

如图 3-3-1 所示, 刚体绕定轴 O (垂直于纸面) 转动, 角速度大小为 ω . 将刚体

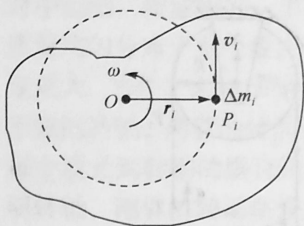


图 3-3-1 转动动能

视为由 n 个质点(质元)组成的系统, 设第 i 个质元 Δm_i 的位矢为 r_i 、速度为 v_i , 则 Δm_i 的动能为

$$E_{ki} = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

整个刚体的动能为

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

其中, $\sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2$ 为刚体的转动惯量. 所以刚体定轴转动时, 组成刚体的 n 个质点的总的动能即为刚体的转动动能, 即

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (3-3-1)$$

将刚体绕定轴转动的动能与质点的动能 $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ 加以比较, 再次看出转动惯量对应于质点的质量, 即转动惯量是刚体绕轴转动惯性的量度. 由于转动惯量与轴的位置有关, 所以转动动能也与轴的位置有关.

二、力矩的功

如图 3-3-2 所示, 刚体绕定轴 O (垂直于纸面) 转动, 角速度大小为 ω . 在外力 F 作用下 P 点实现位移 $d\mathbf{r}$, P 点的位矢为 $\mathbf{r}$ ($\mathbf{r}$, $\mathbf{F}$ 均在同一转动平面内), $d\mathbf{r}$ 对应的角位移为 $d\theta$, 则力 F 在位移 $d\mathbf{r}$ 内做的元功为

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cdot \sin \varphi r d\theta = M d\theta$$

亦即

$$dW = M d\theta \quad (3-3-2)$$

可见, 外力对刚体做的元功等于相应力矩与角位移的乘积, 当力矩 M 与 $d\theta$ 方向一致时, dW 为正, 否则为负. 如果刚体的角位置从 θ_1 转到 θ_2 , 则力矩所做的功为

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (3-3-3)$$

如果刚体受到几个外力作用, 则 M 为合外力矩.

单位时间内, 力矩所做的功称为力矩的功率, 用 P 表示. 根据力矩功率的定义, 将式(3-3-2)两端同除以 dt , 得

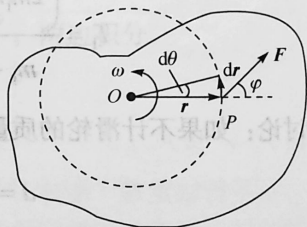


图 3-3-2 力矩的功

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega \quad (3-3-4)$$

可见, 当功率一定时, 力矩与角速度成反比, 要想得到较大的力矩, 必须以降低角速度为代价.

有必要指出, 所谓力矩的功, 实质上还是力所做的功, 并无任何关于力矩功的新定义. 只不过是刚体在定轴转动过程中, 力所做的功可用力对转轴的力矩与刚体角位移的乘积表示而已.

从下面的讨论中我们将会看到, 力矩的功将引起刚体转动动能的变化.

三、刚体定轴转动动能定理

将式(3-2-4)写成

$$M = J \frac{d\omega}{dt}$$

上式两端同乘 $d\theta$, 得 $Md\theta = J \frac{d\theta}{dt} d\omega = J\omega d\omega$, 即

$$Md\theta = J\omega d\omega$$

两边积分

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega d\omega$$

得到刚体定轴转动动能定理

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 \quad (3-3-5)$$

即合外力矩对刚体所做的功, 等于刚体转动动能的增量.

四、刚体的重力势能

如果刚体受到保守力的作用, 也可以像质点一样引入势能的概念. 重力场中的刚体就具有一定的重力势能, 其重力势能的量值就是它的各个质元重力势能的总和.

以刚体和地球组成系统, 则高度为 h_i 的质元 Δm_i , 其重力势能为

$$E_{pi} = \Delta m_i g h_i$$

则整个刚体的重力势能为

$$E_p = \sum E_{pi} = \sum \Delta m_i g h_i = mg \frac{\sum \Delta m_i h_i}{m}$$

m 为刚体的质量, 由质心定义可知 $\frac{\sum \Delta m_i h_i}{m} = h_c$ 为质心的高度, 则

$$E_p = mgh_C$$

(3-3-6)

刚体势能由质心的高度决定. 这一结果表明, 刚体的重力势能和它的全部质量集中在质心时所具有的势能一样.

对于包括有刚体的系统, 如果在运动过程中, 只有保守内力做功, 则这个系统的机械能也守恒.

例 3-3-1 一均质细杆, 长为 l , 质量为 m , 可绕 O 轴(垂直于纸面)转动. 开始时, 杆垂直于地面静止于 A 位置, 如图 3-3-3 所示. 微有扰动, 在重力矩的作用下开始绕定轴 O 转动, 当转到 B 位置时对应角位置为 θ . 求此时角速度的大小 ω_B (轴间摩擦力矩忽略不计).

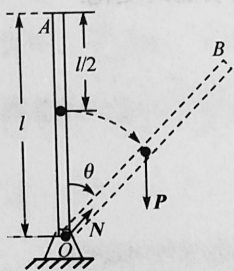


图 3-3-3 例 3-3-1 图

解 杆在转动过程中, 轴间正压力 N 过转轴, 对转轴的力矩为零, 只有重力矩做功. 重力矩为 θ 的函数, 其大小可写成 $M = (1/2)mgl \sin \theta$, 方向与角速度方向一致. 所以在此过程中重力矩做正功. 根据转动动能定理

$$\int_0^\theta M d\theta = \frac{1}{2} J \omega_B^2 - \frac{1}{2} J \omega_A^2 \quad (1)$$

上式左端合外力矩做功为

$$W = \int_0^\theta M d\theta = \int_0^\theta \frac{1}{2} mgl \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} mgl(1 - \cos \theta) \quad (2)$$

代入式(1), 考虑到 $\omega_A = 0$, 解出 B 位置的角速度大小为

$$\omega_B = \left[\frac{3g(1 - \cos \theta)}{l} \right]^{1/2}$$

例 3-3-2 如图 3-3-4 所示为半径为 R 、质量为 M 的滑轮, 其上缠绕柔软轻质细绳(不可伸长), 下系一质量为 m 的物体. 最初 m 静止于 A 位置, 轮静止不动. 求当 m 下落 h_0 高度后到达 B 位置的速度大小 v_B .

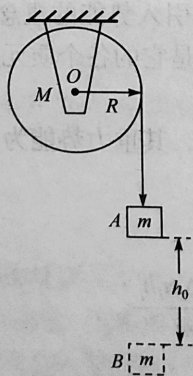


图 3-3-4 例 3-3-2 图

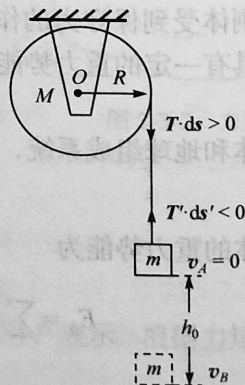


图 3-3-5 受力分析

解 如图 3-3-5 所示, 选取物体 m 、滑轮 M 、地球构成系统. 物体 m 由 A 到 B 的过程中, 绳不可伸长, T 与 T' 做功之和为零, 没有外力做功, 系统机械能守恒, 故有

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega_B^2$$

其中 $v_B = R\omega_B$, 得

$$v_B = 2\left[\frac{mgh_0}{M+2m}\right]^{1/2}$$

3-4 角动量和角动量守恒定律

物体平动时, 用物体的动量足以描述物体的运动状态. 但在研究物体转动问题时, 我们发现虽然物体在转动, 若按质点系动量的定义, 总动量可能为零. 这说明仅用动量来描述物体的机械运动是不够的. 因此有必要引进另一物理量——角动量, 也称动量矩.

一、质点的角动量和角动量守恒定律

1. 质点的角动量

质点 m 对于某一惯性系的动量为 p , m 对(该惯性系)某定点 O 的位置矢量为 r (图 3-4-1(a)), 定义 r 与 p 的矢积为质点 m 对 O 点的角动量. 角动量用 L 表示, 其表达式为

$$L = r \times p \quad (3-4-1)$$

角动量是一矢量, 其大小为 $L = rps \sin \theta = mvd$ (其中 θ 为 r 与 p 之间的夹角, d 为 O 点到质点速度方向的延长线的垂直距离), 其方向与矢积 $(r \times p)$ 一致, 亦即满足右手螺旋定则. (注意: 在图 3-4-1(b)中, $L = r \times p$, $L' = r' \times p$, 而 $L \neq L'$. 即同一质点对不同参考点, 其角动量是不同的). 角动量的单位是千克二次方米每秒 ($\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$).

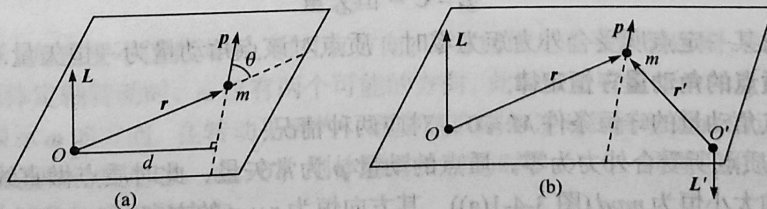


图 3-4-1 质点的角动量

2. 质点的角动量定理

是什么引起了角动量的变化呢?

式(3-4-1)对时间 t 求导

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

$$\frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

上式右边第一项 $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$, 第二项 $\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$ 为质点受的合外力矩, 于是

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (3-4-2)$$

即质点所受的合外力矩等于质点角动量的变化率. 这一结论称为质点的角动量定理(这是它的微分形式). 注意: 质点所受力矩和质点角动量均是对同一惯性系中的同一定点而言的, 其中 $\mathbf{M}$ 的方向与 $d\mathbf{L}$ 一致. 由式(3-4-2)得

$$\mathbf{M}dt = d\mathbf{L}$$

对上式积分得

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}dt = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 \quad (3-4-3)$$

上式中 $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ 分别为质点在 t_1 , t_2 时刻对定点的角动量, $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}dt$ 称为力矩 $\mathbf{M}$ 在 $(t_2 - t_1)$ 时间内对该定点的冲量矩. 式(3-4-3)的物理意义是: 质点所受合外力矩的冲量矩等于质点角动量的增量. 这一结论称为质点的角动量定理(这是它的积分形式).

由式(3-4-3)可以看出, 冲量矩和角动量具有相同的量纲. 量纲虽相同, 但二者物理意义却不同. 式(3-4-3)左端的冲量矩是力矩对时间的积累效应, 是角动量变化的原因. 式(3-4-3)右端的角动量变化量是受到冲量矩作用的结果.

3. 质点的角动量守恒定律

对于式(3-4-2), 若 $\mathbf{M} = 0$, 则 $d\mathbf{L}/dt = 0$, 即

$$\mathbf{L} = \mathbf{C} = \text{恒矢量} \quad (3-4-4)$$

当质点对某一定点所受合外力矩为零时, 质点对该点角动量为—恒矢量. 这一结论称为质点的角动量守恒定律.

质点角动量的守恒条件 $\mathbf{M} = 0$, 对应两种情况:

(1) 质点所受合外力为零, 质点的动量 $\mathbf{p}$ 为常矢量, 此时质点做直线运动, 角动量的大小恒为 mvd (图 3-4-1(a)), 其方向恒为 $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ 的方向.

(2) 质点所受合外力 $F \neq 0$, $M = 0$. 此时质点在运动过程中所受的力始终指向(或背离)某一定点, 这种始终指向(或背离)某一定点的力称为有心力, 此定点称为力心. 在太阳系中, 如果把太阳视为一个定点, 地球在绕太阳运动过程中它所受到的太阳(万有引力作用)引力, 这个始终指向定点(太阳)的力就是有心力(图 3-4-1). 有心力与位置矢量 r 始终保持共线, 所以有 $M = r \times F \equiv 0$, 质点角动量是守恒的. 太阳系中的行星绕太阳的运动就是这样.

4. 质点的角动量守恒应用举例

例 3-4-1 地球(质量 m)在绕太阳(质量 M)(椭圆轨迹)运动过程中(图 3-4-2), 图中 A 为近日点, 已知其位置为 r_1 , 速度为 v_1 . B 为远日点, 已知其位置为 r_2 . 求 B 点速率 v_2 .

解 地球在绕太阳运动过程中, 受有心力作用, 由上述讨论可知, 地球对(太阳)定点的合外力矩为零. 根据角动量守恒有

$$L_A = L_B$$

由于 r_1 垂直于 v_1 , r_2 垂直于 v_2 . 因此上式可写成

$$mv_1 r_1 = mv_2 r_2$$

由上式可得 B 点速率 v_2 为

$$v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2}$$

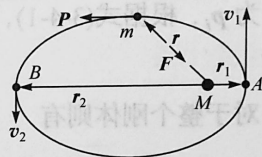


图 3-4-2 有心力



角动量
守恒例题

二、刚体绕定轴转动的角动量和角动量守恒定律

1. 刚体绕定轴转动的角动量

首先给出角速度矢量和角加速度矢量. 刚体在转动过程中, 无限小角位移 $d\theta$ 是矢量, 称为角位移矢量, 记为 $d\theta$. 同理, 角速度、角加速度均为矢量, 分别记为 ω 、 α . 因此可写成

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (3-4-5)$$

这样, 角速度不仅有大小, 而且有方向, 其方向满足右手螺旋定则, 如图 3-4-3 所示. 刚体定轴转动时, ω 仅有两个可能的方向, 此时矢量可简化为标量, 用 ω 的正负来表示 ω 的方向. 在转动平面内, 通常选取刚体逆时针转动为 ω 的正方向, 即当刚体逆时针转动时, $\omega > 0$; 刚体顺时针转动时, $\omega < 0$. 同理可用 α 的正负表示刚体的角加速度的方向.

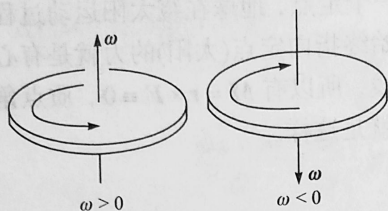


图 3-4-3 角速度矢量

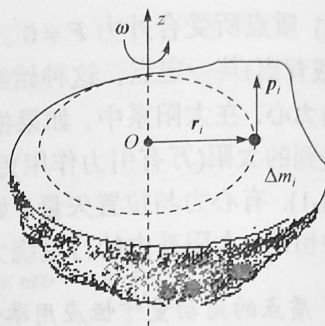


图 3-4-4 刚体的角动量

刚体绕定轴转动时(图 3-4-4), 其上任意质点的运动轨迹均为圆形, 各质点的角速度 ω 均相同. 设第 i 个质点 Δm_i 对 Oz 轴位置矢量为 r_i (r_i 垂直于转轴), 其动量为 p_i . 根据式(3-4-1), 第 i 个质点 Δm_i 对 Oz 轴的角动量可写成

$$L_i = r_i \times p_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

对于整个刚体则有

$$L = \sum_i L_i = \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega$$

组成刚体的所有质点的角动量方向都相同, 即

$$L = J\omega \quad (3-4-6)$$

式(3-4-6)表明, 刚体绕定轴转动时, 刚体的角动量等于刚体的转动惯量与角速度的乘积.

2. 刚体绕定轴转动的角动量定理

由于刚体可以视为一个彼此间距离保持不变的质点系, 式(3-4-2)即 $M = \frac{dL}{dt}$ 对绕定轴转动的刚体也同样适用, 只不过刚体的角动量是各质点的角动量的总和.

因 $M = \frac{dL}{dt}$, 则分离变量后两边积分得

$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = L_2 - L_1 \quad (3-4-7)$$

其中 L_1 、 L_2 分别为 t_1 、 t_2 时刻刚体的角动量, $\int_{t_1}^{t_2} M dt$ 为合外力矩 M 在 $(t_2 - t_1)$ 时间内对刚体的冲量矩. 式(3-4-7)的物理意义是: 刚体所受合外力矩的冲量矩等于刚体角动量的增量(刚体所受力矩和刚体角动量均是对同一定轴而言的), 这一结论称为刚体的角动量定理.

3. 刚体绕定轴转动的角动量守恒定律

由式 $M = \frac{dL}{dt}$, 若 $M = 0$, 则 $dL/dt = 0$, 亦即

$$L = C = \text{恒矢量} \quad (3-4-8)$$

当刚体对某一定轴所受合外力矩为零时, 刚体对该轴的角动量为—恒矢量, 这一结论称为刚体的角动量守恒定律.

需要指出, 式(3-4-8)对非刚体的情况也适用, 这一点通过下面的例题来作说明.

4. 刚体的角动量守恒定律应用举例

例 3-4-2 一人手持一对哑铃, 开始时双臂伸平(图 3-4-5(a)), 并以角速度 ω_0 绕竖直轴旋转. 当他双臂向内合拢至图 3-4-5(b)位置时, 角速度为 ω . 试比较图示中 (a)、(b) 两状态角速度的大小, 并讨论.

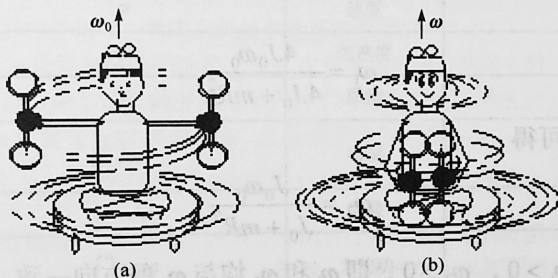


图 3-4-5 例 3-4-2 图

解 选取人、哑铃及座下转盘为一个系统, 开始时, 三者角速度相同均为 ω_0 . 设系统初态转动惯量为 J_0 , 末态转动惯量为 J , 角速度为 ω , 则系统初态角动量为 $L_0 = J_0 \omega_0$, 末态角动量为 $L = J \omega$. 在上述变化过程中, 系统对竖直转轴的合外力矩 $M = 0$, 因此, 角动量守恒

$$J_0 \omega_0 = J \omega \quad \text{或} \quad \omega = \frac{J_0}{J} \omega_0$$

由于 J_0 大于 J , 故 ω 大于 ω_0 , 该例表明, 在系统角动量守恒的情况下, 可以通过改变转动惯量, 实现角速度的变化. 例 3-4-2 的适用范围很广, 体操、跳水运动员在空中通过身体、手臂或下肢等部位的伸屈、蜷缩来改变自身的转动惯量, 以达到改变角速度的目的.

例 3-4-3 如图 3-4-6 所示, 圆盘绕竖直轴 Oz 旋转, 半径为 R , 绕轴的转动惯量为 J_0 , 最初以角速度 ω_0 绕 Oz 轴旋转. 现有一只质量为 m 的小猫由某一高度竖直向下落到盘上的 a 点, a 点与轴的距离为 $R/2$. 然后, 小猫沿半径方向,

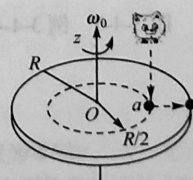


图 3-4-6 例 3-4-3 图

由 a 点爬到盘的边缘. 小猫可视为质点, m , R , J_0 , ω_0 为已知量. 求:

(1) 小猫刚落到盘上, 猫、盘共同转动的角速度 ω_1 ;

(2) 爬到盘的边缘, 猫、盘共同转动的角速度 ω_2 .

解 选取小猫和转盘为一个系统(取 ω_0 的方向为角速度的正方向).

(1) 小猫与盘的碰撞过程中, 重力与转轴平行, 对转轴力矩为零, 则小猫落到盘上前后, 系统的角动量守恒. 落到盘上前小猫对转轴的角动量为零, 系统的角动量为 $J_0\omega_0$. 小猫落到盘上, 系统的角动量为 $(J_0 + m(R/2)^2)\omega_1$, 则有

$$J_0\omega_0 = (J_0 + m(R/2)^2)\omega_1 \quad (1)$$

(2) 小猫由 a 点爬向盘边缘的过程中, 对转轴的合外力矩为零, 所以系统的角动量守恒. 爬到盘的边缘, 系统的角动量为 $(J_0 + mR^2)\omega_2$, 则有

$$(J_0 + m(R/2)^2)\omega_1 = (J_0 + mR^2)\omega_2 \quad (2)$$

由式(1)得

$$\omega_1 = \frac{4J_0\omega_0}{4J_0 + mR^2}$$

(1)、(2)两式联立可得

$$\omega_2 = \frac{J_0\omega_0}{J_0 + mR^2}$$

选取 $\omega_0 > 0$, 则 $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$, 即 ω_1 和 ω_2 均与 ω_0 的方向一致.

例 3-4-4 如图 3-4-7 所示, 细杆和子弹的质量均为 m , 杆长为 l . 杆绕水平轴在竖直平面内转动, 当杆下摆至最低点时, 角速度为 ω_0 , 恰被沿水平方向射入的子弹击中杆的一端(图 3-4-7 中 a 点), 子弹滞留在杆内. 试讨论子弹刚射入杆时, 与杆共同绕 O 轴转动的角速度.

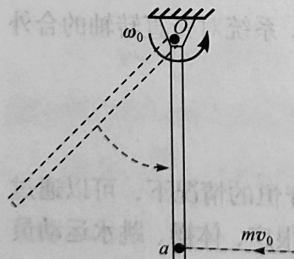


图 3-4-7 例 3-4-4 图

解 选取子弹和杆为一系统, ω_0 的方向为角速度的正方向. 子弹射入杆的过程, 可视为完全非弹性碰撞, 且碰撞时间极短, 重力的冲量矩可忽略不计. 所以子弹射入杆的前后, 系统的角动量守恒, 有

$$\frac{1}{3}ml^2\omega_0 - mlv_0 = \left(\frac{1}{3}ml^2 + ml^2\right)\omega'_0$$

得到

$$\omega'_0 = \frac{\frac{1}{3}ml^2\omega_0 - mlv_0}{\left(\frac{1}{3}ml^2 + ml^2\right)} = \frac{l\omega_0 - 3v_0}{4l}$$

式中 $ml^2\omega_0/3 = mlv_0$ 时, 有 $\omega'_0 = 0$, 表示子弹打入杆后, 杆和子弹均静止; 当 $ml^2\omega_0/3 > mlv_0$ 时, 有 $\omega'_0 > 0$, 表示角速度 ω'_0 与 ω_0 的方向一致(逆时针转动); 当 $ml^2\omega_0/3 < mlv_0$ 时, 有 $\omega'_0 < 0$, 表示角速度 ω'_0 与 ω_0 的方向相反(顺时针转动).

思考: 在上例中, 子弹仍沿水平方向入射, 但击中杆的中心并穿透. 穿透后子弹的速度为 v' , 其他条件均不变, ω'_0 将如何? 在子弹穿透杆的过程中, 系统的动量守恒吗?

通过本章学习, 可以发现, 对刚体定轴转动和刚体平动(质点运动)的描述, 无论是物理量还是基本定律和定理都是对应的, 而且形式相似, 见表 3-4-1.

表 3-4-1 刚体定轴转动和刚体平动(质点运动)对照表

刚体的定轴转动		刚体的平动(质点运动)	
角位置	θ	位矢	$\mathbf{r}$
角速度	ω	速度	$\mathbf{v}$
角加速度	α	加速度	$\mathbf{a}$
转动惯量	J	质量	m
转动动能	$\frac{1}{2}J\omega^2$	动能	$\frac{1}{2}mv^2$
角动量	$L = J\omega$	动量	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$
力矩的功	$\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$	力的功	$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
冲量矩	$\int_{t_1}^{t_2} M dt$	冲量	$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$
转动定律	$M = J\alpha$	牛顿第二定律	$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
转动动能定理	$\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$	动能定理	$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$
角动量定理	$\int_{t_1}^{t_2} M dt = J_2\omega_2 - J_1\omega_1$	动量定理	$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$

思考题

- 3-1 刚体的平动、转动各有什么特点?
- 3-2 东北二人转演员表演使用的手绢有什么特点? 为什么这样设计?
- 3-3 刚体可以有不止一个转动惯量吗? 试举例说明.
- 3-4 在某一瞬时, 物体在力矩作用下, 其角速度为零吗? 其角加速度为零吗?
- 3-5 求刚体做定轴转动所受的合外力矩时, 能不能用矢量合成法先求出刚体所受诸外力的矢量和, 再求此外力矢量和对转轴的力矩?

3-6 有两个飞轮,一个是木制的,周围镶上铁制的轮缘,另一个是铁制的,周围镶上木制的轮缘.若两个飞轮的半径相同,总质量相等,以相同的角速度绕通过飞轮中心的轴转动,哪一个飞轮的动能较大?

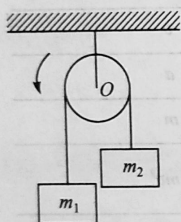
3-7 挂钟表针的角速度指向墙里还是指向墙外?在钟表的电源断开瞬间,表针的角加速度是指向墙里还是指向墙外?

3-8 一个物体可以绕定轴做无摩擦的均匀转动,当它受热或受冷(即膨胀或收缩)时,角速度是否改变?

3-9 通常我们见到的直升机除了顶部的螺旋桨外,为什么在机尾还有一个螺旋桨?

习 题

3-1 一轻绳跨过一具有水平光滑轴、质量为 M 的定滑轮,绳的两端分别悬有质量为 m_1 和 m_2 的物体($m_1 < m_2$),如题 3-1 图所示,绳与轮之间无相对滑动.若某时刻滑轮沿逆时针方向转动,则左右两侧绳中的张力的关系如何?

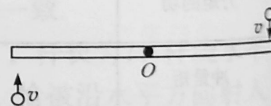


题 3-1 图

3-2 一轻绳绕在有水平轴的定滑轮上,滑轮的转动惯量为 J ,绳下端挂一物体.物体所受重力为 P ,滑轮的角加速度为 α .若将物体去掉而以与 P 相等的力直接向下拉绳子,滑轮的角加速度 α 将如何变化?

3-3 光滑的水平桌面上,有一长为 $2L$ 、质量为 m 的匀质细杆,可绕过其中点且垂直于杆的竖直光滑固定轴 O 自由转动,其转动惯量为 $\frac{1}{3}mL^2$,

起初杆静止.桌面上有两个质量均为 m 的小球,各自在垂直于杆的方向上,正对着杆的一端,以相同速率 v 相向运动,如题 3-3 图所示.当两小球同时与杆的两个端点发生完全非弹性碰撞后,就与杆粘在一起转动,求这一系统碰撞后的转动角速度大小.



俯视图

题 3-3 图

3-4 一汽车发动机曲轴的转速在 12s 内由 1.2×10^3 r/min 均匀地增加到 2.7×10^3 r/min. (1) 求曲轴转动的角加速度; (2) 在此时间内,曲轴转了多少圈?

3-5 半径为 20cm 的主动轮,通过皮带拖动半径为 50cm 的被动轮转动,皮带与轮之间无相对滑动,主动轮从静止开始做匀角加速转动,在 4s 内被动轮的角速度达到 8π rad/s,则主动轮在这段时间内转过多少圈?

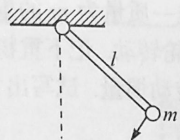
3-6 一半径为 R 、质量为 m 的匀质圆盘,以角速度 ω 绕其中心轴转动,现将它平放在一水平板上,盘与板表面的摩擦因数为 μ . (1) 求圆盘所受的摩擦力矩; (2) 问经多少时间后,圆盘转动才能停止?

3-7 半径为 30cm 的飞轮,从静止开始以 0.50 rad/s^2 的匀角加速度转动,求飞轮边缘上一点在飞轮转过 240° 时的切向加速度、法向加速度.

3-8 一长为 l ,质量可以忽略的直杆,可绕通过其一端的水平光滑轴在竖直平面内做定轴转动,在杆的另一端固定着一质量为 m 的小球,如题 3-8 图所示.现将杆由水平位置无初速地释放,求杆刚被释放时的角加速度?杆与水平方向夹角为 60° 时的角加速度?

3-9 有一半径为 R 的匀质圆形水平转台,可绕通过盘心 O 且垂直于盘面的竖直固定轴 OO' 转动,转动惯量为 J . 台上有一人,质量为 m . 当他站在离转轴 r 处时($r < R$),转台和人一起

以 ω_1 的角速度转动, 如题 3-9 图所示, 若转轴处摩擦可以忽略, 问当人走到转台边缘时, 转台和人一起转动的角速度是多少?



题 3-8 图



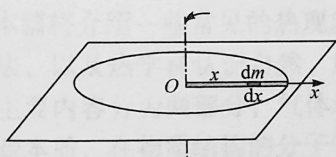
题 3-9 图

3-10 一燃气轮机在试车时, 燃气作用在涡轮上的力矩为 $2.03 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$, 涡轮的转动惯量为 $25.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. 当轮的转速由 $2.80 \times 10^3 \text{ r/min}$ 增大到 $1.12 \times 10^4 \text{ r/min}$ 时, 所经历的时间 t 为多少?

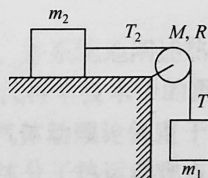
3-11 如题 3-11 图所示, 一匀质细杆长为 l , 质量为 m , 在摩擦系数为 μ 的水平桌面上转动, 求摩擦力的力矩 $M_{\text{阻}}$.

3-12 长为 l , 质量为 m 的细杆, 初始时的角速度为 ω_0 , 由于细杆与桌面的摩擦, 经过时间 t 后杆静止, 求摩擦力矩 $M_{\text{阻}}$.

3-13 如题 3-13 图所示, 质量为 m_1 和 m_2 的两个物体跨在定滑轮上, m_2 放在光滑的桌面上, 滑轮半径为 R , 质量为 M . 求 m_1 下落的加速度和绳子的张力 T_1 、 T_2 .



题 3-11 图

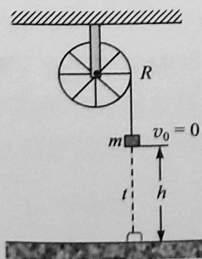


题 3-13 图

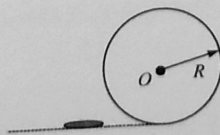
3-14 如题 3-14 图所示, 质量为 $m = 1 \text{ kg}$ 的物体悬挂在定滑轮上, 滑轮的半径 $R = 0.2 \text{ m}$, 物体距地面的高度为 $h = 1.5 \text{ m}$, 由静止 ($v_0 = 0$) 下落到达地面所用的时间为 $t = 3 \text{ s}$. 设绳轮间无相对滑动, 绳不可伸长, 求轮对 O 轴的转动惯量 J .

3-15 如题 3-15 图所示, 一质量 M , 半径为 R 的圆柱, 可绕固定的水平轴 O 自由转动. 今有一质量为 m , 速度为 v_0 的子弹, 水平射入静止的圆柱下部 (近似看作在圆柱边缘), 且停留在圆柱内 (v_0 垂直于转轴). 求: (1) 子弹与圆柱的角速度; (2) 该系统的机械能的损失.

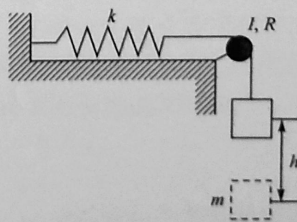
3-16 如题 3-16 图所示的物体系统中, 强度系数为 k 的弹簧开始时处在原长, 定滑轮的半径为 R , 转动惯量为 J . 质量为 m 的物体从静止开始下落, 求下落高度 h 时物体的速度 v .



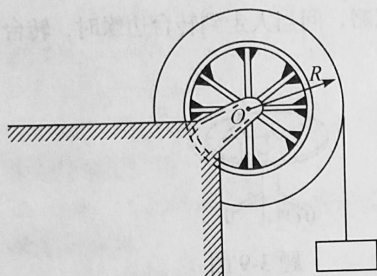
题 3-14 图



题 3-15 图



题 3-16 图



题 3-17 图

3-17 如题 3-17 图所示, 用落体观察法测定飞轮的转动惯量, 是将半径为 R 的飞轮支承在 O 点上, 然后在绕过飞轮的绳子的一端挂一质量为 m 的重物, 令重物以初速度为零下落, 带动飞轮转动. 记下重物下落的距离和时间, 就可算出飞轮的转动惯量. 试写出它的计算式(假设轴承间无摩擦).

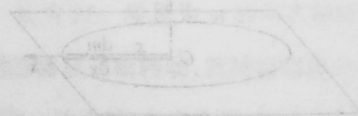
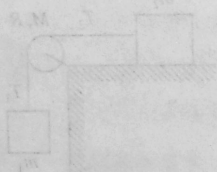


图 11-1 图

3-14 如图 3-14 所示, 质量为 m 的物体从高度为 h 处自由下落, 落到质量为 M 的物体上, 求两物体碰撞后的共同速度.

3-15 如图 3-15 所示, 质量为 m 的物体从高度为 h 处自由下落, 落到质量为 M 的物体上, 求两物体碰撞后的共同速度.

3-16 如图 3-16 所示, 质量为 m 的物体从高度为 h 处自由下落, 落到质量为 M 的物体上, 求两物体碰撞后的共同速度.

3-17 如图 3-17 所示, 用落体观察法测定飞轮的转动惯量, 是将半径为 R 的飞轮支承在 O 点上, 然后在绕过飞轮的绳子的一端挂一质量为 m 的重物, 令重物以初速度为零下落, 带动飞轮转动. 记下重物下落的距离和时间, 就可算出飞轮的转动惯量. 试写出它的计算式(假设轴承间无摩擦).

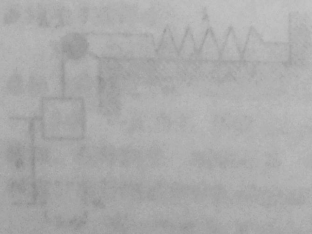


图 11-2 图