

# 《大学物理(新版)》学习指导

主 编 张孝林  
副主编 田蓬勃  
编 者 苏亚凤 喻有理  
刘丹东 徐忠锋

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书是与吴百诗教授主编的《大学物理(新版)》教材配套的教学参考书.本书给出了教材中全部习题的解答,在解题过程中,力求做到思路清晰,解法简捷.为了便于读者学习,书中还给出每章的主要内容,定律,公式,以及 80 多道典型例题.

本书可供工科各专业大学生学习使用.

### 图书在版编目(CIP)数据

---

《大学物理(新版)》学习指导/张孝林主编. —北京:科学出版社,2002  
ISBN 7-03-009403-4

I .大… II .张… III .物理学-高等学校-教材 IV .O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 02125 号

---

责任编辑:鄢德平/责任校对:柏连海

责任印制:安春生/封面设计:陈 敬

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2002 年 1 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2004 年 1 月第三次印刷 印张:27 1/2

印数:10 001—15 000 字数:528 000

**定价:30.00 元**

(如有印装质量问题,我社负责调换(路通))

# 前 言

大学物理是一门重要的基础课,它在培养学生的科学素质、科学思维方法、提高学生智力等方面具有重要的作用.要学好大学物理,除了课堂的学习和训练外,还要结合教学要求,做一定数量的练习题.运用物理学中的基本定律和原理求解具体问题是学习中很重要的一个环节,它有助于加深对基本概念和定律的理解,有助于拓宽学生的知识面,对培养学生分析问题和解决问题的能力具有重要作用.本书是与吴百诗教授主编的《大学物理(新版)》教材配套的教学参考书.本书给出了教材中全部习题的详细解答,在解题过程中,力求做到思路清晰,解法简捷.为了使读者掌握和了解更多类型的题目,书中还给出了80余道具有一定代表性和示范性的典型例题.在这些典型例题的求解中,突出物理概念和物理模型,注重题目的分析和解题方法的介绍.愿这本书能对读者学习大学物理有较大的帮助.读者在使用本书时应先自己解题,然后再看题解,这样做的收获会更大一些.

参加本书编写的有田蓬勃(1~4章)、张孝林(5~7、12章)、苏亚凤(8~10章)、喻有理(11,15,16,18,19章)、刘丹东(13,14章)、徐忠锋(17章),全书由张孝林负责统稿.李普选和张俊武用计算机绘制了全书的插图.由于编者水平所限和编写时间仓促,书中难免会有一些疏漏和错误,希望使用本书的读者指正.

本书在编写过程中得到了吴百诗教授的悉心指导,得到了李甲科教授、焦兆焕教授及教研室其他教师的极大帮助和支持,在此我们谨致以衷心地感谢.

编 者

2000年10月

# 目 录

## 前 言

|                         |         |
|-------------------------|---------|
| 第一篇 力学                  | ( 1 )   |
| 第 1 章 质点运动学             | ( 1 )   |
| 第 2 章 牛顿运动定律            | ( 24 )  |
| 第 3 章 功和能               | ( 48 )  |
| 第 4 章 冲量和动量             | ( 71 )  |
| 第 5 章 刚体运动学             | ( 91 )  |
| 第 6 章 刚体动力学             | ( 101 ) |
| 第 7 章 机械振动              | ( 121 ) |
| 第二篇 电磁学                 | ( 149 ) |
| 第 8 章 静电场               | ( 149 ) |
| 第 9 章 稳恒电流的磁场           | ( 195 ) |
| 第 10 章 变化的磁场和变化的电场      | ( 232 ) |
| 第三篇 热学                  | ( 256 ) |
| 第 11 章 热力学基础            | ( 256 ) |
| 第 12 章 气体动理论            | ( 285 ) |
| 第四篇 波动和波动光学             | ( 304 ) |
| 第 13 章 机械波              | ( 304 ) |
| 第 14 章 波动光学             | ( 332 ) |
| 第五篇 近代物理基础              | ( 360 ) |
| 第 15 章 狭义相对论力学基础        | ( 360 ) |
| 第 16 章 量子物理基础           | ( 382 ) |
| 第 17 章 原子核基本知识简介        | ( 405 ) |
| 第 18 章 粒子物理简介           | ( 416 ) |
| 第 19 章 固体物理基础简介 * 超导 激光 | ( 424 ) |

# 第一篇 力 学

## 第 1 章 质点运动学

### 一、基本内容和主要公式

**1. 确定质点位置的方法** 确定质点运动首先要确定参考系.在确定的参考系中,确定质点位置的方法主要有坐标法、位矢法和自然法.

**2. 运动学方程** 质点相对参考系运动时,质点位置坐标随时间变化的函数关系称为质点运动学方程.运动学方程描述了质点的运动状态.几种不同描述方法对应的运动学方程有

坐标法:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

位矢法:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$

自然法:  $s = s(t)$

### 3. 质点的位移、速度和加速度

位移:  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$

速度:  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$

加速度:  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$

用自然坐标表示的速度和加速度

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n} + \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}$$

### 4. 常见的几种运动

匀加速度运动:

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2as$$

圆周运动:

$$\Delta s = r\Delta\theta$$

$$v = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\beta$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega v = r\omega^2$$

## 5. 速度和加速度在不同坐标系下的变换——伽利略变换

在两个相互作用平动运动的坐标系中,有

$$v_a = v_r + u$$

$$a_a = a_r + a_e$$

## 二、典型例题

**1-1** 一质点沿  $x$  轴作直线运动,其速度与时间之间关系如图 1-1(a)所示.

设  $t=0$  时,  $x=0$ , 试根据已知的  $v_x-t$  图, 画出  $a-t$  图和  $x-t$  图.

**解**  $v_x-t$  曲线的斜率即为加速度, 从已知的  $v_x-t$  曲线可得

$$0 \sim 2 \text{ s} \quad a_{0-2} = \frac{dv}{dt} = \frac{20 - (-20)}{2 - 0} = 20 \text{ (ms}^{-2}\text{)}$$

$$2 \sim 6 \text{ s} \quad a_{2-6} = \frac{dv}{dt} = \frac{30 - 20}{6 - 2} = 2.5 \text{ (ms}^{-2}\text{)}$$

$$6 \sim 10 \text{ s} \quad a_{6-10} = \frac{dv}{dt} = \frac{0 - 30}{10 - 6} = -7.5 \text{ (ms}^{-2}\text{)}$$

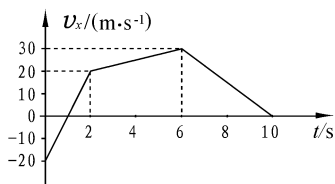


图 1-1(a)

根据以上结果可画出  $a-t$  曲线, 如图 1-1

(b) 根据  $v_x-t$  曲线, 有

$$0 \sim 2 \text{ s}$$

$$v = 20t - 20$$

$$\frac{dx}{dt} = 20t - 20$$

$$dx = (20t - 20)dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t (20t - 20)dt$$

$$x = 10t^2 - 20t, \quad t = 2 \text{ s}, \quad x = 0 \text{ m}$$

同理可得

$$2 \sim 6 \text{ s} \quad v = 2.5t + 15$$

$$x = 1.25t^2 + 15t - 35, \quad t = 6 \text{ s}, \quad x = 100 \text{ m}$$

$$6 \sim 10 \text{ s} \quad v = -7.5t + 75$$

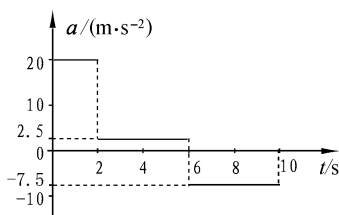


图 1-1(b)

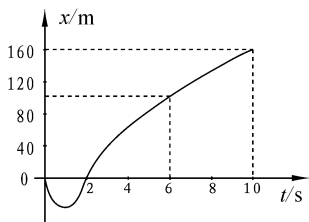


图 1-1(c)

$$x = -3.75t^2 + 75t - 215, t = 10 \text{ s}, x = 160 \text{ m}$$

根据以上结果作  $x-t$  曲线, 如图 1-1(c) 所示

**说明** 理解运动图线  $v-t$  性质, 掌握图线上点、线、斜率和面积所表示的物理内容, 根据位移、速度、加速度的定义和性质, 由  $v-t$  关系可得  $x-t, a-t$  关系。

**1-2** 由光滑钢丝弯曲成竖直平面里一条曲线, 质点穿在此钢丝上, 可沿着它滑动(图 1-2). 已知其切向加速度为  $-g\sin\theta$ .  $\theta$  是曲线切向与水平方向的夹角. 试求质点在各处的速率。

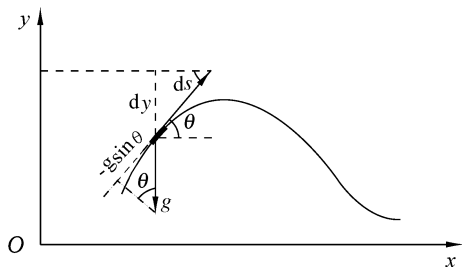


图 1-2

**解** 取如图 1-2 所示的直角坐标系, 令  $ds$  为质点移动的弧长, 它在  $y$  方向的投影为  $dy = ds\sin\theta$ . 这里只用到切向加速度

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -g\sin\theta$$

故

$$dv = -g\sin\theta dt = -g \frac{dy}{ds} dt$$

而  $ds/dt = v$  上式可写成

$$dv = -\frac{gdy}{v} \quad \text{或} \quad v dv = -gdy$$

两边积分

$$\int_{v_0}^v v dv = -g \int_{y_0}^y dy$$

$$v^2 - v_0^2 = 2g(y_0 - y)$$

即

$$v^2 = v_0^2 + 2g(y_0 - y)$$

**说明** 掌握切向加速度、法向加速度和总加速度之间的关系及定义是解此题的基础,关系式  $dy = ds \cdot \sin \theta$  将直角坐标系与自然坐标系中的  $y$  和  $s$  联系起来是解此题的关键.通过积分可解此题.由此题可看出:切向加速度改变质点速度的大小;法向加速度虽然在此题中没显示出来,但它的作用是改变质点运动的方向.

**1-3** 一球以  $v_0$  的速率水平抛射,试求  $t$  时刻质点加速度的切向分量和法向分量及曲率半径.

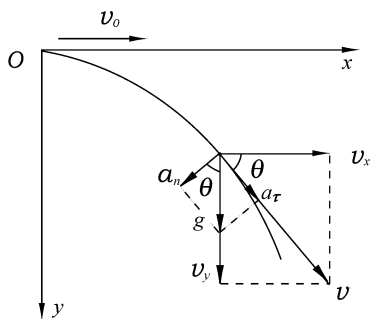


图 1-3

**解** 球作平抛运动,故球的运动方程为

$$\mathbf{r} = v_0 t \mathbf{i} + \frac{1}{2} g t^2 \mathbf{j}$$

即

$$x = v_0 t$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

因此

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 t) = v_0$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} g t^2 = g t$$

球在时刻  $t$ , 速度  $v$  的大小

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

方向

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{gt}{v_0} \quad (\text{见图 1-3})$$

切向加速度

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

小球作加速度  $a=g$  的抛体运动,因此

$$\mathbf{g} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n$$

所以

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2} = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

由  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$  可得曲率半径为

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2)^{3/2}}{gv_0}$$

**说明** 知道了质点的运动方程,即可通过微分来求质点的速度及加速度.本题一方面在直角坐标系中,由运动方程求速度;另一方面根据自然坐标系下速度、切向加速度的关系,及切向加速度和法向加速度垂直的性质与合加速度的关系求解.

**1-4** 罗盘显示飞机头指向正东,空气流速表的读数为 215 km/h,此时风向正南、风速 65 km/h,(a) 求飞机相对地面的速度;(b) 若飞行员想朝正东飞行,机头应指向什么方向?

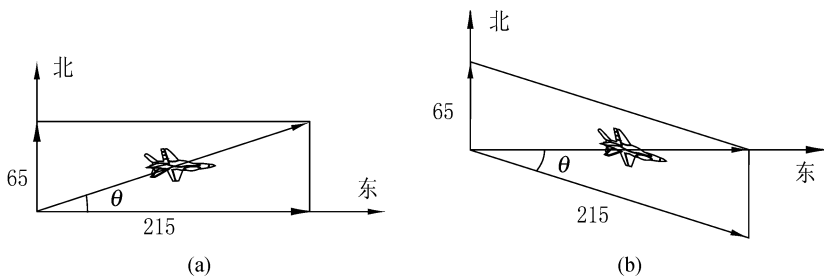


图 1-4

**解** 由速度变换有  $v_{\text{飞-地}} = v_{\text{飞-风}} + v_{\text{风-地}}$

(a) 由图 1-4(a)可得,飞机对地面的速度和方向为

$$v = \sqrt{(215)^2 + (65)^2} = 225 \text{ (km/h)}$$

$$\theta = \arctan \frac{65}{215} = 16.8^\circ$$

(b)由图 1-4(b)可得,机头所指的方位为

$$\theta = \arcsin \frac{65}{215} = 17.6^\circ$$

即机头应指向东南方向  $17.6^\circ$ .

其实际航速为

$$v = \sqrt{(215)^2 - (65)^2} = 205 \text{ (km/h)}$$

**说明** 伽利略变换体现了低速情况下不同参考系物体运动速度之间的变换关系,正确掌握它,并注意到速度的矢量性,由矢量叠加得到本题结果.

### 三、习题详解

#### 1.1 选择题

(1)根据瞬时速度矢量  $v$  的定义,及其用直角坐标和自然坐标的表示形式,它的大小  $|v|$  可表示为(B, D, F, H)

- (A)  $\frac{dx}{dt}$  (B)  $\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$  (C)  $\frac{ds}{dt}$  (D)  $\left| \frac{ds}{dt} \right|$   
 (E)  $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}$  (F)  $\left| \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right|$   
 (G)  $\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2$  (H)  $\left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

(2)根据瞬时加速度矢量  $\mathbf{a}$  的定义,及其用直角坐标和自然坐标的表示形式,它的大小  $|\mathbf{a}|$  可表示为(A C G H)

- (A)  $\left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|$  (B)  $\frac{dv}{dt}$  (C)  $\left| \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|$  (D)  $\frac{d^2r}{dt^2}$   
 (E)  $\frac{d^2s}{dt^2}$  (F)  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2}$   
 (G)  $\left[ \left( \frac{v^2}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$  (H)  $\left[ \left( \frac{v^2}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{d^2s}{dt^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

(3)以下说法中,正确的是(B, C, D, F)

- (A)质点具有恒定的速度,但仍可能具有变化的速率.  
 (B)质点具有恒定的速率,但仍可能具有变化的速度.  
 (C)质点加速度方向恒定,但速度方向仍可能在不断变化着.  
 (D)质点速度方向恒定,但加速度方向仍可能在不断变化着.  
 (E)某时刻质点加速度的值很大,则该时刻质点速度的值也必定很大.  
 (F)质点作曲线运动时,其法向加速度一般并不为零,但也有可能在某时刻法向加速度为零.

(4)能正确表示质点在曲线轨迹上  $P$  点的运动为减速的图是图 1.1(4)(d)

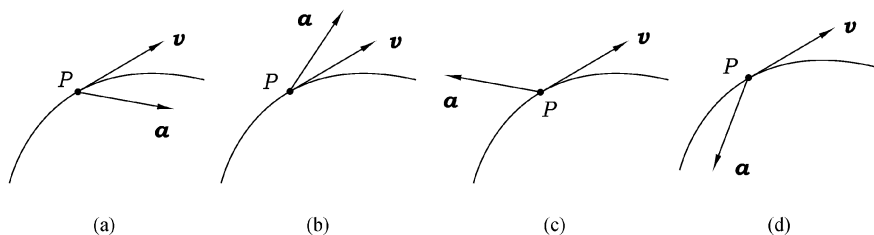


图 1.1(4)

(5)质点以速度  $v=4+t^2$  m/s 作直线运动,沿质点运动直线作  $Ox$  轴,并已知  $t=3$  s 时,质点位于  $x=9$  m 处,则该质点的运动学方程为(C).

(A)  $x=2t$

(B)  $x=4t+\frac{1}{2}t^2$

(C)  $x=4t+\frac{1}{3}t^3-12$

(D)  $x=4t+\frac{1}{3}t^3+12$

## 1.2 填空题

(1)质点沿  $x$  轴作直线运动,其速度  $v$  与时间  $t$  的关系如图 1.2(1),则  $t_1$  时刻曲线的切线斜率表示该时刻质点的瞬时加速度,时刻  $t_1$  与  $t_3$  之间曲线的割线斜率表示从  $t_1$  到  $t_3$  时间内质点的平均加速度,从  $t=0$  到  $t_4$  时间内,质点的位移可表示为  $\int_0^{t_4} v dt$ ,从  $t=0$  到  $t_4$  质点经过的路程可表示为  $\int_0^{t_4} |v| dt$ .

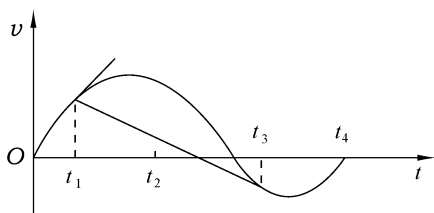


图 1.2(1)

(2)质点在平面上运动,若  $\frac{dr}{dt}=0$ ,  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  不为零,则质点作圆周运动;若  $\frac{dv}{dt}=0$ ,  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  不为零,则质点作匀速率曲线运动;若  $\frac{da}{dt}=0$ ,  $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$  不为零,则质点作变速率曲线运动.

(3)已知质点的运动学方程为  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ,则  $t_1$  时刻质点的位矢

$\mathbf{r}(t_1) = x(t_1)\mathbf{i} + y(t_1)\mathbf{j}$ , 时间间隔  $(t_2 - t_1)$  内质点的位移  $\Delta \mathbf{r} = [x(t_2) - x(t_1)]\mathbf{i} + [y(t_2) - y(t_1)]\mathbf{j}$ , 该时间间隔内质点位移的大小  $|\Delta \mathbf{r}| = \{[x(t_2) - x(t_1)]^2 + [y(t_2) - y(t_1)]^2\}^{1/2}$ , 该时间间隔内质点经过的路程  $\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt$ .

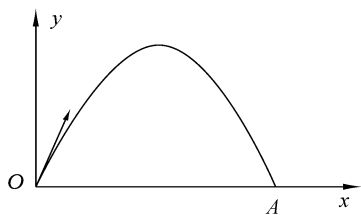


图 1.2(4)

(4) 质点在竖直的  $Oxy$  平面内作斜抛运动,  $t=0$  时质点在  $O$  点,  $t=t_1$  时质点运动到  $A$  点, 如图 1.2(4), 则  $\int_0^{t_1} v_x dt$  表示从  $t=0$  到  $t_1$  时间内质点位移沿  $x$  轴的投影;  $\int_0^{t_1} v_y dt$  表示从  $t=0$  到  $t_1$  时间内质点位移沿  $y$  轴的投影;  $\int_0^{t_1} v dt$  表示从  $t=0$  到  $t_1$  时间内经历的路程;

$\int_0^A d\mathbf{r}$  表示从  $O$  点运动到  $A$  点的过程中质点的位移;  $\int_0^A |d\mathbf{r}|$  表示从  $O$  点运动到  $A$  点的过程中质点经历的路程;  $\int_0^A dr$  表示从  $O$  到  $A$  的距离.

(5)  $AB$  杆以匀速度  $u$  沿  $x$  轴正方向运动, 带动套在抛物线 ( $y^2 = 2px$ ) 导轨上的小环, 如图 1.2(5). 已知  $t=0$  时,  $AB$  杆与  $y$  轴重合, 则小环运动的轨迹方程为  $y^2 = 2px$ , 运动学方程为  $x = ut$ ,  $y = \pm (2put)^{1/2}$ , 速度  $v = ui \pm \frac{pu}{\sqrt{2put}}\mathbf{j}$ , 加速度  $\mathbf{a} = \pm \frac{pu}{2t\sqrt{2put}}\mathbf{j}$ .

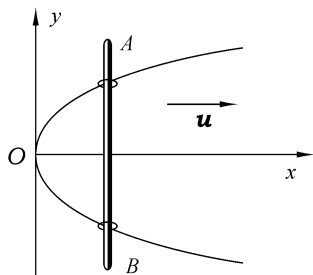


图 1.2(5)

**1.3** 路灯距地面高度为  $h$ , 身高  $l$  的人以速度  $v_0$  在路上匀速行走, 见图 1.3. 求人影中头顶的移动速度, 并求影长增长的速率.

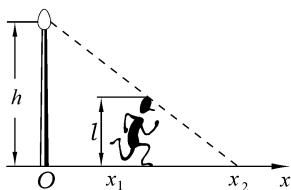


图 1.3

**解** 在图示的坐标系中, 人坐标为  $x_1$ , 人影头顶坐标为  $x_2$ , 设人影头顶的移动速度为  $v$ , 影长增长的速率为  $u$ , 则有

$$v = \frac{dx_2}{dt}, \quad v_0 = \frac{dx_1}{dt}$$

因  $x_2 - x_1$  为人影长度, 因此

$$u = \frac{d}{dt}(x_2 - x_1) = \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}$$

由图 1.3 知

$$\frac{h}{x_2} = \frac{l}{x_2 - x_1} \quad x_2 = \frac{h}{h-l}x_1$$

故有

$$v = \frac{dx_2}{dt} = \frac{h}{h-l} \frac{dx_1}{dt} = \frac{h}{h-l}v_0$$

$$u = \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} = \frac{l}{h-l}v_0$$

**1.4** 湖中有一小船,岸边有人用绳子通过一高处的滑轮拉船,如图 1.4 所示,人收绳的速率为  $v$ .问:

(1)船的运动速度  $u$ (沿水平方向)比  $v$  大还是小?

(2)如果保持收绳的速率  $v$  不变,船是否做匀速运动? 如不是,其加速度如何?

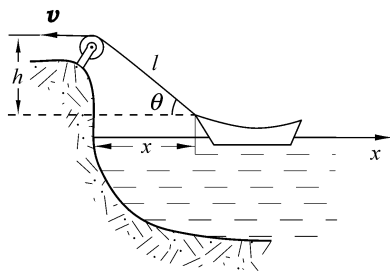


图 1.4

**解** (1)将船看作一质点,在如图所示的坐标系中,船到滑轮绳长为  $l$ ,滑轮距水面的高度  $h$ ,依题意

$$v = \left| \frac{dl}{dt} \right|, \quad u = \frac{dx}{dt}$$

$$x^2 = l^2 - h^2$$

有

$$2x \frac{dx}{dt} = 2l \frac{dl}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{l}{x} \frac{dl}{dt}, \quad |u| = \left| \frac{dx}{dt} \right| = \frac{l}{x} \left| \frac{dl}{dt} \right| = \frac{l}{x}v$$

故  $u = -\frac{l}{x}v = -\frac{v}{\cos\theta}$ ,  $u$  为负,表示运动方向向左,  $|u| > v$ .

(2) 船作变换运动, 其加速度为

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( -\frac{l}{x}v \right) = -\frac{v^2}{x^3}(l^2 - x^2)$$

或  $a = -\frac{v^2}{x} \tan^2 \theta$ ,  $a$  与  $v$  方向相同, 船做变加速运动.

**1.5** 雷达与火箭发射台的距离为  $l$ , 观测沿竖直方向向上发射的火箭, 如图 1.5. 观测得  $\theta$  的规律为  $\theta = kt$  ( $k$  为常数). 试写出火箭的运动学方程, 并求出当  $\theta = \pi/6$  时, 火箭的速度和加速度.

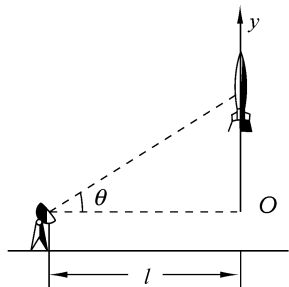


图 1.5

**解** 在图中所示的坐标系, 则

$$y = l \tan \theta = l \tan kt$$

$$v = \frac{dy}{dt} = lk / \cos^2 kt$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2lk^2 \tan kt \cdot \sec^2 kt$$

当  $\theta = \pi/6$  时

$$v = \frac{4}{3} lk$$

$$a = \frac{8\sqrt{3}}{9} lk^2$$

因此, 火箭在匀加速上升.

**1.6** 粒子按规律  $x = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$  沿  $x$  轴运动, 在哪个时间间隔它沿着  $x$  轴正向运动? 哪个时间间隔沿着  $x$  轴负向运动? 哪个时间间隔它加速? 哪个时间间隔减速? 分别画出  $x, v, a$  以时间为自变量的函数图.

**解** 因已知粒子的运动学方程, 对其微分, 可求得速度、加速度, 因此有

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t - 9$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 6$$

可见, 当  $v = 3(t^2 - 2t - 3) > 0$ , 即  $t > 3$  s 时, 粒子沿  $x$  轴正向运动;

当  $v = 3(t^2 - 2t - 3) < 0$ , 即  $t < 3$  s 时, 粒子沿  $x$  轴负向运动.

由于  $a = 6(t - 1)$ , 故有  $t > 1$  s 时,  $a > 0$ ;  $0 < t < 1$  s 时,  $a < 0$ .

可见, 在时间间隔  $0 < t < 1$  s 内和  $t > 3$  s 内,  $v$  和  $a$  同号, 粒子作加速运动; 在时间间隔  $1 \text{ s} < t < 3 \text{ s}$  内,  $v$  和  $a$  异号, 粒子作减速运动. 图略.

**1.7** 一质点的运动学方程为  $x = t^2, y = (t - 1)^2$ ,  $x$  和  $y$  均以 m 为单位,  $t$  以 s 为单位, 试求:

(1) 质点的轨迹方程;

(2) 在  $t = 2$  s 时, 质点的速度  $v$  和加速度  $a$ .

**解** (1)由运动学方程消去时间  $t$  可得质点的轨迹方程,将  $t=\sqrt{x}$  代入有

$$y = (\sqrt{x} - 1)^2 \quad \text{或} \quad \sqrt{y} = \sqrt{x} - 1$$

(2)对运动学方程微分求速度及加速度,即

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 2(t-1)$$

$$\mathbf{v} = 2t\mathbf{i} + 2(t-1)\mathbf{j}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2, a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2$$

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

当  $t=2$  s 时,速度和加速度分别为

$$\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \text{ m/s}, \quad \mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

**1.8** 已知一质点的运动学方程为  $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + (2-t^2)\mathbf{j}$ , 其中  $\mathbf{r}, t$  分别以 m 和 s 为单位,试求:

(1) 从  $t=1$  s 到  $t=2$  s 质点的位移;

(2)  $t=2$  s 时质点的速度和加速度;

(3) 质点的轨迹方程;

(4) 在  $Oxy$  平面内画出质点的运动轨迹,并在轨迹图上标出  $t=2$  s 时,质点的位矢  $\mathbf{r}$ 、速度  $\mathbf{v}$  和加速度  $\mathbf{a}$ 。

**解** 依题意有

$$x = 2t \tag{1}$$

$$y = 2 - t^2 \tag{2}$$

(1)将  $t=1, t=2$  秒代入,有

$$\mathbf{r}_{(1)} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_{(2)} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

故质点位移为

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_{(2)} - \mathbf{r}_{(1)} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

(2)通过对运动学方程求导可得

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = 2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} = -2\mathbf{j}$$

当  $t=2$  s 时,速度、加速度为

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \text{ m/s}, \quad \mathbf{a} = -2\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

(3)由(1)、(2)两式消去时间  $t$  可得质点的轨迹方程

$$y = 2 - \frac{x^2}{4}$$

即质点的运动轨迹为一抛物线.

(4)图略

**1.9** 一粒子沿着抛物线轨道  $y = x^2$  运动,粒子速度沿  $x$  轴的投影  $v_x$  为常数,等于  $3 \text{ m/s}$ ,试计算质点在  $x = \frac{2}{3} \text{ m}$  处时,其速度和加速度的大小和方向.

**解** 依题意:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3 \text{ m/s}$$

$$y = x^2$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} = 2xv_x$$

当  $x = \frac{2}{3} \text{ m}$  时,  $v_y = 2 \times \frac{2}{3} \times 3 = 4 \text{ m/s}$

速度大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5 \text{ m/s}$$

其方向为  $\alpha = \arccos \frac{v_x}{v} = 53^\circ 8'$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0, a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2v_x^2 = 18 \text{ m/s}^2$$

加速度的大小为

$$a = a_y = 18 \text{ m/s}^2, \quad a \text{ 的方向沿 } y \text{ 轴正向.}$$

**1.10** 一质点沿一直线运动,其加速度为  $a = -2x$ ,式中  $x$  的单位为  $\text{m}$ ,  $a$  的单位为  $\text{m/s}^2$ ,试求该质点的速度  $v$  与位置坐标  $x$  之间的关系.设当  $x=0$  时,  $v_0 = 4 \text{ m/s}$ .

**解** 依题意

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = -2x$$

$$\int_0^x -2x dx = \int_{v_0}^v v dv$$

积分得

$$-x^2 = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2x^2} = \sqrt{16 - 2x^2}$$

在本题中,积分变量的替换非常重要.这种方法在许多问题中都有应用,读者应注意体会该方法的思路.

**1.11** 火箭沿竖直方向由静止向上发射,加速度随时间的变化规律如图所示.试求火箭在  $t=50\text{ s}$  时燃料用完那一瞬间所能达到的高度及该时刻火箭的速度.

**解** 由图可知

第一阶段  $a = \frac{1}{2}t$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}t, \quad dv = \frac{t}{2}dt$$

积分

$$\int_0^v dv = \int_0^t \frac{1}{2}t dt, \quad v = \frac{1}{4}t^2$$

当  $t=20\text{ s}$ ,  $v=100\text{ m/s}$

由  $v = \frac{1}{4}t^2$  积分

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{1}{4}t^2 dt$$

$$x = \frac{1}{12}t^3, \quad t=20\text{ s} \quad x = \frac{2000}{3}\text{ m}$$

第二阶段

$$a = \frac{1}{6}t + \frac{20}{3}$$

$$dv = \left( \frac{1}{6}t + \frac{20}{3} \right) dt$$

积分

$$\int_{100}^v dv = \int_{20}^t \left( \frac{1}{6}t + \frac{20}{3} \right) dt$$

$$v = \frac{1}{12}t^2 + \frac{20}{3}t - \frac{200}{3}$$

再积分

$$\int_{\frac{2000}{3}}^x dx = \int_{20}^t \left( \frac{1}{12}t^2 + \frac{20}{3}t - \frac{200}{3} \right) dt$$

可得

$$x = \frac{1}{36}t^3 + \frac{20}{6}t^2 - 66.6t + 444.4$$

当  $t=50\text{ s}$  时,  $v=475\text{ m/s}$ ,  $h=8918.0\text{ m}$ .

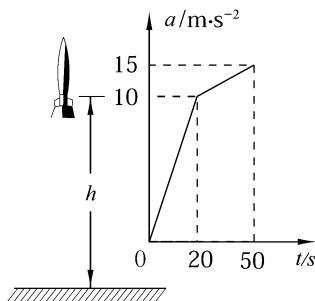


图 1.11

**1.12** 一质点沿半径  $R=1\text{ m}$  的圆周运动.  $t=0$  时,质点位于  $A$  点,如图.然后沿顺时针方向运动,运动学方程  $s=\pi t^2+\pi t$ ,其中  $s$  的单位为  $\text{m}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ ,

试求：

(1) 质点绕行一周所经历的路程、位移、平均速度和平均速率；

(2) 质点在第 1 秒末的速度和加速度的大小。

**解** (1) 质点绕行一周所经历的路程为圆周的周长, 即  $\Delta s = 2\pi R = 6.28 \text{ m}$  由位移和平均速度的定义, 可知此时位移为零, 平均速度也为零, 即

$$\Delta \mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = 0$$

令  $\Delta s = s(t) - s(0) = \pi t^2 + \pi t = 2\pi R$ , 可得质点绕行一周所需时间  $\Delta t = 1 \text{ s}$

平均速率为

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{\Delta t} = 6.28 \text{ m/s}$$

由以上结果可看出路程与位移, 速度与速率是不相同的。

(2)  $t$  时刻质点的速度和加速度大小为

$$v = \frac{ds}{dt} = 2\pi t + \pi$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

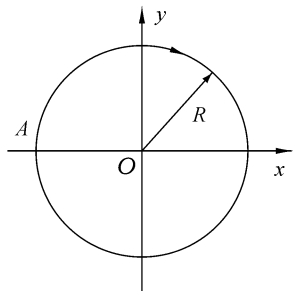


图 1.12

当  $t = 1 \text{ s}$  时,  $v = 9.42 \text{ m/s}$ ,  $a = 89.0 \text{ m/s}^2$ .

**1.13** 一质点沿半径为  $R$  的圆周运动, 运动学方程为  $s = v_0 t - \frac{1}{2} b t^2$ , 其中  $v_0, b$  都是常数, 试求:

(1) 在时刻  $t$  质点的加速度  $a$ ;

(2) 在何时加速度的大小等于  $b$ ;

(3) 到加速度大小等于  $b$  时质点沿圆周运行的圈数。

**解** (1) 由自然坐标系下的运动学方程可得

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 - bt, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = -b$$

故有

$$a = \frac{(v_0 - bt)^2}{R} + b^2$$

(2) 令  $a = \frac{(v_0 - bt)^2}{R} + b^2 = b$ , 解得

$$v_0 - bt = 0, \quad t = \frac{v_0}{b}$$

即  $t = \frac{v_0}{b}$  时, 加速度大小为  $b$ .

$$(3) \Delta s = s(t) - s(0) = v_0 \frac{v_0}{b} - \frac{1}{2} b \left( \frac{v_0}{b} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2b}$$

运行的圈数为  $n = \frac{\Delta s}{2\pi R} = \frac{v_0^2}{4\pi R b}$ .

**1.14** 一质点按规律  $s = t^3 + 2t^2$  在圆轨道上运动,  $s$  为沿圆弧的自然坐标, 以  $m$  为单位,  $t$  以  $s$  为单位. 如果当  $t = 2 s$  时的总加速度为  $16\sqrt{2} m/s^2$ , 求此圆弧的半径.

**解** 质点做圆周运动, 由自然坐标系下的运动方程可得质点运动速率大小

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 4t$$

切向与法向加速度大小为

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 6t + 4, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(3t^2 + 4t)^2}{R}$$

当  $t = 2s$  时,  $v = 20 m/s$ ,  $a_\tau = 16 m/s^2$ ,  $a_n = \frac{400}{R}$ .

依题意  $a = \sqrt{\left(\frac{400}{R}\right)^2 + 16^2} = 16\sqrt{2}$ , 得  $R = 2.5 m$ .

**1.15** 一质点沿半径为  $0.1 m$  的圆周运动, 其用角坐标表示的运动学方程为  $\theta = 2 + 4t^3$ ,  $\theta$  的单位为  $rad$ ,  $t$  的单位为  $s$ , 试求:

(1) 在  $t = 2s$  时, 质点的切向加速度和法向加速度的大小;

(2) 当  $\theta$  等于多少时, 质点的加速度和半径的夹角成  $45^\circ$ .

**解** (1) 质点的角速度及角加速度为

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 12t^2, \quad \beta = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 24t$$

因此, 质点的法向加速度和切向加速度大小为

$$a_n = R\omega^2 = 144Rt^4, \quad a_\tau = R\beta = 24Rt$$

当  $t = 2 s$  时,  $a_n = 230.4 m/s^2$ ,  $a_\tau = 4.8 m/s^2$ .

(2) 设时刻  $t'$   $a$  和半径夹角为  $45^\circ$ , 此时  $a_n = a_\tau$ , 即

$$144Rt'^4 = 24Rt' \quad \text{得} \quad t'^3 = \frac{1}{6} s$$

$$\theta(t') = 2 + 4t'^3 = 2.67 rad$$

**1.16** 一圆盘半径为  $3 m$ , 它的角速度在  $t = 0$  时为  $3.33\pi rad/s$ , 以后均匀地减小, 到  $t = 4 s$  时角速度变为零. 试计算圆盘边缘上一点在  $t = 2 s$  时的切向加速度和法向加速度的大小.

**解** 角速度均匀地减小. 因此, 角加速度为

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\omega(4) - \omega(0)}{4 - 0} = \frac{0 - 3.33\pi}{4} \\ &= -0.83\pi \text{ rad/s}^2\end{aligned}$$

圆盘做匀角加速度运动,故有

$$\omega = \omega_0 + \beta t = 3.33\pi - 0.83\pi t$$

当  $t=2\text{s}$  时,  $\omega=3.33\pi-0.83\pi\times 2=16.7\pi \text{ rad/s}$ .

法向与切向加速度分别为

$$a_n = R\omega^2 = 82.4 \text{ m/s}^2, \quad a_\tau = R\beta = -7.8 \text{ m/s}^2$$

**1.17** (1)地球的半径为  $6.37\times 10^6 \text{ m}$ ,求地球赤道表面上一点相对于地球中心的向心加速度.(2)地球绕太阳运行的轨道半径为  $1.5\times 10^{11} \text{ m}$ ,求地球相对于太阳的向心加速度.(3)天文测量表明,太阳系以近似圆形的轨道绕银河系中心运动,半径为  $2.8\times 10^{20} \text{ m}$ ,速率为  $2.5\times 10^5 \text{ m/s}$ ,求太阳系相对于银河系的向心加速度.(4)求这些加速度每对的比值.

**解** (1)地球赤道表面一点相对于地球中心的向心加速度为

$$a_{n_1} = R_1 \omega_1^2 = 6.37 \times 10^6 \times \left( \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \right)^2 = 3.36 \times 10^{-2} (\text{m/s}^2)$$

(2)地球相对太阳的向心加速度为

$$a_{n_2} = R_2 \omega_2^2 = 1.5 \times 10^{11} \times \left( \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 60 \times 60} \right)^2 = 5.95 \times 10^{-3} (\text{m/s}^2)$$

(3)太阳系相对银河系的向心加速度为

$$a_{n_3} = \frac{v_3^2}{R_3} = \frac{(2.5 \times 10^5)^2}{2.8 \times 10^{20}} = 2.23 \times 10^{-10} (\text{m/s}^2)$$

(4)两加速度比值为  $a_{n_1} : a_{n_2} = 5.65 : 1$ ,加速度比值  $a_{n_2} : a_{n_3} = 2.67 \times 10^7 : 1$ .

**1.18** 一架飞机在水平地面的上方,以  $174 \text{ m/s}$  的速率垂直俯冲,假定飞机以圆形路径脱离俯冲,而飞机可以承受的最大加速度为  $78.4 \text{ m/s}^2$ ,为了避免飞机撞到地面,求飞机开始脱离俯冲的最低高度.假设整个运动中速率恒定.

**解** 设飞机以半径为  $R$  圆形路径俯冲,其加速度为

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

当  $a_n$  为飞机所能承受的最大加速度时,  $R$  即为最小,所以

$$78.4 = \frac{174^2}{R_{\min}}, \quad R_{\min} = \frac{174^2}{78.4} = 386.2 (\text{m})$$

这就是飞机开始脱离俯冲的最低高度.

**1.19** 一圆盘由静止开始加速,在  $6 \text{ s}$  内,它的角速度均匀地增加到  $6.67 \pi \text{ rad/s}$ .圆盘以这一角速度转一段时间后,制动装置使它在  $5 \text{ min}$  内停止.如果圆盘的转动总圈数为  $3100$  转,试计算圆盘转动的总时间.

解 (1) 从  $t=0$  到  $t=6\text{ s}$ , 圆盘作匀加速转动

$$\beta_1 = \frac{\omega(6) - \omega(0)}{6 - 0} = 1.11\pi \text{ rad/s}^2$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\beta_1 t^2 = 20\pi \text{ rad}, \quad n_1 = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = 10$$

(2) 从开始制动到完全停止, 历时  $\Delta t=300\text{ s}$ , 圆盘作匀减速转动. 开始制动时, 角速度为  $\omega=6.67\pi \text{ rad/s}$ , 有

$$\beta_2 = \frac{0 - 6.67\pi}{300} = -0.022\pi \text{ rad/s}^2$$

$$\Delta\varphi = 6.67\pi \times 300 - \frac{1}{2} \times 0.022\pi \times 300^2 = 1000\pi \text{ rad}$$

$$n_3 = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = 500$$

(3) 匀速转动阶段所转过的圈数为

$$n_2 = 3100 - (10 + 500) = 2590$$

所经历的时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{2\pi n_2}{6.67\pi} = \frac{2 \times 2590}{6.67} = 777 \text{ (s)}$$

三阶段所经历的总时间为

$$6 + 777 + 300 = 1083 \text{ (s)} = 18.05 \text{ min}$$

**1.20** 试写出以矢量形式表示的质点作匀速圆周运动的运动学方程, 并证明作匀速圆周运动质点的速度矢量  $\boldsymbol{v}$  和加速度矢量  $\boldsymbol{a}$  的标积等于零, 即  $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ .

解 取坐标系如图, 以直角坐标表示的质点运动学方程为

$$x = R\cos\omega t, \quad y = R\sin\omega t$$

以矢量形式表示的质点运动学方程为

$$\boldsymbol{r} = R\cos\omega t \boldsymbol{i} + R\sin\omega t \boldsymbol{j}$$

速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\omega R\sin\omega t \boldsymbol{i} + \omega R\cos\omega t \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\omega^2 R\cos\omega t \boldsymbol{i} + \omega^2 R\sin\omega t \boldsymbol{j}$$

因此  $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = v_x a_x + v_y a_y = 0$ .

**1.21** 一质点运动学方程为  $x = t^2$ ,  $y = (t-1)^2$ , 其中  $x, y$  以 m 为单位,  $t$  以 s 为单位.

(1) 试写出质点的轨迹方程, 并在  $Oxy$  平面内示意地画出轨迹曲线;

(2) 质点的速度何时取极小值?

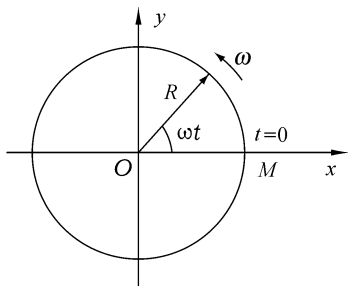


图 1.20

(3) 试求当速度大小等于  $10 \text{ m/s}$  时, 质点的位置坐标;

(4) 试求时刻  $t$  质点的切向和法向加速度的大小.

**解** (1) 由运动学方程消去  $t$ , 得轨迹方程

$$t = \sqrt{x} \quad y = (\sqrt{x} - 1)^2 \quad (\text{图略}), \text{ 轨迹为一抛物线}$$

(2)  $t$  时刻质点的速度为

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 2(t-1)$$

速度大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4t^2 + 4(t-1)^2}$$

令  $\frac{dv}{dt} = 0$  得  $t = 0.5 \text{ s}$ , 可以看出,  $t = 0.5 \text{ s}$  时, 速度取极小值.

(3) 令  $v = \sqrt{4t^2 + 4(t-1)^2} = 10$ , 得  $t = 4 \text{ s}$  带入运动学方程, 有

$$x(4) = 16 \text{ m}, \quad y(4) = 9 \text{ m}$$

(4) 切向加速度为

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{4t^2 + 4(t-1)^2} = \frac{2(2t-1)}{\sqrt{t^2 + (t-1)^2}}$$

由直角坐标系下加速度定义得总加速度大小

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{8}$$

因此, 法向加速度为

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{2}{\sqrt{t^2 + (t-1)^2}}$$

**1.22** 椭圆规的  $AB$  杆上,  $A$ 、 $B$  两点分别沿  $Oy$  槽、 $Ox$  槽移动, 试证明杆上一点  $C$  的轨迹为椭圆. 又设杆上的  $A$  点以匀速  $v_0$  运动, 求  $B$ 、 $C$  两点的速度.

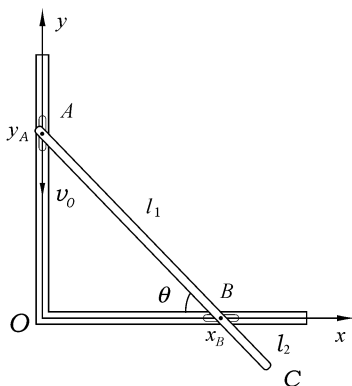


图 1.22

**解** 建立如图所示直角坐标系,  $C$  点的坐标为

$$x_c = (l_1 + l_2)\cos\theta$$

$$y_c = -l_2\sin\theta$$

$$\left(\frac{x_c}{l_1 + l_2}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{l_2}\right)^2 = 1 \text{ 由此可见 } C \text{ 点的轨迹为椭圆}$$

由题设可知

$$v_A = \frac{dy_A}{dt} \mathbf{j} = -v_0 \mathbf{j}$$

由于

$$x_B^2 = l_1^2 - y_A^2$$

故有

$$2x_B \frac{dx_B}{dt} = -2y_A \frac{dy_A}{dt} = 2v_0 y_A$$

因而  $B$  点的速度为

$$v_B = \frac{dx_B}{dt} \mathbf{i} = \frac{y_A}{x_B} v_0 \mathbf{i}$$

又由于  $x_C = \frac{l_1 + l_2}{l_1} x_B$ , 故有

$$\frac{dx_C}{dt} = \frac{l_1 + l_2}{l_1} \frac{dx_B}{dt} = \frac{l_1 + l_2}{l_1} \frac{y_A}{x_B} v_0$$

而

$$y_C = -\frac{l_2}{l_1} y_A$$

$$\frac{dy_C}{dt} = -\frac{l_2}{l_1} \frac{dy_A}{dt} = \frac{l_2}{l_1} v_0$$

因而  $C$  点的速度为

$$v_C = \frac{l_1 + l_2}{l_1} \frac{y_A}{x_B} v_0 \mathbf{i} + \frac{l_2}{l_1} v_0 \mathbf{j}$$

**1.23** 一人站在  $Oxy$  平面上的某点  $(x_1, y_1)$  处, 以初速度  $v_0$  铅垂向上抛出一球.

(1) 试以时间  $t$  为变量写出球的位矢量  $\mathbf{r}$ ;

(2) 求出球的速度矢量  $\mathbf{v}$  和加速度矢量  $\mathbf{a}$ .

**解** (1) 起抛点的坐标为  $(x_1, y_1, 0)$ , 球竖直向上做匀减速运动, 加速度为  $-g\mathbf{k}$ , 因而球的运动学方程为

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

位矢为

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + \left( v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right) \mathbf{k}$$

(2)  $t$  时刻质点的速度、加速度分别为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (v_0 - gt) \mathbf{k}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -g \mathbf{k}$$

**1.24** 半径为  $R$  的大环上套一小环  $M$ , 直杆  $AB$  穿入小环, 并绕大环上的  $A$  轴以规律  $\theta = \omega t$  ( $\omega$  为常量) 逆时针转动.

(1) 试以大环为参考系, 分别用直角坐标法和自然法求出小环的运动学方程、速度和加速度;

(2) 试以杆  $AB$  为参考系, 求小环的运动学方程、速度和加速度.

**解** 已知  $\theta = \omega t$  ( $\omega$  为常量)

(1) 以大环为参考系,  $M$  点相对坐标原点的夹角为  $2\theta = 2\omega t$ , 因而有直角坐标法

$$\begin{aligned} x &= R \cos 2\omega t, & y &= R \sin 2\omega t \\ v_x &= -2\omega R \sin 2\omega t, & v_y &= 2\omega R \cos 2\omega t \\ a_x &= -4\omega^2 R \cos 2\omega t, & a_y &= -4\omega^2 R \sin 2\omega t \end{aligned}$$

自然法

$$\begin{aligned} s &= 2R\omega t, & v &= \frac{ds}{dt} = 2R\omega \\ a_\tau &= \frac{d^2s}{dt^2} = 0, & a_n &= \frac{v^2}{R} = 4R\omega^2 \end{aligned}$$

(2) 以  $A$  为原点, 沿  $AB$  作坐标轴  $O\eta$ ,

有

$$\begin{aligned} \eta &= 2R \cos \omega t \\ v &= \frac{d\eta}{dt} = -2R\omega \sin \omega t \\ a &= \frac{dv}{dt} = -2R\omega^2 \cos \omega t \end{aligned}$$

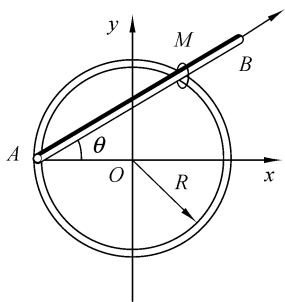


图 1.24

**1.25** 一辆带篷的卡车, 雨天在平直公路上行驶, 司机发现: 车速过小时, 雨滴从车后斜向落入车内; 车速过大时, 雨滴从车前斜向落入车内. 已知雨滴相对地面的速度大小为  $v$ , 方向与水平面夹角为  $\alpha$ , 试问 (1) 车速为多大时, 雨滴恰好不能落入车内? (2) 此时雨滴相对车厢的速度为多大?

**解** 设雨滴相对于地面的速度为  $v$ , 雨滴相对于车厢的速度为  $v_r$ , 车厢相对于地面的速度为  $v_e$ , 根据伽利略速度变换三者关系为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e$$

当  $v_r$  垂直于车厢时,雨滴恰为不能落入车的关系内,此时  $v, v_r, v_e$  有如图 1.25 所示

由图可得

$$(1) v_e = v \cos \alpha$$

$$(2) v_r = v \sin \alpha$$

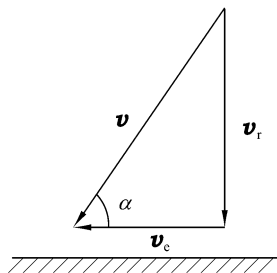


图 1.25

**1.26** 相对于地面静止的声源,可向各个方向发出声波.已知所发声波在静止的空气中以  $340 \text{ m/s}$  的速度传播,一观察者相对于声源以  $20 \text{ m/s}$  的速度运动,试按以下 4 种情况求出观察者所测得的声速:

- (1) 观察者运动方向与声波传播方向相同;
- (2) 观察者运动方向与声波传播方向相反;
- (3) 观察者运动方向与声波传播方向垂直;
- (4) 观察者测得声波沿垂直于自己的运动方向传来.

**解** 选地面为定参考系,选随观察者一起运动的参考系为动参考系,设声波相对于定参考系的速度为  $v_a$ ,相对于动参考系的速度为  $v_r$ ,动参考系相对于定参考系的速度为  $v_e$ .依题意  $|v_a| = 340 \text{ m/s}$ ,  $|v_e| = 20 \text{ m/s}$ ,  $v_r$  待求.根据  $v_a = v_r + v_e$ , 有  $v_r = v_a - v_e$ .

- (1)  $v_e$  与  $v_a$  同向,取  $x$  轴正向与  $v_a$  同向

$$v_r = v_a - v_e = 340 - 20 = 320 \text{ (m/s)} \quad v_r \text{ 沿 } x \text{ 轴正向.}$$

- (2)  $v_e$  与  $v_a$  反向,仍取  $x$  轴正向与  $v_a$  同向

$$v_r = v_a - (-v_e) = 340 + 20 = 360 \text{ (m/s)} \quad v_r \text{ 沿 } x \text{ 轴正向.}$$

- (3) 取  $y$  轴正向与  $v_a$  同,  $x$  轴正向与  $v_e$  同

$$v_r = \sqrt{v_a^2 + v_e^2} = \sqrt{340^2 + 20^2} = 340.6 \text{ (m/s)}$$

$v_r$  与  $x$  轴正向夹角  $\alpha = 93.7^\circ$ .

- (4) 取  $y$  轴正向与  $v_r$  同,  $x$  正向与  $v_e$  同

$$v_r = \sqrt{v_a^2 - v_e^2} = \sqrt{340^2 - 20^2} = 339.4 \text{ (m/s)}$$

$v_a$  与  $x$  轴正向夹角  $\beta = 86.6^\circ$ .

**1.27** 一子弹从水平飞行的飞机尾舱中水平射出,出口速度的大小为  $300 \text{ m/s}$ ,飞机速度大小为  $250 \text{ m/s}$ .试描述子弹的运动情况:

- (1) 在固结于地面的坐标系中;
- (2) 在固结于飞机的坐标系中.

并计算射手必须把枪指向什么方向,才能使子弹在地面坐标系中速度的水平分量

为零。

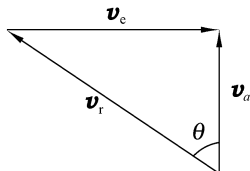


图 1.27

**解** (1)在地面参考系中,子弹沿抛物线轨迹运动,其水平速度大小为

$$v_a = v_r - v_c = 300 - 250 = 50 \text{ (m/s)}$$

其方向与飞机飞行方向相反。

(2)在飞机参考系中,子弹仍沿抛物线轨迹运动,以  $v_r=300 \text{ m/s}$  的水平速度离开飞机。

以地面为静参考系,飞机为动参考系,静参考系中观察到子弹速度的水平分量为零.设子弹的绝对速度  $v_a$  沿铅直方向向上,依题意动参考系相对静参考系的速度  $v_c$  沿水平方向,  $v_a$ ,  $v_c$  及相对速度  $v_r$  三者的关系如图 1.27。

由图可得

$$\sin \theta = \frac{v_c}{v_r} = \frac{250}{300} = 0.83, \quad \theta = 56.4^\circ$$

可见射手必须把枪指向斜上方与铅直方向成  $56.4^\circ$  角。

**1.28** 可以认为月球以地球为中心作圆周运动,而地球又以太阳为中心作圆周运动,试求当(1)月球在地球和太阳之间和(2)地球在月球和太阳之间时,月球相对于太阳的加速度。

**解** 设月球相对地球加速度为  $a_r$ ,地球相对太阳加速度  $a_c$ ,月球相对太阳加速度为  $a_a$ ,则有

$$a_a = a_r + a_c$$

月球绕地球作圆周运动,周期取为 30 天,月球中心到地球中心距离为  $3.9 \times 10^8 \text{ m}$ ,则

$$a_r = \omega_1^2 r_1 = \left( \frac{2\pi}{30 \times 24 \times 60 \times 60} \right)^2 \times 3.9 \times 10^8 = 2.3 \times 10^{-3} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

地球绕太阳作圆周运动,周期取为 365 天,地球中心到太阳中心距离为  $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ ,则

$$a_c = \omega_2^2 r_2 = \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 60 \times 60}^2 \times 1.5 \times 10^{11} = 5.9 \times 10^{-3} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

所以,(1)月球在地球和太阳之间时,月球相对于太阳的加速度为

$$a_a = -a_r + a_c = 3.6 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

(2)地球在月球和太阳之间时,月球相对于太阳的加速度为

$$a_a = a_r + a_c = 8.2 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

**1.29** 当某物体在空气(或其他流体)中下落时,由于流体阻力的影响,物体的速率逐渐趋于一个终极速率  $v_t$ ,假定垂直下落的物体有一加速度分量为  $a_y = -g$

$+bv^2$ , 式中  $b=0.002\text{ m}$ , 求  $v_t$ .

**解** 当  $a_y=0$  时, 垂直下落的物体不再加速下落, 此时速率趋于终极速率  $v_t$ , 因此,

$$-g + bv_t^2 = 0$$

$$v_t = \sqrt{\frac{g}{b}} = 70\text{ m/s}$$

## 第 2 章 牛顿运动定律

### 一、基本内容和主要公式

#### 1. 牛顿运动三定律

第一定律:任何质点都保持静止或匀速直线运动状态,直到其它物体对它作用的力迫使它改变这种状态为止.牛顿运动第一定律给出了惯性和力的概念.

第二定律:物体运动状态的变化与物体所受的合力成正比,即

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

当  $m$  为常量时,有  $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{a}$ .

在直角坐标系下,有

$$\begin{cases} R_x = \sum_i F_{ix} = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \\ R_y = \sum_i F_{iy} = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} \\ R_z = \sum_i F_{iz} = m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

在自然坐标系下,有

$$\begin{cases} R_\tau = \sum_i F_{i\tau} = ma_\tau = m \frac{dv}{dt} \\ R_n = \sum_i F_{in} = ma_n = m \frac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

第三定律:当物体  $A$  以力  $\mathbf{F}_1$  作用于物体  $B$  时,物体  $B$  也同时以力  $\mathbf{F}_2$  作用于物体  $A$  上,力  $\mathbf{F}_1$  和  $\mathbf{F}_2$  总是大小相等,方向相反,且作用在同一直线上,其关系可表示为

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$$

力满足矢量叠加原理:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots$

#### 2. 力学中几种常见的力

万有引力:  $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ ;  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  为引力常量.

重力:  $P = mg$ ;  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  为重力加速度.

弹簧的弹性力:  $F_x = -kx$ ,  $k$  为劲度系数.

静摩擦力:  $0 \leq f \leq f_{\max}, f_{\max} = \mu_0 N, \mu_0$  为最大静摩擦因数.

滑动摩擦力:  $f = \mu N, \mu$  为滑动摩擦因数.

### 3. 应用牛顿运动定律解题的一般步骤

选取研究对象;分析受力情况,画出受力图;选取坐标系;列方程求解;讨论.

### 4. 牛顿运动定律的适用范围

宏观低速物体;惯性系.

## 二、典型例题

**2-1** 以初速度  $v_0$  从地面竖直向上抛出一质量为  $m$  的小球,小球除受重力外,还受一个大小为  $\alpha mv^2$  的黏滞阻力( $\alpha$  为常数,  $v$  为小球运动的速度大小),当小球回到地面时,它的速度大小为多少?

**解** 小球竖直向上抛出后,将受到向下的重力  $mg$  和向下的阻力  $\alpha mv^2$  作用. 取地面为坐标原点,竖直向上为  $y$  轴正方向,由牛顿第二定律有

$$-mg - \alpha mv^2 = m \frac{dv}{dt}$$

变量替换  $\frac{dv}{dt} = \frac{dy}{dt} \frac{dv}{dy} = v \frac{dv}{dy}$ , 有

$$-mg - \alpha mv^2 = mv \frac{dv}{dy}$$

即

$$-\frac{mv dv}{mg + \alpha mv^2} = dy$$

由题意,小球位于地面  $y=0$  时,速度大小为  $v=v_0$ ,设小球向上的最大高度为  $h$ ,也就是当  $y=h, v=0$ ,积分上式,有

$$\int_{v_0}^0 -\frac{mv dv}{mg + \alpha mv^2} = \int_0^h dy$$

小球自地面可到达的最大高度为

$$h = \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{mg + \alpha mv_0^2}{mg} \quad (1)$$

小球下落时,将受到向下的重力  $mg$  和向上的阻力  $\alpha mv^2$ ,根据牛顿第二定律,有

$$-mg + \alpha mv^2 = m \frac{dv}{dt}$$

作变量替换后有

$$-mg + \alpha mv^2 = mv \frac{dv}{dy}$$

即

$$-\frac{mv dv}{mg - \alpha m v^2} = dy$$

由题意:当  $y=h$  时,  $v=0$ ; 设小球回到地面时, 它的速度大小为  $v_1$ , 即  $y=0$ ,  $v=-v_1$ . 积分上式

$$\int_0^{-v_1} -\frac{mv dv}{mg - \alpha m v^2} = \int_h^0 dy$$

得

$$h = \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{mg}{mg - \alpha m v_1^2} \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式, 有

$$\frac{1}{2\alpha} \ln \frac{mg + \alpha m v_0^2}{mg} = \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{mg}{mg - \alpha m v_1^2}$$

解此式可得小球回到地面时的速度大小为

$$v_1 = \frac{v_0 \sqrt{g}}{\sqrt{\alpha v_0^2 + g}}$$

**说明** 这是一个变力牛顿定律应用问题, 应用牛顿定律求解本题时, 积分变量替换, 即  $\frac{dv}{dt} = \frac{dy}{dt} \frac{dv}{dy} = v \frac{dv}{dy}$  非常重要. 积分变量替换后, 分离变量, 然后通过积分就可求解此题, 这种方法在许多问题中都有应用. 黏滞阻力的方向始终与物体的运动方向相反, 解此题时应将小球的上抛运动和下落运动分开考虑.

**2-2** 一质量为  $M$  的圆环用线悬挂着, 将两个质量均为  $m$  的有孔小珠套在此环上, 且可以在环上作无摩擦地滑动, 如图(a)所示. 今同时将两个小珠从环的顶部释放, 并沿相反方向自由滑下. 证明: 当  $m \geq \frac{3}{2} M$  时, 大环将升起, 并求大环开始上升时两小珠的夹角值.

**解** 取小珠为研究对象. 它受重力  $mg$  作用, 还受大环对它的约束力  $N$ , 设  $N$  沿半径向外. 沿法向方向, 由牛顿定律有

$$mg \cos \theta - N = \frac{mv^2}{r} \quad (1)$$

沿切向方向, 有

$$mg \sin \theta = m a_\tau$$

所以小珠的切线加速度为

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{dv}{d\theta} = g \sin \theta$$

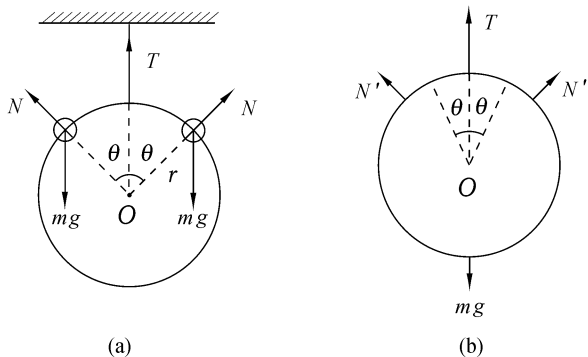


图 2-2

所以

$$\omega dv = g \sin \theta d\theta$$

上式两边同乘以  $r$  可得

$$v dv = r g \sin \theta d\theta$$

在  $\theta=0$  时,  $v=0$ , 故  $\int_0^v v dv = \int_0^\theta r g \sin \theta d\theta$

$$\frac{1}{2} v^2 = r g (1 - \cos \theta) \quad (2)$$

由式(1)与(2)得

$$N = 3 m g \left( \cos \theta - \frac{2}{3} \right) \quad (3)$$

从上式可以看出, 当  $\cos \theta > \frac{2}{3}$  时,  $N$  沿半径向外; 当  $\cos \theta < \frac{2}{3}$  时,  $N$  沿半径向内; 当  $\cos \theta = \frac{2}{3}$  时,  $N$  为零.

以大环为研究对象, 它受到三个力的作用: 重力  $Mg$ , 绳的张力  $T$ , 小珠的反作用力  $N'$  (如图(b)). 欲使大环上升, 必须使  $N'$  沿半径向外. 由于

$$N = -N'$$

故要求环对小珠的约束力沿半径向内, 即大环上升的条件为

$$\cos \theta < \frac{2}{3} \quad (4)$$

又

$$T + 2 N' \cos \theta - Mg = Ma \quad (5)$$

考虑到大环上升时,  $T=0$ ;  $a \geq 0$ , 取临界条件  $a=0$ , 故由(5)式得大环上升的另一条件

$$2 N' \cos \theta = M g \quad (6)$$

把式(3)代入式(6),注意到  $N = -N'$ ,得

$$-6 m g \left( \cos \theta - \frac{2}{3} \right) \cos \theta = M g$$

即

$$\begin{aligned} 6 m \cos^2 \theta - 4 m \cos \theta + M &= 0 \\ \cos \theta &= \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{M}{6m}} \end{aligned} \quad (7)$$

因为  $\cos \theta$  必须为实数,故

$$m \geq \frac{3}{2} M$$

当  $m \geq \frac{3}{2} M$  时,由式(7)得

$$\cos \theta = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{M}{6m}} < \frac{2}{3}, \text{ 满足大环上升的条件式(4).}$$

$$\theta_1 = \arccos \left( \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{M}{6m}} \right)$$

这时二小珠间的夹角为

$$\beta = 2\theta_1 = 2\arccos \left( \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{M}{6m}} \right)$$

为什么不取  $\theta_2 = \arccos \left( \frac{1}{3} - \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{M}{6m}} \right)$  呢? 因为  $\theta_2 > \theta_1$ , 在  $\theta$  还未达到  $\theta_2$  时, 大环已经向上运动了, 而我们所要求的仅是大环开始上升时两小珠间的夹角.

**说明** 选取研究对象, 对其进行正确的受力分析. 在自然坐标系下, 应用牛顿定律解此题时, 作  $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{dv}{d\theta}$  的变量替换非常重要, 这样通过积分, 就可求出小环下滑过程中速度  $v$  和  $\theta$  角的关系 (当然, 这也可通过机械能守恒直接给出), 由此可给出当大环将升起时,  $\theta$  角所满足的关系式, 由  $\cos \theta$  必为实数解得此题. 解此题, 应注意要使大环升起, 大环受小环的力必须是沿半径向外.

**2-3** 如图 2-3 所示, 一条质量为  $m$ , 长为  $l$  的匀质链条, 放在一光滑的水平桌面上, 链子的一端有极小的一段长度被推出桌子边缘, 在重力作用下开始下落, 试求在下列两种情况下, 链条刚刚离开桌面时的速度: (1) 在刚开始下落时, 链条为一直线形式; (2) 在刚开始下落时, 链条盘在桌子的边缘. 假定链条未脱离桌面的那一部分的速度, 一直保持为零. 此外, 解释上述两种情况下速度不同的原因.

**解** (1) 链条在运动过程中, 其各部分的速度、加速度均相同, 沿链条方向, 受力为  $\frac{m}{l} x g$ , 根据牛顿定律, 有

$$F = \frac{m}{l} xg = ma$$

通过变量替换有

$$\frac{m}{l} xg = mv \frac{dv}{dx}$$

$x=0$  时,  $v=0$ , 积分

$$\int_0^l \frac{mg}{l} x dx = \int_0^v mv dv$$

由上式可得链条刚离开桌面时的速度为

$$v = \sqrt{gl} \quad (1)$$

(2) 设链条落下部分的长度为  $x$ , 只有这一部分有加速度, 其余部分则仍为静止, 根据牛顿定律并注意到此时落下部分质量是变化的, 故有

$$\begin{aligned} \frac{mg}{l} x &= \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{l} xv \right) \\ xg dt &= d(xv) \end{aligned}$$

上式两边乘以  $xv$ , 得

$$vgx^2 dt = \frac{1}{2} d(x^2 v^2)$$

即

$$gx^2 dx = \frac{1}{2} d(x^2 v^2) \quad (\text{因为 } v = \frac{dx}{dt})$$

积分上式, 且利用初始条件:  $x=0, v=0$ , 得

$$v^2 = \frac{2}{3} gx$$

当  $x=l$  时, 可得链条刚离开桌面时的速度为

$$v = \sqrt{\frac{2}{3} gl} \quad (2)$$

由式(1)与(2)可知, 第二种情况下的速度小于第一种情况下的速度, 其原因在于第二种情况下, 桌面上的链条由静止突然运动, 相邻部分之间发生了非弹性碰撞, 链条各质元内力做功之和不为零, 因而有部分机械能转化为其他形式的能量, 而在第一种情况下, 机械能则是守恒的。

**说明** 通过对牛顿定律求积分可求得物体的速度。(1)中质量是不变的, 由积分求速度关键在于积分变量的替换, 即  $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$ 。(2)中是一变质量问题, 在此类问题中, 牛顿定律要采用  $F = \frac{d}{dt}(mv)$  形式, 而非  $F = m \frac{dv}{dt}$  形式, 这一点是

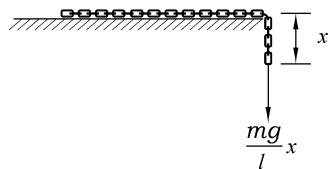


图 2-3

解此类变质量牛顿力学问题的关键所在。

**2-4** 物体  $A$ ,  $B$  的质量分别为  $m_A = 2 \text{ kg}$  和  $m_B = 3 \text{ kg}$ , 设在水平桌面上的物体  $A$  与桌面的摩擦因数  $\mu = 0.25$ ,  $B$  与  $A$  跨过一定滑轮相连着, 细绳、滑轮的质量和滑轮受到的阻力均可忽略不计, 桌子和物体放在一装置内, 如图 2-4(a) 所示, 试求下列两种情况下绳子受到的张力 (1) 当该装置以  $a_0 = 2 \text{ m/s}^2$  的加速度竖直向下运动时; (2) 当该装置以  $a_0 = 2 \text{ m/s}^2$  的加速度水平向左运动时。

**解** (1) 取  $A$ ,  $B$  物体为研究对象, 分析受力如图 2-4(b)。

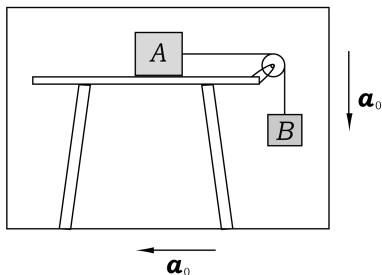


图 2-4(a)

以运动装置为动参考系, 以地面为静止参考系. 建立如图 2-4(b) 的坐标系, 设  $A$ ,  $B$  两物体相对动参考系的加速度大小为  $a_r$ , 相对静止参考系的加速度分别为  $a_A$  和  $a_B$ , 根据受力分析, 由牛顿第二定律有

对  $A$  物体:

$$T - f = m_A a_{Ax} \quad (1)$$

$$m_A g - N = m_A a_{Ay} \quad (2)$$

$$f = \mu N \quad (3)$$

对  $B$  物体:

$$m_B g - T = m_B a_{By} \quad (4)$$

由加速度变换关系有

$$a_{Ax} = a_r$$

$$a_{Ay} = a_0$$

$$a_{By} = a_0 + a_r$$

代入式(1), (2), (4), 求解方程组可得

$$T = \frac{m_A m_B (g - a_0)(1 + \mu)}{m_A + m_B} = 11.7 \text{ N}$$

(2) 当该装置以  $a_0$  加速度水平向左运动时, 分析  $A$ ,  $B$  两物体受力如图

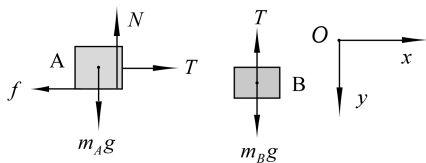


图 2-4 (b)

2-4(c)

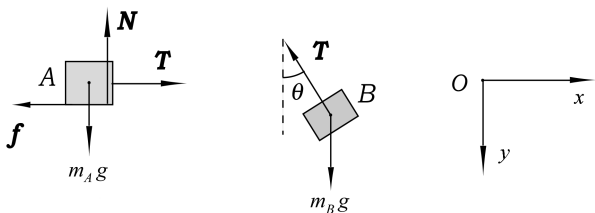


图 2-4 (c)

根据牛顿第二定律有

A 物体 :

$$T - f = m_A a_{Ax} \quad (5)$$

$$m_A g - N = m_A a_{Ay} \quad (6)$$

$$f = \mu N \quad (7)$$

B 物体 :

$$-T \sin \theta = m_B a_{Bx} \quad (8)$$

$$m_B g - T \cos \theta = m_B a_{By} \quad (9)$$

由加速度变换关系,有

$$a_{Ax} = a_r - a_0$$

$$a_{Ay} = 0$$

$$a_{Bx} = a_r \sin \theta - a_0$$

$$a_{By} = a_r \cos \theta$$

代入式(5),(6),(8),(9),求解方程组可得

$$T = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (g \mu - a_0) + a_0^2 + g^2 = 12.5 \text{ N}$$

**说明** 这是一个运用牛顿定律求解的力学题目,正确分析受力是应用牛顿定律的前提.而在此题中,注意到牛顿定律成立的参考系是惯性系,由物体在非惯性系中

的相对加速度即本题中的  $a_r$  运用伽利略变换给出惯性系中物体的加速度是解本题的关键,这也是解此类题目常用的方法。

### 三、习题详解

#### 2.1 选择题

(1)三个质量相等的物体  $A, B, C$  紧靠在一起,置于光滑水平面上,如图 2.1

(1)若  $A, C$  分别受到水平力  $F_1, F_2$  ( $F_1 > F_2$ ) 的作用,则  $A$  对  $B$  的作用力大小为 (C)

(A)  $F_1$

(B)  $F_1 - F_2$

(C)  $\frac{2}{3} F_1 + \frac{1}{3} F_2$

(D)  $\frac{2}{3} F_1 - \frac{1}{3} F_2$

(E)  $\frac{1}{3} F_1 + \frac{2}{3} F_2$

(F)  $\frac{1}{3} F_1 - \frac{2}{3} F_2$

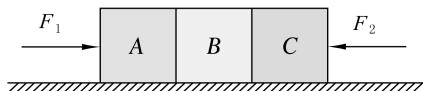


图 2.1(1)

(2)如图 2.1(2)所示两个质量分别为  $m_A$  和  $m_B$  的物体  $A, B$ ,一起在水平面上沿  $x$  轴正向作匀减速直线运动,加速度大小为  $a$ , $A$  与  $B$  间的静摩擦因数为  $\mu$ ,则  $A$  作用于  $B$  的静摩擦力  $F$  的大小和方向分别为 (D)

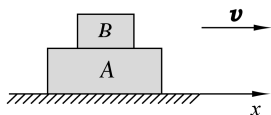


图 2.1(2)

(A)  $\mu m_B g$ , 与  $x$  轴正向相反.

(B)  $\mu m_B g$ , 与  $x$  轴正向相同.

(C)  $m_B a$ , 与  $x$  轴正向相同.

(D)  $m_B a$ , 与  $x$  轴正向相反.

(3)质量为  $m$  的物体,放在纬度为  $\varphi$  处的地面上,设地球质量为  $M_e$ ,半径为  $R_e$ ,自转角速度为  $\omega$ .若考虑到地球自转的影响,则该物受到的重力近似为 (D).

(A)  $G \frac{M_e m}{R_e^2}$

(B)  $m \omega^2 R_e \cos \varphi$

(C)  $G \frac{M_e m}{R_e^2} - m \omega^2 R_e \cos \varphi$

(D)  $G \frac{M_e m}{R_e^2} - m \omega^2 R_e \cos^2 \varphi$

(4)轻绳的一端挂一物体,跨过滑轮另一端挂一载人的梯子而平衡,如图.设滑轮质量忽略不计,滑轮轴与轴承间的摩擦忽略不计,今欲使滑轮轴承对轴的压力为零,则 (D)

- (A)人相对梯子应不动。  
 (B)人相对梯子应向下匀速运动。  
 (C)人相对梯子应向上匀速运动。  
 (D)人相对梯子应向下匀加速运动。  
 (E)人相对梯子应向上匀加速运动。

## 2.2 填空题

(1)质量为  $m$  的质点,置于长为  $l$ 、质量为  $M$  的均质细杆的延长线上,质点与细杆近端距离为  $r$ ,选图 2.2(1)(a)所示坐标系,则细杆上长度为  $dx$  的一段与

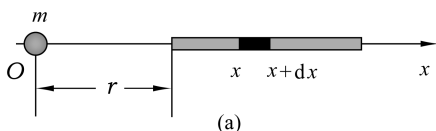
质点之间万有引力的大小为  $dF = G \frac{mM}{x^2} dx$ , 细杆

与质点之间万有引力的大小为  $F = \int_r^{r+l} G \frac{mM}{x^2} dx =$

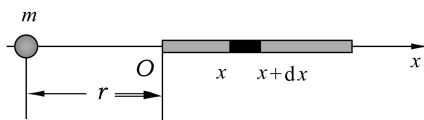
$G \frac{mM}{r(r+l)}$ . 选图 2.2(1)(b)所示坐标系,则细杆上长度为  $dx$  的一段与质点之间

万有引力的大小为  $dF = G \frac{mM}{l(r+x)^2} dx$ , 细杆与质点之间万有引力的大小为  $F =$

$$\int_0^l G \frac{mM}{l(r+x)^2} dx = G \frac{mM}{r(r+l)}.$$



(a)



(b)

图 2.2(1)

为  $x = v_0 t + \frac{F_0}{2m} \left( t^2 - \frac{1}{3} k t^3 \right)$ .

(3)在光滑的水平桌面上,有一自然长度为  $l_0$ 、劲度系数为  $k$  的轻弹簧,一端固定,另一端系一质量为  $m$  的质点.若质点在桌面上以角速度  $\omega$  绕固定端作匀速圆周运动,则该圆周的半径  $R = \frac{kl_0}{(k - m\omega^2)}$ , 弹簧作用于质点的拉力  $F = \frac{kl_0 m\omega^2}{(k - m\omega^2)}$ .

(4)质量为  $m$  的小圆环,套在位于竖直面内半径为  $R$  的光滑大圆环上,如图

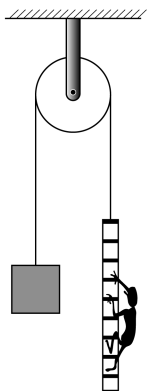


图 2.1(4)

(2)质量为  $m$  的质点,在变力  $F = F_0(1 - kt)$  ( $F_0$  和  $k$  均为常量)作用下沿  $Ox$  轴作直线运动,若已知  $t = 0$  时,质点位置坐标  $x_0 = 0$ ,速度为  $v_0$ ,且力的方向与初速度方向一致,则质点运动微分方程为  $m \frac{dv}{dt} = F_0(1 - kt)$ , 质点速度随时间变化规律为  $v = \frac{F_0}{m} \left( t - \frac{1}{2} k t^2 \right)$ , 质点运动学方程

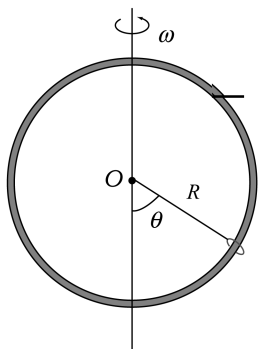


图 2.2(4)

2.2(4).若大圆环绕通过其中心的竖直轴以恒定角速度  $\omega$  转动,而小圆环相对于大圆环静止.则大圆环作用于小圆环的力大小为  $N = mR\omega^2$ ,小圆环相对静止的位置角  $\theta = \cos^{-1} \frac{g}{R\omega^2}$ .

**2.3** 把一根均匀的棒  $AC$  放置在光滑桌面上,如图 2.3(a)所示.已知棒的质量为  $M$ ,长为  $L$ ,今用一大小为  $F_1$  的力沿水平推棒的左端.设想把棒分成  $AB$  和  $BC$  两段,且  $\overline{BC} = \frac{1}{5}L$ ,求  $AB$  段对  $BC$  段的作用力.

**解** 取  $AC$  段做为一整体为研究对象,分析其受力,取  $BC$  段为研究对象分析受力如图 2.3(b)

依图有

$$F_1 = Ma \quad (1)$$

$$F = ma \quad (2)$$

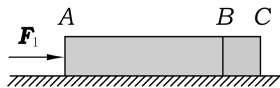


图 2.3(a)

由式(1)、(2)可得  $F = \frac{1}{5}Ma = 0.2F_1$ ,  $F$  方向沿  $x$  轴正向,  $F$  即为所求的  $AB$  段对  $BC$  段的作用力

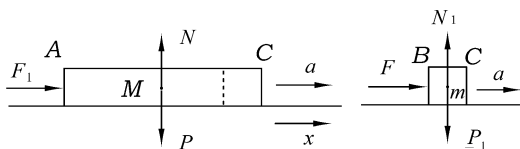


图 2.3(b)

**2.4** 在光滑的水平桌面上,放着 4 个完全一样的立方体,质量均为  $m = 1.0 \text{ kg}$ ,如图 2.4(a)所示,有一恒力  $F$  ( $F = 9.8 \text{ N}$ ) 作用在第 1 个立方体上.问第 3 个立方体共受几个力? 其大小、方向如何? 如果第 4 个立方体右端紧挨一堵墙,试重复上面的讨论.

**解** 第三个立方体同其它一齐运动,四个立方体作为一整体所受力为  $F$ ,因而

$$F = 4ma \quad (1)$$

对第四个立方体有

$$F'_{43} = ma \quad (2)$$

对第三个立方体分析其受力如图 2.4(b),因此有

$$F_{23} - F_{43} = ma \quad (3)$$

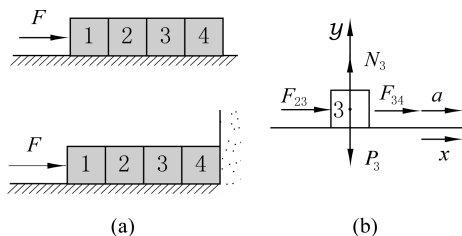


图 2.4

$$N_3 - P_3 = 0 \quad (4)$$

解上述方程可得  $F_{43} = F'_{43} = \frac{F}{4} = 2.45 \text{ N}$ ,  $F_{23} = \frac{1}{2} F = 4.9 \text{ N}$ ,  $N_3 = P_3 = 9.8 \text{ N}$ . 各力方向如图 2.4(b).

若右端紧挨一堵墙, 此时, 四个物体是静止的, 其加速度为零, 因此第三个立方体所受合力为零, 则有

$$F_{23} = F_{43} = F = 9.8 \text{ N}, N_3 = P_3 = 9.8 \text{ N}$$

## 2.5 已知一个斜度可以变化但底边长 $L$ 不变的斜面.

(1) 求石块从斜面顶端无初速地滑到底所需时间与斜面倾角  $\alpha$  之间的关系. 设石块与斜面间的滑动摩擦因数为  $\mu$ .

(2) 若斜面倾角  $\alpha_1 = 60^\circ$  和  $\alpha_2 = 45^\circ$  时, 石块下滑的时间相同, 问滑动摩擦因数  $\mu$  等于多大?

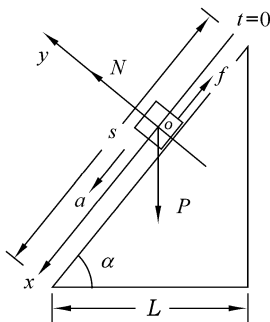


图 2.5

**解** 取石块做为研究对象, 对其受力分析, 沿斜面建立坐标如图, 按图 2.5 有

$$P \sin \alpha - f = ma \quad (1)$$

$$N - P \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

解方程并考虑到  $f = \mu N$  可得

$$a = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)g$$

(2) 从石块加速度表达式可看出, 石块做匀加速度下滑, 下滑所需时间如为  $t$ , 有

$$s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{L}{\cos \alpha}$$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g \cos \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}$$

把  $\alpha_1 = 60^\circ$  和  $\alpha_2 = 45^\circ$  分别代入上式并令其相等可得  $\mu = 0.27$ .

**2.6** 如图 2.6(a)所示, 人的质量  $m_1 = 60 \text{ kg}$ . 升降机的质量  $m_2 = 30 \text{ kg}$ , 站在升降机上的人要想拉住升降机使之不动, 问他要多大的力作用在绳上? 绳子和滑轮质量不计.

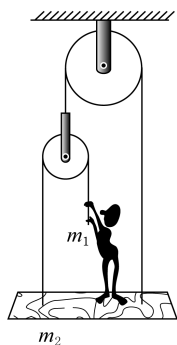


图 2.6(a)

**解** 分别就人( $m_1$ )、升降机( $m_2$ ), 小滑轮受力分析如图 2.6(b), 由于滑轮和绳的质量不计, 所以绳中各处张力相等, 整个装置保持静止应用牛顿第二定律, 有

对人:

$$T_1 + N - m_1 g = 0$$

对升降机:

$$T_1 + T - N' - m_2 g = 0$$

对小滑轮:

$$T - T'_1 - T'_1 = 0$$

考虑到  $T_1 = T'_1$ , 联立方程求解得

$$T_1 = \frac{m_1 + m_2}{4} g = 220.5 \text{ N}$$

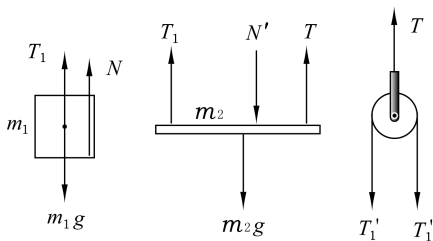


图 2.6(b)

这就是人要用的作用在绳上的力.

**2.7** 如图 2.7(a)所示, 用电学的方法使小球 A 和 B 带电而彼此相吸, 当 B

以  $\varphi$  角放在  $A$  下时,  $A$  保持静止, 并使绳子与垂直线成  $\theta$  角. 试证明  $B$  对  $A$  施加的电力的大小为  $F_{BA} = mg/(\cos \varphi \cot \theta - \sin \varphi)$ , 绳子张力的大小为  $T = mg/(\cos \theta - \sin \theta \tan \varphi)$ .

**证明** 取球  $A$  为研究对象, 分析受力, 建立坐标如图(b)所示.

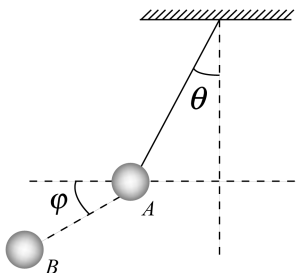


图 2.7(a)

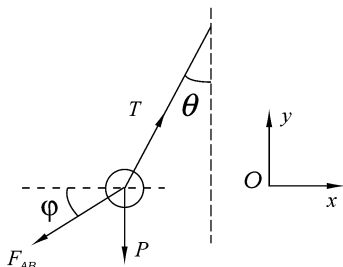


图 2.7(b)

球  $A$  保持静止, 因而有

$$P + F_{BA} \sin \varphi - T \cos \theta = 0 \quad (1)$$

$$T \sin \theta - F_{BA} \cos \varphi = 0 \quad (2)$$

联立式(1)、(2)解得

$$F_{BA} = mg/(\cos \varphi \cot \theta - \sin \varphi)$$

$$T = mg/(\cos \theta - \sin \theta \tan \varphi)$$

命题得证.

**2.8** 宇宙飞船沿地球与月球的中心连线从地球飞到月球. 试求宇宙飞船飞到何处, 地球对飞船的引力和月球对飞船的引力正好相互抵消. 月球的质量为  $m_m = 7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$ , 月球的轨道半径为  $r_{em} = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$ .

**解** 设宇宙飞船飞到距地球中心  $x$  时, 两引力相等  
则有

$$G \frac{M_e m}{x^2} = G \frac{M_m m}{(r_{em} - x)^2}; \text{式中 } M_e \text{ 为地球质量}$$

解得

$$x = \frac{r_{em}}{\sqrt{\frac{m_m}{M_e} + 1}} = 3.46 \times 10^8 \text{ m}$$

**2.9** 桌上有一质量  $M = 1 \text{ kg}$  的板, 板上放一质量  $m = 2 \text{ kg}$  的物体, 物体和板之间、板和桌面之间的滑动摩擦因数均为  $\mu = 0.25$ , 最大静摩擦因数均为  $\mu_0 = 0.30$ , 以水平力  $F$  作用于板上, 如图 2.9(a) 所示.

(1)若物体与板一起以  $a=1\text{ m/s}^2$  的加速度运动,试计算物体与板以及板与桌面之间相互作用的摩擦力.

(2)若欲使板从物体下抽出,问力  $F$  至少要多大?

**解** (1)物体与板一起运动时,以整体为研究对象,它们对桌面的压力即为其重力  $N_M=(m+M)g$ ,因此,板对桌面的摩擦力为

$$f_M = \mu N_M = \mu(m+M)g = 7.35\text{ N}$$

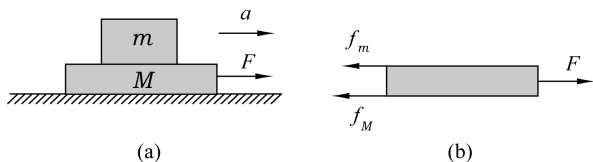


图 2.9

物体  $m$  由于受到向右的静摩擦力  $f_m$  作用与板一起以加速度  $a=1\text{ m/s}^2$  运动,因此物体与板之间的摩擦力为

$$f_m = ma = 2\text{ N}$$

(2)欲使板从物体下抽出,物体  $m$  所受力为最大静摩擦力  $f_m = \mu_0 N_m$ ,并获得最大加速度  $a_0 = \frac{f_m}{m} = \mu_0 g$ ,此时,板也必须获得不小于  $a_0$  的加速度,板此时受力如图 2.9(b),因此

$$F - f_M - f_m \geq Ma_0$$

即

$$F \geq f_M + f_m + Ma_0$$

将

$$f_M = \mu(M+m)g$$

$$f_m = \mu_0 N_m = \mu_0 mg$$

$$a_0 = \mu_0 g \text{ 代入知}$$

$$F \geq \mu(m+M)g + \mu_0(m+M)g = 16.7\text{ N}$$

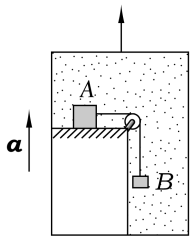


图 2.10(a)

**2.10** 如图 2.10(a)所示,升降机中有一质量为  $m$  的物体  $A$ ,它以绕过滑轮的绳索与质量也是  $m$  的物体  $B$  相连,物体  $A$  与台面之间无摩擦.当升降机以  $g/2$  ( $g$  为重力加速度)的加速度加速上升时,以升降机为参考系,  $A, B$  两物体的加速度是多大? 又以机外地面为参考系,  $A, B$  两物体的加速度是多大?

**解** 选固结于地面的  $Oxy$  为定坐标系,固结于升降

机的  $O'x'y'$  为动坐标系,  $A$ 、 $B$  受力如图 2.10(b), 用  $a'_A$  和  $a'_B$  分别代表  $A$ 、 $B$  的相对加速度, 用  $a_A$ 、 $a_B$  分别代表  $A$ 、 $B$  物体相对地面  $Oxy$  参考系的加速度, 按题意  $O'x'y'$  相对于  $Oxy$  的加速度为  $\frac{1}{2}g$ , 方向沿  $y$  轴向上. 由伽利略变换

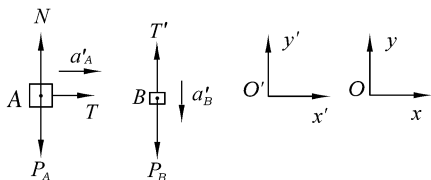


图 2.10(b)

对  $A$  有

$$\begin{aligned} a_{Ax} &= a'_{Ax} + 0 = a'_A \\ a_{Ay} &= a'_{Ay} + \frac{1}{2}g = \frac{1}{2}g \end{aligned}$$

对  $B$  有

$$\begin{aligned} a_{Bx} &= a'_{Bx} + 0 = 0 \\ a_{By} &= a'_{By} + \frac{1}{2}g = -a'_B + \frac{1}{2}g \end{aligned}$$

注意到此时升降机已不再是惯性系, 牛顿定律只对惯性系 (即此题的地面参考系) 成立 (注: 在非惯性系应用牛顿定律时, 要考虑到惯性力) 于是对  $A$  有

$$T = ma_{Ax} = ma'_A \quad (1)$$

$$N - P_A = ma_{Ay} = \frac{1}{2}mg \quad (2)$$

对  $B$  有

$$T' - P_B = ma_{By} = m\left(\frac{1}{2}g - a'\right) \quad (3)$$

解方程并注意到  $T' = T$ ,  $a'_A = a'_B = a'$ , 可得

$$a' = \frac{3}{4}g = 0.75g, \quad a_{Ax} = a' = 0.75g$$

$$a_{By} = \frac{1}{2}g - a' = -0.25g$$

注意到  $a_{Ay} = \frac{1}{2}g$   $a_{Bx} = 0$  可得  $A$ 、 $B$  两物体相对地面参考系的加速度为

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}g, \quad a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = 0.25g$$

**2.11** 重物  $A$  和  $B$  的重量分别为  $P_A = 200 \text{ N}$  和  $P_B = 400 \text{ N}$ , 并以弹簧相互连接, 重物  $A$  沿铅垂线作简谐运动. 以  $A$  的平衡位置为坐标原点, 取坐标轴正方向向下,  $A$  的运动学方程为  $x = h \cos \omega t$ , 其中振幅  $h = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ , 角频率  $\omega = 8\pi \text{ rad/s}$ . 弹簧的质量不计. 求

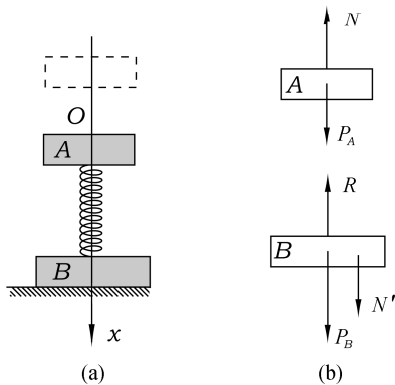


图 2.11

(1) 弹簧对  $A$  的作用力  $N$  的最大值和最小值;

(2)  $B$  对支承面的压力的最大值和最小值.

**解** 取重物  $A$ 、 $B$  为研究对象,  $A$ 、 $B$  受力如图 2.11(b)

$$(1) \text{按图有 } P_A - N = m_A a = m_A \frac{d^2 x}{dt^2} = -m_A h \omega^2 \cos \omega t$$

$$N = P_A + m_A h \omega^2 \cos \omega t = m_A \omega^2 x + P_A$$

$A$  在最低位置时,  $x = h$ , 这时  $a = -h\omega^2$ ,  $N$  有最大值.

$$N_{\max} = P_A + m_A \omega^2 h = P_A \left( 1 + \frac{\omega^2 h}{g} \right) = 328.9 \text{ N}$$

$A$  在最高位置时,  $x = -h$ , 这时  $a = h\omega^2$ ,  $N$  有最小值

$$N_{\min} = P_A - m_A \omega^2 h = P_A \left( 1 - \frac{\omega^2 h}{g} \right) = 71.1 \text{ N}$$

(2)  $B$  对支承面压力的最大值和最小值分别为

$$R_{\max} = P_B + |N_{\max}| = 728.9 \text{ N}$$

$$R_{\min} = P_B + |N_{\min}| = 471.1 \text{ N}$$

**2.12** 卡车本身连同所载人员、货物共重  $4 \text{ t}$ . 车身在钢板弹簧上振动, 其位移满足规律  $y = 0.08 \sin 4\pi t (\text{m})$ , 求卡车对弹簧的压力.

**解** 车身做我们的研究对象, 车身受力如图, 依图有

$$N - P = ma = m \frac{d^2 y}{dt^2} = -0.08(4\pi)^2 \sin 4\pi t$$

$$N = P + ma = [4 - 5.15 \sin 4\pi t](t)$$

由牛顿第三定律, 卡车对弹簧的压力为

$$N' = -[4 - 5.15 \sin 4\pi t](t)$$

**2.13** 一桶内盛水, 系于绳的一端, 并绕  $O$  点以角速度  $\omega$  在铅直平面内旋转. 设水的质量为  $m$ , 桶的质量为  $M$ , 圆周半径为  $R$ , 问  $\omega$  为多大时, 才能保证水流不出来? 又问在最高点和最低点时绳中的张力多大?

**解** 以水为研究对象, 水受力如图, 我们可直观地感到: 如果  $\omega$  过小, 水就会流出来.

(1) 按图 2.13(b) 有

$$N + mg = mR\omega^2$$

令  $N=0$  此时恰能保证水不流出来, 得  $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ , 当  $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}}$  时, 水不会流出来.

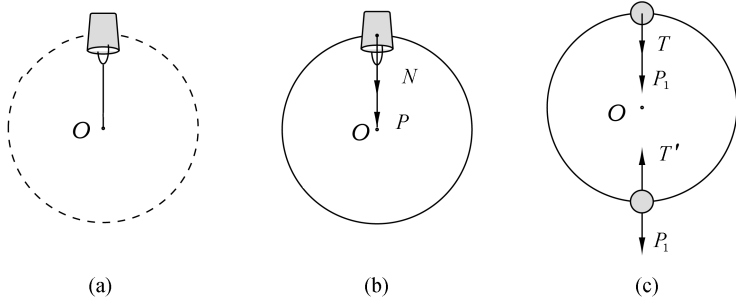


图 2.13

(2) 把水和桶看作一个整体, 其受力如图 2.13(c).

最高点

$$T + (M + m)g = (M + m)R\omega^2$$

最低点

$$T' - (M + m)g = (M + m)R\omega^2$$

解得最高点和最低点时, 绳中的张力分别为

$$T = (M + m)(R\omega^2 - g), \quad T' = (M + m)(R\omega^2 + g)$$

**2.14** 一根长为  $l$ , 质量可以忽略的细棒, 可绕其端点在铅直面内匀角速运

动,棒的另一端附着一质量为  $m$  的小球,如图 2.14(a)所示.

(1)试分析在顶点  $A$  处的速率取什么值时,才能使棒对小球的作用力为零;速率满足什么条件才能使棒对小球的作用力为拉力或推力?

(2)设  $m=500\text{ g}$ ,  $l=50\text{ cm}$ , 小球以  $v=40\text{ cm/s}$  的速率作匀速率运动. 求  $A$ ,  $B$ ,  $C$  三点处棒对小球的作用力.

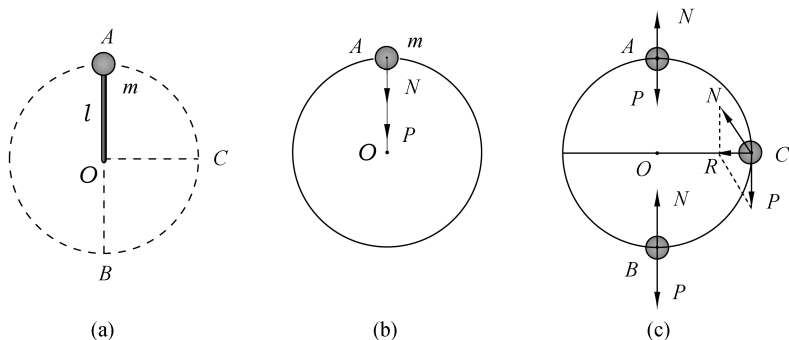


图 2.14

**解** (1)取小球  $A$  进行分析,直观上可感到,如果小球速度小,小球将对棒有一推力,若小球速度大,棒将对小球有一拉力.小球在  $A$  处的受力如图 2.14(b),按图有

$$N + P = m \frac{v^2}{l}$$

令  $N=0$  得  $v = \sqrt{gl}$ , 显然当  $v > \sqrt{gl}$ ,  $N > 0$  为拉力; 当  $v < \sqrt{gl}$  时,  $N < 0$  为推力.

(2)此时小球的速度为  $40\text{ cm/s}$ , 小于  $\sqrt{gl}$ , 小球在  $A$  点受到棒的推力, 小球在  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点受力如图 2.14(c)

$$A \text{ 点: } P - N = m \frac{v^2}{l}, \quad N = 4.74\text{ N}$$

$$B \text{ 点: } N - P = m \frac{v^2}{l}, \quad N = 5.06\text{ N}$$

$$C \text{ 点: } R = m \frac{v^2}{l} = 0.16\text{ N}$$

$$N = R^2 - P^2 = 4.9\text{ N}$$

**2.15** 如图 2.15(a)所示,用一穿过光滑桌面上小孔的绳,将放在桌面上的质点  $m$  与悬挂着的质点  $M$  连接起来,  $m$  在桌面上作匀速率圆周运动. 问  $m$  在桌面上圆周运动的速率  $v$  和圆周半径  $r$  满足什么关系时,才能使  $M$  静止不动?

**解**  $m$  和  $M$  受力如图 2.15(b)

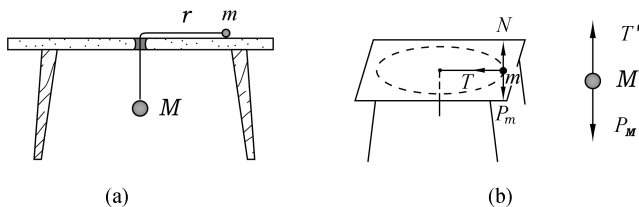


图 2.15

对  $m$  有

$$T = m \frac{v^2}{r}$$

当  $M$  静止不动时,对  $M$  有

$$T' = P_M = 0$$

$$T = T'$$

解得

$$\frac{v^2}{r} = \frac{M}{m} g$$

**2.16** 上题中若没有  $M$ ,而连接  $m$  的是弹簧,弹簧的另一端固定在中心,且弹簧的伸长满足胡克定律.假设质点  $m$  以转数  $\gamma$  旋转( $\gamma$  为单位时间内旋转的圈数),试证明

(1) 匀速圆周运动的半径为  $kl_0 / (k - 4\pi^2 m \gamma^2)$ ;

(2) 弹簧的弹性力为  $4\pi^2 mkl_0 \gamma^2 / (k - 4\pi^2 m \gamma^2)$ .

式中  $l_0$  为弹簧原长,  $k$  为劲度系数.

**解** 弹簧变形量  $\Delta l = r - l_0$  弹簧的弹性力  $T = k(r - l_0)$

于是有

$$k(r - l_0) = m \frac{v^2}{r}, \quad v = 2\pi r \gamma$$

解得

$$r = \frac{kl_0}{k - 4\pi^2 m \gamma^2}$$

$$T = \frac{kl_0 4\pi^2 m \gamma^2}{k - 4\pi^2 m \gamma^2}$$

**2.17** 当月亮朝向太阳时,地球对月亮的力  $F_{em}$  与太阳对月亮的力  $F_{sm}$  基本上成  $90^\circ$  夹角,如图 2.17 所示.已知  $F_{em} = 1.98 \times 10^{20} \text{ N}$ ,  $F_{sm} = 4.36 \times 10^{20} \text{ N}$ ,忽略所有其它力对月亮的影响,月亮的质量为  $7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$ ,试求月亮加速度的大小.

这是月亮相对地球的加速度吗？

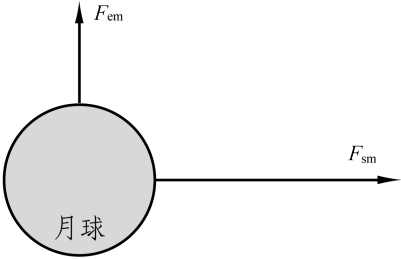


图 2.17

**解** 月球所受的合力

$$F = \sqrt{F_{em}^2 + F_{sm}^2}$$

月球加速度的大小

$$\begin{aligned} a = \frac{F}{m} &= \frac{\sqrt{(1.98 \times 10^{20})^2 + (4.36 \times 10^{20})^2}}{7.35 \times 10^{22}} \\ &= 6.52 \times 10^{-3} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2} \text{)} \end{aligned}$$

这不是月球相对地球的加速度

**2.18** 一飞机上升达到最高位置,然后下降,它的路径为一半径为  $R$  的竖直圆周,如图 2.18(a)所示.当飞机达到最高点时,飞机的恒定速率  $v$  正好使飞行员失重.试证明当飞机沿圆周飞行时,飞机对飞行员的作用力(飞行员和坐椅间的接触力)为  $N=2mg\sin^2(\theta/2)$ .式中  $m$  为飞行员的质量,  $\theta$  为飞行速度与水平方向间的夹角.

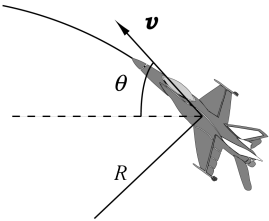


图 2.18(a)

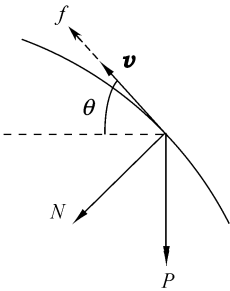


图 2.18(b)

**证明** 对飞行员受力情况进行分析,如图 2.18(b)

当飞机到达最高点时,飞行员失重  
有

$$P = m \frac{v^2}{R} \quad \text{即} \quad v^2 = gR$$

当飞机以恒定速率沿圆周飞行时,沿法向方向,有

$$N + P \cos \theta = m \frac{v^2}{R}$$

$$N = m \frac{v^2}{R} - mg \cos \theta = 2mg \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

切向方向受力为

$$f = P \sin \theta = mg \sin \theta$$

**2.19** 如图 2.19(a)所示,将一质量为  $m$  的物体  $A$ ,放在一个绕竖直轴以每秒  $\nu$  转的恒定速率转动的漏斗中.漏斗的壁与水平面成  $\theta$  角.设物体  $A$  与漏斗壁间的静摩擦因数为  $\mu_0$ ,物体  $A$  与转轴的距离为  $r$ .问物体  $A$  与漏斗保持相对静止时,  $\nu$  应该在什么范围之内?

**解** 当  $\nu$  较大时,  $A$  有向上滑动趋势,摩擦力方向向下,  $A$  受力如图 2.19(b), 按图有

$$N \sin \theta + f_r \cos \theta = mr\omega^2 = mr4\pi^2 \nu^2$$

$$N \cos \theta - f_r \sin \theta - P = 0$$

当  $f_r$  随  $\nu$  增大到  $f_{\max} = \mu_0 N$  时,  $\nu$  亦增大到  $\nu_{\max}$ , 于是有

$$N \sin \theta + \mu_0 N \cos \theta = mr4\pi^2 \nu_{\max}^2$$

$$N \cos \theta - \mu_0 N \sin \theta - P = 0$$

解得

$$\nu_{\max} = \frac{1}{2\pi} \frac{g(\sin \theta + \mu_0 \cos \theta)}{r(\cos \theta - \mu_0 \sin \theta)}$$

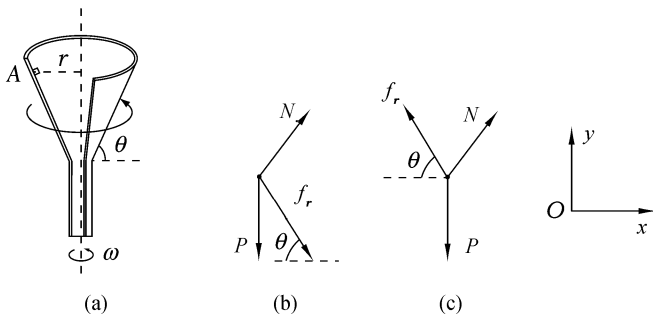


图 2.19

当  $v$  较小时,  $A$  有向下滑动趋势, 摩擦力方向向上,  $A$  受力如图 2.19(c), 类似上述分析, 达到极限情况时有

$$N \sin \theta - \mu_0 N \cos \theta = m r 4 \pi^2 v_{\min}^2$$

$$N \cos \theta + \mu_0 N \sin \theta - P = 0$$

解得

$$v_{\min} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g(\sin \theta - \mu_0 \cos \theta)}{r(\cos \theta + \mu_0 \sin \theta)}}$$

可见要使  $A$  与漏斗保持相对静止,  $v$  应该在  $v_{\max} > v > v_{\min}$  之间.

**2.20** 质量为  $m$  的质点, 被固定中心以大小为  $F = \mu m r$  的力排斥, 其中  $r$  为质点到固定中心的距离. 在起始时,  $r_0 = a, v_0 = 0$ . 求当质点走过路程  $s = a$  时的速率.

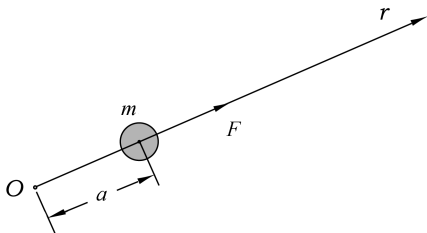


图 2.20

**解** 如图对质点  $m$  应用牛顿定律并通过变量替换, 有

$$\mu m r = m \frac{dv}{dt} = m v \frac{dv}{dr}$$

即

$$v dv = \mu r dr$$

积分

$$\int_0^v v dv = \int_a^{2a} \mu r dr$$

得

$$v = 3\mu \cdot a$$

**2.21** 跳伞员与装备的质量共为  $m$ , 从伞塔上跳下时立即张伞, 可以粗略地认为张伞时速度为零, 此后空气阻力与速率平方成正比, 即  $R = kv^2$ . 求跳伞员的运动速率  $v$  随时间  $t$  变化的规律和终极速率  $v_T$ .

**解** 这是一个变加速问题, 求解要用到微积分, 但物理概念并没有什么特殊. 跳伞员及装备受力如图

依图有

$$P - R = ma$$

$$mg - kv^2 = m \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{\frac{mg}{k} - v^2} = \frac{k}{m} dt$$

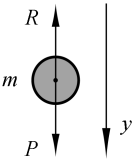


图 2.21

令

$$\frac{mg}{k} = v_T^2$$

则

$$\frac{dv}{v_T^2 - v^2} = \frac{k}{m} dt$$

积分

$$\int_0^v \frac{dv}{v_T^2 - v^2} = \frac{k}{m} \int_0^t dt$$

得

$$v = v_T \frac{e^{2t/t_R} - 1}{e^{2t/t_R} + 1}$$

式中  $v_T = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ ,  $t_R = \frac{m}{kv_T} = \sqrt{\frac{m}{kg}}$ .

当  $a = \frac{dv}{dt} = 0$  时,有极限速率  $v_T$ .

令

$$mg - kv_T^2 = m \frac{dv}{dt} = 0$$

得

$$mg - kv_T^2 = 0, \quad v_T = \frac{mg}{k}$$

## 第3章 功 和 能

### 一、基本内容和主要公式

#### 1. 功

在质点产生一元位移  $d\mathbf{r}$  的过程中,作用在质点上的力  $\mathbf{F}$  所做的功被定义为力  $\mathbf{F}$  和位移  $d\mathbf{r}$  的标积,即

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

力  $\mathbf{F}$  在路程  $ab$  上的功为

$$A_{ab} = \int_{a(l)}^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

功率:力  $\mathbf{F}$  在单位时间内所做的功,即

$$P = \frac{dA}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

几种常见力的功

重力的功:  $A = mg(z_1 - z_2)$

万有引力的功:  $A = GmM \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$

弹簧弹性力的功:  $A = \frac{1}{2} k\lambda_1^2 - \frac{1}{2} k\lambda_2^2$

摩擦力的功:  $A = \mu mgs$

重力、万有引力、弹簧弹性力做功与路径无关;摩擦力做功与路径有关。

#### 2. 动能定理

质点的动能定理:合外力对质点做的功等于质点动能的增量,即

$$A = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2$$

质点系的动能定理:外力对质点系做的功与内力对质点系做的功之和等于质点系总动能的增量,即

$$\sum_i A_e + \sum_i A_i = E_{k2} - E_{k1}$$

其中:  $\sum_i A_e$  为外力的功,  $\sum_i A_i$  为内力的功;  $E_{k2} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i2}^2$  为质点系末态总动能;

$E_{k1} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i1}^2$  为质点系初态总动能。

#### 3. 应用动能定理解题的一般步骤

确定研究对象;分析研究对象的受力和各力做功情况;列方程求解;讨论。

#### 4. 保守力

作功与路径无关的力.重力、万有引力、弹簧弹性力等都是保守力.

#### 5. 势能

对保守力场可引入势能的概念,其定义为

$$E_p = \int_{M_0}^M \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

其中,  $\mathbf{F}$  为保守力,  $E_p$  为  $M$  点的势能,  $M_0$  为势能零点.

重力势能:  $E_p = mgz$ , 以  $z=0$  的平面为势能零点

万有引力势能:  $E_p = -G \frac{mM}{r}$ , 以无穷远处为势能零点

弹簧弹性力势能:  $E_p = \frac{1}{2} kx^2$ , 以弹簧原长处为势能零点.

#### 6. 保守力与势能的微分关系

$$\mathbf{F} = -\nabla E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\mathbf{k}\right) \text{ 或 } F_l = -\frac{dE_p}{dl}$$

#### 7. 机械能守恒定律

在只有保守力做功的情况下,系统的机械能保持不变.它是普遍的能量守恒定律的特例.

#### 8. 能量守恒定律

能量不能消失,也不能创造,只能从一种形式转换为另一种形式.对一孤立系统,各种形式的能量可以互相转换,但它们的总和是一个常数.

### 二、典型例题

**3-1** 一弹簧的质量为  $m$ , 原长为  $l_0$ , 劲度系数为  $k$ . 其一端固定, 另一端系一质量为  $M$  的小球, 置于光滑的水平桌面上, 弹簧的伸长是均匀的. 如图 3-1 所示, 现将小球拉至  $A$  点, 然后无初速地突然释放小球, 试求小球经过位置  $B$  时的速度.

**解** 取坐标如图所示, 由于弹簧伸长是均匀的, 所以弹簧上任意一点的速度  $v_x$  将随  $x$  线性增加, 即在  $x$  处弹簧的速度为

$$v_x = \frac{x}{y} v$$

式中  $v$  为弹簧终端在  $B$  处的速度, 即小球的速度. 弹簧上  $dx$  微元的动能为

$$dE_{km} = \frac{1}{2} (dm) v_x^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{m}{y} dx \right) \left( \frac{x}{y} v \right)^2 = \frac{mv^2}{2y^3} x^2 dx$$

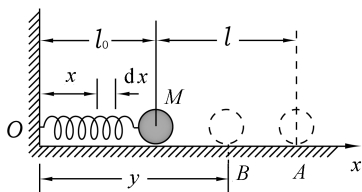


图 3-1

则弹簧的总动能为

$$E_{km} = \int dE_{km} = \int_0^y \frac{mv^2}{2y^3} x^2 dx = \frac{1}{6} mv^2$$

小球经过位置  $B$  时的速度为  $v$ , 其动能为

$$E_{kM} = \frac{1}{2} Mv^2$$

则小球与弹簧组成的系统的动能为

$$E = E_{km} + E_{kM} = \frac{1}{6} mv^2 + \frac{1}{2} Mv^2$$

取小球与弹簧为系统, 因为内力为保守力, 外力不做功, 故系统的机械能守恒

$$\frac{1}{2} kl^2 = \frac{1}{6} mv^2 + \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} k(y - l_0)^2$$

解得

$$v = \sqrt{\frac{3k[l^2 - (y - l_0)^2]}{3M + m}}$$

**说明** 通常关于弹簧的问题都不考虑其质量. 但本题给出了一个要考虑弹簧质量的问题. 弹簧弹性力做功是保守力做功, 机械能守恒. 本题的关键在于计算弹簧的动能. 弹簧上各个质元的速度不同, 因而其动能也不同, 这样就需先计算出一个微元的动能即本题中的  $\frac{1}{2} (dm) v_x^2$ , 然后通过积分求整个弹簧的动能, 最后运用机械能守恒定律求解.

**3-2** 均质链条的一端被外力牵住, 在水平桌面上的部分呈长度为  $l_1$  的直线, 长度为  $l_2$  的另一部分自然下垂. 设桌面与链条的摩擦因数为  $\mu$ , 链条的线密度为  $\lambda$ . 撤去外力后, 链条开始滑动. 求链条在桌面移动距离为  $x$  时的速度.

**解法一** 用牛顿定律求解

取整个链条为研究对象, 分析其受力. 当链条在桌面移动距离  $x$  时, 沿链条方向, 链条受重力  $(l_2 + x)\lambda g$ , 摩擦力  $\mu(l_1 - x)\lambda g$ . 根据牛顿定律:

$$(l_2 + x)\lambda g - \mu(l_1 - x)\lambda g = \lambda(l_1 + l_2)a$$

$$a = \frac{l_2 + x}{l_1 + l_2} g - \mu \frac{l_1 - x}{l_1 + l_2} g$$

即

$$\frac{dv}{dt} = \frac{l_2 + x}{l_1 + l_2} g - \mu \frac{l_1 - x}{l_1 + l_2} g$$

变量替换得

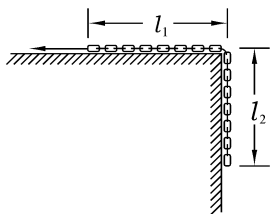


图 3-2

$$v dv = \left[ \frac{l_2 + x}{l_1 + l_2} g - \mu \frac{l_1 - x}{l_1 + l_2} g \right] dx$$

$$= \frac{g}{l_1 + l_2} [(1 + \mu)x dx + (l_2 - \mu l_1) dx]$$

当  $x=0$  时, 链条速度  $v=0$  积分上式

$$\int_0^v v dv = \frac{g}{l_1 + l_2} \int_0^x [(1 + \mu)x dx + (l_2 - \mu l_1) dx]$$

得

$$v = \sqrt{\frac{g}{l_1 + l_2} [(1 + \mu)x^2 + 2(l_2 - \mu l_1)x]^{1/2}}$$

**解法二** 用动能定理求解.

取整个链条为研究对象, 当链条在桌面移动了距离  $dx$  时, 链条所受重力做功为  $\lambda(l_2 + x)gdx$ , 摩擦力做功  $\mu\lambda(l_1 - x)gdx$ , 链条动能变化为  $d\left[\frac{1}{2}\lambda(l_1 + l_2)v^2\right]$  根据动能定理:

$$d\left[\frac{1}{2}\lambda(l_1 + l_2)v^2\right] = \lambda(l_2 + x)gdx - \mu\lambda(l_1 - x)gdx$$

依题意知:  $x=0$  时,  $v=0$  积分上式

$$\int_0^v d\left[\frac{1}{2}\lambda(l_1 + l_2)v^2\right] = \int_0^x [\lambda(l_2 + x)gdx - \mu\lambda(l_1 - x)gdx]$$

即

$$\int_0^v d\left[\frac{1}{2}\lambda(l_1 + l_2)v^2\right] = \int_0^x [\lambda g(1 + \mu)x dx + \lambda g(l_2 - \mu l_1)dx]$$

从而得

$$v = \sqrt{\frac{g}{l_1 + l_2} [(1 + \mu)x^2 + 2(l_2 - \mu l_1)x]^{1/2}}$$

**说明** 这是一个变力做功问题. 运用动能定理的微分形式解此题时, 注意正确写出变力的功, 通过积分就可解此题. 同时, 直接用牛顿定律也可求解此题, 但我们可看到: 当问题中涉及到随位置变化的力的功时, 用动能定理求解有很大的方便.

**3-3** 一摆铃是由金属线围成的半径为  $a$  的圆环, 在此环上套上一个质量为  $m$  的很小的圆环, 设小环可在大圆环上无摩擦地滑动, 大环放置在竖直平面内. 在大环的最低点  $A$  将一个弹簧的一端固定, 弹簧的另一端则连到小环上, 如图所示. 弹簧的自由长度也为  $a$ , 劲度系数为  $k = \frac{mg}{a}$ . 如果开始把小环拉到大圆环的最高点, 并以水平初速  $v_0 = \frac{ag}{2}$  释放, 那么在大圆环的最低点, 小环的速度为多少? 同时, 证明在起始阶段, 大圆环对小环的作用力是离开大圆环中心的, 而在小环转过

角度  $\cos^{-1}\frac{11}{12}$  以后,大环对小环的作用力则是指向大环中心的.

**解** 设小环在  $B$  点时,弹簧与竖直方向夹角为  $\varphi$ ,对大环中心的张角为  $\theta$ ,小环受三个力作用,重力  $mg$ ,弹簧的弹性力  $T$ ,大环对小环的作用力  $N$ (假定沿半径向外为正).

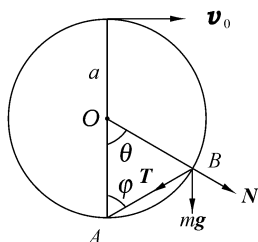


图 3-3

设小环在  $B$  点的速度为  $v$ ,由牛顿第二定律得

$$\frac{mv^2}{a} = T\cos\varphi - mg\cos\theta - N \quad (1)$$

又

$$\begin{aligned} T &= k\Delta l = \frac{mg}{a}(2a\cos\varphi - a) \\ &= mg(2\cos\varphi - 1) \end{aligned} \quad (2)$$

以小环、弹簧与地球为研究系统,则系统机械能守恒.

取最高点为重力势能零点,弹簧原长为弹性势能零点,故有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}mv^2 - mga(1 + \cos\theta) + \frac{1}{2}\frac{mg}{a}(2a\cos\varphi - a)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left[\sqrt{\frac{ga}{2}}\right]^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{a}(2a - a)^2 \end{aligned}$$

即

$$\frac{v^2}{a} = \frac{g}{2}(5 + 4\cos\theta + 8\cos\varphi - 8\cos^2\varphi) \quad (3)$$

将式(3)、(2)代入式(1)得

$$\frac{2N}{mg} = 12\cos^2\varphi - 10\cos\varphi - 6\cos\theta - 5$$

又因为

$$\theta = \pi - 2\varphi$$

所以

$$N = \frac{mg}{2}(12\cos\varphi - 11)(2\cos\varphi + 1) \quad (4)$$

(1)对于大环最低点  $A$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = 0$ ,代入式(3)得

$$v_A = \frac{3}{2}\sqrt{2ag}$$

(2)由式(4)可知:当  $\cos\varphi = \frac{11}{12}$  时,  $N = 0$ .

当  $0 < \varphi < \arccos\frac{11}{12}$  时,  $2\cos\varphi + 1 > 0$ ,  $12\cos\varphi - 11 > 0$ ,这时  $N > 0$ ,即大环对小

环的作用力是离心的.

当  $\arccos \frac{11}{12} < \varphi < \frac{2\pi}{3}$  时,  $2\cos \varphi + 1 > 0$ ,  $12\cos \varphi - 11 < 0$ , 这时  $N < 0$ , 即大环对小环的作用力是向心的.

**说明** 本题综合运用了牛顿定律与机械能守恒定律. 重力和弹簧弹性力是保守力, 机械能守恒, 在写出弹簧弹性势能时, 要注意其势能零点是选在弹簧原长处, 并注意  $N=0$  是大环对小环作用力方向变化的临界点.

**3-4** 质量为  $5.6 \text{ g}$  的子弹  $A$ , 以  $501 \text{ m/s}$  的速度水平地射入一静止在水平面上的质量为  $2 \text{ kg}$  的木块  $B$  内,  $A$  射入  $B$  后,  $B$  向前移动了  $50 \text{ cm}$  后而停止, 求:

(1)  $B$  与水平面间的摩擦因数.

(2) 木块对子弹所作的功  $W_1$ .

(3) 子弹对木块所作的功  $W_2$ .

(4)  $W_1$  与  $W_2$  的大小是否相等? 为什么?

**解** (1) 子弹射入木块时间短暂, 可认为此过程木块没有移动, 在此过程中, 其内力远大于摩擦外力, 动量守恒.

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u$$

$$A \text{ 和 } B \text{ 的共同速度: } u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

对  $A$  和  $B$  构成的系统, 由动能定理

$$-\mu(m_1 + m_2)gs = 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2$$

可得摩擦因数

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{u^2}{2gs} = \frac{m_1^2}{2gs(m_1 + m_2)^2} v_1^2 \\ &= \frac{(5.6 \times 10^{-3})^2}{2 \times 9.8 \times 0.5 \times (5.6 \times 10^{-3} + 2)^2} \times 501^2 = 0.2\end{aligned}$$

(2) 对子弹, 由于木块对其做功, 使其速度从  $v_1 = 501 \text{ (m/s)}$  减为零, 因此根据动能定理

$$W_1 = 0 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = -\frac{1}{2} \times 5.6 \times 10^{-3} \times 501^2 = -703 \quad (\text{J})$$

(3) 对木块, 在整个过程中, 子弹对其做功, 同时水平面的摩擦力也对其做功, 木块初始静止, 而后移动  $50 \text{ cm}$  后停止, 因此, 根据动能定理

$$W_2 - \mu(m_1 + m_2)gs = 0$$

即

$$\begin{aligned}W_2 &= \mu(m_1 + m_2)gs \\ &= 0.2 \times (5.6 \times 10^{-3} + 2) \times 9.8 \times 50 \times 10^{-2} = 1.97 \quad (\text{J})\end{aligned}$$

(4)  $W_1$  和  $W_2$  数值上不相等,其和也不为零.这是因为  $A$  和  $B$  系统内力做功之和不为零,它改变了系统的机械能.

**说明** 系统的内力不改变系统的动量而可能改变系统的机械能在此题中得到充分的体现.结合动量守恒定律和动能定理就可解此题.在运用动能定理求  $W_1$  和  $W_2$  时,要正确分析子弹和木块在整个过程中各力做功情况.例如对子弹,从初速  $501 \text{ m/s}$  到同木块一起静止是由于木块对其做功的结果.

### 三、习题详解

#### 3.1 选择题

(1)把一质量为  $m$ ,各边长均为  $2a$  的均质货箱,由位置(I)翻转到位置(II),则人力所作的功为(D).

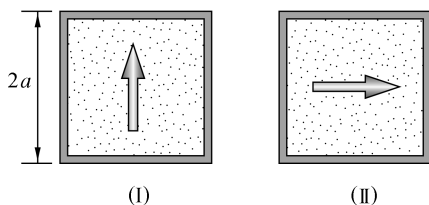


图 3.1(1)

- (A) 0                      (B)  $2mga$   
(C)  $mga$                 (D)  $(\sqrt{2}-1)mga$

(2)宇宙飞船关闭发动机返回地球的过程,可以认为是仅在地球万有引力作用下运动.若用  $m$  表示飞船质量,  $M$  表示地球质量,  $G$  表示引力常量,则飞船从距地球中心  $r_1$  处下降到  $r_2$  处的过程中,动能的增量为(C).

- (A)  $\frac{GmM}{r_2}$     (B)  $\frac{GmM}{r_2^2}$     (C)  $GmM \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$     (D)  $GmM \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 r_2}$

(3)质点  $M$  与一固定的轻弹簧相连接,并沿椭圆轨道运动,如图 3.1(3).已知椭圆的长半轴和短半轴分别为  $a$  和  $b$ ,弹簧原长为  $l_0$  ( $a > l_0 > b$ ),劲度系数为  $k$ ,则质点由  $A$  运动到  $B$  的过程中,弹性力所作的功为(B).

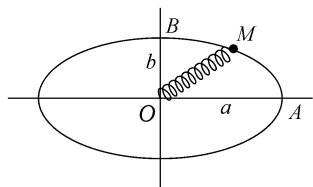


图 3.1(3)

- (A)  $\frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}kb^2$   
(B)  $\frac{1}{2}k(a-l_0)^2 - \frac{1}{2}k(l_0-b)^2$   
(C)  $\frac{1}{2}k(a-b)^2$

(D)  $\frac{1}{2} k(l_0 - b)^2 - \frac{1}{2} k(a - l_0)^2$

(4) 一劲度系数为  $k$  的弹簧振子, 一端固定, 并置于水平面上, 弹簧的伸长量为  $l$ , 如图. 若选距弹簧原长时自由端  $O$  点的距离为  $l/2$  的  $O'$  点为弹性势能的零参考点, 则弹性势能为(D).

(A)  $\frac{1}{2} k l^2$

(B)  $\frac{1}{4} k l^2$

(C)  $\frac{1}{8} k l^2$

(D)  $\frac{3}{8} k l^2$

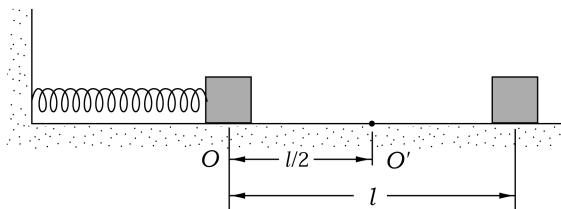


图 3.1(4)

(5) 质量为  $10 \text{ kg}$  的物体, 在变力  $F$  作用下沿  $x$  轴作直线运动, 力随坐标  $x$  的变化如图 3.1(5). 物体在  $x=0$  处, 速度为  $1 \text{ m/s}$ , 则物体运动到  $x=16 \text{ m}$  处, 速度大小为(B).

(A)  $2 \text{ m/s}$

(B)  $3 \text{ m/s}$

(C)  $4 \text{ m/s}$

(D)  $17 \text{ m/s}$

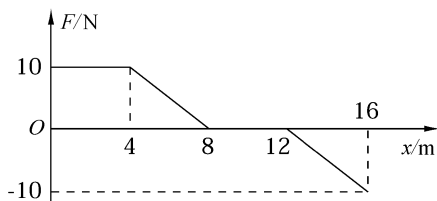


图 3.1(5)

(6) 关于质点系内各质点间相互作用的内力做功问题, 以下说法中, 正确的是(C).

(A) 一对内力所作的功之和一定为零

(B) 一对内力所作的功之和一定不为零

(C) 一对内力所作的功之和一般不为零, 但不排斥为零的情况

(D)一对内力所作的功之和是否为零,取决于参考系的选择

### 3.2 填空题

(1)质量为  $m$  的质点,自  $A$  点无初速沿图示轨道滑动到  $B$  点而停止.图中  $H_1$  与  $H_2$  分别表示  $A$ 、 $B$  两点离水平面的高度,则质点在滑动过程中,摩擦力的功为  $-mg(H_1 - H_2)$ ,合力的功为  $0$ .

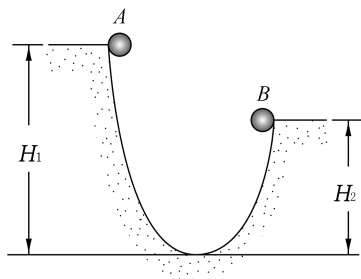


图 3.2(1)

(2)人从 10 m 深的井中提水,桶离水面时装水 10 kg.若每升高 1 m 要漏掉 0.2 kg 的水,则把这桶水从水面提高到井口的过程中,人力所作的功为  $882 \text{ J}$ .

(3)质点在力  $\mathbf{F} = 2y^2\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$  作用下沿图示路径运动.若  $\mathbf{F}$  的单位为 N,  $x, y$  的单位为 m,则力  $\mathbf{F}$  在路径  $Oa$  上的功  $A_{Oa} = 0$ ,在  $ab$  上的功  $A_{ab} = 18 \text{ J}$ ,在  $Ob$  上的功  $A_{Ob} = 17 \text{ J}$ ,在  $OcbO$  上的功  $A_{OcbO} = 7 \text{ J}$ .

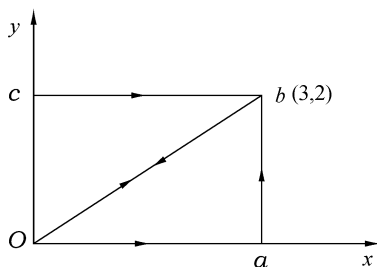


图 3.2(3)

(4)质量为  $M$ 、长为  $L$  的均质链条,挂在光滑水平细杆上,若链条因受扰动而滑下,则当链条的一端刚脱离细杆的瞬时,链条速度大小为  $\sqrt{\frac{Lg}{2}}$ .

(5)劲度系数为  $k$ 、原长为  $l_0$  的轻弹簧,一端固定于  $O$  点,另一端系一质量为  $m$  的物体如图.现将弹簧置于水平位置,并保持原长,然后无初速释放.若物体在

铅直面内摆至最低位置时,弹簧伸长量为原长的  $1/n$ , 则此时物体速度的大小为

$$\sqrt{\frac{l_0}{n} \left[ 2(n+1)g - \frac{kl_0}{nm} \right]}.$$

(6) 质量为  $m$  的子弹, 水平射入质量为  $M$ 、置于光滑水平面上的沙箱, 子弹在沙箱中前进距离  $l$  而静止, 同时沙箱向前运动的距离为  $s$ , 此后子弹与沙箱一起以共同速度  $v$  匀速运动, 则子弹受到的平均阻力  $F = \frac{Mv^2}{2s}$ , 子弹射入

时的速度  $v_0 = v \sqrt{\frac{M}{ms}(s+l)+1}$ , 沙箱与子弹系

统损失的机械能  $\Delta E = \frac{Ml}{2s} v^2$ .

**3.3** 某物块质量为  $P$ , 用一垂直于墙的压力  $N$  使其压紧在墙上, 墙与物块间的滑动摩擦因数为  $\mu$ . 试计算物块沿图示的不同路径: 弦  $AB$ 、圆弧  $AB$ 、折线  $AOB$  由  $A$  移动到  $B$  时, 重力的功和摩擦力的功. 已知圆弧半径为  $r$ .

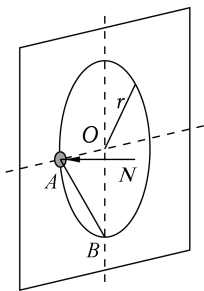


图 3.3

**解** 重力是保守力, 所做的功与路径无关, 摩擦力是非保守力, 做功与路径有关, 因而重力作的功:

$$A_{AB} = Pr$$

$$A_{AB} = Pr, \quad A_{AOB} = Pr$$

摩擦力作的功

$$A_{AB} = -\mu N \sqrt{2} r$$

$$A_{AB} = -\mu N \frac{1}{2} \pi r \quad A_{AOB} = -\mu N 2 r$$

**3.4** 一弹簧原长 20 cm, 劲度系数  $k = 2940 \text{ N/m}$ , 问将该弹簧由  $AB$  位置移动到  $A'B'$  位置时, 弹性力的功等于多少?

**解**  $AB$ 、 $A'B'$  位置时, 弹簧的伸长分别为

$$\Delta l = l - l_0 = \sqrt{0.20^2 + 0.40^2} - 0.20 = 0.247 \text{ (m)}$$

$$\Delta l' = l' - l_0 = \sqrt{0.15^2 + 0.20^2} - 0.20 = 0.05 \text{ (m)}$$

弹簧弹性力作功为弹性势能增量的负值, 因而有

$$A = - \left[ -\frac{1}{2} k (\Delta l')^2 - \frac{1}{2} k (\Delta l)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \times 2940 \times (0.247^2 - 0.05^2) = 86.0 \text{ (J)}$$

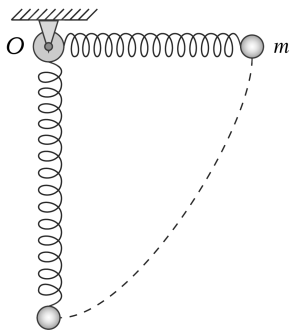


图 3.2(5)

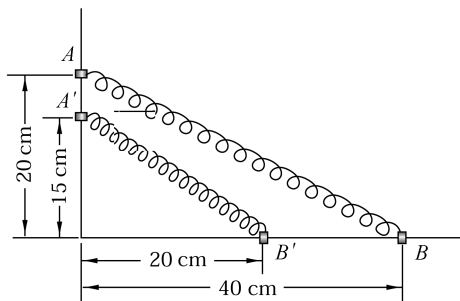


图 3.4

**3.5** 求把水从面积为  $50 \text{ m}^2$  的地下室中抽到街道上来所需作的功. 已知水深为  $1.5 \text{ m}$ , 水面至街道的距离为  $5 \text{ m}$ .

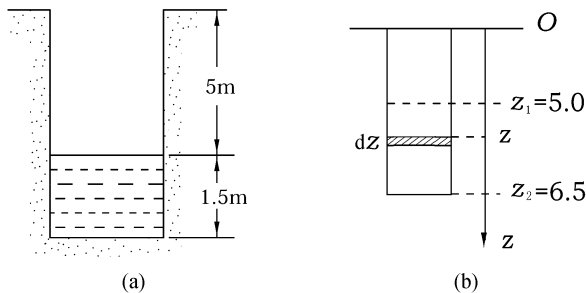


图 3.5

**解** 该功数值上等于同一过程中重力的功, 取坐标如图(b), 则有

$$\begin{aligned}
 dA_{\text{重}} &= -\rho_s g z dz \\
 A_{\text{重}} &= -\int_{z_1}^{z_2} \rho_s g z dz \\
 &= -\int_{5.0}^{6.5} 1 \times 10^3 \times 50 \times 9.8 \times z dz \\
 &= -4.23 \times 10^6 \text{ J}
 \end{aligned}$$

抽水所需的功为  $A = 4.23 \times 10^6 \text{ J}$ .

也可从能量角度考虑此题: 抽水所做的功等于水机械能的变化, 设街道为势能零点因有

$$A = 0 - \rho_s (z_2 - z_1) \cdot \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \rho_s g (z_2^2 - z_1^2) = 4.23 \times 10^6 \text{ J}$$

**3.6** 计算沿  $x$  方向的力  $F(x) = \alpha x^2 - \beta$  在从  $x_1$  到  $x_2$  这段位移中所作的功. 设  $\alpha = 3 \text{ N/m}^2$ ,  $\beta = 2 \text{ N}$ ,  $x_1 = 1 \text{ m}$ ,  $x_2 = 3 \text{ m}$ .

**解** 由功的定义,有

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (\alpha x^2 - \beta) dx \\ &= \left( \frac{1}{3} \alpha x^3 - \beta x \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= \frac{1}{3} \times 3 (3^3 - 1^3) - 2 \times (3 - 1) = 22 \text{ (J)} \end{aligned}$$

**3.7** 一质量为  $m$ 、总长为  $l$  的铁链,开始时有一半放在光滑的桌面上,而另一半下垂,如图 3.7 所示.试求铁链滑离桌面边缘时重力所作的功.

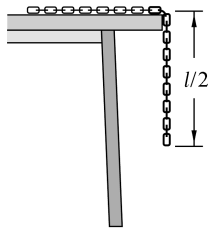


图 3.7

**解** 重力所作的功,等于铁链势能增量的负值,取桌面为势能零点,因而有

$$\begin{aligned} A &= -\Delta E_p \\ &= -\left[ \left( -\frac{1}{2} mgl \right) - \left( -\frac{1}{8} mgl \right) \right] = \frac{3}{8} mgl \end{aligned}$$

**3.8** 弹簧对物体的作用力为  $\mathbf{F} = -kx\mathbf{i} - ky\mathbf{j}$ , 这里  $k$  为物体在  $xy$  平面运动时的劲度系数,求当物体从起点  $(x_i, y_i)$  移到终点  $(x_f, y_f)$  时弹力做功的表达式.

**解** 由功的定义,有

$$\begin{aligned} A &= \int_{(x_i, y_i)}^{(x_f, y_f)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_i, y_i)}^{(x_f, y_f)} F_x dx + F_y dy \\ &= \int_{(x_i, y_i)}^{(x_f, y_f)} (-kx dx - ky dy) \\ &= \int_{x_i}^{x_f} -kx dx + \int_{y_i}^{y_f} -ky dy \\ &= \frac{1}{2} k (x_i^2 - x_f^2) + \frac{1}{2} k (y_i^2 - y_f^2) \end{aligned}$$

**3.9** 一辆小汽车,以  $v = vi$  的速度运动,受到的空气阻力近似与速率的平方成正比,  $\mathbf{F} = -Av^2\mathbf{i}$ ,  $A$  为常数,且  $A = 0.6 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$ . (1) 如小汽车以  $80 \text{ km/h}$  的

恒定速率行驶 1 km, 求空气阻力所作的功. (2) 问保持该速率空气阻力必须提供多大的功率?

**解** (1) 小汽车以 80 km/h 的恒定速率行驶时, 阻力为恒力, 因此行驶 1 km, 空气阻力所作的功

$$\begin{aligned} A &= -A v^2 s = -0.6 \times (80 \times 10^3 / 3600)^2 \times 1 \times 10^3 \\ &= -296 \times 10^3 \text{ (J)} \end{aligned}$$

(2) 功率

$$\begin{aligned} P &= F \cdot v = A v^2 v = 0.6 \times (80 \times 10^3 / 3600)^3 \\ &= 6.58 \times 10^3 \text{ (W)} \end{aligned}$$

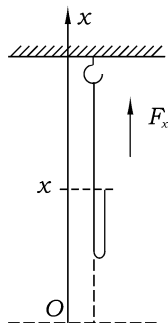


图 3.10

**3.10** 长为  $l$ 、质量  $M$  均匀分布的柔绳, 一端挂在天花板下的钩子上, 将另一端缓慢地垂直提起, 并挂在同一钩子上, 试通过直接积分(即用  $A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ), 求出该过程中对绳子所作的功.

**解** 这是一个变力作功问题, 取绳自由下垂时末端位置为坐标原点, 铅直向上为  $Ox$  轴正向, 如图 3.10. 当绳端坐标为  $x$  时,  $F_x = \frac{1}{2} \frac{M}{l} xg$ , 于是有

$$\begin{aligned} dA &= F_x dx = \frac{1}{2} \frac{M}{l} g x dx \\ A &= \int_0^l \frac{1}{2} \frac{M}{l} g x dx = \frac{1}{4} Mgl \end{aligned}$$

**3.11** 一沿  $x$  轴正方向的力作用在一质量为 3.0 kg 的质点上. 已知质点的运动学方程为  $x = 3t - 4t^2 + t^3$ , 这里  $x$  以 m 为单位, 时间  $t$  以 s 为单位. 试求:

- (1) 力在最初 4.0 s 内作的功;
- (2) 在  $t = 1$  s 时, 力的瞬时功率.

**解** (1) 由运动学方程可求质点的速度

$$v = \frac{dx}{dt} = 3 - 8t + 3t^2$$

质点动能为

$$E_k(t) = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \times 3.0 \times (3 - 8t + 3t^2)^2$$

根据动能定理, 力在最初 4.0 s 内所作的功为

$$A = \Delta E_k = E_k(4.0) - E_k(0) = 528 \text{ J}$$

$$(2) a = \frac{dv}{dt} = 6t - 8$$

质点所受的力为

$$F = ma = 3 \times (6t - 8)$$

功率为

$$p(t) = Fv = 3 \times (6t - 8) \times (3 - 8t + 3t^2)$$

$t = 1 \text{ s}$  时的瞬时功率为  $p(1) = 12 \text{ W}$  .

**3.12** 把登月舱构件从地面先发射到地球同步轨道站,再由同步轨道站装配起来发射到月球面上.已知登月舱构件质量共计为  $m = 10.0 \times 10^3 \text{ kg}$ ,同步轨道半径  $r_1 = 4.22 \times 10^7 \text{ m}$ ,地心到月心的距离  $r_2 = 39.0 \times 10^7 \text{ m}$ ,地球半径  $R_e = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ ,月球半径  $R_m = 1.74 \times 10^6 \text{ m}$ ,地球质量为  $M_e = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$ ,月球质量  $M_m = 7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$ .同时考虑到地球和月球的引力,试求上述两步发射中火箭推力各应作多少功.

**解** 设登月舱在同步轨道上的位置正好处在月、地连线线上,考虑到舱在地、月共同引力下,它的引力势能应等于它在地球引力场中的势能和在月球引力场中的势能之和.

舱在地面上时,势能为

$$E_{p0} = -Gm \left( \frac{M_e}{R_e} + \frac{M_m}{r_2 - R_e} \right) = -6.20 \times 10^{11} \text{ J}$$

舱在同步轨道上时,势能为

$$E_{p1} = -Gm \left( \frac{M_e}{r_1} + \frac{M_m}{r_2 - r_1} \right) = -9.48 \times 10^{10} \text{ J}$$

舱在月球表面上时,势能为

$$E_{p2} = -Gm \left( \frac{M_e}{r_2 - R_m} + \frac{M_m}{R_m} \right) = -3.83 \times 10^{10} \text{ J}$$

从地面到同步轨道推力所作的功

$$A_1 = E_{p1} - E_{p0} = 5.25 \times 10^{11} \text{ J}$$

从同步轨道到月球表面推力所作的功

$$A_2 = E_{p2} - E_{p1} = 5.65 \times 10^{10} \text{ J}$$

**3.13** 从地面上以一定角度发射地球卫星,发射速度  $v_0$  应为多大才能使卫星在距地心半径为  $r$  的圆轨道上运转?

**解** 卫星在地面上时(初状态)的机械能为

$$E_0 = \frac{1}{2} mv_0^2 - G \frac{M_e m}{R_e}$$

卫星到半径为  $r$  的圆轨道上(末状态)时的机械能为

$$E = \frac{1}{2} mv^2 - G \frac{M_e m}{r}$$

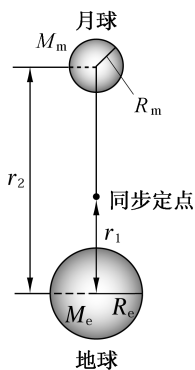


图 3.12

在圆轨道上运动时,有

$$G \frac{M_e m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad \text{即} \quad v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

根据机械能守恒定律可得

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{M_e m}{R_e} = \frac{1}{2} m \left( \frac{GM_e}{r} \right) - G \frac{M_e m}{r}$$

解得

$$v_0 = \sqrt{2gR_e \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{R_e}{r} \right)}$$

当  $r \rightarrow \infty$  时,  $v = \sqrt{2gR_e}$ , 此即为第二宇宙速度.

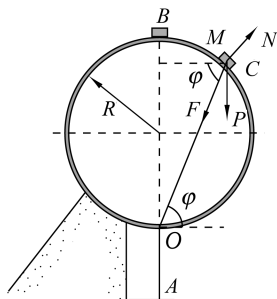


图 3.14

**3.14** 质量为  $m$  的滑块, 在半径为  $R$  并处于铅垂面内的光滑圆环上无摩擦地滑动, 见图 3.14. 滑块  $M$  上系有一弹性线  $MOA$ , 此线穿过圆环上的光滑小孔  $O$  固定于  $A$  点. 已知弹性线的劲度系数为  $k$ , 滑块处于  $O$  点时线对滑块的弹性力为零, 弹性力服从胡克定律. 试求当滑块  $M$  从  $B$  点沿圆环无初速滑下的过程中, 滑块的速度  $v$  与角  $\varphi$  的关系 ( $\varphi$  是  $OM$  与水平线的夹角).

**解** 依题意弹性线和滑块组成系统的机械能守恒,  $O$  点为弹簧原长处, 可选为弹性势能零点, 同时,  $O$  点也做为重力势能零点, 因而有

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k (2R \sin \varphi)^2 + mg 2R \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} k (2R)^2 + mg 2R$$

解得

$$v = 2 \cos \varphi \sqrt{\frac{R(kR + mg)}{m}}$$

**3.15** 一轻弹簧的劲度系数为  $k=100 \text{ N/m}$ , 用手推一质量  $m=0.1 \text{ kg}$  的物体  $A$  把弹簧压缩到离平衡位置为  $x_1=0.02 \text{ m}$  处, 如图 3.15 所示. 放手后, 物体沿水平面移动距离  $x_2=0.1 \text{ m}$  而停止. 求物体与水平面间的滑动摩擦因数.

**解** 物体运动到  $x_1$  处和弹簧分离. 在整个过程中, 物体受弹簧弹性力作功  $\frac{1}{2} k x_1^2$ , 摩擦力做功  $-\mu m g x_2$ , 根据动能定理有

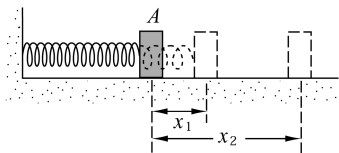


图 3.15

$$\frac{1}{2} kx_1^2 - \mu mgx_2 = 0 - 0$$

$$\mu = \frac{kx_1^2}{2mgx_2} = \frac{100 \times 0.02^2}{2 \times 0.1 \times 9.8 \times 0.1} = 0.20$$

**3.16** 一质量  $m=80 \text{ kg}$  的物体  $A$  自  $h=2 \text{ m}$  处落到弹簧上,如图 3.16 所示.当弹簧从原长向下压缩  $x_0=0.2 \text{ m}$  时,物体再被弹回.试求弹簧下压  $0.1 \text{ m}$  时物体的速度.如果把该物体静置于弹簧上,求弹簧将被压缩多少?

**解** (1) 物体和弹簧组成系统机械能守恒.选弹簧原长处为弹性势能和重力势能零点

当压缩到  $x_0=0.2 \text{ m}$  时有

$$mgh = \frac{1}{2} kx_0^2 - mgx_0$$

当压缩到  $x_1=0.1 \text{ m}$  时有

$$mgh = \frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} mv^2 - mgx_1$$

解得

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2g(h+x_1) - \frac{2g(h+x_0)}{x_0^2} x_1^2} \\ &= \sqrt{2 \times 9.8(2+0.1) - \frac{2 \times 9.8(2+0.2)}{0.2^2} \times 0.1^2} = 5.5 \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

(2) 把物体静置于弹簧上时,最终重力与弹性力达到平衡,因而有

$$mg - kx = 0$$

此时弹簧将被压缩

$$x = \frac{mg}{k} = \frac{x_0^2}{2(h+x_0)} = 9.1 \times 10^{-3} \text{ m}$$

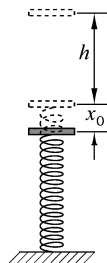


图 3.16

**3.17** 一物体从固定的光滑圆球顶端从静止开始下滑,如图 3.17(a)所示.问:

(1) 物体在何处( $\theta=?$ )脱离圆球沿切线飞出?

(2) 物体飞出时的速度多大?

(3) 当物体到达地面时,离开  $O$  点的距离为多少?(设  $R=1 \text{ m}$ )

**解** 取物体为研究对象,分析受力如图 3.17(b),物体下滑过程中,支撑力  $N$  不做功,机械能守恒.设物体脱离圆球的位置角为  $\theta_0$ ,对于任意一  $\theta$  ( $\theta < \theta_0$ ) 角位置有

$$mg \cos \theta - N = m \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

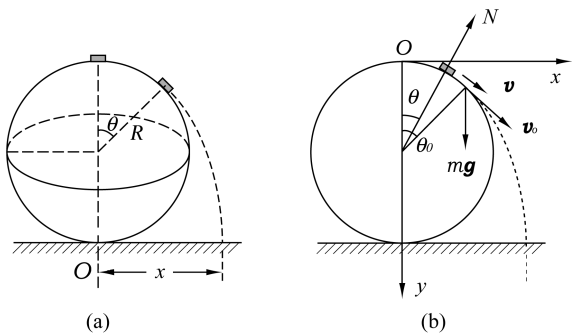


图 3.17

$$mgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} mv^2 \quad (2)$$

(1) 当  $N=0$  时,  $\theta=\theta_0$ ,  $v=v_0$  物体脱离, 代入式(1)、(2)可得

$$\theta_0 = \arccos \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} (2) v_0 &= \sqrt{2gR(1 - \cos \theta_0)} \\ &= \sqrt{2 \times 9.8 \times 1 \times \frac{1}{3}} = 2.56 \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

(3) 物体脱离球面后以  $v_0$  为初速度作斜抛运动, 建立坐标如图 3.17(b) 故有

$$x = R \sin \theta_0 + v_0 \cos \theta_0 t \quad (3)$$

$$y = R(1 - \cos \theta_0) + v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \quad (4)$$

当  $y=2R$  时, 物体到达地面, 代入式(4)可求出物体由脱离球面到落到地面所需时间  $t=0.42 \text{ s}$ , 再将此值代入式(1)可得

$$x = 1 \times 0.74 + 2.56 \times \frac{2}{3} \times 0.42 = 1.46 \text{ (m)}$$

**3.18** 质量为  $5.0 \text{ kg}$  的木块, 仅受一变力的作用, 在光滑的水平面上作直线运动, 力随位置的变化如图所示, 试问:

(1) 木块从原点运动到  $x=8.0 \text{ m}$  处, 作用于木块的力所作之功为多少?

(2) 如果木块通过原点的速率为  $4.0 \text{ m/s}$ , 则通过  $x=8.0 \text{ m}$  时, 它的速率为多大?

**解** 由图可得力的解析表达式为

$$F(x) = \begin{cases} 10, & 0 \leq x \leq 2 \\ 10 - 5(x-2), & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & 4 \leq x \leq 6 \\ -\frac{5}{2}(x-6), & 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

(1) 由功定义, 求得木块的力所作的功为

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$= 10 \times (2-0) + \int_2^4 [10 - 5(x-2)] dx + 0$$

$$+ \int_6^8 -\frac{5}{2}(x-6) dx = 25 \text{ J}$$

(2) 由动能定理得

$$A = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

可求得速率为

$$v = \sqrt{\frac{2A}{m} + v_0^2} = \sqrt{\frac{2 \times 25}{5} + 4^2} = 5.1 \text{ (m/s)}$$

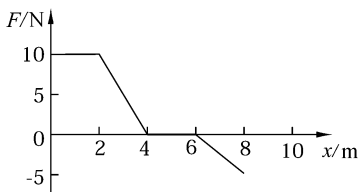


图 3.18

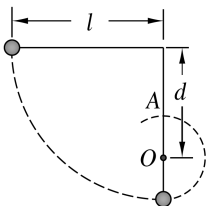


图 3.19

**3.19** 如图 3.19 所示, 长度为  $l$  的轻绳一端固定, 一端系一质量为  $m$  的小球, 绳的悬挂点下方距悬挂点的距离为  $d$  处有一钉子. 小球从水平位置无初速释放, 欲使球在以钉子为中心的圆周上绕一圈, 试证  $d$  至少为  $0.6l$ .

**解** 若小球以钉子为中心恰能完成圆周运动  
则有

$$mg = m \frac{v^2}{l-d} \quad (1)$$

小球运动过程中绳子张力不作功, 只有重力做功, 机械能守恒, 以最低点为势能零点由机械能守恒得

$$mgl = \frac{1}{2} mv^2 + mg2(l-d) \quad (2)$$

解方程得  $d = 0.6l$ .

**3.20** 把弹簧的一端固定在墙上, 另一端系一物体  $A$ , 当把弹簧压缩  $x_0$  之后, 在  $A$  的后面再放一个物体  $B$ , 如图. 求撤去外力后:

(1)  $A$ 、 $B$  离开时,  $B$  以多大速度运动?

(2)  $A$  最大能移动多少距离? (设  $A$ 、 $B$  放在光滑的水平面上,  $A$ 、 $B$  的质量分别为  $m_A$ 、 $m_B$ , 弹簧的劲度系数为  $k$ .)

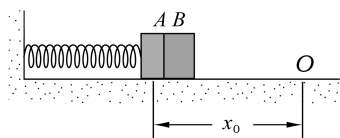


图 3.20

**解** (1)  $B$  物体受一向右推力的作用, 当到达  $O$  点时, 此力变为零,  $A$ 、 $B$  分离, 此时它们的速度相同, 设为  $v$ , 由机械能守恒

$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} (m_A + m_B) v^2 - 0$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m_A + m_B}} x_0$$

(2) 设  $A$  能移动的最大距离为  $s$ , 有

$$\frac{1}{2} m_A v^2 = \frac{1}{2} k (s - x_0)^2$$

$$s = x_0 + \sqrt{\frac{k}{m_A}} v = \left( 1 + \sqrt{\frac{m_A}{m_A + m_B}} \right) x_0$$

**3.21** 一质量为  $m_1$  的质点与一质量为  $m_2$  的固定质点相互作用, 它们之间的万有引力的大小由下式给定

$$F = G \frac{m_1 m_2}{x^2}$$

式中,  $G$  为引力常量,  $x$  为两质点间的距离, 试求使两质点间的距离由  $x = x_1$  增加到  $x = x_1 + d$  时所需之功.

**解** 作用于质点  $m_1$  的外力应与  $m_2$  作用于  $m_1$  的万有引力大小相等, 方向相反, 故有

$$A = \int_{x_1}^{x_1+d} G \frac{m_1 m_2}{x^2} dx = G m_1 m_2 \frac{d}{x_1 (x_1 + d)}$$

另解: 万有引力是保守力, 其做功为势能增量的负值, 因而有

$$A = - \left[ \left( - G \frac{m_1 m_2}{x_1 + d} \right) - \left( - G \frac{m_1 m_2}{x_1} \right) \right] = G m_1 m_2 \frac{d}{x_1 (x_1 + d)}$$

**3.22** 如图 3.22(a) 所示, 一质量为  $m$  的小木块, 沿光滑环形轨道滑下.

(1) 如果木块从  $P$  点静止滑下, 问其在  $Q$  点时受到的合力为多少?

(2) 欲使木块在轨道圆环部分的顶点对轨道的压力恰好等于它的重量, 问木块应在什么高度由静止下滑?

**解** 对环形轨道上任一位置  $\theta$ , 分析木块受力如图 3.22(b) 有

$$N + mg \cos \theta = m \frac{v^2}{R}$$

木块下滑过程中, 只有重力做功, 机械能守恒, 设木块从高度  $h$  滑下

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + mgR(1 + \cos \theta)$$

解得

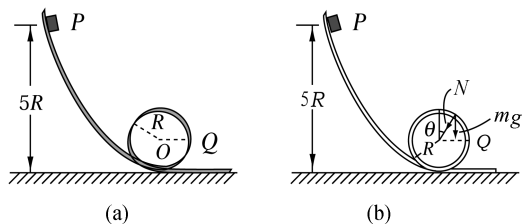


图 3.22

$$N = mg \frac{2h}{R} - 2mg - 3mg \cos \theta$$

(1) 当  $h=5R$ 、 $\theta=90^\circ$  时,  $N=8mg$  合力为

$$F_Q = \sqrt{N^2 + m^2 g^2} = \sqrt{65} mg$$

(2) 当  $\theta=0^\circ$ 、 $N=mg$  时,  $h=3R$ .

**3.23** 设两粒子之间的相互作用为排斥力  $f$ , 其变化规律为  $f=k/r^3$ ,  $k$  为常数.  $r$  为二者之间的距离, 试求两粒子相距为  $r$  时的势能. 设无穷远处为零势能位置.

**解** 由势能定义, 有

$$E_p(r) = \int_0^\infty f dr = \int_r^\infty k \frac{1}{r^3} dr = \frac{k}{2r^2}$$

**3.24** 假设地球为质量均匀分布的球体, 计算必须供给多少能量才能把地球完全拆散(用万有引力恒量  $G$ 、地球质量  $M$ 、地球半径  $R$  表示).

**解** 要把地球拆散所需供给的能量至少应等于地球系统引力势能的绝对值.

半径为  $r$ 、厚度为  $dr$  的球壳所具有的引力势能为

$$dE_p = -G \frac{m dm}{r}$$

其中  $m = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho$ ,  $dm = \rho \cdot 4 \pi r^2 dr$   $\rho$  为地球的密度.

地球系统的引力势能为

$$E_p = \int dE_p = \int_0^R - \frac{G \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho \right) \cdot \rho 4 \pi r^2 dr}{r}$$

把  $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3}$  代入并积分得

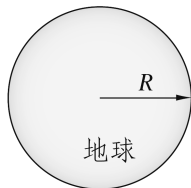


图 3.24

$$E_p = -\frac{3}{5} \frac{GM}{R}$$

要把地球拆散必须供给的能量为  $E = \frac{3}{5} G \frac{M}{R}$  .

**3.25** 150 kg 的卫星在半径为 7.3 Mm 的圆周轨道上绕地球运行 . 试计算 (1) 动能、势能和机械能 ; (2) 轨道速率 ; (3) 该高度的逃逸速率 .

**解** 卫星在 7.3 Mm 的圆轨道上绕地球运行时

$$G \frac{mM_e}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad \text{其速率: } v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

(1) 动能

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \frac{GM_e}{r} \\ &= \frac{1}{2} \times 150 \times \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24}}{7.3 \times 10^6} \\ &= 4.1 \times 10^9 \text{ (J)} \end{aligned}$$

势能

$$\begin{aligned} E_p &= -G \frac{mM_e}{r} = -6.67 \times 10^{-11} \frac{150 \times 5.97 \times 10^{24}}{7.3 \times 10^6} \\ &= -8.2 \times 10^9 \text{ (J)} \end{aligned}$$

机械能:  $E = E_k + E_p = -4.1 \times 10^9 \text{ (J)}$ , 其为负值是因势能零点是在无穷远的缘故 .

(2) 轨道速率

$$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24}}{7.3 \times 10^6}} = 7.4 \times 10^3 \text{ (m/s)}$$

(3) 设逃逸速率为  $v_0$ , 由机械能守恒知

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{mM_e}{r} = 0$$

因此

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM_e}{r}} = \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24}}{7.3 \times 10^6} = 1.04 \times 10^4 \text{ (m/s)}$$

**3.26** 水星的质量为  $3.3 \times 10^{23} \text{ kg}$ , 以半径为  $5.8 \times 10^{10} \text{ m}$  绕太阳近似作圆周运动, 太阳的质量为  $2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ . (1) 求水星的机械能 ; (2) 假定水星移到半径为  $15 \times 10^{10} \text{ m}$  圆周轨道上运动, 相当于地球绕太阳运动, 必须提供多少能量?

**解** (1) 设  $m, M$  分别为水星的质量和太阳质量,  $R$  为水星绕太阳圆周运动的半径, 水星绕太阳作圆周运动, 因此有

$$G \frac{mM}{R^2} = m \frac{v^2}{R}$$

得

$$v^2 = \frac{GM}{R}$$

水星的动能

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{GmM}{2R}$$

水星的势能

$$E_p = -G \frac{mM}{R}$$

因此水星的机械能

$$\begin{aligned} E &= E_k + E_p = -\frac{GmM}{2R} \\ &= -\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 3.3 \times 10^{23} \times 2.0 \times 10^{30}}{2 \times 5.8 \times 10^{10}} \\ &= -3.80 \times 10^{32} \quad (\text{J}) \end{aligned}$$

(2)水星在半径  $R' = 15 \times 10^{10} \text{ m}$  圆周轨道上运动,其机械能为

$$\begin{aligned} E' &= -\frac{GmM}{2R'} = -\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 3.3 \times 10^{23} \times 2.0 \times 10^{30}}{2 \times 15 \times 10^{10}} \\ &= -1.47 \times 10^{32} \quad (\text{J}) \end{aligned}$$

因此,把水星移到半径  $R'$  轨道上必须提供的能量为

$$A = E' - E = 2.33 \times 10^{32} \quad \text{J}$$

**3.27** 水力发电设备通过使水流经涡轮发电机系统可以 100 MW 的功率产生电能。(1)如果水垂直下落 100 m 到达涡轮发电机,估算单位时间内流出的水量;

(2)水从 1 km $\times$ 1 km 的水库下落,水平面的下落速率多少?(水的密度为  $10^3 \text{ kg/m}^3$ .)

**解** (1)假设单位时间内流出的水量为  $q$ ,单位时间有  $q$  质量的水垂直下落 100 m, $q$  质量的水下落 100 m 所具有的动能由机械能守恒有

$$E_k = \frac{1}{2} q v^2 = qgh$$

假设此动能全部转化成电能,因此有

$$qgh = P \quad (P \text{ 为涡轮发电机的功率})$$

即

$$\begin{aligned} q \times 9.8 \times 100 &= 100 \times 10^6 \\ q &= 1 \times 10^5 \quad \text{kg/s} \end{aligned}$$

(2) 设水平面的下落速率为  $v$ , 因此

$$sv\rho = q \quad \text{即}$$

$$10^3 \times 10^3 v \times 10^3 = 1 \times 10^5$$

$$v = 1 \times 10^{-4} \quad \text{m/s}$$

## 第 4 章 冲量和动量

### 一、基本内容和主要公式

#### 1. 动量定理

质点动量定理:

$$\mathbf{F} \cdot dt = d(m\mathbf{v})$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

质点系动量定理:

$$\sum_i \int_{t_0}^t \mathbf{F}_i dt = \sum_i m_i \mathbf{v}_i - \sum_i m_i \mathbf{v}_{i0}$$

#### 2. 动量守恒定律

作用于系统的合外力为零时,即  $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$ , 则动量守恒,即

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i = \text{常矢量}$$

系统所受合外力沿某一坐标轴的投影为零时,则质点系的动量沿该坐标轴的投影保持不变,即

$$\sum_i F_{ix} = 0 \text{ 时, } \sum m_i v_{ix} = \text{常量}$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \text{ 时, } \sum m_i v_{iy} = \text{常量}$$

$$\sum_i F_{iz} = 0 \text{ 时, } \sum m_i v_{iz} = \text{常量}$$

#### 3. 质心概念

质心的位矢为

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad \text{或} \quad \mathbf{r}_c = \frac{\int \mathbf{r} dm}{M}$$

#### 4. 质心运动定理

质点系所受的合外力等于其总质量乘以质心的加速度,即

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_c$$

## 二、典型例题

**4-1** 质量均为  $m$  的两个质点  $A$ 、 $B$ ,由长为  $l$  的不可伸长的轻绳连系, $B$  点限制在光滑水平桌面上的光滑直槽内,它可以在槽中自由滑动,开始时  $A$  点静止在桌面上, $B$  点静止在直槽内, $AB$  垂直于直槽且距离为  $\frac{1}{2}l$ ,如图 4-1.如  $A$  点以速度  $v$  在桌面上平行于槽的方向运动,求证:当  $B$  点开始运动时,它的速度大小为  $\frac{3}{7}v$ ,并求绳受到的冲量和槽的反作用冲量.

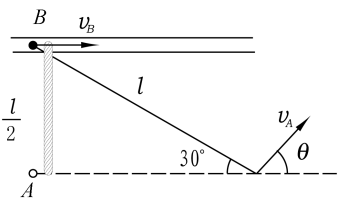


图 4-1

**解** 当绳未拉直时,质点  $A$  以  $v$  作匀速直线运动.绳被拉直后,质点  $B$  开始运动,设质点  $B$  的速度为  $v_B$ ,质点  $A$  的速度为  $v_A$ ,外力沿水平方向的分量为零,动量沿该方向的分量守恒.

$$mv = m(v_B + v_A \cos \theta) \quad (1)$$

绳子是不可伸长的,所以质点  $A$ 、 $B$  速度沿绳分量相等,即

$$v_B \cos 30^\circ = v_A \cos(\theta + 30^\circ) \quad (2)$$

$A$  质点受绳子的力沿绳方向,因此由动量定理知质点  $A$  的动量沿与绳正交方向的分量不变,即

$$mv_A \sin(\theta + 30^\circ) - mv_A \sin 30^\circ = 0 \quad (3)$$

由式(1),(2),(3)联立求解得

$$v_B = \frac{3}{7}v$$

绳受的冲量

$$T\Delta t = m[v \cos 30^\circ - v_A \cos(\theta + 30^\circ)] = \frac{2\sqrt{3}}{7}mv$$

槽的反作用冲量

$$N\Delta t = T\Delta t \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{7}mv$$

**说明** 本题运用了动量定理及动量守恒定律.在正确分析物体受力的基础上,要充分认识到动量定理和动量守恒定律的矢量性,对本题虽然  $A$ 、 $B$  质点组成的系统受到外力,但它仍在水平方向上不受外力,因而在水平方向上动量守恒.对于  $A$  质点,仅受沿绳方向的作用力,在与绳垂直的方向上动量是不变的.

**4-2** 如图 4-2 所示,两部运水的卡车  $A$ 、 $B$  在水平面上沿同一方向运动, $B$  的速度为  $u$ ,从  $B$  上以  $6 \text{ kg/s}$  的速率将水抽至  $A$  上,水从管子尾部出口垂直落下,车与地面间的摩擦不计,时刻  $t$  时, $A$  车的质量为  $M$ ,速度为  $v$ .求时刻  $t$ , $A$  的瞬

时加速度。

**解** 依题意,  $t$  时刻  $A$  车质量为  $M$ , 它相对地面参考系速度为  $v$ . 经过  $\Delta t$  时间, 有  $\Delta m$  质量的水抽至  $A$  车, 又已知,  $t$  时刻水相对地面沿水平方向的速度为  $u$ ,  $\Delta m$  质量的水水平方向动量为  $\Delta m \cdot u$ , 而在  $t + \Delta t$  时刻,  $A$  车总质量为  $M + \Delta m$ , 设此时  $A$  车速度为  $v'$ , 其水平方向动量即为  $(M + \Delta m)v'$ , 取  $\Delta m$  与  $A$  车为研究系统, 此系统在水平方向上动量守恒, 因此有

$$Mv + \Delta mu = (M + \Delta m)v'$$

因而

$$v' = \frac{Mv + \Delta mu}{M + \Delta m}$$

经  $\Delta t$  时间,  $A$  车速度变化为

$$\Delta v = v' - v = \frac{\Delta m(u - v)}{M + \Delta m}$$

又因  $\Delta m \ll M$ , 所以

$$\Delta v \approx \frac{\Delta m}{M}(u - v)$$

因而此时,  $A$  车的加速度为

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dm}{dt} \cdot \frac{u - v}{M} = \frac{6}{M}(u - v)$$

**说明** 掌握质点系动量沿某坐标方向的守恒定律, 选择恰当的研究系统. 在本题中, 选  $A$  车  $M$  和  $\Delta m$  ( $\Delta t$  时间内抽至  $A$  车的水) 为研究系统, 水平方向上动量守恒,

可求解出  $\Delta t$  时间内  $A$  车速度的变化, 再由  $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$  即可求解.

**4-3** 铁路上有一平板车, 其质量为  $M$ , 设平板车可无摩擦地在水平轨道上运动. 现有  $N$  个人从平板车的后端跳下, 每个人的质量均为  $m$ , 相对平板车的速度均为  $u$ . 问在下述两种情况下, 平板车的末速度是多少? (1)  $N$  个人同时跳离; (2) 一个人、一个人的跳离. 所得结果是否相同.

**解** (1) 取平板车和  $N$  个人为研究对象, 由于在水平方向上无外力作用, 故系统在该方向上动量守恒. 取平板车运动方向为坐标轴正方向, 设最初平板车是静止的, 则有

$$Mv + Nm(v - u) = 0$$

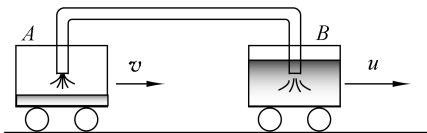


图 4-2

所以  $N$  个人同时跑步跳车时,车速为

$$v = \frac{Nm}{M + Nm}u$$

(2)若一个人、一个人地跳车,情况就不同了.第一个人跳车时,由动量守恒定律可得

$$[M + (N-1)m]v_1 + m(v_1 - u) = 0$$

第二个人跳车时,有

$$[M + (N-2)m]v_2 + m(v_2 - u) = [M + (N-1)m]v_1$$

$$v_2 - v_1 = \frac{mu}{M + (N-1)m}$$

以此类推,第  $N$  个人跳车时,有

$$Mv_N + m(v_N - u) = (M + m)v_{N-1}$$

$$v_N - v_{N-1} = \frac{mu}{M + m}$$

所以

$$v_N = mu \left( \frac{1}{M + m} + \frac{1}{M + 2m} + \cdots + \frac{1}{M + Nm} \right) = \sum_{n=1}^N \frac{mu}{M + nm}$$

因为

$$\frac{1}{M + m} > \frac{1}{M + 2m} > \cdots > \frac{1}{M + Nm}$$

$$\frac{1}{M + m} + \frac{1}{M + 2m} + \cdots + \frac{1}{M + Nm} > \frac{N}{M + Nm}$$

故  $v_N > v$ .即在上述两种情况下,车的末速度是不相同的.

**说明** 这是一个运用动量守恒定律求解物理问题的题目.在运用动量守恒定律时,正确分析系统受力情况,从而确定动量守恒.而在求解此题中,选取恰当的系统运用动守恒定律是关键.

**4-4** 两个形状完全相同、质量都为  $M$  的弧形导轨  $A$  和  $B$ ,放在地板上,今有一质量为  $m$  的小物体,从静止状态由  $A$  的顶端下滑, $A$  顶端的高度为  $h_0$ ,所有接触面均光滑.试求小物体在  $B$  轨上上升的最大高度(设  $A$ 、 $B$  导轨与地面相切).

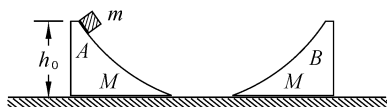


图 4-4

**解** 设小物体沿  $A$  轨下滑至地板时的速度为  $v$ ,对小物体与  $A$  组成的系统,应用机械能守恒定律及沿水平方向动量守恒定律,有

$$-Mv_A + mv = 0 \quad (1)$$

$$mgh_0 = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (2)$$

由式(1)、(2),解得

$$v = \sqrt{2Mgh_0/(M+m)} \quad (3)$$

当小物体以初速  $v$  沿  $B$  轨上升到最大高度  $H$  时,此时小物体相对  $B$  的速度为零,设小物体与  $B$  相对地沿水平方向的速度为  $u$ ,根据动量守恒与机械能守恒,有

$$mv = (M+m)u \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(M+m)u^2 + mgH \quad (5)$$

联立式(4)、(5),并考虑到式(3),可解得

$$H = \frac{Mv^2}{2(M+m)g} = \frac{M}{M+m} h_0 \quad (6)$$

**说明** 综合运用动量守恒定律及机械能守恒定律解此题.在用动量守恒定律解决问题时,要充分理解动量守恒定律的矢量性,某一方向上系统受外力为零,此方向上动量就守恒.并在此题中,充分理解物体  $B$  上升到最大高度时,  $A$ 、 $B$  两物体具有共同速度这一物理含义.

### 三、习题详解

#### 4.1 选择题

(1)质点在恒力  $F$  作用下由静止开始作直线运动,如图.已知在时间  $\Delta t_1$  内,速率由 0 增加到  $v$ ;在  $\Delta t_2$  内,由  $v$  增加到  $2v$ .

设该力在  $\Delta t_1$  内,冲量大小为  $I_1$ ,所作的功为

$A_1$ ;在  $\Delta t_2$  内,冲量大小为  $I_2$ ,所作的功为  $A_2$ ,

则(D)

(A)  $A_1 = A_2, \quad I_1 < I_2$

(B)  $A_1 = A_2, \quad I_1 > I_2$

(C)  $A_1 > A_2, \quad I_1 = I_2$

(D)  $A_1 < A_2, \quad I_1 = I_2$

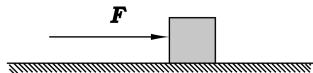


图 4.1(1)

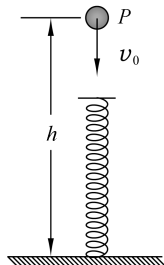


图 4.1(2)

(2)一轻弹簧,竖直固定于水平桌面上,如图 4.1(2).弹簧正上方离桌面高度为  $h$  的  $P$  点的一小球以初速度  $v_0$  竖直落下,小球与弹簧碰撞后又跳回  $P$  点时,速度大小仍为  $v_0$ ,以小球为系统,则小球从  $P$  点下落又跳回  $P$  点的整个运动过程中,系统的(A)

(A)动能不守恒,动量不守恒

(B)动能守恒,动量不守恒

(C)机械能不守恒,动量守恒

(D)机械能守恒,动量守恒

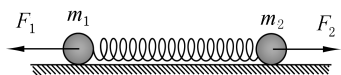


图 4.1(3)

(3)质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  的两个小球,连接在劲度系数为  $k$  的轻弹簧两端,并置于光滑的水平面上,如图 4.1(3).今以等值反向的水平力  $F_1$  和  $F_2$  分别同时作用于两个小球上,若把两个小球和弹簧看作一个系统,则系统在运动过程中(B)

(A)动量守恒,机械能守恒

(B)动量守恒,机械能不守恒

(C)动量不守恒,机械能守恒

(D)动量不守恒,机械能不守恒.

(4)一斜劈置于光滑水平面上,如图 4.1(4).

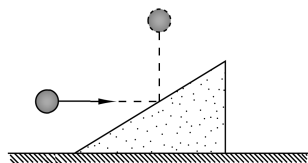


图 4.1(4)

一小球沿水平方向射来,与斜面作完全弹性碰撞后,沿竖直方向弹起,若把小球与斜劈看作一个系统,则在碰撞过程中(B)

(A)动量守恒

(B)沿水平方向动量守恒

(C)沿竖直方向动量守恒

(D)动量是否守恒无法判断

(5)对质点系有以下几种说法:

①质点系总动量的改变与内力无关;

②质点系总动能的改变与内力无关;

③质点系机械能的改变与保守内力无关;

④质点系总势能的改变与保守内力无关.

在上述说法中(B)

(A)只有①是正确的

(B)①和③是正确的

(C)①和④是正确的

(D)②和③是正确的

## 4.2 填空题

(1)质量  $m=2.0\text{ kg}$  的质点,受合力  $F=12t\text{ iN}$  的作用,沿  $Ox$  轴作直线运动,如图.已知  $t=0$  时  $x_0=0, v_0=0$ ,则从  $t=0$  到  $t=3\text{ s}$  这段时间内,合力  $F$  的冲量为  $I=54\text{ iN}\cdot\text{s}$ ,3s 末质点的速度为  $v=27\text{ im/s}$ .

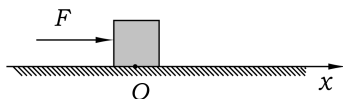


图 4.2(1)

(2)质量为  $m$  的小球,以水平速度  $v$  与竖直放置的钢板发生碰撞后,以同样大小的速度反向弹回,选如图所示的坐标系,则碰撞过程中,钢板受到的冲量为  $I=-2mvi$ .

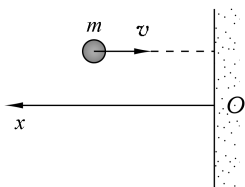


图 4.2(2)

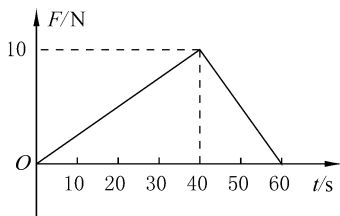


图 4.2(4)

(3) 质量  $m=1\text{ kg}$  的质点, 以速度  $v = \left( -3 \sin \frac{\pi}{2} t \mathbf{i} + 3 \cos \frac{\pi}{2} t \mathbf{j} \right) \text{ m/s}$  运动, 该质点在从  $t=0$  到  $t=4\text{ s}$  这段时间内所受到的合力的冲量大小为 0, 在从  $t=1\text{ s}$  到  $t=2\text{ s}$  这一运动过程中, 动量增量的大小为  $3\sqrt{2}\text{ N}\cdot\text{s}$ .

(4) 质量  $m=50\text{ kg}$  的物体, 静止在光滑水平面上, 今有一水平力  $F$  作用在物体上, 力  $F$  的大小随时间变化的规律如图. 在  $t=60\text{ s}$  的瞬时, 物体速度的大小  $v = 6\text{ m/s}$ .

(5) 质量分别为  $m_A$  和  $m_B$  的两个小球 A, B, 相距为无限远, 并处于静止状态. 若它们仅在万有引力作用下相互靠近, 当它们之间的距离为  $R$  时, A 的速度大小  $v_A = \sqrt{\frac{2G}{(m_A + m_B)R}}$ , B 的速

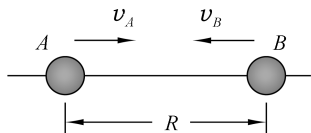


图 4.2(5)

度大小  $v'_B = m_A \sqrt{\frac{2G}{(m_A + m_B)R}}$ , 彼此相对速度

大小  $v_r = \sqrt{\frac{2G(m_A + m_B)}{R}}$ .

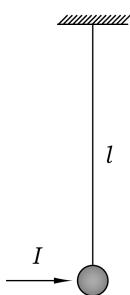


图 4.3

**4.3** 如图 4.3 所示, 已知绳能承受的最大拉力  $T_0 = 9.8\text{ N}$ , 小球质量  $m = 0.5\text{ kg}$ , 绳长  $l = 0.3\text{ m}$ , 求水平冲量  $I$  等于多大时才能把绳子拉断 (小球原来静止)?

**解** 设小球受到冲量  $I$  作用后的速度为  $v$ , 根据动量定理有

$$I = mv - 0 \quad (1)$$

设绳张力为  $T$ , 分析小球受力, 由牛顿定律得

$$T - mg = m \frac{v^2}{l} \quad (2)$$

解方程, 同时注意到当  $I = I_0$  时,  $v = v_0$ ,  $T = T_0$ , 于是解得

$$\begin{aligned}
 I &= I_0 = mv_0 = \sqrt{ml(T_0 - mg)} \\
 &= \sqrt{0.5 \times 0.3 \times (9.8 - 0.5 \times 9.8)} \\
 &= 0.857 \text{ (kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1})
 \end{aligned}$$

$I \geq I_0$  时,绳子被拉断.

**4.4** 一子弹水平地穿过并排静止放置在光滑水平面上的木块,如图 4.4 所示.已知两木块的质量分别为  $m_1, m_2$ ,子弹穿过两木块的时间各为  $\Delta t_1, \Delta t_2$ ,设子弹在木块中所受的阻力为恒力  $F$ ,求子弹穿过后,两木块各以多大速度运动.

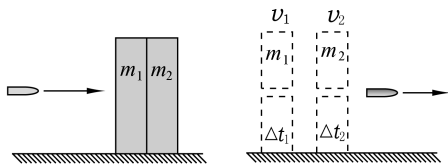


图 4.4

**解** 子弹穿过第一木块时,两木块速度相同,均为  $v_1$ ,初始两木块静止,由动量定理,于是有

$$F\Delta t_1 = (m_1 + m_2)v_1 - 0 \quad (1)$$

设子弹穿过第二木块后,第二木块速度变为  $v_2$ ,对第二块木块,由动量定理,有

$$F\Delta t_2 = m_2 v_2 - m_2 v_1 \quad (2)$$

解以上方程可得

$$v_1 = \frac{F\Delta t_1}{m_1 + m_2}, v_2 = \frac{F\Delta t_1}{m_1 + m_2} + \frac{F\Delta t_2}{m_2}$$

**4.5** 铀 238 的核(质量为 238 原子质量单位),放射一个  $\alpha$  粒子(氦原子核,质量为 4 原子质量单位)后蜕变为钍 234 核.设铀核原来是静止的, $\alpha$  粒子射出时的速度大小为  $1.4 \times 10^7 \text{ m/s}$ ,求钍核反冲的速度.

**解** 钍核和  $\alpha$  粒子组成一系统,此系统动量守恒,初始此系统动量为零,于是有

$$mv - MV = 0$$

钍核反冲速度为

$$V = \frac{m}{M}v = \frac{4}{234} \times 1.4 \times 10^7 = 2.4 \times 10^5 \text{ (m/s)}$$

$V$  的方向与  $\alpha$  粒子运动的方向相反.

**4.6** 质量为  $m$  的质点在  $Oxy$  平面内运动,运动学方程为  $\mathbf{r} = a \cos \omega t \mathbf{i} +$

$b\sin\omega t\mathbf{j}$ .

(1) 试求质点的动量;

(2) 试求从  $t=0$  到  $t=\frac{2\pi}{\omega}$  这段时间内质点受到的合力的冲量,并说明在上述时间内,质点的动量是否守恒?为什么?

**解** (1) 由质点运动学方程得质点速度

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega a \sin \omega t \mathbf{i} + \omega b \cos \omega t \mathbf{j}$$

动量为

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = -m\omega a \sin \omega t \mathbf{i} + m\omega b \cos \omega t \mathbf{j}$$

(2) 根据动量定理,合力的冲量为

$$\mathbf{I} = \mathbf{p}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) - \mathbf{p}(0) = 0$$

虽然  $t=0$  和  $t=\frac{2\pi}{\omega}$  时质点的动量是一样的,但在上述时间内,由(1)中动量的表达式可看出动量是时间的函数并不守恒.质点的动量不守恒.

**4.7** 质量为  $M$  的木块静止在光滑的水平桌面上,质量为  $m$ ,速度为  $v_0$  的子弹水平地射入木块,并陷在木块内与木块一起运动.求:

(1) 子弹相对木块静止后,木块的速度和动量;

(2) 子弹相对木块静止后,子弹的动量;

(3) 在这个过程中,子弹施于木块的冲量.

**解** 子弹相对木块静止后,其共同速度设为  $u$ ,子弹和木块组成系统动量守恒.

$$(1) \quad mv_0 = (m+M)u$$

所以

$$u = \frac{mv_0}{(m+M)}$$

$$P_M = Mu = \frac{Mm}{M+m}v_0$$

$$(2) \text{ 子弹的动量 } P_m = mu = \frac{m^2}{M+m}v_0$$

(3) 针对木块,由动量定理知,子弹施于木块的冲量为

$$I = P_M - 0 = \frac{Mm}{M+m}v_0$$

**4.8** 质量为 60 kg 的人以 8 km/h 的速度从后面跳上一辆质量为 80 kg,速度为 2.9 km/h 的小车,试问小车的速度将变为多大? 如果人迎面跳上小车,结果又怎样?

**解** 人和车组成的系统沿水平方向受合外力为零,动量守恒,因而有

$$m_{\text{人}} v_{\text{人}} + m_{\text{车}} v_{\text{车}} = (m_{\text{人}} + m_{\text{车}}) v$$

$$v = \frac{m_{\text{人}} v_{\text{人}} + m_{\text{车}} v_{\text{车}}}{m_{\text{人}} + m_{\text{车}}} = \frac{60 \times 8 + 80 \times 2.9}{60 + 80} = 5.09 \text{ (km/h)}$$

人迎面跳上小车,根据动量守恒

$$m_{\text{车}} v_{\text{车}} - m_{\text{人}} v_{\text{人}} = (m_{\text{人}} + m_{\text{车}}) v'$$

$$v' = \frac{m_{\text{车}} v_{\text{车}} - m_{\text{人}} v_{\text{人}}}{m_{\text{人}} + m_{\text{车}}} = \frac{80 \times 2.9 - 60 \times 8}{60 + 80} = -1.77 \text{ (km/h)}$$

**4.9** 如图所示的水力采煤法,是用水枪在高压下喷出沿水平方向的强力水柱来冲击煤层的.设水柱直径为 30 mm;水速  $v = 56 \text{ m/s}$ ,水柱垂直射在煤层表面上,冲击煤层后水沿煤层流去,试求水柱对煤层沿水平方向的平均冲力.

**解** 选坐标系如图,根据动量定理,煤层对水的冲量

$$I_x = 0 - mv = -mv$$

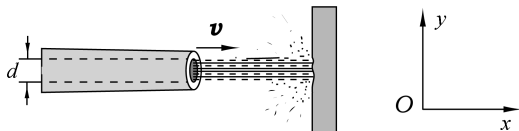


图 4.9

因此煤层对水的平均力

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{I_x}{\Delta t} = \frac{-\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 v \Delta t \rho v}{\Delta t} \\ &= -\frac{1}{4} \pi d^2 \rho v^2 = -\frac{1}{4} \times 3.14 \times (0.03)^2 \times 1.0 \times 56^2 \times 1000 \\ &= -2.22 \times 10^3 \text{ (N)} \end{aligned}$$

根据牛顿第三定律,水柱对煤层沿水平方向的平均冲力

$$\overline{F'_x} = -\overline{F_x} = 2.22 \times 10^3 \text{ N} \quad \text{方向沿 } X \text{ 轴正向.}$$

**4.10** 质量为  $M$ 、长为  $L$  的木块,放在水平地面上.今有一质量为  $m$  的子弹以水平初速度  $v_0$  射入木块,问:

(1)当木块固定在地面上时,子弹射入木块的水平距离为  $L/2$ .欲使子弹水平射穿木块(刚好射穿),子弹的速度  $v_1$  最小将是多少?

(2)木块不固定,且地面是光滑的.当子弹仍以速度  $v_0$  水平射入木块,相对木块进入的深度(木块对子弹的阻力视为不变)是多少?

(3)在(2)中,从子弹开始射入到子弹与木块无相对运动时,木块移动的距离是

多少?

**解** (1) 设木块对子弹的阻力为  $f$ , 对子弹在两种情况下应用动能定理有

$$-f \cdot \frac{L}{2} = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$-fL = 0 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

所以, 子弹的最小速度  $v_1$  为

$$v_1 = \sqrt{2} v_0, \quad f = \frac{m}{L} v_0^2$$

(2) 子弹和木块组成的系统动量守恒, 子弹相对木块静止时, 其共同速度设为  $v'$ , 因而有

$$m v_0 = (M + m) v'$$

设子弹相对木块进入的深度为  $s_1$ , 子弹和木块系统动能的消耗量值上应为一对摩擦力所做的功, 因而

$$-f s_1 = \frac{1}{2} (M + m) v'^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$s_1 = \frac{m}{2(m + M)} L, \quad v' = \frac{m}{M + m} v_0$$

(3) 对木块由动能定理

$$f s_2 = \frac{1}{2} M v'^2 - 0$$

木块移动的距离为

$$s_2 = \frac{mM}{2(m + M)^2} L$$

**4.11** 一质量为 200 g 的砝码盘悬挂在劲度系数  $k = 196 \text{ N/m}$  的弹簧下, 现有质量为 100 g 的砝码自 30 cm 高处落入盘中, 求盘向下移动的最大距离 (假设砝码与盘的碰撞是完全非弹性碰撞)。

**解** 此题分为三个阶段

第一阶段: 砝码落入盘中以前, 由机械能守恒有

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad (1)$$

第二阶段: 砝码与盘碰撞, 因为完全非弹性碰撞, 其共同速度设为  $v_2$ , 在垂直方向, 砝码和盘组成系统之碰撞内力远大于重力、弹簧的弹性力, 可认为在垂直方向动量守恒, 因而有

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2 \quad (2)$$

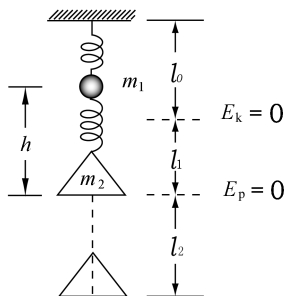


图 4.11

第三阶段:砝码和盘向下移动过程中机械能守恒,注意到弹性势能零点是选在弹簧的原长处

$$\frac{1}{2}kl_1^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2 = \frac{1}{2}k(l_1 + l_2)^2 - (m_1 + m_2)gl_2 \quad (3)$$

$$m_2 g = kl_1$$

解以上方程可得

$$98l_2^2 - 0.98l_2 - 0.096 = 0$$

向下移动的最大距离为

$$l_2 = 0.037 \text{ m}$$

**4.12** 跳伞员的质量  $m=70 \text{ kg}$ ,自悬停在高空的直升飞机中跳出,当速度达到  $v_1=55 \text{ m/s}$  时,把伞打开,经过时间  $\Delta t=1.25 \text{ s}$  后,速度减到  $v_2=5 \text{ m/s}$ .试求这段时间内绳索作用于人的平均拉力.

**解** 设作用于人的平均力为  $\overline{T}$ ,在  $\Delta t$  时间段内,由动量定理

$$(mg - \overline{T})\Delta t = mv_2 - mv_1$$

$$\overline{T} = \frac{m}{\Delta t}(v_1 - v_2) + mg$$

$$= \frac{70}{1.25}(55 - 5) + 70 \times 9.8 = 3486 \text{ N}$$

**4.13** 一条水管道,有一个  $45^\circ$  的缩小弯头,其进口直径  $d_1=45 \text{ cm}$ ,出口直径  $d_2=25 \text{ cm}$ ,水的体积流量  $Q=0.28 \text{ m}^3/\text{s}$ ,如图 4.13(a).试求流体作用于管壁的附加动压力.

**解** 设水进口、出口速度分别为  $v_1$ 、 $v_2$ ,因此

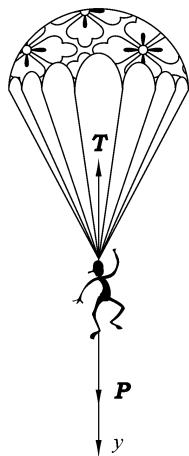


图 4.12

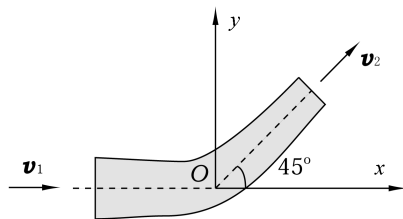


图 4.13(a)

$$Q = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 \pi v_1 = \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \pi v_2$$

所以

$$v_1 = \frac{4Q}{d_1^2 \pi}, \quad v_2 = \frac{4Q}{d_2^2 \pi}$$

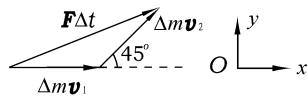


图 4.13(b)

设质量为  $\Delta m$  的水所受的管壁的平均压力为  $\overline{\mathbf{F}}$ , 由动量定理

$$\overline{\mathbf{F}} \cdot \Delta t = \Delta m v_2 - \Delta m v_1$$

建立如图 4.13(b)所示的坐标, 管壁受到的附加压力沿  $x$ 、 $y$  方向分量分别为  $\overline{F}_x$ 、 $\overline{F}_y$ . 因此,

$$\overline{F}_x \cdot \Delta t = \Delta m v_2 \cos 45^\circ - \Delta m v_1$$

$$\overline{F}_x = \frac{\Delta m}{\Delta t} (v_2 \cos 45^\circ - v_1) = \rho Q \left( \frac{4Q}{d_2^2 \pi} \cos 45^\circ - \frac{4Q}{d_1^2 \pi} \right) = 638 \text{ N}$$

$$\overline{F}_y \cdot \Delta t = \Delta m v_2 \sin 45^\circ$$

$$\overline{F}_y = \frac{\Delta m}{\Delta t} v_2 \sin 45^\circ = \rho Q \frac{4Q}{d_2^2 \pi} = 1130 \text{ N}$$

**4.14** 一行李质量为  $m$ , 垂直地轻放在传送带上, 传送带的速率为  $v$ , 它与行李间的摩擦因数为  $\mu$ ,

试计算: (1) 行李在传送带上滑动多长时间? (2) 行李在这段时间内运动多远? (3) 有多少能量被摩擦所耗费?

**解** (1) 设行李滑动时间为  $t$ , 行李滑动中受到的滑动摩擦力为  $\mu mg$ , 根据动量定理有

$$\mu mgt = mv - 0$$

$$t = v / \mu g$$

(2) 设行李在时间  $t$  内运动长度为  $x$ , 对行李根据动能定理有

$$\mu mgx = \frac{1}{2} mv^2 - 0$$

$$x = v^2 / 2 \mu g$$

(3) 被摩擦消耗的能量量值上等于一对摩擦力所作的功, 设  $x'$  为时间  $t$  内传送带移动的距离, 故有

$$\begin{aligned} \Delta E &= \mu mgx - \mu mgx' = \mu mg(x - x') \\ &= \mu mg \left( \frac{v^2}{2 \mu g} - vt \right) = \mu mg \left( \frac{v^2}{2 \mu g} - v \frac{v}{\mu g} \right) \\ &= -\frac{1}{2} mv^2 \end{aligned}$$

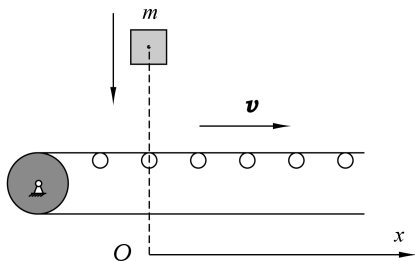


图 4.14

**4.15** 体重为  $P$  的人拿着重为  $p$  的物体跳远,起跳仰角为  $\varphi$ ,初速度为  $v_0$ .到达最高点时,该人将手中的物体以水平向后的相对速度  $u$  抛出,问跳远成绩因此增加多少?

**解** 人和物体组成系统在最高点抛出物体前后沿水平方向动量守恒,注意到对地面这个惯性参考系

$$(m + m')v_0 \cos \varphi = mv + m'(v - u)$$

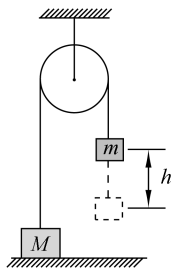
$$v = v_0 \cos \varphi + \frac{m'}{m + m'}u$$

从最高点到落地人作平抛运动所需时间  $t = \frac{v_0 \sin \varphi}{g}$ .

跳远距离增加为

$$\begin{aligned} \Delta s &= \left( v_0 \cos \varphi + \frac{m'}{m + m'}u \right) t - v_0 \cos \varphi t \\ &= \frac{m'}{m + m'}ut = \frac{p}{P + p}u \frac{v_0 \sin \varphi}{g} \end{aligned}$$

**4.16** 一绳跨过一定滑轮,两端分别拴有质量为  $m$  及  $M$  的物体,如图 4.16 所示,  $M$  静止在桌面上 ( $M > m$ ).抬高  $m$ ,使绳处于松弛状态.当  $m$  自由落下  $h$  距离后,绳才被拉紧,求此时两物体的速度及  $M$  所能上升的最大高度(提示:分三个阶段考虑).



**解** 分三个阶段

$$m \text{ 自由下落} \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

$m$ 、 $M$  相互作用(通过绳),在此阶段,绳中张力  $T$  比物体所受重力大得多,此时可忽略重力,由动量定理

图 4.16

$$\text{对 } m \text{ 有} \quad -\int_0^{\Delta t} T dt = mV - mv \quad (2)$$

$$\text{对 } M \text{ 有} \quad \int_0^{\Delta t} T dt = MV - 0 \quad (3)$$

$m$  下降,  $M$  上升过程机械能守恒

$$mgH - MgH = 0 - \frac{1}{2}(M + m)V^2 \quad (4)$$

解以上方程可得

$$V = \frac{m}{m+M} \sqrt{2gh}, \quad H = \frac{m^2 h}{M^2 - m^2}$$

**4.17** 一木块质量  $M=1 \text{ kg}$ , 置于水平面上, 一质量  $m=2 \text{ g}$  的子弹以  $500 \text{ m/s}$  的速度水平击穿木块, 速度减为  $100 \text{ m/s}$ , 木块沿水平方向滑行了  $20 \text{ cm}$ , 求:

(1) 木块与水平面间的摩擦因数;

(2) 子弹的动能减少了多少.

**解** 子弹与木块的作用力远大于桌面的摩擦力, 它们组成的系统沿水平方向动量守恒

$$mv_1 = mv_2 + Mu$$

对木块, 摩擦力做功, 木块动能减小, 由动能定理有

$$-\mu mgs = 0 - \frac{1}{2}Mu^2$$

解得(1)

$$\mu = \frac{m^2(v_1 - v_2)^2}{2Mgs} = \frac{(2 \times 10^{-3})^2 \times (500 - 100)^2}{2 \times 1 \times 9.8 \times 0.2} = 0.16$$

(2) 子弹的动能减少了

$$E_{k_1} - E_{k_2} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-3}(500^2 - 100^2) = 240 \text{ (J)}$$

**4.18** 一质量  $M=10 \text{ kg}$  的物体放在光滑的水平桌面上, 并与一水平轻弹簧相连, 弹簧的劲度系数  $k=1000 \text{ N/m}$ . 今有一质量  $m=1 \text{ kg}$  的小球以水平速度  $v_0=4 \text{ m/s}$  飞来, 与物体  $M$  相撞后以  $v_1=2 \text{ m/s}$  的速度弹回, 试问:

(1) 弹簧被压缩的长度为多少?

(2) 小球  $m$  和物体  $M$  的碰撞是完全弹性碰撞吗?

(3) 如果小球上涂有黏性物质, 相撞后可与  $M$  粘在一起, 则(1), (2)所问的结果又如何?

**解** 碰撞过程物体、弹簧、小球组成系统的动量守恒

$$mv_0 = -mv_1 + Mu$$

$$u = \frac{m(v_0 + v_1)}{M} = \frac{1 \times (4 + 2)}{10} = 0.6 \text{ (m/s)}$$

小球与弹簧碰撞,弹簧被压缩,对物体  $M$  有作用力,对物体  $M$ ,由动能定理.

$$(1) -\frac{1}{2} kx^2 = 0 - \frac{1}{2} Mu^2$$

弹簧被压缩的长度

$$x = \sqrt{\frac{M}{k}} u = \sqrt{\frac{10}{1000}} \times 0.6 = 0.06 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} (2) \Delta E_k &= \frac{1}{2} Mu^2 + \frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times (0.6)^2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 4^2 \\ &= -4.2 \text{ (J)} \end{aligned}$$

碰撞中动能有损失,说明是非完全弹性碰撞.

(3) 小球与物体  $M$  碰撞后粘在一起,设其共同速度为  $u'$ ,根据动量守恒及动能定理

$$\begin{aligned} mv_0 &= (M + m) u' \\ -\frac{1}{2} kx'^2 &= 0 - \frac{1}{2} (M + m) u'^2 \end{aligned}$$

此时弹簧被压缩的长度

$$x' = \frac{mv_0}{\sqrt{k(M+m)}} = \frac{1 \times 4}{\sqrt{1000(10+1)}} = 0.04 \text{ (m)}$$

碰撞后,两物体粘在一起,这种碰撞为完全非弹性碰撞.

**4.19** 装有一光滑斜面的小车,原来处于静止状态,小车质量为  $M$ ,斜面倾角为  $\alpha$ .现有一质量为  $m$  的滑块沿斜面滑下,滑块的起始高度为  $h$ ,如图所示.当滑块到达斜面底部时,试问:

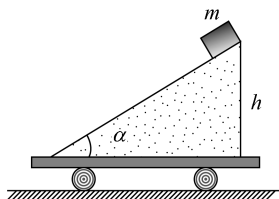


图 4.19

(1) 小车移动的距离为多少?

(2) 小车的速度多大(假定小车与地面之间的摩擦可略去不计)?

**解** (1) 设滑块沿斜面相对于小车的速度为  $v_r$ ,在相对于地面这个惯性系中  $m$  与  $M$  组成系统水平方向动量守恒

$$m(u - v_r \cos \alpha) + Mu = 0$$

$$u = \frac{m \cos \alpha}{m + M} v_r$$

小车移动的距离为

$$L = \int_0^{\Delta t} u dt = \frac{m \cos \alpha}{m + M} \int_0^{\Delta t} v_r dt$$

$$= \frac{m \cos \alpha}{m + M} \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{m}{m + M} h \cot \alpha$$

(2)系统的机械能守恒

$$mgh = \frac{1}{2} m (u - v \cos \alpha)^2 + \frac{1}{2} m (v \sin \alpha)^2 + \frac{1}{2} M u^2$$

小车的速度

$$u = m \cos \alpha \sqrt{\frac{2gh}{(m + M)(M + m \sin^2 \alpha)}}$$

**4.20** 一个质量为  $M$  的榴弹炮,装在轴部光滑的小车上,如图所示.榴弹炮在发射质量为  $m$ 、相对炮口速度为  $v_m$  的炮弹时,它静止在船的水平甲板上.试求(1)发射后炮弹相对于船的速度  $v$ ; (2)发射后榴弹炮相对于船的速度  $V$ .当  $M = 100 m$ 、 $v_m = 100 \text{ m/s}$  时,求:(3)  $v$  和  $V$ .

**解** 取榴弹炮和炮弹作为研究系统,它们在水平方向不受外力,因此动量守恒,相对于船这一惯性系有

$$m(v_m - V) - (M - m)V = 0$$

因而

$$V = \frac{m}{M} v_m$$

因此,(1)发射后炮弹相对于船的速度

$$v = v_m - V = \frac{M - m}{M} v_m$$

(2)榴弹炮相对船的速度  $V = \frac{m}{M} v_m$

(3)当  $M = 100 m$  时

$$v = \frac{M - m}{M} v_m = 0.99 v_m$$

$$V = \frac{m}{M} v_m = 0.01 v_m$$

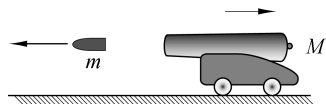


图 4.20

**4.21** 速度为  $v$  的水流沿两平面间流去,遇到一平面挡板后分为左右两路支流,支流速率仍为  $v$ ,如图 4.21(a).设挡板表面是光滑的,水从两平面间流出的总流量(单位时间流过横截面的水的质量) $q = \frac{dm}{dt}$ ,水流速度与挡板法线的夹角为  $\theta$ .试求水流对挡板的作用力及左右两支流各自的流量.

**解** 取坐标系如图 4.21(b).设  $\Delta t$  内有  $\Delta m$  的水冲击在挡板上,挡板对  $\Delta m$

的作用力为  $\mathbf{F}$ , 方向垂直挡板向上, 有

$$-F\Delta t = 0 - \Delta m v \cos \theta$$

$$F = \frac{\Delta m}{\Delta t} v \cos \theta = qv \cos \theta$$

水流对挡板作用力  $F' = qv \cos \theta$ ,  $F'$  方向垂直挡板向下.

设  $\Delta t$  内左右两分支流过横截面的水的质量分别为  $\Delta m_l$ 、 $\Delta m_r$ , 因水流在水平方向不受外力作用, 故分动量守恒, 有

$$-\Delta m_l v + \Delta m_r v = \Delta m v \sin \theta$$

$$\Delta m_r - \Delta m_l = \Delta m \sin \theta = q \Delta t \sin \theta$$

又因

$$\Delta m_r + \Delta m_l = \Delta m = q \Delta t$$

故有

$$q_r = \frac{\Delta m_r}{\Delta t} = \frac{1}{2} q (1 + \sin \theta)$$

$$q_l = \frac{\Delta m_l}{\Delta t} = \frac{1}{2} q (1 - \sin \theta)$$

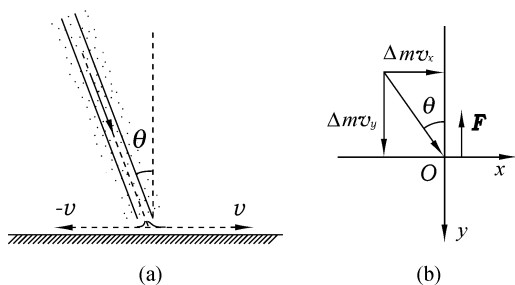


图 4.21

**4.22** 一根质量为  $M$ 、长度为  $L$  的链条、被竖直地悬挂起来, 其最低端刚好与秤盘接触. 今将链条释放并让它落到秤盘上, 如图所示. 当链条下落的长度为  $x$  时, 试求秤的读数是多少?

**解** 秤的读数反映了链条对秤盘的作用力的大小, 数值上也等于秤盘对链条作用力的大小. 该力由两部分组成, 第一部分为已落入盘中的链条所受的力  $F_1$ , 其数值等于其重力, 取竖直向上为坐标轴正向.

$$F_1 = m' g = \frac{M}{L} x g$$

第二部分为正要落入盘中的部分作用力  $F_2$ , 设其质量为  $\Delta m'$ , 根据动量定

理,此时忽略其重力,有

$$F_2 = \frac{0 - (-\Delta m' v)}{\Delta t} = \frac{dm'}{dt} v$$

其中  $dm' = \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} v dt$ ,  $v = \sqrt{2gx}$

$$F_2 = \frac{M}{L} v^2 = \frac{2Mgx}{L}$$

$$F = F_1 + F_2 = \frac{M}{L} xg + 2 \frac{M}{L} xg = 3 \frac{Mgx}{L}$$

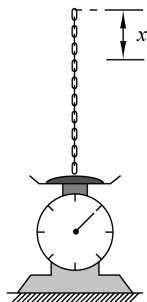


图 4.22

链条对秤盘的作用力  $F' = -F = -3 \frac{Mgx}{L}$ , 负号表

示  $F'$  与  $F$  方向相反, 即  $F'$  方向向下.

#### 4.23 将一空盒放在台秤盘上, 并将台秤的读数调

节器调节到零, 然后从高出盒底  $h$  处将石子以每秒  $\mu$  个的速率注入盒中, 每石子具有质量  $m$ . 假设石子与盒的碰撞是完全非弹性的, 试求石子开始装入盒后  $t$  秒时台秤的读数.

**解** 秤盘对石子的作用力由两部分组成, 一部分为已落入盘中的石子对盘的作用力  $F_1$ , 另一部分为  $dt$  时间内落入盘中部分  $dm$  对盘的作用力  $F_2$

$$F_1 = \mu t m g$$

$$F_2 = \frac{0 - (-dmv)}{dt} = \frac{dm}{dt} v = \mu m v = \mu m \sqrt{2gh}$$

$$F = F_1 + F_2 = \mu t m g + \mu m \sqrt{2gh}$$

石子对秤盘的作用力即台秤的读数为

$$F' = \mu t m g + \mu m \sqrt{2gh}$$

**4.24** 两质点  $P$  与  $Q$  最初相距  $1.0 \text{ m}$ , 都处于静止状态,  $P$  的质量为  $0.1 \text{ kg}$ , 而  $Q$  的质量为  $0.3 \text{ kg}$ ,  $P$  与  $Q$  以  $1.0 \times 10^{-2} \text{ N}$  的恒力相互吸引.

(1) 假设没有外力作用在该系统上, 试描述系统质心的运动;

(2) 在距离质点  $P$  的初位置多远处, 两质点将相互碰撞?

**解** (1) 对  $P, Q$  组成的系统应用质心运动定理

$$\mathbf{F}_{\text{外}} = \frac{d\mathbf{P}_c}{dt} \text{ 并考虑}$$

$$\mathbf{F}_{\text{外}} = 0, \text{ 可得 } \mathbf{P}_c(t) = \text{常量}$$

又因  $\mathbf{P}_c(0) = 0$ , 故  $\mathbf{P}_c(t) = 0$ , 即质心静止不动.

(2) 由于质心不动, 故  $P, Q$  在质心处相碰

$$x_c = \frac{m_P \times 0 + m_Q \times x_Q}{m_P + m_Q} = \frac{0.3 \times 1.0}{0.1 + 0.3} = 0.75 \text{ (m)}$$

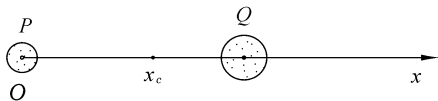


图 4.24

在离质点  $P$  的位置  $0.75 \text{ m}$  处,两质点相互碰撞.

**4.25** 长为  $63 \text{ cm}$  的均匀细棒弯成直角形状,一段长为  $36 \text{ cm}$ ,另一段长为  $27 \text{ cm}$ ,如图所示.试求它的质心位置.

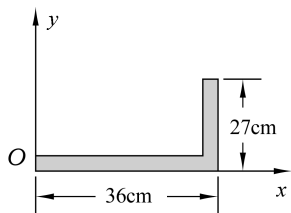


图 4.25

**解** 建立如图 4.25 所示的坐标,质心的坐标为

$$x_c = \frac{\int_0^{36} x \, dm + 36 \times \frac{1}{63} M \times 27}{M}$$

$$= \frac{\int_0^{36} \frac{1}{63} M x \, dx + 36 \times 27 \times \frac{1}{63} M}{M} = 25.7 \text{ cm}$$

$$y_c = \frac{\int_0^{27} y \, dm}{M} = \frac{\int_0^{27} \frac{1}{63} M y \, dy}{M} = 5.8 \text{ cm}$$

**4.26** 运载火箭的最后一级以  $v_0 = 7600 \text{ m/s}$  的速率飞行.这一级由一个质量为  $m_1 = 290.0 \text{ kg}$  的火箭壳和一个质量为  $m_2 = 150.0 \text{ kg}$  的仪器舱扣在一起.当扣松开后,二者间的压缩弹簧使二者分离.这时二者的相对速度为  $u = 910.0 \text{ m/s}$ .设所有速度都在同一直线上,试求两部分分开后各自的速度.

**解** 取竖直向上为坐标正方向,设分离后,火箭壳的速度为  $v_1$ ,则仪器舱的速度为  $v_2 = v_1 + u$ ,火箭壳和仪器舱组成的系统其内力远大于重力,因此其动量守恒

$$(m_1 + m_2) v_0 = m_1 v_1 + m_2 (v_1 + u)$$

解得火箭壳的速度

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2) v_0 - m_2 u}{m_1 + m_2} = \frac{(290 + 150) \times 7600 - 150 \times 910}{290 + 150}$$

$$= 7290 \text{ m/s}$$

仪器舱的速度

$$v_2 = v_1 + u = 8200 \text{ m/s}$$

## 第 5 章 刚体运动学

### 一、基本内容和主要公式

#### 1. 刚体和刚体的自由度

刚体:在力作用下,大小和形状都保持不变的物体.

刚体的自由度:确定刚体位置所需的独立坐标数.自由刚体有 6 个自由度,这是刚体的最大自由度数,作平动运动的刚体有 3 个自由度,绕定轴转动的刚体仅有 1 个自由度.

#### 2. 刚体的平动及运动特点

在刚体运动中,联接刚体内任意两点的直线在空间的指向总是保持平行,这样的运动称作平动.在平动运动中,刚体上所有质点在相等时间内有相等的位移,同一时刻有相等的速度和相等的加速度.

#### 3. 刚体的定轴转动及运动特点

如果刚体上各点都绕某一固定直线作圆周运动,则称刚体绕定轴转动,固定直线称作转轴.在定轴转动中,刚体上所有质点在相等时间内转过相同的角度,同一时刻具有相等的角速度和角加速度.

刚体绕定轴转动的运动学方程:

$$\theta = f(t)$$

刚体绕定轴转动的角速度:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

刚体绕定轴转动的角加速度:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

匀加速转动:

$$\omega = \omega_0 + \beta t$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta\theta$$

#### 4. 绕定轴转动刚体上各点的速度和加速度

刚体上与转轴相距为  $r$  的  $M$  点的速度和加速度为

$$v = r\omega\tau$$

$$\mathbf{a} = a_\tau\tau + a_n\mathbf{n} = r\beta\tau + r\omega^2\mathbf{n}$$

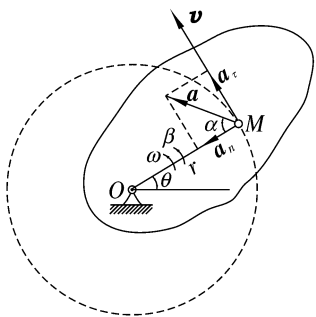


图 5. I

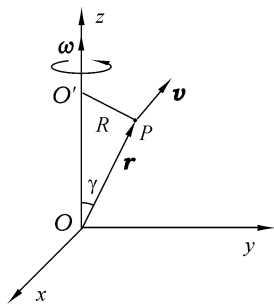


图 5. II

#### 5. 角速度和角加速度矢量

若刚体绕  $z$  轴转动, 则刚体的角速度、角加速度矢量可写成

$$\omega = \omega\mathbf{k}, \quad \beta = \beta\mathbf{k}$$

刚体上  $P$  点的速度和加速度为

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n = \beta \times \mathbf{r} + \omega \times \mathbf{v}$$

式中  $\mathbf{r}$  为坐标原点到  $P$  点的矢径.

### 二、典型例题

**5-1** 一大型回转类“观览圆盘”如图 5-1 所示. 圆盘的半径  $R=25\text{ m}$ , 供人乘坐的吊箱高度  $L=2\text{ m}$ . 若大圆盘绕水平轴匀速转动, 转速为  $0.1\text{ r/min}$ . 试求: 吊箱底部  $A$  点的轨迹及  $A$  点的速度和加速度的大小.

**解** 建立如图 5-1 所示的坐标系, 设  $t=0$  时,  $\overline{OB}$  与  $x$  轴的夹角为  $\theta_0$ , 则  $t$  时刻  $\overline{OB}$  与  $x$  轴的夹角为  $\omega t + \theta_0$ , 其中  $\omega$  等于

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10 \times 60} = \frac{\pi}{300}$$

由图示的几何关系有

$$x_A = x_B = R\cos(\omega t + \theta_0)$$

$$y_A = y_B - L = R\sin(\omega t + \theta_0) - L$$

所以,  $A$  点的轨迹为

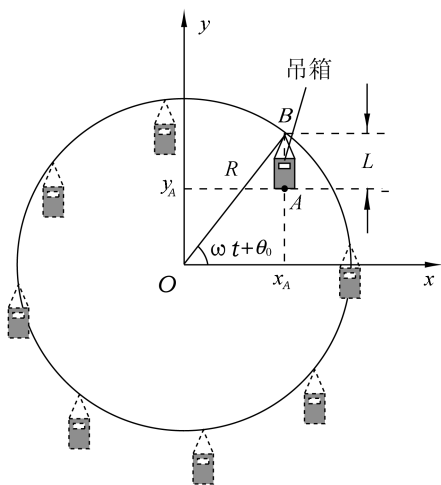


图 5-1

$$x_A^2 + (y_A + L)^2 = R^2$$

即  $A$  点的轨迹为半径是  $R$  的圆, 圆心在  $(0, -L)$  处.

$A$  点的速度为

$$v_{Ax} = \frac{dx_A}{dt} = -R\omega \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$v_{Ay} = \frac{dy_A}{dt} = R\omega \cos(\omega t + \theta_0)$$

其大小为

$$v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} = R\omega = \frac{25\pi}{300} = 0.26 \text{ (m/s)}$$

$A$  点的加速度为

$$a_{Ax} = \frac{dv_{Ax}}{dt} = -R\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$a_{Ay} = \frac{dv_{Ay}}{dt} = -R\omega^2 \sin(\omega t + \theta_0)$$

其大小为

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = R\omega^2 = \frac{25\pi^2}{300^2} = 2.7 \times 10^{-3} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

**说明** 这是一个涉及平动和定轴转动的题目. 大轮盘作匀角速度转动, 吊箱作平动运动. 平动物体上每一点的速度和加速度都是相同的, 因而选择  $B$  点 (该点即在大轮盘上, 也在吊箱上), 可方便地求出  $A$  点的速度和加速度的大小, 即  $v_A = v_B =$

$$R\omega, a_A = a_B = R\omega^2.$$

**5-2** 一飞轮绕定轴转动,其角坐标与时间的关系为

$$\theta = a + bt + ct^3$$

式中,  $a, b, c$  均为常量. 试求(1)飞轮的角速度和角加速度; (2)距转轴  $r$  处的质点的切向加速度和法向加速度.

**解** 由角速度的定义, 有

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = b + 3ct^2$$

由角加速度的定义, 有

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = 6ct$$

距转轴  $r$  处的质点的切向加速度为

$$a_\tau = r\beta = 6crt$$

法向加速度为

$$a_n = r\omega^2 = r(b + 3ct^2)^2$$

**说明** 本题属于定轴转动刚体运动学第一类问题, 即知道刚体的运动方程, 通过微分可求刚体的转动角速度和角加速度.

**5-3** 一滑轮绕定轴转动, 其角加速度随时间变化的关系为

$$\beta = 2at - 4bt^3$$

式中,  $a, b$  均为常量, 设  $t=0$  时, 滑轮的角速度和角坐标分别为  $\omega_0$  和  $\theta_0$ , 试求滑轮在  $t$  时刻的角速度和角坐标.

**解** 由角加速度的定义, 有

$$d\omega = \beta dt = (2at - 4bt^3)dt$$

对上式两边积分, 同时注意到  $t=0$  时,  $\omega = \omega_0$ , 有

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t (2at - 4bt^3)dt$$

$$\omega - \omega_0 = at^2 - bt^4$$

即  $t$  时刻滑轮的角速度为

$$\omega = \omega_0 + at^2 - bt^4$$

由角速度的定义, 有

$$d\theta = \omega dt = (\omega_0 + at^2 - bt^4)dt$$

两边积分, 有

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\omega_0 + at^2 - bt^4)dt$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{3} at^3 - \frac{1}{5} bt^5$$

即  $t$  时刻滑轮的角坐标为

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{3} at^3 - \frac{1}{5} bt^5$$

**说明** 本题属于定轴转动刚体运动学第二类问题,即知道角加速度和初始条件,通过积分可求刚体在任意时刻的角速度和角坐标(即运动方程)。

**5-4** 一刚体以每分钟 60 转,绕  $Z$  轴的正方向做匀速转动.设刚体上一点  $P$  的位置矢量为

$$\mathbf{r} = 0.3\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j} + 0.9\mathbf{k} \quad \text{m}$$

试求  $P$  点的速度和加速度.

**解** 依题意,该刚体的角速度矢量为

$$\omega = 2\pi\mathbf{k}$$

由定轴转动刚体上一点的速度和加速度公式,有

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \omega \times \mathbf{r} = 2\pi\mathbf{k} \times (0.3\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j} + 0.9\mathbf{k}) \\ &= -0.8\pi\mathbf{i} + 0.6\pi\mathbf{j} \quad (\text{m/s}) \\ \mathbf{a} &= \beta \times \mathbf{r} + \omega \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

因刚体作匀速转动,  $\beta=0$  代入上式,有

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 2\pi\mathbf{k} \times (-0.8\pi\mathbf{i} + 0.6\pi\mathbf{j}) \\ &= -(1.2\mathbf{i} + 1.6\mathbf{j})\pi^2 \end{aligned}$$

**说明** 由于是匀速转动  $\beta=0$ ,所以  $\mathbf{a}_\tau=0$ ,  $\mathbf{a}=\mathbf{a}_n$ ,因而  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{v}$  垂直,进而应有  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$ .

### 三、习题详解

#### 5.1 选择题

(1)下列说法中哪一个或哪一些是正确的(C)

(A) 某瞬时平动刚体上各点速度大小相等,但方向可以不同

(B) 平动刚体上各点的轨迹一定是直线

(C) 平动刚体上各点的轨迹可以是曲线

(2)一刚体以每分钟 60 转绕  $Z$  轴正方向做匀速转动.设这时该刚体上一点  $P$  的位矢为  $\mathbf{r}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ ,其单位为  $10^{-2}\text{ m}$ ,若以  $10^{-2}\text{ ms}^{-1}$  为速度单位,则该时刻  $P$  点的速度为(B)

(A)  $\mathbf{v} = 94.2\mathbf{i} + 125.6\mathbf{j} + 154.0\mathbf{k}$

(B)  $\mathbf{v} = -25.1\mathbf{i} + 18.8\mathbf{j}$

(C)  $\mathbf{v} = 15.1\mathbf{i} + 18.8\mathbf{j}$

(D)  $\mathbf{v} = 31.4\mathbf{k}$

#### 5.2 填空题

(1)已知一刚体绕定轴转动的运动方程为  $\varphi = 10 + 8t - 5t^2$  (SI),则  $t = 0.2\text{ s}$

时,刚体的角速度为  $6 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ,角加速度为  $-10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$ ;对离转轴距离  $r=0.5 \text{ m}$  的质点来说, $t=0.2 \text{ s}$  时,它的速度大小为  $3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ;加速度大小为  $18.7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

(2)已知一飞轮从静止开始做匀变速定轴转动,在  $10 \text{ min}$  内转过  $1200$  圈,则它在  $10 \text{ min}$  末时的角速度为  $25.13 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ;第二个  $10 \text{ min}$  内它转过的圈数为  $3600$  圈.

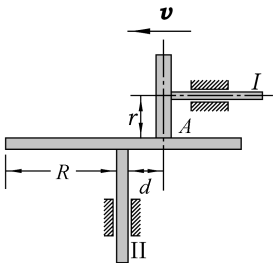


图 5.2(4)

(3)一个质点从静止开始以匀角加速度  $\beta$  沿半径为  $R$  的圆周运动,如果在某时刻,此质点的加速度  $a$  与切向加速度  $a_\tau$  成  $45^\circ$  角,则此时刻质点已转过的角度为  $0.5 \text{ rad}$ .

(4)摩擦轮传动系统,如图 5.2(4)所示.已知主动轮 I 每分钟转  $n$  圈,它与从动轮 II 的接触点 A 沿箭头所示方向按规律  $d = a - bt$  而变化.轮 I 半径  $r$ ,轮 II 半径  $R$ (长度单位  $\text{cm}$ ),则以  $d$  的函数表示的轮 II 的角速度为  $\frac{n r \pi}{30(a - bt)}$ ,角加速度

为  $\frac{n r b \pi}{30(a - bt)^2}$ .当轮 I 移动到  $d = r$  时,轮 II 边沿上一点的加速度大小为  $\frac{n \pi R}{30} \sqrt{\frac{b^2}{r^2} + \frac{n^2 \pi^2}{900}}$ . ( $a, b$  为常量)

**5.3** 在图 5.3 所示的四连杆机构中,  $\overline{O_1 A} = \overline{O_2 B} = l, \overline{AB} = \overline{O_1 O_2}$ ,两杆各自可绕通过  $O_1, O_2$  并与纸面垂直的轴转动.已知连杆  $O_1 A$  转动时,角  $\varphi = \omega t, \omega$  为一常量.又  $\overline{AM} = l_1$ ,试求连杆  $AB$  上的 A 点及任意点 M 的轨迹方程及 A 点的速度和加速度.

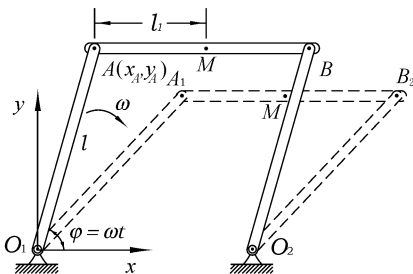


图 5.3

**解** 已知杆  $AB$  上的 A 点绕  $O_1$  点作匀速率转动,角速度为  $\omega$ .在直角坐标系  $O_1 xy$  中, $t$  时刻的位矢为

$$\mathbf{r}_A = x_A \mathbf{i} + y_A \mathbf{j} = l \cos \omega t \mathbf{i} + l \sin \omega t \mathbf{j}$$

所以,  $A$  点的速度和加速度为

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = -l\omega \sin \omega t \mathbf{i} + l\omega \cos \omega t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = -l\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - l\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j}$$

由于  $t$  时刻  $A$  点的坐标为  $x_A = l \cos \omega t$ ,  $y_A = l \sin \omega t$  因而  $A$  点的轨迹方程为

$$x_A^2 + y_A^2 = l^2$$

即  $A$  点的轨迹是以  $O_1$  为圆心, 半径为  $l$  的圆.

由于  $AB$  杆的运动为平动,  $t$  时刻,  $AB$  杆上的  $M$  点的坐标为

$$x_M = l \cos \omega t + l_1, \quad y_M = l \sin \omega t$$

所以,  $M$  点的轨迹方程为

$$(x_M - l_1)^2 + y_M^2 = l^2$$

即  $M$  点的轨迹是以  $(l_1, 0)$  点为圆心, 半径为  $l$  的圆. 从此题可以看出, 平动刚体上各点的轨迹相同.

**5.4** 一直径为 18 cm 的转轮, 轮缘上有一颗小螺丝钉. (1) 当该轮以 2000 r/min 的角速度转动时, 求螺丝钉的速率和法向加速度; (2) 若该轮的转速由 2000 r/min 均匀地增加到 4000 r/min, 其间共经历 5 min, 试求该轮角加速度及螺丝钉的切向加速度和加速度的大小.

**解** (1) 转轮的角速度为

$$\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = \frac{2000\pi}{30} \approx 209.4 \text{ (rad/s)}$$

螺丝钉为转轮轮缘上一点, 其速率和法向加速度为

$$v_1 = R\omega_1 = 0.09 \times 209.4 \approx 18.85 \text{ (m/s)}$$

$$a_{n1} = R\omega_1^2 \approx 3946.4 \text{ m/s}^2$$

(2) 因为转轮的运动是匀变速转动, 因而其角加速度为

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{60\Delta t} \\ &= \frac{\pi}{30} \frac{4000 - 2000}{5 \times 60} \approx 0.698 \text{ (rad/s}^2\text{)} \end{aligned}$$

螺丝钉在末时刻的切向加速度和加速度的大小为

$$a_\tau = R\beta = 6.28 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

$$a = a_n^2 + a_\tau^2 = R^2 \omega_2^2 + \beta^2 = 1.579 \times 10^4 \text{ m/s}^2$$

**5.5** 飞轮从静止开始作匀加速转动, 在最初 2 min 内转了 3600 转, 求飞轮的角加速度和第 25 s 末的角速度.

**解** 因为飞轮作匀加速转动,所以

$$\theta = \frac{1}{2} \beta t^2, \quad \omega = \beta t$$

因而,飞轮的角加速度为

$$\beta = \frac{2\theta}{t^2} = \frac{2 \times 2\pi \times 3600}{(2 \times 60)^2} = \pi \text{ rad/s}^2$$

第 25 s 末的角速度为

$$\omega = 25\pi = 78.54 \text{ rad/s}$$

**5.6** 如图 5.6 所示,发电机的皮带轮 A 被汽轮机的皮带轮 B 带动, A 轮和 B 轮的半径分别为  $r_1 = 30 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 75 \text{ cm}$ . 已知汽轮机在启动后以匀角加速度  $0.8\pi \text{ rad/s}^2$  转动,两轮与皮带间均无滑动. (1) 经过多少时间后发电机的转速为  $600 \text{ r/min}$ ? (2) 当汽轮机停止工作后,发电机在 1 min 内由  $600 \text{ r/min}$  减到  $300 \text{ r/min}$ , 设减速过程是均匀的, 求角加速度及在这 1 min 内转过的圈数.

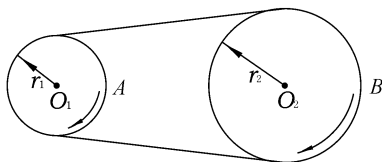


图 5.6

**解** (1) 因两轮与皮带之间无相对滑动, 两轮缘的切向加速度大小相等, 因而 A 轮的角加速度为

$$\beta_1 = \frac{r_2}{r_1} \beta_2 = \frac{75}{30} \times 0.8\pi = 2\pi \text{ (rad/s}^2\text{)}$$

由于是匀加速转动, 所以  $\omega_1 = \beta_1 t$ , 因而

$$t = \frac{\omega_1}{\beta_1} = \frac{2\pi \times 600}{60 \times 2\pi} = 10 \text{ (s)}$$

即需要 10 s 时间.

(2) 由于是匀减速转动, 所以 A 轮的角加速度为

$$\beta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{60\Delta t} = \frac{2\pi(300 - 600)}{60 \times 60} = -0.52 \text{ (rad/s}^2\text{)}$$

在 1 min 内转过的圈数为

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \omega_1 t + \frac{1}{2} \beta t^2 = \frac{2\pi \times 600}{60} \times 60 - \frac{1}{2} \times 0.52 \times 60^2 \\ &= 2833.9 \text{ (rad)} = 451 \text{ r} \end{aligned}$$

**5.7** 有一刚体绕固定轴转动.在垂直于轴的平面上有任意两点  $A$  和  $B$ ,它们的速度分别为  $v_A$  和  $v_B$ .证明  $v_A$  和  $v_B$  在  $AB$  连线上的分量相等,并说明其物理意义.

**证** 在刚体上任取两点  $A$  和  $B$ ,设  $t$  时刻  $A$ 、 $B$  两点的速度和位矢分别为  $v_A$ ,  $v_B$  和  $r_A$ ,  $r_B$ ,刚体绕定轴  $O$  转动的角速度为  $\omega$ ,  $AB$  连线到转轴  $O$  的距离为  $d$ ,  $AB$  矢量的方向用单位矢量  $q$  表示,如图 5.7 所示.

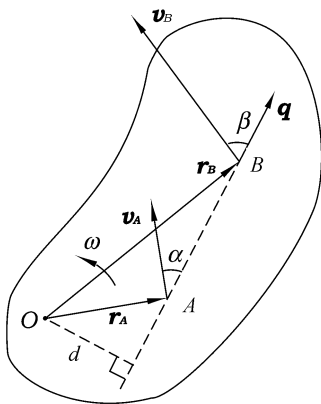


图 5.7

$A$  和  $B$  两点的速度  $v_A$  和  $v_B$  在  $AB$  连线上的投影分别可表示为

$$v_{Aq} = v_A \cdot q = v_A \cos \alpha$$

$$v_{Bq} = v_B \cdot q = v_B \cos \beta$$

因为  $v_A = r_A \omega$ ,  $v_B = r_B \omega$ ,  $\cos \alpha = \frac{d}{r_A}$ ,  $\cos \beta = \frac{d}{r_B}$ , 所以

$$v_{Aq} = d\omega = v_{Bq}$$

即  $v_A$  和  $v_B$  在  $AB$  连线上的分量相等.

因为  $A$ 、 $B$  是刚体上的两点,间距不变,因而在  $AB$  连线上, $A$ 、 $B$  两点的相对速度应为零.

**5.8** 试求地球赤道上一点在地球自转中的向心加速度与地球绕太阳运动时的向心加速度大小之比.假定地球绕太阳运动的轨道是圆形的.地球半径为 6370 km,地心到太阳的距离为  $1.49 \times 10^8$  km.

**解** 设  $R_1$  和  $R_2$  分别为地球半径和地球绕太阳运动的轨道半径, $T_1$  和  $T_2$  分别为地球的自转周期和公转周期,则

$$\frac{a_{n_1}}{a_{n_2}} = \frac{R_1 \omega_1^2}{R_2 \omega_2^2} = \frac{R_1 T_2^2}{R_2 T_1^2} = \frac{R_1}{R_2} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^2 = \frac{6370}{1.49 \times 10^8} \times 365^2 = 5.7$$

**5.9** 一物体绕定轴从静止开始转动,角加速度恒定.

(1) 试证明物体中任一点的法向加速度和该点的角位移成正比;

(2) 当该点的加速度和法向加速度之间的夹角为  $60^\circ$  时,物体转过的角度是多少?

**解** (1) 设该点距转轴的距离为  $r$ ,  $t$  时刻该点的法向加速度为

$$a_n = r\omega^2 = 2r\beta\Delta\theta$$

式  $\Delta\theta$  为角位移. 因此, 该点的法向加速与角位移成正比.

(2) 因为  $a_\tau = r\beta$ ,  $a_n = 2r\beta\Delta\theta$

所以

$$\tan\varphi = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{1}{2\Delta\theta}$$

因而, 物体转过的角度为

$$\Delta\theta = \frac{1}{2\tan\varphi} = \frac{1}{2\tan 60^\circ} = 0.289 \text{ rad}$$

**5.10** 内燃机曲柄  $OA$  以匀角速度  $\omega_0$  转动, 通过连杆  $AB$  带动活塞在汽缸中往复运动. 已知  $OA = r$ ,  $AB = l$ , 试利用变角  $\theta$  求活塞的速度.

**解** 按题意,  $B$  点的速度即为活塞的速度, 由几何关系有

$$\begin{aligned} x &= \overline{OB} = r\cos\theta + l\cos\beta = r\cos\theta + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\theta} \\ v_x &= \frac{dx}{dt} = -r\sin\theta \frac{d\theta}{dt} - \frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\theta}} \cdot \frac{d\theta}{dt} \\ &= -r\sin\theta \left( 1 + \frac{r\cos\theta}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\theta}} \right) \omega_0 \end{aligned}$$

即活塞的速度为

$$v = v_x \mathbf{i} = -r\sin\theta \left( 1 + \frac{r\cos\theta}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\theta}} \right) \omega_0 \mathbf{i}$$

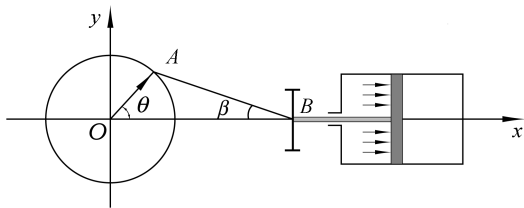


图 5.10

## 第 6 章 刚体动力学

### 一、基本内容和主要公式

#### 1. 力矩

力对轴的力矩:  $M_z(\mathbf{F}) = \pm F_{\perp} h$

力对点的力矩:  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

#### 2. 定轴转动定律

$$M_z = J_z \beta$$

其中  $M_z$  为外力对转轴的力矩之和,  $J_z$  为刚体对转轴的转动惯量.

#### 3. 刚体的转动惯量

$$J_z = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{或} \quad J_z = \int_m r^2 dm$$

平行轴定理:  $J_z = J_c + m d^2$

#### 4. 绕定轴转动刚体的动能定理

力矩的功:  $A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z d\theta$

转动动能:  $E_k = \frac{1}{2} J_z \omega^2$

绕定轴转动刚体的动能定理:  $A = \frac{1}{2} J_z \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_z \omega_1^2$

式中  $A$  为作用于刚体上的合外力矩所作的功.

#### 5. 质点的动量矩定理

质点的动量矩:  $\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}$

质点动量矩定理:  $\mathbf{M}_0 = \frac{d\mathbf{L}_0}{dt}$

其中  $\mathbf{M}_0$  为合外力矩, 它和  $\mathbf{L}_0$  都是对同一固定点计算的.

#### 6. 刚体的动量矩定理

刚体对轴的动量矩:  $L_z = J_z \omega$

刚体对轴的动量矩定理:  $\frac{dL_z}{dt} = M_z$

#### 7. 动量矩守恒定律

如果作用在系统上, 关于某一个固定轴的合外力矩为零, 则系统对此轴的总动

量矩守恒.

### 8. 旋进

自旋物体在外力矩作用下,自旋轴发生转动的现象.仅在重力作用下高速自旋的陀螺,其旋进角速度为

$$\Omega = \frac{mgb}{J\omega}$$

式中  $\omega$  为自旋角速度,  $b$  为陀螺质心到支点的距离.

## 二、典型例题

**6-1** 在半径为  $R$  质量为  $m$  的均质球体中,挖一个半径为  $r = \frac{R}{2}$  的球形空腔,两球心之间的距离  $d = r$ ,如图 6-1(a)所示,试求该球体的转动惯量:

(1) 对于通过两球心的  $z_1$  轴;

(2) 对于通过大球球心且垂直于两球心连线的  $z_2$  轴.

**解** 填充球形空腔形成一个完整的均质球体,显然该球体的转动惯量  $J_0$ ,可看作是半径为  $r$  的小球的转动惯量  $J'$  与题目中待求的有空腔的球体的转动惯量  $J$  之和,即

$$J_0 = J' + J$$

故

$$J = J_0 - J'$$

(1) 对于通过两球心的  $z_1$  轴,有

$$J_0 = \frac{2}{5} (m + m') R^2$$

$$J' = \frac{2}{5} m' r^2 = \frac{1}{10} m' R^2$$

式中  $m'$  为填充形成的半径为  $r$  的小球的质量,其值为

$$m' = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{m}{\frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{1}{7} m$$

所以

$$J_0 = \frac{16}{35} m R^2$$

$$J' = \frac{1}{70} m R^2$$

故

$$J = J_0 - J' = \frac{31}{70} m R^2$$

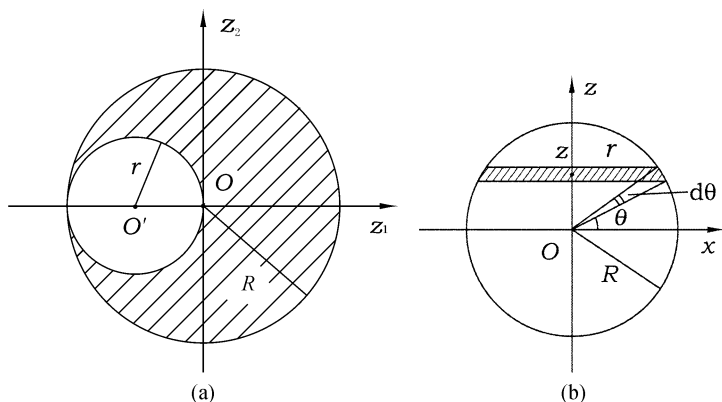


图 6-1

(2) 对于通过大球中心且垂直于两球心连线的  $z_2$  轴, 有

$$J_0 = \frac{2}{5} (m + m') R^2 = \frac{16}{35} m R^2$$

$$J' = \frac{2}{5} m' r^2 + m' d^2 = \frac{1}{10} m' R^2 + \frac{1}{4} m' R^2 = \frac{1}{20} m R^2$$

故

$$J = J_0 - J' = \frac{57}{140} m R^2$$

**说明** (1) 求解刚体的转动惯量是研究刚体转动问题的一个重要方面. 对于形状规则的简单刚体用定义及平行轴定理即可方便地求解其转动惯量. 对于有些刚体直接应用定义及平行轴定理求解转动惯量可能非常复杂, 但有可能通过一定的方法 (如本题中采用的方法), 使问题简化. 本题中采用的解题方法称作补偿法, 这种方法的要点在于添补, 通过添补使问题得以简化. 这种补偿法在物理和工程实际中都有广泛的应用.

(2) 质量为  $m$  的均质球体对过直径轴的转动惯量  $J_z = \frac{2}{5} m R^2$ , 可通过查表获得, 也可通过以下方法计算导出.

如图 6-1(b) 所示, 设球体由许多与轴垂直的圆盘组成, 其中任一圆盘的质量为  $dm$ , 半径为  $r$ , 转动惯量为

$$dJ_z = \frac{1}{2} r^2 dm$$

由图 6-1(b) 可知,  $r = R \cos \theta$ ,  $z = R \sin \theta$ , 所以

$$dm = \rho \pi r^2 dz = \rho \pi r^2 R \cos \theta d\theta$$

因而

$$J_z = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho}{2} \pi r^4 R \cos \theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho}{2} \pi R^5 \cos^5 \theta d\theta$$

$$= \frac{3}{8} M R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho}{2} \cos^5 \theta d\theta = \frac{2}{5} m R^2$$

**6-2** 两个质量均匀的圆柱体,可绕各自的对称轴无摩擦地转动,两轴互相平行,两柱体的半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ ,质量分别为  $m_1$  和  $m_2$ ,如图 6-2(a)所示.最初两柱体沿同方向转动,角速度分别为  $\omega_{10}$  和  $\omega_{20}$ .今让柱体 II 平行向上移动,让两柱体相接触(耦合),在柱体表面接触处的摩擦力作用下,两柱体的角速度都在变化,但最终达到稳定.试求稳定后每个柱体的转动角速度.

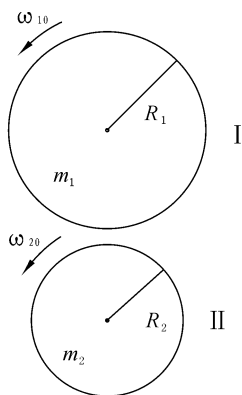


图 6-2(a)

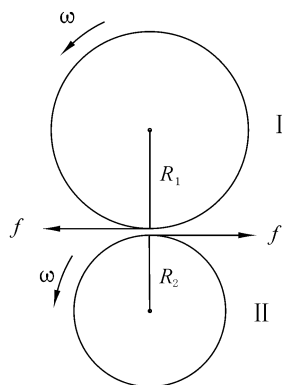


图 6-2(b)

**解** 设两柱体接触后,在运动未稳定前接触处的摩擦力为  $f$ ,如图 6-2(b)所示,运动达稳定时两柱体的角速度分别为  $\omega_1$  和  $\omega_2$ ,从接触到稳定所用的时间为  $t$ ,对两柱体分别应用动量矩定理有

$$-\int_0^t f R_1 dt = J_1 (\omega_1 - \omega_{10}) \quad (1)$$

$$-\int_0^t f R_2 dt = J_2 (\omega_2 - \omega_{20}) \quad (2)$$

由式(1)、(2)可得

$$J_1 R_2 (\omega_1 - \omega_{10}) = J_2 R_1 (\omega_2 - \omega_{20}) \quad (3)$$

将  $J_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$  和  $J_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2$  代入式(3)有

$$m_1 R_1 (\omega_1 - \omega_{10}) = m_2 R_2 (\omega_2 - \omega_{20}) \quad (4)$$

在运动达到稳定时,两柱体接触处的线速度应相等,即

$$\omega_1 R_1 = -\omega_2 R_2 \quad (5)$$

由式(4)和式(5)可解得

$$\omega_1 = \frac{m_1 R_1 \omega_{10} - m_2 R_2 \omega_{20}}{(m_1 + m_2) R_1}$$

$$\omega_2 = \frac{m_2 R_2 \omega_{20} - m_1 R_1 \omega_{10}}{(m_1 + m_2) R_2}$$

**说明** 两柱体从开始接触到稳定,均受摩擦力矩作用,在该力矩作用下,两柱体的角速度不断变化,当运动达稳定时,每个柱体的角加速度均为零,因而此时两柱体之间的摩擦力为零,两柱体之间接触点的相对运动速度为零,所以有  $R_1 \omega_1 = -R_2 \omega_2$  .

**6-3** 一长为  $l$ , 质量为  $m$  的匀质细杆竖直放置, 下端与一固定的光滑水平轴  $O$  连接, 杆可绕该轴自由转动, 如图 6-3 所示. 若杆受一微小扰动, 从静止开始转动, 试计算当杆转到与铅垂线呈  $\theta$  角时的角加速度和角速度.

**解法一** 杆在转动过程中, 对于转轴  $O$  仅有重力矩作用, 即

$$M = \frac{1}{2} mgl \sin \theta$$

根据转动定律, 有

$$\frac{1}{2} mgl \sin \theta = J\beta$$

其中杆对转轴  $O$  的转动惯量  $J = \frac{1}{3} ml^2$ , 因而当杆转到  $\theta$  角位置时, 其角加速度为

$$\beta = \frac{3g}{2l} \sin \theta$$

由角加速度定义, 有

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3g}{2l} \sin \theta$$

进行如下变换

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

可得

$$\omega d\omega = \frac{3g}{2l} \sin \theta d\theta$$

由初始条件  $t=0$  时,  $\theta_0=0$ ;  $\omega_0=0$ , 对上式进行积分, 有

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta \frac{3g}{2l} \sin \theta d\theta$$

即

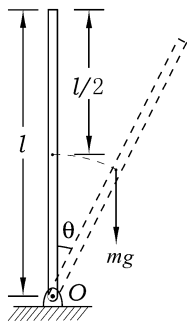


图 6-3

$$\frac{1}{2} \omega^2 = \frac{3g}{2l}(1 - \cos \theta)$$

杆转到  $\theta$  角位置时,角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1 - \cos \theta)}$$

**解法二** 在杆转动过程中,仅有重力做功,因而对于杆和地球构成的系统机械能守恒.设杆开始时的位置,系统的势能为零, $t$  时刻杆转到了与铅垂线呈  $\theta$  角的位置,角速度为  $\omega$ ,根据机械能守恒定律,有

$$\frac{1}{2} J\omega^2 - \frac{1}{2} mg(1 - \cos \theta) = 0 \quad (1)$$

式中的  $J = \frac{1}{3} ml^2$ ,代入上式并化简后,有

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}(1 - \cos \theta) \quad (2)$$

所以,杆转到  $\theta$  角位置时,角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1 - \cos \theta)} \quad (3)$$

对(2)式两边求导,有

$$2\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{3g}{l} \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

将  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ ,  $\frac{d\omega}{dt} = \beta$  代入,得杆在  $\theta$  角位置时的角加速度,即

$$\beta = \frac{3g}{2l} \sin \theta$$

**说明** (1)本题可用转动定律和机械能守恒定律两种方法求解.很明显,用守恒定律求解比较简单.

(2)在解法一中,用了变换  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$ ,这种变换方法在解题中经常使用,读者应注意体会该方法的本质.

**6-4** 在光滑的水平桌面上放一均质细杆,杆的质量为  $M$ ,长为  $l$ ,杆可绕过其一端的光滑竖直轴转动,如图所示.杆开始时静止,若有一质量为  $m$  的小球,以水平速度  $v_0$  垂直于杆冲击其末端  $A$  点,设冲击是完全弹性碰撞.试分析碰撞后小球和杆的运动情况.

**解** 对于杆和小球组成的系统,外力对转轴  $O$  的力矩为零,因而动量矩守恒,即

$$mlv_0 = mlv + \frac{1}{3} Ml^2 \omega$$

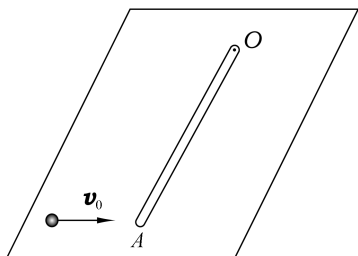


图 6-4

由于是完全弹性碰撞,所以动能守恒,即

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{3} M l^2 \right) \omega^2$$

解以上二式可得

$$\omega = \frac{6m}{3m + M} \frac{v_0}{l} \quad (1)$$

$$v = \frac{3m - M}{3m + M} v_0 \quad (2)$$

小球和杆碰后,小球所受合外力为零,杆所受合外力矩为零,杆将以式(1)给出的  $\omega$  作匀角速转动,小球以式(2)给出的  $v$  作匀速直线运动,当  $m > M/3$  时小球按原方向运动,反之沿原来的反方向运动。

**说明** 在小球与杆的碰撞过程中,合外力矩为零,但合外力不为零,因为碰撞时及碰撞后,轴对杆有作用力,因此由杆和小球组成的系统对  $O$  点的动量矩守恒,动量并不守恒。

**6-5** 一长为  $l$  的匀质细杆,可绕通过中心  $O$  的固定水平轴在铅垂面内自由转动,开始时杆静止于水平位置.一质量与杆相同的昆虫以速度  $v_0$  垂直落到距  $O$  点  $\frac{1}{4}l$  处的杆上,昆虫落下后立即向杆的端点爬行,如图 6-5 所示.若要使杆以匀角速度转动,试求昆虫沿杆爬行的速度。

**解** 设杆和昆虫的质量均为  $m$ ,昆虫与杆碰后以共同的角速度  $\omega$  转动.昆虫落到杆上的过程为完全非弹性碰撞(设此过程时间很短,重力对转轴的力矩可忽略),对于昆虫和杆构成的系统,合外力矩为零,动量矩守恒,故有

$$m v_0 \frac{l}{4} = \left( \frac{1}{12} m l^2 + m \left( \frac{l}{4} \right)^2 \right) \omega$$

化简此式可得杆的转动角速度,即

$$\omega = \frac{12}{7} \frac{v_0}{l}$$

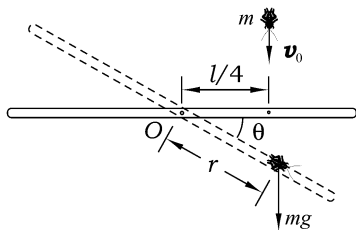


图 6-5

由题设可知,此后杆以此角速度作匀速转动.设碰后  $t$  时刻,杆转过  $\theta$  角,昆虫爬到距  $O$  点为  $r$  的位置处.此时杆和昆虫系统所受合外力矩为

$$M_z = mgr \cos \theta$$

根据动量矩定理有

$$M_z = \frac{d(J_z \omega)}{dt}$$

由题设  $\omega$  不变,所以

$$M_z = \omega \frac{dJ_z}{dt}$$

式中  $J_z$  为  $t$  时刻系统关于转轴  $O$  的转动惯量,其值为

$$J_z = \left( \frac{1}{12} m l^2 + m r^2 \right)$$

代入上式,有

$$mgr \cos \theta = 2 m \omega r \frac{dr}{dt}$$

因此,为了使  $\omega$  保持不变,昆虫的爬行速率  $v$  应为

$$\begin{aligned} v = \frac{dr}{dt} &= \frac{g \cos \theta}{2 \omega} = \frac{g}{2 \omega} \cos \omega t \\ &= \frac{7l}{24 v_0} \cos \left( \frac{12}{7l} v_0 t \right) \end{aligned}$$

**说明** 此题是一个系统绕定轴转动问题,在解此题的过程中应用了动量矩定理

$M_z = \frac{dL_z}{dt}$ ,读者应注意该定理与刚体绕定轴转动定律  $M_z = J_z \frac{d\omega}{dt}$  的区别.

### 三、习题详解

#### 6.1 选择题

(1) 下列说法中正确的是(C)

- (A)作用在定轴转动刚体上的力越大,刚体转动的角加速度越大  
 (B)作用在定轴转动刚体上的合力矩越大,刚体转动的角速度越大  
 (C)作用在定轴转动刚体上的合力矩越大,刚体转动的角加速度越大  
 (D)作用在定轴转动刚体上的合力矩为零,刚体转动的角速度为零

(2)轮圈半径为  $R$ ,其质量  $M$  均匀分布在轮缘上,长为  $R$ 、质量为  $m$  的均质辐条固定在轮心和轮缘间,辐条共有  $2N$  根.今若将辐条数减少  $N$  根,但保持轮对通过轮心、垂直于轮平面轴的转动惯量不变,则轮圈的质量应为(D)

- (A)  $\frac{N}{12}m + M$   
 (B)  $\frac{N}{6}m + M$   
 (C)  $\frac{2N}{3}m + M$   
 (D)  $\frac{N}{3}m + M$

(3)一半径为  $R$  质量为  $m$  的均质圆形平板在粗糙的水平桌面上,绕通过圆心且垂直于平板的  $OO'$  轴转动,摩擦力对  $OO'$  轴的力矩为(A)

- (A)  $\frac{2}{3}\mu mgR$  (B)  $\mu mgR$   
 (C)  $\frac{1}{2}\mu mgR$  (D) 0

## 6.2 填空题

(1)均质杆长为  $l$ ,质量为  $m$ ,与  $z$  轴的夹角为  $\alpha$ ,以角速度  $\omega$  绕  $Oz$  轴转动,则杆的动量大小为  $\frac{1}{2}m\omega l\sin\alpha$ ,杆的动能为  $\frac{1}{6}m\omega^2 l^2\sin^2\alpha$ ,杆对  $z$  轴的动量矩  $\frac{1}{3}m\omega l^2\sin^2\alpha$ .

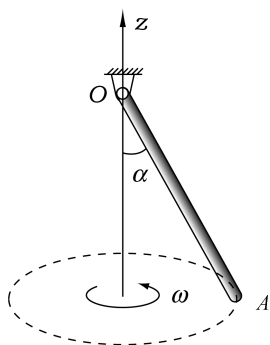


图 6.2(1)

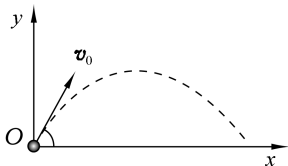


图 6.2(2)

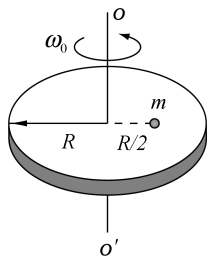


图 6.2(3)

(2)以初速度  $v_0$  从  $O$  点抛射一质量为  $m$  的小球,  $v_0$  与水平方向之间的夹角为  $\alpha$ ,如图 6.2(2)所示.在不考虑空气阻力的情况下,  $t$  时刻小球对  $O$  点的动量矩  $L_o = m[(v_0 \sin \alpha - gt)x - v_0 y \sin \alpha]k$ , 动量矩对时间的导数  $\frac{dL_o}{dt} = -mgxk$ , 小球所受合力对  $O$  点的力矩  $M = -mgxk$ .

(3)均质圆盘水平面放置,可绕通过盘心的铅垂轴自由转动,圆盘对该轴的转动惯量为  $J_0$ ,当其转动角速度为  $\omega_0$  时,有一质量为  $m$  的质点沿铅垂方向落到圆盘上,并粘在距转轴  $R/2$  处,它们共同转动的角速度为  $\omega_0 \left(1 + \frac{mR^2}{4J_0}\right)$ .

**6.3** 如图所示的系统,滑轮可视为半径为  $R$ 、质量为  $M$  的均质圆盘,滑轮与绳之间无滑动,水平面光滑.若  $m_1 = 50 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 200 \text{ kg}$ ,  $M = 15 \text{ kg}$ ,  $R = 0.10 \text{ m}$ , 求物体的加速度及绳中的张力.

**解** 分别选取质量为  $m_1$ ,  $m_2$  的物体和滑轮三者为研究对象,它们的受力情况如图 6.3(b)所示.以  $m_1$  和  $m_2$  的运动方向为正方向,分别写出滑轮及物体的运动方程,有

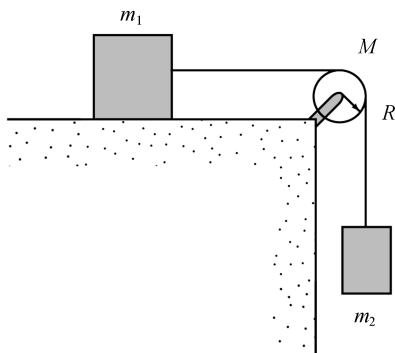
$$T_1 = m_1 a$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$

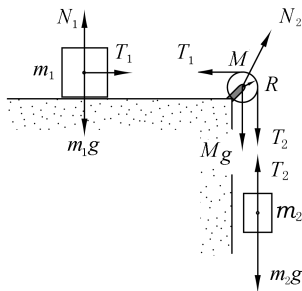
$$(T_2 - T_1)R = J\beta$$

由于滑轮与绳之间无相对滑动,所以  $a = R\beta$ ,滑轮为均质圆盘,因而  $J = \frac{1}{2}MR^2$ ,由以上方程联立求解,得

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + M/2} = 7.61 \text{ m/s}^2$$



(a)



(b)

图 6.3

$$T_1 = m_1 a = 381 \text{ N}$$

$$T_2 = m_2 (g - 2) = 440 \text{ N}$$

从计算结果可以看出,滑轮两边的张力不相等.

**6.4** 飞轮对自身轴的转动惯量为  $J_0$ , 初角速度为  $\omega_0$ , 作用在飞轮上的阻力矩为  $M$  (常量). 试求飞轮的角速度减到  $\omega_0/2$  时所需的时间  $t$ , 以及在这一段时间内飞轮转过的圈数  $N$ . 若  $M = \alpha\omega$  ( $\alpha$  为常量), 再求解以上问题.

**解** 以飞轮为研究对象, 以  $\omega_0$  的转动方向为正方向, 在  $M$  为常量时, 根据转动定律有

$$J_0 \frac{d\omega}{dt} = -M$$

$$d\omega = -\frac{M}{J_0} dt$$

依题意  $t=0$  时  $\omega = \omega_0$ ,  $t=t_1$  时  $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ , 积分上式, 有

$$\int_{\omega_0}^{\omega_0/2} d\omega = -\int_0^{t_1} \frac{M}{J_0} dt$$

所以

$$t_1 = J_0 \omega_0 / 2 M$$

在  $t_1$  时间内飞轮转过的角度为

$$\Delta\theta = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2} \beta t_1^2 = \frac{J_0 \omega_0^2}{2M} - \frac{1}{2} \frac{M}{J_0} \left( \frac{J_0 \omega_0}{2M} \right)^2 = \frac{3 J_0 \omega_0^2}{8M}$$

因而飞轮在  $t_1$  时间内转过的圈数为

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{3 J_0 \omega_0^2}{16\pi M}$$

当  $M = \alpha\omega$  时, 有

$$J_0 = \frac{d\omega}{dt} = -\alpha\omega$$

从  $(0, \omega_0) \rightarrow (t, \omega)$  积分, 有

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega} = \int_0^t -\frac{\alpha}{J_0} dt, \quad \omega = \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{J_0} t}$$

当  $\omega = \frac{\omega_0}{2}$  时, 有

$$t = t_1 = \frac{J_0}{\alpha} \ln 2$$

转过角度为

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \int_0^{t_1} \omega dt = \int_0^{t_1} \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{J_0}t} dt \\ &= \frac{J_0 \omega_0}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{J_0}t_1}) = \frac{J_0 \omega_0}{2\alpha}\end{aligned}$$

转过的圈数为

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{J_0 \omega_0}{4\pi\alpha}$$

**6.5** 两个质量为  $m_1$  和  $m_2$  的物体分别系在两条绳上, 这两条绳又分别绕在半径为  $r_1$  和  $r_2$  并装在同一轴的两鼓轮上. 设轴间摩擦及鼓轮和绳的质量均不计, 求鼓轮的角加速度.

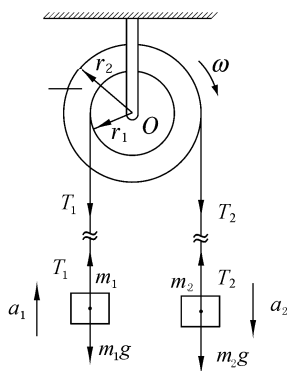


图 6.5

**解** 以  $m_1$ 、 $m_2$  物体及鼓轮为研究对象, 作如图 6.5 所示的受力分析. 设  $m_1$  和  $m_2$  的加速度方向和鼓轮的转动方向如图 6.5 所示. 根据牛顿运动定律和转动定律, 有

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \quad (1)$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \quad (2)$$

$$T_2 r_2 - T_1 r_1 = J_0 \beta \quad (3)$$

因为  $J_0 = 0$ ,  $a_1 = r_1 \beta$ ,  $a_2 = r_2 \beta$ , 由以上各式可得解

$$\beta = \frac{m_2 r_2 - m_1 r_1}{m_2 r_2^2 + m_1 r_1^2} g$$

**6.6** 上题中如两鼓轮的转动惯量分别为  $J_1$  和  $J_2$ , 试求两悬挂物体的加速度和绳中的张力.

**解** 研究对象、受力分析及由牛顿运动定律和转动定律所列出的方程均与上题相同, 由于两鼓轮的转动惯量不为零, 所以上题中的  $J_0 = J_1 + J_2$ , 在  $a_1 = r_1 \beta$ ,  $a_2 = r_2 \beta$  的情况下重解方程 (1), (2), (3), 有

$$\beta = \frac{r_2 m_2 - r_1 m_1}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J_1 + J_2} g$$

所以两物体的加速度分别为

$$a_1 = r_1 \beta$$

$$a_2 = r_2 \beta$$

绳中的张力分别为

$$T_1 = m_1 g \left( 1 + \frac{r_1 r_2 m_2 - r_1^2 m_1}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J_1 + J_2} \right)$$

$$T_2 = m_2 g \left( 1 - \frac{r_2^2 m_2 - r_1 r_2 m_1}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J_1 + J_2} \right)$$

**6.7** 计算网球对过其直径的轴的转动惯量. 已知网球质量为  $0.07 \text{ kg}$ , 外半径为  $32 \text{ mm}$ , 厚度为  $5 \text{ mm}$ .

**解** 网球可看作是具有一定厚度、质量均匀分布的球壳. 均质球壳对过直径的轴的转动惯量等于两个半径不同、密度相同的均质同心球体对同一轴的转动惯量的差, 设两球体的半径为  $R_1$  和  $R_2$  (分别等于球壳的内外半径), 密度为  $\rho$  (等于球壳的密度), 因为均质球体对过直径的轴的转动惯量为

$$J_0 = \frac{2}{5} m R^2 = \frac{8}{15} \pi \rho R^5$$

所以, 均质球壳对过直径的轴的转动惯量为

$$J_z = \frac{8}{15} \pi \rho R_2^5 - \frac{8}{15} \pi \rho R_1^5 = \frac{2m(R_2^5 - R_1^5)}{5(R_2^3 - R_1^3)}$$

式中  $m$  为均质球壳的质量. 将  $m = 0.07 \text{ kg}$ ,  $R_1 = 2.7 \times 10^{-2} \text{ m}$ ,  $R_2 = 3.2 \times 10^{-2} \text{ m}$  代入上式, 得网球对其直径轴的转动惯量

$$J_z = 4.1 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**6.8** 一轻绳绕在半径  $r = 20 \text{ cm}$  的飞轮边缘, 在绳端施以  $F = 98 \text{ N}$  的拉力, 飞轮的转动惯量  $J = 0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , 飞轮与转轴间的摩擦不计, (见图 6.8(a)), 试求:

- (1) 飞轮的角加速度;
- (2) 当绳端下降  $5 \text{ m}$  时飞

轮所获得的动能;

(3) 如以重量  $P = 98 \text{ N}$  的物体挂在绳端, 试计算飞轮的角加速度.

**解** (1) 根据转动定律, 有

$$Fr = J\beta$$

$$\beta = \frac{Fr}{J} = \frac{98 \times 0.2}{0.5} = 39.2 \text{ (rad/s}^2\text{)}$$

(2) 根据动能定理,  $F$  力对飞轮所做的功等于飞轮所获得的动能, 即

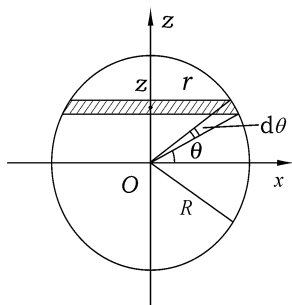


图 6.7

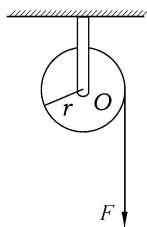


图 6.8(a)

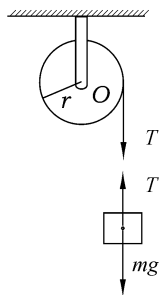


图 6.8(b)

$$\Delta E_k = A = Fd = 98 \times 5 = 490 \text{ (J)}$$

(3) 分别对物体和飞轮进行受力分析,如图 6.8(b)所示,根据牛顿运动定律和转动定律,有

$$mg - T = ma, \quad Tr = J\beta$$

因为  $a = r\beta$ , 所以有

$$\beta = \frac{mrg}{J + mr^2} = \frac{98 \times 0.2}{0.5 + 10 \times 0.2^2} = 21.8 \text{ (rad/s}^2\text{)}$$

在此题中,注意区分(1)和(3)两种情况的差异.

**6.9** 一均质细杆,质量为  $0.50 \text{ kg}$ ,长为  $0.40 \text{ m}$ ,可绕杆一端的水平轴转动.若将此杆放在水平位置,然后从静止开始释放,试求杆转动到铅垂位置时的动能和角速度.

**解** 根据机械能守恒,杆转动到铅垂位置时的动能为

$$E_k = mgl = 0.5 \times 98 \times 0.2 = 0.98 \text{ (J)}$$

根据动能公式  $E_k = \frac{1}{2} J\omega^2$  有

$$\omega = \sqrt{\frac{2E_k}{J}} = \sqrt{\frac{mgl}{\frac{1}{3}ml^2}} = \sqrt{\frac{3g}{l}} = \sqrt{\frac{3 \times 9.8}{0.4}} = 8.57 \text{ (rad/s)}$$

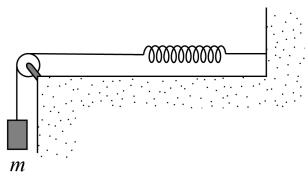


图 6.10

**6.10** 如图 6.10 所示,已知滑轮的半径为  $30 \text{ cm}$ ,转动惯量为  $0.50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,弹簧的劲度系数  $k = 2.0 \text{ N/m}$ .问质量为  $60 \text{ g}$  的物体落下  $40 \text{ cm}$  时的速率是多大?(设开始时物体静止且弹簧无伸长,在物体下落过程中绳与滑轮无相对滑动).

**解** 物体下落过程中,物体、弹簧滑轮组成的系统机械能守恒.设物体下降  $l$  时,速度为  $v$ ,滑轮的角速度为  $\omega$ ,因而有

$$0 = \frac{1}{2} mv^2 - mgl + \frac{1}{2} kl^2 + \frac{1}{2} J\omega^2$$

解方程并注意到  $\omega = \frac{v}{r}$  得

$$v = \sqrt{\frac{2mg - kl^2}{m + J/r^2}} = \frac{2 \times 0.06 \times 9.8 - 2 \times 0.4^2}{0.06 + 0.5/0.3^2} = 0.39 \text{ (m/s)}$$

**6.11** 一不变的力矩  $M$  作用在绞车的鼓轮上使轮转动,见图.轮的半径为  $r$ ,质量为  $m_1$ .缠在鼓轮上的绳子系一质量为  $m_2$  的重物,使其沿倾角为  $\alpha$  的斜面滑动,重物和斜面之间的滑动摩擦因数为  $\mu$ ,绳子的质量忽略不计,鼓轮可看作均质圆柱.在开始时此系统静止,试求鼓轮转过  $\varphi$  角时的角速度.

**解** 根据质点系动能定理,在鼓轮转过  $\varphi$  角的过程中有

$$\begin{aligned} M\varphi - m_2 gr\varphi\sin\alpha - \mu m_2 gr\varphi\cos\alpha \\ = \frac{1}{2} m_2 (r\omega)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} m_1 r^2 \right) \omega^2 \end{aligned}$$

解得

$$\omega = \sqrt{4\varphi \frac{M - m_2 r(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{(m_1 + 2m_2)r^2} g}$$

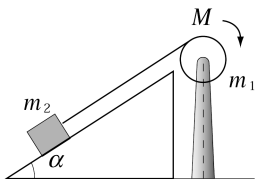


图 6.11

**6.12** 皮带轮半径为 50 cm,其转速  $n=150$  r/min,用以传递 14.7 kW 的功率.如皮带主动段张力  $T_1$  为从动段张力  $T_2$  的 2 倍,求从动段的张力.

**解** 在皮带轮转过  $d\theta$  的微小过程中,力矩  $M$  所作的元功为

$$dA_m = M d\theta = (T_1 - T_2) r d\theta = (2T_2 - T_2) r d\theta = T_2 r d\theta$$

由功率  $P = \frac{dA}{dt}$  有

$$P = T_2 r \frac{d\theta}{dt} = T_2 r \omega$$

所以从动段的张力为

$$T_2 = \frac{P}{r\omega} = \frac{14.7 \times 10^3}{0.5 \times \frac{2\pi \times 150}{60}} = 1.872 \times 10^3 \text{ (N)}$$

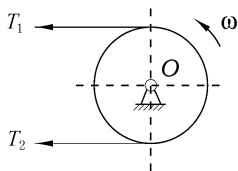


图 6.12

从此题的结果可以看出,在皮带传动机构中,皮带轮对轮轴有很大的作用力.

**6.13** 以力  $F$  将一块粗糙平面紧压在轮上,平面与轮之间的滑动摩擦因数为  $\mu$ ,轮的初角速度为  $\omega_0$ ,问转过多少角度时轮即停止转动? 已知轮的半径为  $R$ ,质量为  $m$ ,可看作均质圆盘;轴的质量忽略不计;该压力  $F$  均匀分布在轮面上.

**解** 盘面单位面积上的压力为  $\frac{F}{\pi R^2}$ ,以轮心为中心,以  $r$  为半径,取宽为  $dr$  的环,则环上压力为

$$dF = \frac{F}{\pi R^2} \cdot 2\pi r \cdot dr$$

环上所受摩擦力为

$$df = \mu dF = \mu \frac{F}{\pi R^2} 2\pi r dr = \mu \frac{F}{R^2} 2r dr$$

$df$  对轴的力矩为

$$dM = 2\mu \frac{F}{R^2} r^2 dr$$

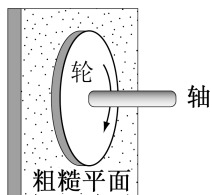


图 6.13

整个圆盘所受的摩擦力矩为

$$M = \int_0^R 2\mu \frac{F}{R^2} r^2 dr = \frac{2}{3} \mu FR$$

由动能定理,有

$$-M\varphi = 0 - \frac{1}{2} J\omega^2$$

所以

$$\varphi = \frac{3mR\omega_0^2}{8\mu F}$$

**6.14** 氧分子对垂直于两氧原子连线的对称轴的转动惯量为  $1.94 \times 10^{-46} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ , 氧分子的质量为  $5.30 \times 10^{-26} \text{ kg}$ . 假设在氧气中有一个氧分子具有  $500 \text{ m/s}$  的速率, 而且这个分子的转动动能是其平动动能的三分之二. 求这个分子转动角速度的大小.

**解** 由转动动能公式, 有

$$\omega = \sqrt{\frac{2E_{kr}}{J}}$$

由题设可知, 分子的转动动能为

$$E_{kr} = \frac{2}{3} E_{kt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} mv^2$$

所以

$$\omega = \sqrt{\frac{2m}{3J}} v = \sqrt{\frac{2 \times 5.30 \times 10^{-26}}{3 \times 1.94 \times 10^{-46}}} \times 500 = 6.75 \times 10^{12} \text{ (rad/s)}$$

显然, 如此大的角速度在宏观领域是很难见到的.

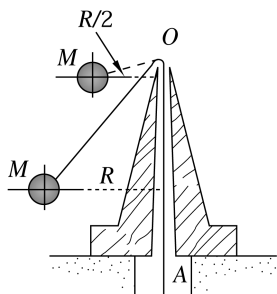


图 6.15

**6.15** 小球  $M$  系于线  $MOA$  的一端, 此线穿过一个铅直细管. 小球绕管轴沿半径为  $R$  的圆周运动, 转速为  $120 \text{ r/min}$ . 今将线  $OA$  慢慢向下拉, 使小球作半径为  $R/2$  的圆周运动, 求此时小球的转速.

**解** 小球运动过程中, 动量矩守恒, 故有

$$m \frac{2\pi n}{60} R \cdot R = m \frac{2\pi n'}{60} \frac{R}{2} \cdot \frac{R}{2}$$

由此式解得小球在末态时的转速为

$$n' = 480 \text{ r/min}$$

**6.16** 原长为  $l_0$ 、劲度系数为  $k$  的弹簧, 一端固定在一光滑水平面上的  $O$  点, 另一端系一质量为  $m$  的小球. 开始时, 弹簧被拉长  $\lambda$ , 并给予小球一与弹簧垂直的初速度  $v_0$ , 如图所示. 求当弹簧恢复其原长  $l_0$  时, 小球速度  $v$  的大小和方向

(即夹角  $\alpha$ ). 设  $m=19.6 \text{ kg}$ ,  $k=1254 \text{ N/m}$ ,  $l_0=2 \text{ m}$ ,  $\lambda=0.5 \text{ m}$ ,  $v_0=3 \text{ m/s}$ .

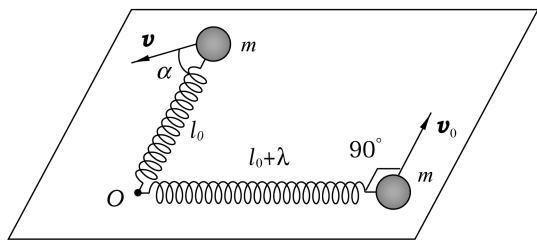


图 6.16

**解** 小球在有心力作用下运动, 动量矩守恒, 运动过程仅弹性力做功, 机械能守恒, 故有

$$mv_0(l_0 + \lambda) = mv l_0 \sin(\pi - \alpha)$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k \lambda^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

解以上两个方程可得小球在末状态时的速度大小和方向, 即

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m} \lambda^2} = 5 \text{ ms}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{v_0(l_0 + \lambda)}{l_0 v} = 48.59^\circ$$

解此题时注意, 小球在末状态时, 速度  $v$  与弹簧不垂直.

**6.17** 一质量为  $0.25 \text{ kg}$  的小球, 可在一细长均质管中滑动, 管长  $1 \text{ m}$ , 质量为  $1 \text{ kg}$ , 可绕过杆中点  $C$  且垂直于管的铅直轴转动. 设小球通过  $C$  点时, 管的角速度为  $10 \text{ rad/s}$ , 试求小球离开管口时管的角速度.

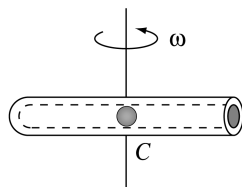


图 6.17

**解** 管和小球组成的系统动量矩守恒, 故有

$$\frac{1}{12} M L^2 \omega_0 = \frac{1}{12} M L^2 \omega + m \left( \frac{L}{2} \right)^2 \omega$$

解此式得末态时管的角速度为

$$\omega = \frac{M \omega_0}{M + 3m} = \frac{1 \times 10}{1 + 3 \times 0.25} = 5.71 \text{ (rad/s)}$$

**6.18** 轮  $A$  和轮  $B$  通过皮带传送动力, 轮  $B$  的半径是轮  $A$  的 3 倍, 如图 6.18 所示. 设轮与皮带之间无相对滑动, 求在下列两种情况下, 轮  $A$  和轮  $B$  的转动惯量之比: (1) 两飞轮的动能相等, (2) 两飞轮的动量矩大小相等.

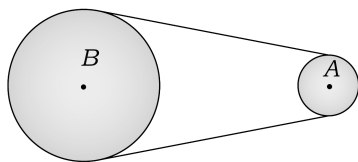


图 6.18

故

**解** 因为轮与皮带之间无滑动,因而有

$$\omega_A R_A = \omega_B R_B$$

$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{R_B}{R_A} = 3$$

(1)当两飞轮的动能相等时,有

$$\frac{1}{2} J_A \omega_A^2 = \frac{1}{2} J_B \omega_B^2$$

因而,两轮的转动惯量之比为

$$\frac{J_A}{J_B} = \left( \frac{\omega_B}{\omega_A} \right)^2 = \frac{1}{9}$$

(2)当两飞轮的动量矩大小相等时,有

$$J_A \omega_A = J_B \omega_B$$

因而,两轮的转动惯量之比为

$$\frac{J_A}{J_B} = \frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{1}{3}$$

**6.19** 长为 1 m、质量为 2.5 kg 的一均质棒,垂直悬挂在转轴 O 点上,用  $F=100$  N 的水平力撞击棒的下端,该力的作用时间为 0.02 s,如图 6.19 所示.试求:

(1)棒所获得的动量矩;

(2)棒的端点最高能上升的距离.

**解** (1)根据动量矩定理,力  $F$  作用于棒的冲量矩等于棒的动量矩的增量,依题意棒的初动量矩为零,故有

$$J\omega = \int_0^{1/50} F l dt = 100 \times 1 \times \frac{1}{50} = 2 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2/\text{s)}$$

(2)撞击后的运动过程中,机械能守恒,故有

$$\frac{1}{2} J\omega^2 = mgh$$

其中  $J = \frac{1}{3} ml^2$ ,  $h$  为棒的质心能上升的最大高度,所以棒的端点最高上升的距离为

$$H = 2h = \frac{J\omega^2}{mg} = \frac{6}{4} \frac{J\omega^2}{ml} = 0.196 \text{ m}$$

**6.20** 有一圆板状水平转台,质量  $M=200$  kg,半径  $R=3$  m,台上有一人,质量  $m=50$  kg,当他站在离转轴  $r=1$  m 处时,转台和人一起以  $\omega_1=1.35$  rad/s 的角速度转动.若轴处摩擦可忽略不计,问当人走到台边时,转台和人一起转动的角

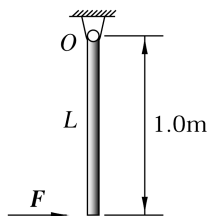


图 6.19

速度  $\omega$  为多少?

**解** 人和转台组成的系统在运动中动量矩守恒,因而有

$$J\omega_1 + mr^2\omega_1 = J\omega + mR^2\omega$$

其中  $J = \frac{1}{2}MR^2$ , 代入上式可求得转台在末态时的角速度, 即

$$\omega = \frac{MR^2 + 2mr^2}{(M + 2m)R^2}\omega_1 = 0.950 \text{ rad/s}$$

**6.21** 轮  $A$  的质量为  $m$ , 半径为  $r$ , 以角速度  $\omega_1$  转动; 轮  $B$  的质量为  $4m$ , 半径为  $2r$ , 套在轮  $A$  的轴上. 两轮都可视为均质圆板. 将轮  $B$  移动使其与轮  $A$  接触, 若轮轴间的摩擦力矩不计, 试求两轮转动的角速度及结合过程中动能的损失.

**解** 两轮结合过程中, 两轮组成的系统动量矩守恒, 故有

$$J_A\omega_1 = (J_A + J_B)\omega$$

其中  $J_A = \frac{1}{2}mr^2$ ,  $J_B = \frac{1}{2}(4m)(2r)^2 = 8mr^2$  代入上式可求得两轮共同的角速度, 即

$$\omega = \frac{J_A\omega_1}{(J_A + J_B)} = \frac{1}{17}\omega_1$$

动能损失为

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}J_A\omega_1^2 - \frac{1}{2}(J_A + J_B)\omega^2 = \frac{4}{17}mr^2\omega_1^2$$

**6.22** 一均质细杆, 长  $L = 1 \text{ m}$ , 可绕通过一端的水平光滑轴  $O$  在铅垂面内自由转动, 如图所示. 开始时杆处于铅垂位置, 今有一粒子弹沿水平方向以  $v = 10 \text{ m/s}$  的速度射入细杆. 设入射点离  $O$  点的距离为  $3L/4$ , 子弹的质量为杆质量的  $1/9$ , 试求:

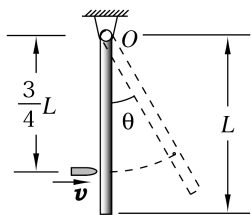


图 6.22

(1) 子弹与杆开始共同运动的角速度;

(2) 子弹与杆共同摆动能达到的最大角度.

**解** (1) 在子弹射入细杆的过程中, 子弹与杆组成的系统动量矩守恒, 故有

$$\frac{1}{9}Mv \frac{3}{4}L = \left[ \frac{1}{9}M \left( \frac{3}{4}L \right)^2 + \frac{1}{3}ML^2 \right] \omega$$

解此式可得子弹与杆碰后共同运动的角速度, 即

$$\omega = \frac{4v}{19L} = 2.10 \text{ rad/s}$$

射入后, 在子弹与杆共同摆动过程中, 系统机械能守恒, 设杆摆动能达到的最

大角度为  $\theta$ , 则有

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{9} M \left( \frac{3}{4} L \right)^2 + \frac{1}{3} M L^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{9} M g \frac{3}{4} L (1 - \cos \theta) + M g \frac{L}{2} (1 - \cos \theta)$$

解此式, 得

$$\cos \theta = 1 - \frac{2v^2}{133 L g} = 0.8466$$

$$\theta = 32.16^\circ$$

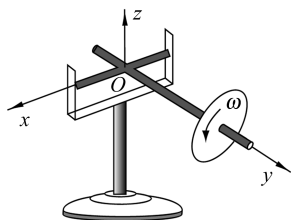


图 6.23

**6.23** 陀螺回转仪转盘的质量为 0.10 kg, 半径为 0.05 m. 离  $z$  轴的距离为 0.10 m, 转盘绕  $y$  轴以 100 rad/s 的角速度转动, 它旋进的角速度为多少?

**解** 转盘对定点  $O$  的动量矩, 如果忽略进动动量矩, 则可表示为

$$L_0 = J_y \omega j = \frac{1}{2} m R^2 \omega j$$

以  $y$  表示转盘距  $z$  轴的距离, 则转盘所受重力对  $O$  点的力矩为

$$M_0 = -mgyi$$

根据动量定理, 有

$$\frac{dL_0}{dt} = M_0 = -mgyi$$

进动角速度为

$$\Omega = \frac{|M_0|}{|L|} = \frac{mgy}{\frac{1}{2} m R^2 \omega} = 7.84 \text{ rad/s}$$

**6.24** 一个陀螺绕其对称轴按图 6.24 所示方向旋转, 其下端支于桌面上. 从上面看下去, 这陀螺的旋进方向是顺时针方向, 还是逆时针方向?

**解** 根据动量矩定理, 从图可判断, 陀螺旋进方向是逆时针方向.

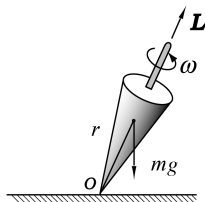


图 6.24

# 第 7 章 机械振动

## 一、基本内容和主要公式

### 1. 简谐振动的运动方程

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

三个基本特征量:振幅  $A$  (取决于振动的能量);角频率  $\omega$  (取决于振动系统本身的性质);初相位  $\varphi$  (取决于初始时刻的选择)。

### 2. 简谐振动的相位

$\omega t + \varphi$ , 它决定了  $t$  时刻简谐振动的状态。

### 3. 简谐振动的运动微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

### 4. 由初始条件确定振幅和初相

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

### 5. 弹簧谐振子的能量

$$\text{动能: } E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$\text{势能: } E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\text{总机械能: } E = E_k + E_p = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\text{平均能量: } \overline{E_k} = \overline{E_p} = \frac{1}{2} E = \frac{1}{4} k A^2$$

### 6. 谐振动的旋转矢量表示

绕坐标原点逆时针匀速率旋转的矢量  $A$  在  $x$  轴上的投影可用来表示谐振动, 旋转矢量的长度  $|A|$  等于谐振动的振幅, 旋转矢量的角速度等于谐振动的角频率, 旋转矢量在  $t=0$  时刻与坐标轴  $x$  的夹角为谐振动的初相。

### 7. 简谐振动的合成

(1) 两个同频同方向简谐振动的合成: 合振动仍为简谐振动, 合振动的振幅取决于两个分振动的振幅及相位差, 即

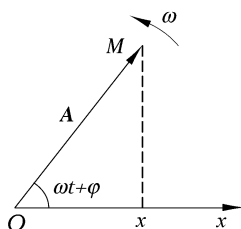


图 7.1

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

(2)不同频率同方向简谐振动的合成:当两个分振动的频率都很大,而两个频率的差很小时,产生拍的现象,拍频为  $\Delta\nu = |\nu_2 - \nu_1|$ 。

(3)相互垂直的两个简谐振动的合成:若两个分振动的频率相同,则合成运动的轨迹一般为椭圆;若两分振动的频率为简单整数比,则合成运动的轨迹为李萨如图形。

(4)与振动的合成相对应,有振动的分解。

## 二、典型例题

**7-1** 如图7-1所示,一直角均质细杆,水平部分杆长为  $l$ ,质量为  $m$ ,竖直部分杆长为  $2l$ ,质量为  $2m$ ,细杆可绕直角顶点处的固定轴  $O$  无摩擦地转动,水平杆的末端与劲度系数为  $k$  的弹簧相连,平衡时水平杆处于水平位置.试求杆作微小摆动时的周期。

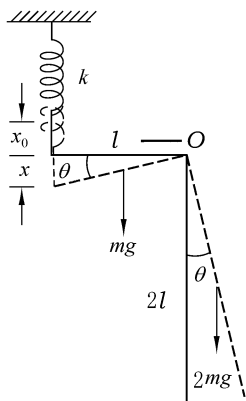


图 7-1

**解** 设平衡时弹簧伸长  $x_0$ ,则根据细杆系统关于  $O$  点的合外力矩为零,有

$$kx_0 l = mg \frac{l}{2} \quad (1)$$

当杆摆到任意角度  $\theta$  位置时,弹簧的伸长量为  $(x_0 + x)$ ,细杆系统所受的合外力矩为

$$M = mg \frac{l}{2} \cos \theta - 2mgl \sin \theta - k(x_0 + x)l \cos \theta \quad (2)$$

因为摆动幅度非常微小,因而有

$$x \approx l\theta$$

$$\cos \theta \approx 1$$

$$\sin \theta \approx \theta$$

将以上各式及式(1)代入到式(2)中,有

$$M = -(2mgl + kl^2)\theta$$

根据刚体定轴转动定律,有

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -(2mgl + kl^2)\theta$$

即

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{2mgl + kl^2}{J} \theta = 0$$

式中  $J$  为细杆关于转轴  $O$  的转动惯量,为

$$J = \frac{1}{3} ml^2 + \frac{1}{3} (2m)(2l)^2 = 3ml^2$$

代入上式后,有

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2mg+kl}{3ml}\theta = 0$$

因而,细杆绕  $O$  轴的微小摆动是简谐振动,其角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{2mg+kl}{3ml}}$$

周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3ml}{2mg+kl}}$$

**说明** 求谐振动系统的周期,可从受力分析入手,根据系统所受合外力矩,由转动定律写出微分方程,化简后与标准形式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

比较可得系统振动周期  $T = 2\pi/\omega$ .

**7-2** 如图7-2(a)所示,一质点作简谐振动,在一个周期内相继通过距离为 12 cm 的两点  $A$  和  $B$ ,历时 2 s,并且在  $A, B$  两点处具有相同的速率;再经过 2 s 后,质点又从另一方向通过  $B$  点.试求质点运动的周期和振幅.

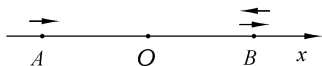


图 7-2(a)

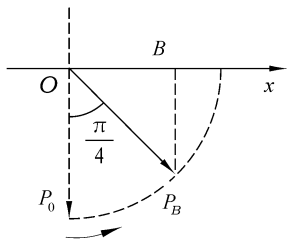


图 7-2(b)

**解** 取坐标  $Ox$  沿  $AB$  连线,坐标原点  $O$  取在  $A, B$  连线中点,如图 7-2(b)所示.由于  $\overline{AB} = 12$  cm,且  $v_A = v_B > 0$ ,因而  $O$  点为简谐振动的平衡位置,质点的简谐振动方程为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

且  $A, B$  两点的坐标为

$$x_A = -\frac{12}{2} = -6\text{cm}, \quad x_B = \frac{12}{2} = 6(\text{cm})$$

根据题意,  $A, B$  两点为质点振动过程中相继经过的点,在一个周期内,质点从  $O$  到  $B$  所用的时间为 1 s,从  $B$  到最大振幅处所用的时间也为 1 s,所以从  $O$  到最

大振幅处所用时间为  $2\text{ s}$ , 因而  $\frac{1}{4}T=2\text{ s}$ , 振动的周期为

$$T=8\text{ s}$$

用旋转矢量法求振幅. 质点从  $O$  点到  $B$  点所经过的时间为  $\Delta t=1\text{ s}=T/8$ , 旋转矢量从  $P_0$  点旋转到  $P_B$  点, 转过的角度为  $\Delta\varphi=\omega\Delta t=\frac{\pi}{4}$ , 如图 7-2(b) 所示. 在  $\triangle OP_BB$  中, 有

$$x_B=A\sin(\omega\Delta t)$$

所以振幅

$$A=\frac{x_B}{\sin(\omega\Delta t)}=\frac{6\times 10^{-2}}{\sin\frac{\pi}{4}}=6\sqrt{2}\times 10^{-2}(\text{m})$$

**说明** 在本题中仔细分析质点在一个周期内的运动过程是非常重要的.  $A, B$  两点为质点振动过程中相继经过的点, 且  $v_A=v_B$ , 这个条件非常重要.

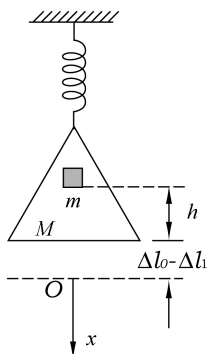


图 7-3

**7-3** 质量为  $M$  的圆盘挂在劲度系数为  $k$  的轻弹簧下, 并处于静止状态, 如图 7-3 所示. 一质量为  $m$  的物体, 从距圆盘为  $h$  的高度自由下落, 并粘在盘上和盘一起振动. 设物体和盘相碰瞬间  $t=0$ , 而且碰撞时间很短. 取碰后系统的平衡位置为坐标原点, 竖直向下为坐标的正方向. 试求系统的振动方程.

**解** 根据受力分析, 在碰后物体和盘一起向下运动位移为  $x$  时, 由牛顿第二定律有

$$(m+M)g-(x+\Delta l_0)k=(m+M)\ddot{x} \quad (1)$$

式中  $\Delta l_0$  为系统处于平衡位置时弹簧的伸长量, 因而有

$$(m+M)g=k\Delta l_0$$

代入到式(1)中, 有

$$-kx=(m+M)\ddot{x}$$

即

$$\ddot{x}+\frac{k}{m+M}x=0$$

所以该振动为简谐振动, 振动角频率为

$$\omega=\frac{k}{m+M}$$

振动方程为

$$x = A \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m+M}} t + \varphi \right)$$

式中的振幅  $A$  和初相  $\varphi$ , 由  $t=0$  时系统的状态确定.

由于碰撞时间很短, 因而可以认为碰撞过程动量守恒, 所以  $t=0$  时,  $v_0 = \frac{m}{m+M}v$ , 并且  $x_0 = -(\Delta l_0 - \Delta l_1)$ , 其中  $\Delta l_1$  为碰撞前弹簧的伸长量,  $v$  为物体碰撞前的瞬间所具有的速度, 其值分别为

$$\Delta l_1 = \frac{Mg}{k}, \quad v = \sqrt{2gh}$$

因而

$$x_0 = - \left( \frac{m+M}{k}g - \frac{M}{k}g \right) = -\frac{m}{k}g$$

$$v_0 = \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh}$$

由  $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$  和  $\varphi = \arctan \left( -\frac{v_0}{\omega x_0} \right)$ , 可得

$$A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m+M)g}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{2kh}{(m+M)g}$$

由于  $x_0 < 0, v_0 > 0$ , 所以  $\varphi$  角应为第三象限角. 将  $A, \varphi$  代入到振动方程中, 即为所求系统的振动方程.

**说明** 从本题可以看出, 重力只影响谐振子系统的平衡位置. 这样的结论对所有作用于谐振子系统的恒力都成立.

**7-4** 一个质量为  $m$  的小球在一个光滑的半径为  $R$  的球形碗底作微小振动, 如图 7-4(a) 所示. 设  $t=0$  时,  $\theta=0$ , 小球的速度为  $v_0$ , 向右运动. 试求在振幅很小情况下, 小球的振动方程.

**解法一** 以小球为研究对象. 设逆时针方向的角位移为正,  $t$  时刻小球位于  $P$  点, 角位移为  $\theta$ , 受力情况如图 7-4(b) 所示. 根据牛顿运动定律, 在轨迹的切线方向上有

$$-mg \sin \theta = ma_\tau$$

即

$$a_\tau + g \sin \theta = 0$$

其中  $a_\tau$  为切向加速度,  $a_\tau = R\ddot{\theta} = R\ddot{\theta}$ , 当振幅很小时,  $\sin \theta \approx \theta$ , 代入上式有

$$R\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

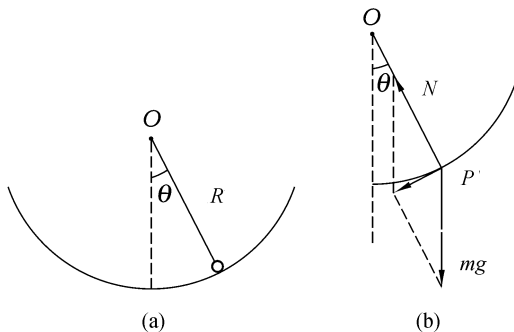


图 7-4

即

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

其中角频率  $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ , 求解该微分方程得

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

式中的振幅  $\theta_0$  和初相  $\varphi$ , 可由初始条件确定.

当  $t=0$  时,  $\theta=0$ ,  $\dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$ , 则有

$$\theta_0 \cos \varphi = 0, \quad -\omega \theta_0 \sin \varphi = \frac{v_0}{R}$$

故

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad \theta_0 = \frac{v_0}{\omega R}$$

因此小球的振动方程为

$$\theta = \frac{v_0}{\omega R} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}} t - \frac{\pi}{2}\right)$$

**解法二** 小球在运动过程中仅有重力做功, 机械能守恒, 以最低点为势能零点, 则在  $t$  时刻小球的机械能为

$$E = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mgR(1 - \cos \theta) = \text{常量}$$

对时间求导, 有

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

即

$$m R^2 \ddot{\theta} + mgR \sin \theta = 0$$

所以

$$\theta + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$$

在振幅很小时  $\sin \theta \approx \theta$ , 得

$$\theta + \frac{g}{R} \theta = 0$$

此后的解题过程与解法一相同.

**说明** (1) 这是一个由动力学求解简谐振动的问题, 在求解过程中应用了在小角度时  $\sin \theta \approx \theta$  的近似条件. (2) 利用简谐振动系统的能量特点, 用能量守恒的方法求解振动问题比较方便.

**7-5** 一质点作简谐振动, 振动方程为  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ . 试求质点的速度、加速度的平均值及动能、势能的平均值.

**解** 这是一个求物理量平均值的题目. 由质点的振动方程可得质点的速度和加速度

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

在一个周期内速度的平均值为

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{1}{T} \int_0^T v dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T -\omega A \sin(\omega t + \varphi) dt \\ &= -\frac{A}{T} \int_0^{2\pi} \sin(\omega t + \varphi) d(\omega t) \\ &= 0\end{aligned}$$

同理

$$\bar{a} = \frac{1}{T} \int_0^T a dt = 0$$

因为速度、加速度的数值有正有负, 而且对称, 所以在一个周期内的平均值为零.

质点在  $t$  时刻的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

在一个周期内动能的平均值为

$$\bar{E}_k = \frac{1}{T} \int_0^T E_k dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt$$

由  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \left( \int_0^{2\pi} d\theta - \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta \right) \right] = \frac{1}{2}$ , 可得

$$\begin{aligned}
\overline{E_k} &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi) dt \\
&= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\omega t + \varphi) d(\omega t + \varphi) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \right) \\
&= \frac{1}{4} m \omega^2 A^2
\end{aligned}$$

由于系统的总机械能为  $E = \frac{1}{2} k A^2$ , 而  $k = m \omega^2$ , 故有

$$\overline{E_k} = \frac{1}{4} k A^2 = \frac{1}{2} E$$

即质点动能的平均值为系统机械能的一半。

由  $E_p = E - E_k$  可得

$$\begin{aligned}
\overline{E_p} &= \frac{1}{T} \int_0^T (E - E_k) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{1}{2} k A^2 - \frac{1}{2} m v^2 \right) dt \\
&= \frac{1}{2} E
\end{aligned}$$

**说明** 从结果可知, 作简谐振动的质点, 其动能与势能的平均值为总能量的  $\frac{1}{2}$ 。随时间周期性变化的物理量  $F(t)$ , 关于时间的平均值有以下结论:  $\overline{F} = \frac{1}{nT} \int_t^{t+nT} F(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$ , 当  $\tau > nT$ , 在  $n$  很大时  $\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} F(t) dt \approx \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$ , 而且  $n$  越大上式就越精确。

### 三、习题详解

#### 7.1 选择题

(1) 一质点作谐振动, 周期为  $T$ , 它由平衡位置沿  $x$  轴负方向运动到离最大负位移  $1/2$  处所需要的最短时间为 (C)

(A)  $T/4$       (B)  $T/12$       (C)  $T/6$       (D)  $T/8$

(2) 一单摆周期恰好为  $1s$ , 它的摆长为 (B)

(A)  $0.99 m$       (B)  $0.25 m$       (C)  $0.78 m$       (D)  $0.5 m$

(3) 在理想情况下, 弹簧振子的频率  $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ , 如果弹簧质量不能忽略, 则振动的频率将 (B)

(A)增大 (B)减小 (C)不变 (D)不能确定

(4)一质点作谐振动,频率为  $\nu$ ,则其振动动能变化频率为(D)

(A)  $\frac{1}{2}\nu$  (B)  $\frac{1}{4}\nu$  (C)  $\nu$  (D)  $2\nu$  (E)  $4\nu$

(5)图示有两个谐振动的  $x \sim t$  曲线,它们之间的初相差为(B、D 或 A、E)

(A)  $\frac{1}{2}\pi$  (B)  $\frac{2}{3}\pi$  (C)  $\pi$  (D)  $-\frac{1}{2}\pi$  (E)  $-\frac{3}{2}\pi$

(6)图示两个谐振动的  $x-t$  曲线,将这两个谐振动叠加,合成的余弦振动的初相为(C)

(A)0 (B)  $\frac{3}{2}\pi$  (C)  $\pi$  (D)  $\frac{1}{2}\pi$

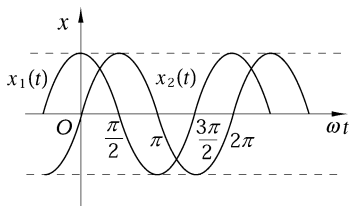


图 7.1(5)

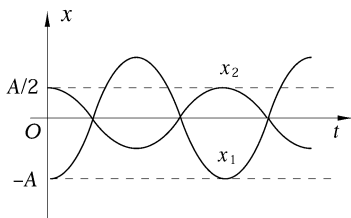


图 7.1(6)

## 7.2 填空题

(1)设地球、月球皆为均质球,它们的质量和半径分别为  $M_e, M_m, R_e, R_m$ , 给定的弹簧振子在地球上和月球上作谐振动的频率比  $\nu_e/\nu_m$  为 1, 给定的单摆在地球上和在月球上作谐振动的频率比  $\nu_e/\nu_m$  为  $\sqrt{M_e R_m^2 / M_m R_e^2}$ .

(2)单摆的周期为  $T$ , 振幅为  $A$ , 起始时单摆的状态如图示 7.2(2)(a)、(b)、(c)三种,若以单摆的平衡位置为  $x$  轴的原点,  $x$  轴指向右为正,则单摆作小角度振动的运动学方程分别为

(a)  $x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right);$

(b)  $x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right);$

(c)  $x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi\right).$

(3)两个质点各自作谐振动,它们的振幅相同,周期也相同,第一个质点的运动学方程为  $x_1 = A \cos(\omega t + \varphi)$ , 当这个质点从相对平衡位置坐标为  $x$  处回到平衡位置时,另一个质点恰在正

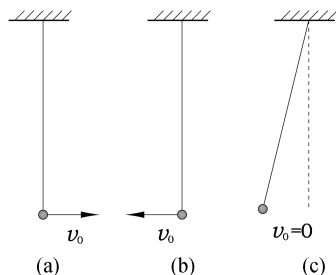


图 7.2(2)

向最大坐标位置处,这后一质点的运动学方程为  $A \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$  或  $A \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{3}{2}\pi\right)$ .

(4) 设质点沿  $x$  轴作谐振动,位移为  $x_1, x_2$  时的速率分别为  $v_1$  和  $v_2$ ,此质点振动的周期为  $2\pi/\sqrt{(x_1^2 - x_2^2)/(v_2^2 - v_1^2)}$ .

**7.3** 一物体沿  $x$  轴作谐振动,振幅为 10.0 cm,周期为 2.0 s,在  $t=0$  时,坐标为 5.0 cm,且向  $x$  轴负方向运动.求在  $x=-6.0$  cm 处,沿  $x$  轴负方向运动时,物体的速度和加速度以及它从这个位置回到平衡位置所需最短时间.

**解** 已知  $T=2$  s,  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

设振动方程为

$$x = 10 \cos(\pi t + \varphi) \text{ cm}$$

则速度为

$$v = -10\pi \sin(\pi t + \varphi)$$

加速度为

$$a = -10\pi^2 \cos(\pi t + \varphi)$$

$t=0$  时,  $x=5$  cm,  $v<0$ , 对应的旋转矢量见图 7.3(a). 由此可知振动的初相为

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

所以

$$x = 10 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ cm}$$

设在时刻  $t'$ , 振子位于  $x=-6$  cm 处, 并向  $x$  轴负方向运动, 对应的旋转矢量见图 7.3(b), 则有

$$\cos\left(\pi t' + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{5}$$

所以

$$\sin\left(\pi t' + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{5}$$

所以

$$v = -10\pi \sin\left(\pi t' + \frac{\pi}{3}\right) = -25.1 \text{ cm/s}$$

$$a = -10\pi^2 \cos \pi t' + \frac{\pi}{3} = 59.92 \text{ cm/s}^2$$

设弹簧振子回到平衡位置的时刻为  $t''$ , 对应的旋转矢量见图 7.3(c), 因而有

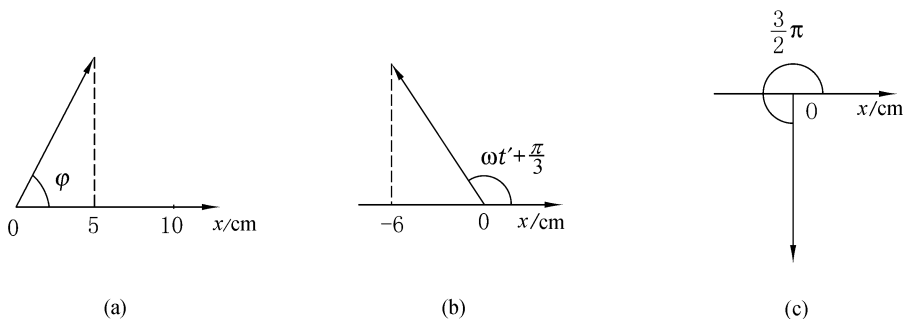


图 7.3

$$\pi t'' + \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\pi$$

故从上述位置回到平衡位置所需时间为

$$t'' - t' = \left[ \left( \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) - \left( \arccos\left( -\frac{3}{5} \right) - \frac{\pi}{3} \right) \right] / \pi = 0.8 \text{ s}$$

**7.4** 在常温下,固体中原子振动频率约为  $10^{13}$  Hz,设想原子间以弹簧联接,固体中一个银原子以此频率振动,其余原子都不动,试计算等效劲度系数.已知一摩尔银(有  $6.02 \times 10^{23}$  个原子)的质量为 108g.

**解** 银原子的质量为

$$m = \frac{108 \times 10^{-3}}{6.02 \times 10^{23}} = 1.79 \times 10^{-25} \text{ (kg)}$$

由弹簧谐振子的频率公式,可得等效弹簧的劲度系数为

$$k = (2\pi\nu)^2 m = 707 \text{ N/m}$$

**7.5** 原长为 0.50 m 的弹簧上端固定,下端挂一质量为 0.1kg 的砝码.当砝码静止时,弹簧的长度为 0.60 m,若将砝码向上推,使弹簧回到原长,然后放手,则砝码作上下振动.(1)证明砝码上下运动为谐振动;(2)求此谐振动的振幅、角频率和频率;(3)若从放手时开始计时,求此谐振动的振动方程(取向为正方向).

**解** (1)选如图 7.5 所示的坐标系,以振动物体的平衡位置为坐标原点.设  $t$  时刻砝码位于  $x$  处,根据受力分析有

$$mg - k(x + \delta_{st}) = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (1)$$

式中  $\delta_{st}$  为砝码处于平衡时弹簧的伸长量,因而有

$$mg = k\delta_{st}$$

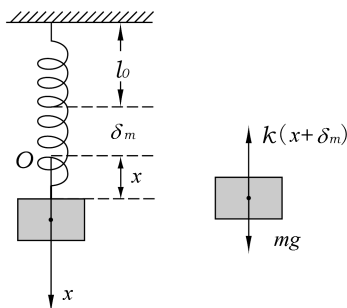


图 7.5

将此式代入到式(1)中,化简后有

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

因此,砝码的运动为谐振动.

(2)砝码振动的角频率和频率分别为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.1}} = 9.9 \text{ (rad/s)}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 1.58 \text{ Hz}$$

(3)设砝码的谐振动方程为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

由初始条件,  $t=0$  时,  $x = -\delta_{st} = -0.1 \text{ m}$ ,  $v=0$  得

$$A = 0.1 \text{ m}, \quad \varphi = \pi$$

将以上讨论的结果代入(2)式,得谐振动的振动方程

$$x = 0.1 \cos(9.9 t + \pi) \text{ m}$$

**7.6** 喇叭膜片作谐振动,频率为 440 Hz,其最大位移为 0.75 mm,试求:

(1)角频率;(2)最大速率;(3)最大加速度.

**解** 设膜片的振动方程为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$(1) \omega = 2\pi \nu = 2\pi \times 440 = 880\pi$$

(2)由  $v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$ ,可得

$$v_{\max} = \omega A = 880\pi \times 0.75 \times 10^{-3} = 2.07 \text{ (m/s)}$$

(3)由  $a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$ ,可得

$$a_{\max} = \omega^2 A = (880\pi)^2 \times 0.75 \times 10^{-3} = 5.73 \times 10^3 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

**7.7** 一物块在水平面上作谐振动,振幅为 10 cm,当物块离开平衡位置 6 cm 时,速度为 24 cm/s.问:(1)周期是多少?(2)速度为  $\pm 12$  cm/s 时的位移是多少?

**解** (1)设谐振动方程为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

则速度为

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

由式(1)、(2)可得

$$x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2 \quad (3)$$

所以

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{v}$$

将  $A = 0.1\text{m}$ ,  $x = 0.06\text{m}$ ,  $v = 0.24\text{m/s}$  代入,有

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{0.1^2 - 0.06^2}}{0.24} = 2.09(\text{s})$$

(2)将  $v = \pm 0.12\text{m/s}$  代入式(3),有

$$x^2 + 0.12^2 \times \frac{2.09^2}{2\pi^2} = 0.1^2$$

所以,  $v = \pm 0.12\text{m/s}$  时,振动物体的位移为

$$x = \pm 0.0084 = \pm 9.17 \times 10^{-2}(\text{m})$$

**7.8** 一均质弹簧,原长为  $l$ ,劲度系数为  $k$ ,今将此弹簧分割成两段,两段的原长分别为  $l_1$  和  $l_2$ ,且  $l_1 = nl_2$ ,试求:(1)两段的劲度系数  $k_1$  和  $k_2$  (用  $n$  和  $k$  表示);(2)一物体挂在这两段弹簧上,使之振动的频率为  $\nu_1$  和  $\nu_2$ ,已知此物体挂在未分割前弹簧上的振动频率为  $\nu$ .

**解** (1)取坐标  $Ox$ ,将两段弹簧串联在一起,如图所示.当物体从平衡位置产生  $\Delta l$  的位移时,则  $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$ ,  $\Delta l_1$  和  $\Delta l_2$  分别表示此时两弹簧产生的变形.由题设  $l_1 = nl_2$  有  $\Delta l_1 = n\Delta l_2$ ,因而有

$$\Delta l = n\Delta l_2 + \Delta l_2$$

由于两个弹簧串联,而且弹簧质量可忽略,故有

$$k\Delta l = k_1\Delta l_1 = k_2\Delta l_2$$

由

$$k(n\Delta l_2 + \Delta l_2) = k_2\Delta l_2$$

有

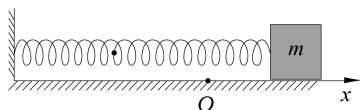


图 7.8

$$k_2 = (n+1)k$$

由

$$k \left( \Delta l_1 + \frac{1}{n} \Delta l_1 \right) = k_1 \Delta l_1$$

有

$$k_1 = \left( 1 + \frac{1}{n} \right) k$$

(2) 由  $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ , 可得

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{n} \right) \frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \nu$$

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_2}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(n+1)k}{m}} = \sqrt{n+1} \nu$$

**7.9** 弹簧挂在天花板上, 下端系一小物体, 最初使物体在弹簧未被拉长时的末端位置保持静止, 然后释放使其上下振动, 其最低位置在初位置下方 10.0 cm 处. 问: (1) 频率是多少? (2) 当物体在初始位置下方 8.0 cm 处时, 其速率为多大? (3) 将一 300 g 砝码系于这物体下面, 系统振动频率变为原来的一半, 此时第一个物体质量多大? (4) 两物体系于弹簧后, 其新的平衡位置在何处?

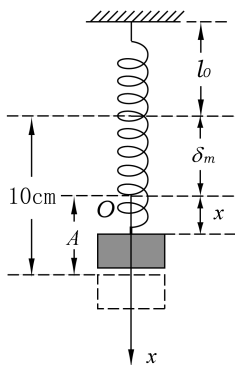


图 7.9

**解** 取如图所示的坐标系, 坐标原点选在平衡位置处. 设振子的振动方程为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

其中  $A = 10 - \delta_{st}$ , 把起始条件  $t=0$  时,  $x = -\delta_{st}$ ,  $\dot{x} = 0$  代入振动方程, 有

$$-\delta_{st} = (10 - \delta_{st}) \cos \varphi$$

$$0 = -(10 - \delta_{st}) \omega \sin \varphi$$

解以上二式, 得

$$\varphi = \pi, \quad \delta_{st} = 5 \text{ cm}$$

(1) 振动频率为

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9.8}{5 \times 10^{-2}}} = 2.23 \text{ (Hz)}$$

(2) 物体在初始位置下方 8.0 cm 处时, 物体离坐标原点为 3 cm, 代入振动方程

有

$$\cos(\omega t' + \varphi) = \frac{3}{5}$$

此时物体的速率为

$$v = |-A \times 2\pi\nu \times \sin(\omega t' + \varphi)| = 56 \text{ cm/s}$$

(3) 设第一物体质量为  $m$ , 则

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m+300}}$$

故

$$m = 100 \text{ g}$$

(4) 设弹簧劲度系数为  $k$ , 则原来有  $100\text{g} = 5k$ , 现在有  $400\text{g} = k\delta$ , 解得

$$\delta = 20 \text{ cm}$$

**7.10** 电动剃须刀的刀片作谐振动, 频率为  $120\text{Hz}$ , 往复运动的最大行程为  $2\text{mm}$ , 试求: (1) 振幅; (2) 最大速率; (3) 最大加速度.

**解** (1) 振幅为刀片往复运动最大行程的一半, 即

$$A = 1\text{mm}$$

(2) 由题设可知

$$\omega = 2\pi\nu = 240\pi$$

所以, 刀片的最大速率为

$$v_{\max} = A\omega = 1 \times 10^{-3} \times 240\pi = 0.75 (\text{m/s})$$

(3) 刀片最大的加速度为

$$a_{\max} = A\omega^2 = 1 \times 10^{-3} \times (240\pi)^2 = 569 (\text{m/s}^2)$$

**7.11** 有两个完全相同的弹簧振子  $a$  和  $b$ , 并排放在光滑的水平面上, 测得它们的周期都是  $2\text{s}$ , 现将两振子从平衡位置向右拉开  $5\text{cm}$ , 然后无初速的先释放  $a$ , 经过  $0.5\text{s}$  后, 再释放  $b$  振子. 求它们之间的相位差. 若以  $b$  振子刚开始运动的瞬时为计时起始时刻, 试写出两振子的运动学方程.

**解** 两振子之间的相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \frac{\Delta t}{T} = \frac{\pi}{2}$$

即  $a$  振动的相位超前  $b$  振动  $\frac{\pi}{2}$ . 若以  $b$  振子刚开始运动的瞬时为计时起始时刻, 则  $a$  振子的运动学方程为

$$x = 5 \times 10^{-2} \cos \pi t + \frac{\pi}{2} \text{ m}$$

$b$  振子的运动学方程为

$$x = 5 \times 10^{-2} \cos \pi t \text{ m}$$

**7.12** 一物体放在活塞上, 活塞以  $1.0\text{s}$  的周期在竖直方向作谐振动. 试问: (1) 在多大振幅时, 物体与活塞分离? (2) 如活塞具有  $5.0\text{cm}$  的振幅, 物体与活塞保持接触

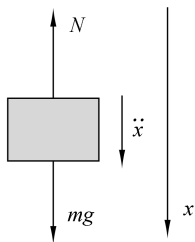


图 7.12

的最大频率为多大?

**解** 以物体为研究对象,受力如图 7.12 所示,其运动微分方程为

$$m\ddot{x} = mg - N$$

物体不脱离活塞的条件为  $N \geq 0$ , 即  $g \geq \ddot{x}$ , 其中  $g = \ddot{x}$  为刚好脱离的条件.

(1) 设振幅为  $A$  时, 物体脱离活塞, 则有

$$A = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9.8}{(2\pi)^2} = 0.248 \text{ (m)}$$

(2) 如果活塞振幅  $A = 5 \text{ cm}$ , 则物体脱离活塞的频率为

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{A}} = 2.23 \text{ Hz}$$

**7.13** 一给定的弹簧在  $60 \text{ N}$  的拉力下伸长了  $30 \text{ cm}$ , 质量为  $4 \text{ kg}$  的物体悬在弹簧下端并使之静止, 再把物体向下拉  $10 \text{ cm}$ , 然后释放, 问: (1) 周期是多少? (2) 当物体在平衡位置上方  $5 \text{ cm}$  处并向上运动时, 物体的加速度多大? 方向如何? 这时弹簧的拉力是多少? (3) 物体从平衡位置运动到上面  $5 \text{ cm}$  处所需最短的时间是多少? (4) 如果在振动物体上再放一小物体, 此小物体是停在上面呢还是离开它? (5) 如果使振动物体的振幅增大一倍, 放在振动物体上的小物体在什么地方与振动物体开始分离?

**解** 由题设可知

$$k = \frac{60}{0.3} = 200 \text{ (N/m)}$$

(1) 振动的周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{4}{200}} = 0.89 \text{ (s)}$$

(2) 取平衡位置为坐标原点,  $x$  坐标轴向下为正, 则振子的运动方程为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

式中  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.06 \text{ rad/s}$ , 当  $t = 0$  时,  $x = 10 \text{ cm}$ ,  $\dot{x} = 0$ , 从而得  $\varphi = 0$ ,  $A = 0.1 \text{ m}$ , 故

$$x = 0.1 \cos(7.06 t) \text{ m}$$

当  $x = -5 \text{ cm}$  时, 有

$$-5 \times 10^{-2} = 0.1 \cos \omega t_1$$

故此时的加速度为

$$\ddot{x} = -A \omega^2 \cos \omega t_1 = -0.1 \times (7.06)^2 \times (-50 \times 10^{-2}) = 2.49 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

方向向下. 此时弹簧的拉力为

$$F = -k(\delta_{st} + x) = -k \frac{mg}{k} - 5 \times 10^{-2} = -29.2 \text{ N}$$

(3) 设物体在  $x = -5\text{cm}$  处的时刻为  $t_2$ , 则

$$-5 \times 10^{-2} = 0.1 \cos(\omega t_2)$$

$t_2$  也是物体从  $x = A = 10\text{cm}$  处 ( $t = 0$ ) 经平衡位置到  $x = -5\text{cm}$  处所用时间, 因此从平衡位置到  $x = -5\text{cm}$  处所需最短时间为

$$\Delta t = t_2 - \frac{T}{4} = \left[ \arccos\left(\frac{-5 \times 10^{-2}}{0.1}\right) \right] / \omega - \frac{0.89}{4} = 0.074\text{ s}$$

(4) 在振动物体上放了小物体后, 振子的平衡位置下移, 以新平衡位置为坐标原点, 向下为  $x'$  轴的正方向. 新振子的角频率为

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m+m'}} < \omega$$

在保持振幅  $A = 0.1\text{m}$  不变的情况下, 新振动的最大加速度为

$$|\ddot{x}'_{\max}| = A \omega'^2 < A \omega^2 = 0.1 \times 7.06^2 = 5\text{m/s}^2 < g$$

故不会离开.

(5) 设在  $x'$  位置开始脱离, 则脱离的条件为

$$\ddot{x}' = -A' \omega'^2 \cos \omega' t = g$$

式中  $A' = 2A = 0.2\text{m}$ , 代入上式, 得

$$\cos \omega' t = -\frac{g}{A' \omega'^2} < -\frac{g}{A' \omega^2} = -\frac{9.8}{0.2 \times (7.06)^2} = -0.98$$

故脱离的位置为

$$x' = A' \cos \omega' t < 0.2 \times (-0.98) = -0.196(\text{m})$$

**7.14** 一汽车可以认为是被支承在四根相同的弹簧上沿铅垂方向振动, 频率为  $3.00\text{Hz}$ , (1) 设这汽车的质量为  $1450\text{kg}$ , 车重均匀分配在四根弹簧上, 试求每根弹簧的劲度系数; (2) 今有平均质量为  $73.00\text{kg}$  的 5 个乘客坐在车上, 这时车一人系统的振动频率是多少? (车和一人重仍假定均匀分配在四根弹簧上).

**解** (1) 设每根弹簧的劲度系数为  $k$ . 四根弹簧并联, 其等效弹簧的劲度系数为

$$k' = 4k$$

根据弹簧振子的频率公式, 有

$$k' = (2\pi\nu)^2 m$$

故

$$k = (\pi\nu)^2 m = 1450 \times (3\pi)^2 = 1.288 \times 10^5 (\text{N/m})$$

(2) 车和人的总质量为

$$M = 1450 + 73.00 \times 5 = 1815$$

此时, 系统的振动频率为

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4k}{M}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4 \times 1.288 \times 10^5}{1815}} = 2.68 (\text{Hz})$$

**7.15** 一长方形木块浮于静水中,其浸入部分高为  $a$ ,今用手指沿竖直方向将其慢慢压下,使其浸入部分高度变为  $b$ ,然后放手任其运动.试证明:若不计阻力,木块运动为谐振动,并求出振动周期和振幅.

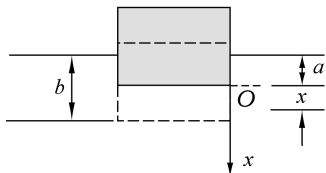


图 7.15

**解** 取如图 7.15 所示的坐标系,木块在任一位置  $x$  处所受浮力为

$$f = (a + x)S\rho g$$

式中  $S$  为木块截面积,  $\rho$  为水的密度,根据平衡

$$mg = aS\rho g$$

木块所受的合力为

$$F = mg - f = -S\rho gx$$

木块运动微分方程为

$$m\ddot{x} = -S\rho gx = -\frac{m}{a}gx$$

即

$$\ddot{x} + \frac{g}{a}x = 0$$

所以,木块的运动为谐振动,与  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  相比较,得

$$\omega^2 = g/a$$

木块作谐振动的周期为

$$T = 2\pi \sqrt{a/g}$$

设木块的运动学方程为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

根据初始条件  $t=0$  时  $x = (b-a)$ ,  $\dot{x} = 0$ , 得

$$A = (b-a)$$

$$\varphi = 0$$

**7.16** 在教材的例题7.6中,隧道如果不是沿地球直径,而是沿一条弦,试再解该题.

**解** 建立如图所示的坐标系,坐标原点取在小球的平衡位置处.当小球位于  $x$  位置时,小球所受的合力为

$$F = -G \frac{m \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \right)}{r^2} \cos \frac{\pi}{2} - \theta$$

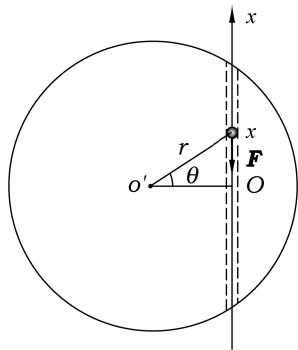


图 7.16

$$= -\frac{4}{3}\pi\rho Gmr\sin\theta$$

$$= -\frac{4}{3}\pi\rho Gmx$$

根据牛顿第二定律,小球的运动微分方程为

$$m\ddot{x} + \left(\frac{4}{3}\pi\rho Gm\right)x = 0$$

即

$$\ddot{x} + \left(\frac{4}{3}\pi\rho G\right)x = 0$$

因此,在这种情况下,小球仍作简谐振动,而且振动周期与通过地心隧道的情况相同,仍为

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi\rho G}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 84.43\text{min} \end{aligned}$$

**7.17** 质量为  $M$ , 半径为  $R$  的均质圆盘, 悬挂在铅垂平面内构成一复摆, 见图 7.17, 摆的悬挂轴与盘心距离为  $d$ , 试求此复摆小角度摆动时的周期.

**解** 当圆盘处于如图所示的位置时, 关于转轴  $O$ , 作用于圆盘的合外力矩为

$$M_0 = -Mgd\sin\theta$$

由转动定律, 有

$$J\ddot{\theta} = -Mgd\sin\theta \quad (1)$$

其中  $J$  为圆盘对  $O$  轴的转动惯量, 由平行轴定理可得

$$J = \frac{1}{2}MR^2 + Md^2$$

代入式(1)化简后, 有

$$\ddot{\theta} + \frac{2gd}{R^2 + 2d^2}\sin\theta = 0$$

对于小角度摆动,  $\sin\theta \approx \theta$ , 所以

$$\ddot{\theta} + \frac{2gd}{R^2 + 2d^2}\theta = 0$$

所以, 圆盘的小角度摆动为谐振动, 振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 + 2d^2}{2gd}}$$

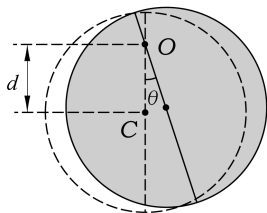


图 7.17

**7.18** 试求弹簧振子的机械能,已知弹簧劲度系数为  $1.3 \text{ N/cm}$ ,振幅为  $2.4 \text{ cm}$ .

**解** 弹簧振子的机械能为

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \times 1.3 \times 10^2 \times (2.4 \times 10^{-2})^2 = 3.74 \times 10^{-2} \text{ (J)}$$

**7.19** 一物块悬挂于弹簧下端并作谐振动,当物块位移为振幅的一半时,这个振动系统的动能占总能量的多大部分? 势能占多大部分? 又位移多大时,动能、势能各占总能量的一半?

**解** 当物块的位移为振幅的一半时,系统的势能为

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k \left( \frac{A}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} k A^2$$

$$E_p / E = \frac{1}{8} k A^2 / \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{4} = 25\%$$

这时动能占总能量的部分为

$$E_k / E = (E - E_p) / E = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 75\%$$

动能势能各占总能量一半时,有

$$E_p = \frac{1}{2} E$$

即

$$\frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{4} k A^2$$

这时位移大小为

$$x = A / \sqrt{2}$$

**7.20** 两分振动分别为  $\cos \omega t$  和  $\sqrt{3} \cos(\omega t + \pi/2)$ , 若在同一直线上合成, 求合振动的振幅  $A$  及初相位  $\varphi$ .

**解** 两分振动在  $t=0$  时刻的旋转矢量, 如

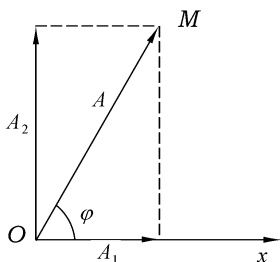


图 7.20

图 7.20 所示. 合振动的旋转矢量为  $\overrightarrow{OM}$ , 该矢量与  $x$  轴的夹角为初相, 所以合振动的振幅为

$$A = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

初相为

$$\tan \varphi = \frac{A_2}{A_1} = \sqrt{3}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

**7.21** 两质点沿着同一条直线作频率和振幅均相同的谐振动, 当它们每次沿

相反方向互相通过时,其位移为振幅的一半,试问它们之间的相位差是多少?

**解** 设两谐振动的运动方程为

$$x_1 = A \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A \cos(\omega t + \varphi_2)$$

依题意有

$$\begin{cases} \frac{A}{2} = A \cos(\omega t_1 + \varphi_1) \\ \frac{A}{2} = A \cos(\omega t_1 + \varphi_2) \\ \begin{cases} \dot{x}_1 = -A\omega \sin(\omega t_1 + \varphi_1) > 0 (\text{或} > 0) \\ \dot{x}_2 = -A\omega \sin(\omega t_1 + \varphi_2) < 0 (\text{或} < 0) \end{cases} \end{cases}$$

按第一种情况,有

$$\cos(\omega t_1 + \varphi_1) = \frac{1}{2}, \quad \sin(\omega t_1 + \varphi_1) < 0$$

$$\cos(\omega t_1 + \varphi_2) = \frac{1}{2}, \quad \sin(\omega t_1 + \varphi_2) > 0$$

所以

$$\omega t_1 + \varphi_1 = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad \omega t_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi (n \text{ 为整数})$$

故

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$$

类似地,第二种情况,有

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{2\pi}{3}$$

**7.22** 一个 3.0kg 的质点按下面方程作谐振动  $x = 5.0 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{4}\right)$ , 式中  $x$ 、 $t$  的单位分别为 m 和 s. 试问: (1)  $x$  为什么值时, 势能等于总能量的一半? (2) 质点从平衡位置到这一位置需要多长时间?

**解** (1) 势能为总机械能一半的条件是

$$\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{4} kA^2$$

即当  $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A = \pm \frac{5}{2} \sqrt{2} \text{ (m)}$  时, 势能等于总能量的一半.

(2) 先求从平衡位置到  $x = \frac{\sqrt{2}}{2} A$  处需用的最小时间, 这要求  $\dot{x} > 0$ , 设在平衡位置的时刻为  $t_1$ , 则

$$5.0 \cos\left(\frac{\pi}{3} t_1 - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad -5.0 \times \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} t_1 - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

所以

$$\frac{\pi}{3} t_1 - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2} \pi \quad (1)$$

设到达  $x = \frac{\sqrt{2}}{2} A$  位置的时刻为  $t_2$ , 这时振子继续沿  $\dot{x} > 0$  的方向运动, 于是有

$$A \cos\left(\frac{\pi}{3} t_2 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} A, \quad -5.0 \times \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} t_2 - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

所以

$$\frac{\pi}{3} t_2 - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2} \pi + \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

由式(2)减去式(1), 得

$$\frac{\pi}{3} (t_2 - t_1) = \frac{\pi}{4}$$

所以, 由平衡位置到达  $x = \frac{\sqrt{2}}{2} A$  处所需的最小时间为

$$\Delta t = \frac{3}{4} \text{ s} = 0.75 \text{ s}$$

经过类似的计算可知, 从平衡位置沿  $x$  轴负向到达  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} A$  处所需的最小时间也是  $0.75 \text{ s}$ .

**7.23** 两谐振动, 振动方程为  $x_1 = 5 \cos\left(10t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ cm}$  和  $x_2 = 6 \cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ cm}$ , 试求其合运动的振幅及初相.

**解** 两谐振动在  $t=0$  时刻的旋转矢量, 见图 7.23 所示, 合振动的旋转矢量为  $OM$ , 初相为该矢量与  $x$  轴的夹角, 所以合振动的振幅为

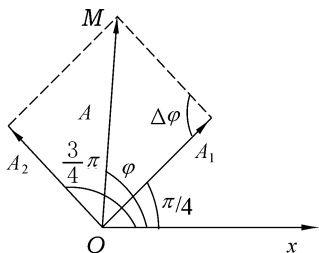


图 7.23

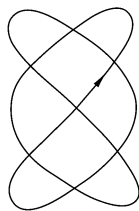


图 7.24

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$= \sqrt{5^2 + 6^2} = 7.81(\text{cm})$$

$$\varphi = \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} = \arctan \frac{5 \sin \frac{3}{4} \pi + 6 \sin \frac{\pi}{4}}{5 \cos \frac{3}{4} \pi + 6 \cos \frac{\pi}{4}}$$

$$= \arctan 11 = 1.48 \text{ rad} = 84.8^\circ$$

**7.24** 在示波器上看到如图所示的利萨如图,已知水平方向的频率为  $4.05 \times 10^4 \text{ Hz}$ ,试求垂直方向的频率.

**解** 由利萨如图可知,水平方向的频率  $\nu_1$  与垂直方向的频率  $\nu_2$  之比为

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{3}{2}$$

故垂直方向的频率为

$$\nu_2 = \frac{2}{3} \nu_1 = \frac{2}{3} \times 4.05 \times 10^4$$

$$= 2.7 \times 10^4 (\text{Hz})$$

**7.25** 质量为  $m$ , 长为  $l$  的均质细杆, 上端可以无摩擦的绕悬挂轴转动, 下端与一劲度系数为  $k$  的轻弹簧相联, 如图 7.25 所示, 细杆处于铅垂位置时, 弹簧处于不变形状态. 试求细杆作微振动时的频率.

**解** 由杆、弹簧、地球所构成的系统, 没有外力和耗散力作功, 系统的机械能守恒. 取平衡位置系统的势能为零, 当杆在某一任意位置时, 系统的机械能为

$$E = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} k x^2 + m g \frac{l}{2} (1 - \cos \theta) = \text{常量}$$

式中的  $J$  为杆绕  $O$  轴的转动惯量,  $x$  为弹簧的伸长量, 在杆作微小振动时,  $x = l\theta$ , 代入上式, 并对时间求导, 有

$$J \omega \frac{d\omega}{dt} + k l^2 \theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2} m g l \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 0$$

式中  $\frac{d\omega}{dt} = \dot{\theta}$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ ,  $J = \frac{1}{3} m l^2$  在杆作微小振动时,  $\sin \theta \approx \theta$  代入上式, 化简后有

$$\ddot{\theta} + \frac{6kl + 3mg}{2ml} \theta = 0$$

所以杆的微小振动是简谐振动, 振动频率为

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6kl + 3mg}{2ml}}$$

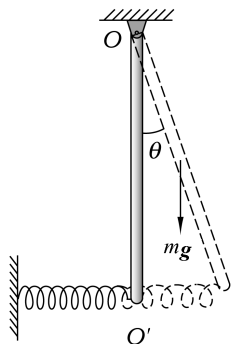


图 7.25

**7.26** 设有两个互相垂直的同频率谐振动  $x=5\cos\omega t$  和  $y=3\cos(\omega t+\delta)$ , 其中  $\delta=\arccos(8/15)$ . 求合振动的轨迹.

**解** 由  $x$  方向的振动得

$$\frac{x}{5} = \cos\omega t \quad (1)$$

由  $y$  方向的振动得

$$\begin{aligned} y &= 3\cos\omega t\cos\delta - 3\sin\omega t\sin\delta \\ &= \frac{3}{5}x\cos\delta - 3\sin\omega t\sin\delta \end{aligned}$$

也可写成

$$\frac{\frac{y}{3} - \frac{x}{5}\cos\delta}{\sin\delta} = -\sin\omega t \quad (2)$$

将式(1)和式(2)平方后相加, 有

$$\frac{x^2}{25} + \frac{\left(\frac{y}{3} - \frac{x}{5}\cos\delta\right)^2}{\sin^2\delta} = 1$$

式中  $\cos\delta = \frac{8}{15}$ ,  $\sin^2\delta = \frac{161}{225}$  代入上式并化简, 有

$$9x^2 - 16xy + 25y^2 = 161$$

上式即为合振动的轨迹方程, 该轨迹为斜椭圆, 如图 7.26 所示.

**7.27** (1) 当重力加速度  $g$  改变  $\Delta g$  时, 单摆周期的改变  $\Delta T$  是多少?

**注:** 用  $g+\Delta g$  代替  $g$  得出新的周期为  $T+\Delta T$ , 即  $T+\Delta T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+\Delta g}}$  用二项式定理把  $(g+\Delta g)^{-1/2}$  展开,  $(g+\Delta g)^{-1/2} = g^{-1/2} - \frac{1}{2}g^{-3/2}\Delta g + \dots$ , 仅保留前两项, 其余项为  $\Delta g$  的更高次项, 如果  $\Delta g$  很小, 各高次项的值很小.

(2) 用  $g$  的相对改变  $\Delta g/g$  表示周期的相对改变  $\Delta T/T$ .

(3) (2) 的答案也可对  $T$  的表达式微分而求得, 试用此方法求出所要求的关系式, 正确的结果为  $\frac{dT}{T} = \frac{1}{2} \frac{dg}{g}$ .

(4) 有一摆钟, 在  $g=9.8000 \text{ m/s}^2$  处计时是准确的, 如果拿到更高的地方, 则每天慢 10 s, 试利用上面结果求出这个高处  $g$  的近似值.

**解** (1) 当重力加速度  $g$  改变  $\Delta g$  时, 单摆的周期为

$$T + \Delta T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g + \Delta g}} \quad (1)$$

式中的  $T$  为重力加速度改变前单摆的周期, 在  $\Delta g$  很小的情况下, 将  $(g+\Delta g)^{-1/2}$

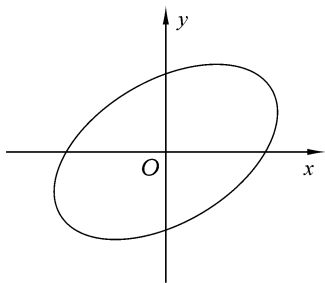


图 7.26

用二项式定理展开,并保留前两项,可得

$$(g + \Delta g)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{g}} - \frac{1}{2g} \sqrt{\frac{1}{g}} \Delta g$$

代入式(1)可得单摆周期的改变量为

$$\begin{aligned} \Delta T &= 2\pi\sqrt{l} \left( \sqrt{\frac{1}{g}} - \frac{1}{2g} \sqrt{\frac{1}{g}} \Delta g \right) - T \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 - \frac{\Delta g}{2g} \right) - 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \\ &= -\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\Delta g}{g} \end{aligned} \quad (2)$$

(2)因  $T$  是重力加速度改变前的周期,即

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3)$$

所以,由式(2)可得

$$\Delta T = -\frac{1}{2} T \frac{\Delta g}{g}$$

故

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} \quad (4)$$

(3)对式(3)求微分,可得

$$\begin{aligned} dT &= 2\pi\sqrt{l} \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{dg}{g^{3/2}} \\ &= -\frac{1}{2} \left( 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \frac{dg}{g} \\ &= -\frac{1}{2} T \frac{dg}{g} \end{aligned}$$

故

$$\frac{dT}{T} = -\frac{1}{2} \frac{dg}{g}$$

(4)由式(4)可得

$$\Delta g = -2g \frac{\Delta T}{T}$$

式中  $\frac{\Delta T}{T} = \frac{10}{24 \times 60 \times 60}$ , 所以,该高处的重力加速度为

$$\begin{aligned} g_H &= g + \Delta g = \left( 1 - \frac{2\Delta T}{T} \right) g \\ &= 1 - \frac{2 \times 10}{24 \times 60 \times 60} \times 9.8000 \end{aligned}$$

$$=9.7977(\text{m/s}^2)$$

**7.28** 一单摆在地球上的周期为  $2.0\text{ s}$ , 如果放在月球表面上, 它的周期是多少? 在月球表面上  $g_{\text{m}}=1.7\text{ m/s}^2$  (注: 因这里的  $\Delta g$  相对于  $g$  来说不是很小, 所以上题的近似方法不能采用)。

**解** 设在月球上周期为  $T_{\text{m}}$ , 在地球上的周期为  $T_{\text{e}}$ , 地球表面的重力加速度为  $g_{\text{e}}$ , 则

$$\frac{T_{\text{m}}}{T_{\text{e}}} = \sqrt{\frac{g_{\text{e}}}{g_{\text{m}}}}$$

故

$$T_{\text{m}} = \sqrt{\frac{g_{\text{e}}}{g_{\text{m}}}} T_{\text{e}} = \sqrt{\frac{9.8}{1.7}} \times 2.0 = 4.8(\text{s})$$

**7.29** 两质点沿着长为  $A$  的同一段直线作谐振动. 每一个质点具有  $1.5\text{ s}$  的周期, 但位相差  $\frac{\pi}{6}$ . 试问: (a) 当超前的质点出发  $0.5\text{ s}$  后, 落后的质点离开路径的一端, 这时它们相隔多远 (用  $A$  表示)? (b) 这时它们是沿着同一方向运动呢? 还是相向运动, 或是相互分离?

**解** (a) 设两简谐振动的运动方程分别为

$$x_1 = \frac{A}{2} \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{6}\right) \quad (1)$$

$$x_2 = \frac{A}{2} \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

将  $t=0.5\text{ s}$  时,  $x_2=\pm\frac{A}{2}$  代入式(2), 有

$$x_2 = \frac{A}{2} \cos\left(\frac{\omega}{2} + \varphi\right) = \pm \frac{A}{2}$$

故

$$\cos\left(\frac{\omega}{2} + \varphi\right) = \pm 1$$

$$\text{当 } \cos\left(\frac{\omega}{2} + \varphi\right) = 1 \text{ 时}$$

$$\frac{\omega}{2} + \varphi = 0$$

$$\text{当 } \cos\left(\frac{\omega}{2} + \varphi\right) = -1 \text{ 时}$$

$$\frac{\omega}{2} + \varphi = \pi$$

首先将  $t=0.5\text{ s}$ ,  $\frac{\omega}{2} + \varphi=0$  代入式(1)有

$$x_1 = \frac{A}{2} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4} A$$

所以,这时两质点之间的距离为

$$x_2 - x_1 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{A}{2} = 0.067 A$$

若将  $t=0.5 \text{ s}$ ,  $\frac{\omega}{2} + \varphi = \pi$  代入式(1)有

$$x_1 = \frac{A}{2} \cos\left(\pi + \frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} A$$

所以,两质点之间的距离为

$$|x_2 - x_1| = \left| -\frac{1}{2} A + \frac{\sqrt{3}}{4} A \right| = 0.067 A$$

结果与  $\frac{\omega}{2} + \varphi = 0$  时相同.

(b)在  $t=0.5 \text{ s}$ ,  $\frac{\omega}{2} + \varphi = 0$  时,有

$$x_1 = \frac{A}{2} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{A}{2} \omega \sin \frac{\pi}{6} < 0$$

$$x_2 = \frac{A}{2}$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

因此,相位落后的质点此时在正的最大位移处,下一时刻将向  $x$  轴负方向运动,两质点均向  $x$  轴负方向运动.

在  $t=0.5 \text{ s}$ ,  $\frac{\omega}{2} + \varphi = \pi$  时,有

$$x_1 = \frac{A}{2} \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{A}{2} \omega \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) > 0$$

$$x_2 = -\frac{A}{2}$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

因此,相位落后的质点此时在负的最大位移处,下一时刻将向  $x$  轴正方向运动,两质点均向  $x$  轴正方向运动.故无论那种情况,两个质点均向同一方向运动.

**7.30** 一质量为  $10 \text{ g}$  的物体作简谐振动,其振幅为  $24 \text{ cm}$ ,周期为  $4.0 \text{ s}$ .当  $t=0$  时,位移为  $24 \text{ cm}$ .试求(1)  $t=0.5 \text{ s}$  时,物体所在的位置;(2)  $t=0.5 \text{ s}$  时,物体所受力的大小和方向;(3)由起始位置运动到  $x=0.12 \text{ m}$  处所需的最少时间;(4)在  $x=0.12 \text{ m}$  处,物体的速度、动能、势能和总能量.

**解** 已知  $A=0.24\text{ m}$ ,  $T=4\text{ s}$ ,  $m=0.01\text{ kg}$

当  $t=0$  时,  $x=0.24\text{ m}=A$ , 因而该谐振动的初相  $\varphi=0$ , 所以, 谐振动的振动方程为

$$x = 0.24\cos 2\pi \frac{t}{4} = 0.24\cos \frac{\pi}{2} t (\text{m})$$

(1) 当  $t=0.5\text{ s}$  时, 物体所在的位置为

$$x_1 = 0.24\cos \frac{\pi}{4} = 0.17\text{ m}$$

(2) 由运动方程可得

$$\ddot{x} = -0.24 \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \cos \frac{\pi}{2} t$$

所以,  $t=0.5\text{ s}$  时, 物体所受合力的大小为

$$F = m |\ddot{x}| = 0.01 \times 0.24 \times \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \cos \frac{\pi}{4} = 4.19 \times 10^{-3} (\text{N})$$

其方向为  $x$  轴负方向, 指向平衡位置.

(3) 将  $x=0.12\text{ m}$  代入运动方程, 有

$$0.24\cos \frac{\pi}{2} t = 0.12$$

即 
$$\cos \frac{\pi}{2} t = \frac{1}{2}$$

故 
$$\frac{\pi}{2} t = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad n \text{ 为整数}$$

因此, 由起始位置 ( $t=0$ ) 运动到  $x=0.12\text{ m}$  处所需的最少时间为

$$t = \frac{2}{3} = 0.667 (\text{s})$$

(4) 在  $x=0.12\text{ m}$  处, 物体的速度为

$$\dot{x} = -0.24 \left( \frac{\pi}{2} \right) \sin \left( \frac{\pi}{2} \times \frac{2}{3} \right) = -0.326 (\text{m/s})$$

物体的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \times 0.01 \times (0.326)^2 = 5.33 \times 10^{-4} (\text{J})$$

在  $x=0$  处, 物体所具有的动能即为总机械能, 所以

$$E = \frac{1}{2} m (A\omega)^2 = \frac{1}{2} \times 0.01 \times 0.24^2 \times \frac{\pi^2}{2} = 7.11 \times 10^{-4} (\text{J})$$

在  $x=0.12\text{ m}$  处, 物体的势能为

$$E_p = E - E_k = 7.11 \times 10^{-4} - 5.33 \times 10^{-4} = 1.78 \times 10^{-4} (\text{J})$$

# 第二篇 电 磁 学

## 第 8 章 静 电 场

### 一、基本内容和主要公式

#### 1. 库仑定律

真空中两个静止的点电荷之间的作用力

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{r}^0$$

$\mathbf{r}^0$  是由施力电荷指向受力电荷的位矢方向上的单位矢量.

#### 2. 电场

(1) 电场强度的定义:  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}$

式中  $q_0$  为试验电荷的电量.

(2) 点电荷  $q$  在空间产生的电场的电场强度

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0$$

$\mathbf{r}^0$  为由场源电荷  $q$  指向场点的位矢方向上的单位矢量.

(3) 电场强度叠加原理

对于由许多静止的点电荷  $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots$  组成的电荷系

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{r}_i^0$$

对于静止的连续带电体

$$\mathbf{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0$$

#### 3. 电通量和高斯定理

(1) 电通量:  $\Phi_e = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$

(2) 高斯定理:  $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_{i(\text{内})}$

式中  $\sum_i q_{i(\text{内})}$  为封闭曲面  $S$  所包围的所有电荷电量的代数和. 此式说明静电场是有源场.

#### 4. 静电场中的环路定理和电势

(1) 环路定理:  $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$

此式表明静电场的电场线不可能是闭合的, 静电场是无旋场; 静电场的电场力作功与路径无关, 只与初末位置有关, 即静电场是保守场.

(2) 电势能:  $W_a = \int_a^{\text{"0"}} q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$

电荷在电场中某点的电势能, 在数值上等于把电荷从该点移动到电势能零参考点时, 静电力所作的功.

(3) 电势:  $u_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{\text{"0"}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$

(4) 点电荷的电势:  $u = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$  (电势零点选在无穷远处)

(5) 电势叠加原理:  $u_a = \sum_i u_i$  或  $u_a = \int_Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$

(6) 电势差:  $u_{ab} = u_a - u_b$

#### 5. 电场和电势的关系

(1) 积分形式:  $u_a = \int_a^{\text{"0"}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  (电势定义)

(2) 微分形式:  $E_l = -\frac{du}{dl}$ ,  $\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right)$

#### 6. 静电场中的导体和介质

(1) 导体静电平衡的条件:  $\mathbf{E}_{\text{内}} = 0$ ,  $\mathbf{E}_{\text{表面}} \perp$  导体表面

(2) 静电平衡导体上的电荷分布:  $q_{\text{内净}} = 0$ ,  $\sigma_{\text{表}} = \frac{E}{\epsilon_0}$

处于静电平衡的导体, 其内部各处净电荷为零, 电荷只能分布在表面; 表面上各处的面电荷密度与该表面附近处的电场强度的大小成正比. 表面各处的面电荷密度与表面的曲率有关, 曲率越大的地方, 面电荷密度也越大.

(3) 介质在电场中的极化: 在外电场中固有电偶极矩的取向和感应电偶极矩的产生使电介质的表面(或内部)出现束缚电荷.

电介质中的电场强度  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$

式中  $\mathbf{E}_0$  为外电场,  $\mathbf{E}'$  为束缚电荷产生的电场.

(4) 电位移矢量: 对于各向同性电介质  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$

(5) 电介质中的高斯定理:  $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_{0(\text{内})}$

式中  $\sum q_{0(\text{内})}$  为闭合曲面  $S$  内的自由电荷的代数和。

## 7. 电容和静电能

(1) 电容器的电容:  $C = \frac{Q}{u_1 - u_2}$

(2) 电容器中储藏的静电能:  $W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} Q u$

(3) 电场的能量密度:  $w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2$  .

(4) 电场中总的静电能:  $W = \iiint_V w_e dV = \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV$

## 二、典型例题

**8-1** 半径为  $R$  的均匀带电半球面, 其面电荷密度为  $\sigma$ , 求该半球面球心处的场强.

**解法一** 在球面上任取一面元  $dS$ ,  $dS = R^2 \sin \alpha d\alpha d\theta$ , 此面元所带电量  $dq = \sigma dS$ . 电荷元  $dq$  在球心  $O$  处所激发的场强  $dE$  方向是沿径向的, 如图 8-1(a) 所示. 由对称性可知, 合场强沿  $z$  轴负方向, 所以只需求出电荷元产生的场强在  $z$  轴方向上的分量和. 电荷元在球心处激发的场强在  $z$  轴上的投影为

$$dE_z = -\frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \alpha$$

总场强为

$$\begin{aligned} E = E_z &= \int dE_z = -\int \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \alpha = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \\ &= -\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \end{aligned}$$

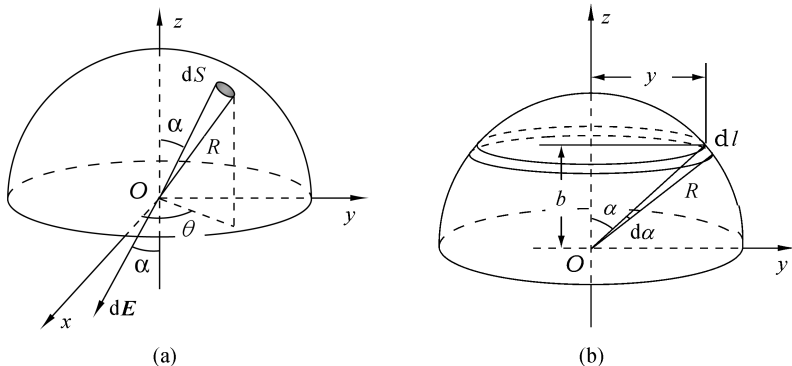


图 8-1

矢量形式为

$$\mathbf{E} = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \mathbf{k}$$

**说明** 在已知电荷分布情况,用电场叠加原理求电场强度的步骤为

a. 选择电荷元  $dq$ ;

b. 求出  $dq$  产生的电场强度  $d\mathbf{E}$  并投影在直角坐标系的各轴上,即写出  $dE_x$ ,  $dE_y$ ,  $dE_z$ ;

c. 对电场各分量分别求和.

如果由电荷分布的对称性可分析出总场强的方向,则只需求出电荷元的电场强度在此方向上的分量之和即可.

**解法二** 将半球面视为若干半径不等的平行小圆环,如图 8-1(b)所示.利用均匀带电圆环在其轴线上一点所产生的场强结论计算.

在带电半球面上取一半径为  $y$  的带电圆环,其面积  $dS = 2\pi y dl$ ,带电量为  $dq = \sigma dS = \sigma 2\pi y dl$ ,它在  $O$  点激发的场强沿  $z$  轴负方向,其大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{bdq}{(b^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{b\sigma 2\pi y dl}{4\pi\epsilon_0 (b^2 + y^2)^{3/2}}$$

由图可知:  $b^2 + y^2 = R^2$ ,  $b = R\cos\alpha$ ,  $y = R\sin\alpha$ ,  $dl = R d\alpha$ , 所以

$$dE = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{R\cos\alpha \cdot 2\pi R\sin\alpha R d\alpha}{R^3} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin\alpha \cos\alpha d\alpha$$

$$E = \int dE = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin\alpha \cos\alpha d\alpha = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

矢量形式为

$$\mathbf{E} = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \mathbf{k}$$

**说明** 对于特殊的带电体,可采用已知的某种带电体的场强进行叠加而获得.例如:

a. 均匀带电球壳可视为半径不等的带电圆环的集合;

b. 均匀带电球体可视为半径不等的均匀带电圆盘或球壳的集合;

c. 均匀带电薄圆柱面可视为带电直线的集合,也可视为带电圆环的集合;

d. 均匀带电圆柱体可视为许多截面半径不等的圆柱面带电体的集合,或带电直导线的集合,或带电圆盘的集合.

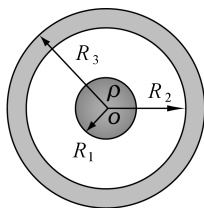


图 8-2

**8-2** 设半径为  $R_1$  的均匀带电球体的电荷体密度为  $\rho$ ,球外有一内外半径分别为  $R_2$ 、 $R_3$  的同心导体球壳,如图 8-2 所示.试计算空间电场强度和电势分布.

**解** 要求电场强度分布,需先确定电荷的分布.因为处于静电平衡状态的导体内部场强处处为零,所以由高斯定理和电荷守恒定律可知,球壳内表面带电量为  $-Q$ ,

外表面带电量为  $Q$  ( $Q = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_1^3$ ). 由于带电体是球对称的, 所以电荷必是球对称分布的. 作半径为  $r$  的同心球面为高斯面, 则由高斯定理可知

$$4\pi r^2 \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$$

当  $r \leq R_1$  时

$$\sum q = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$E_1 = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0}$$

当  $R_1 \leq r \leq R_2$  时

$$\sum q = Q = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_1^3$$

$$E_2 = \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2}$$

当  $R_2 < r < R_3$  时

$$\sum q = 0$$

$$E_3 = 0$$

当  $r > R_3$  时

$$\sum q = Q = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_1^3$$

$$E_4 = \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2}$$

电场分布的矢量形式为

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{E}_1 = \frac{\rho \mathbf{r}}{3 \epsilon_0}, & r \leq R_1 \\ \mathbf{E}_2 = \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0, & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \mathbf{E}_3 = 0, & R_2 < r < R_3 \\ \mathbf{E}_4 = \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0, & r > R_3 \end{array} \right.$$

选无穷远处为电势零参考点, 由电势定义可求得各区域的电势为

当  $r \geq R_3$  时

$$u = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{R_3} \mathbf{E}_4 \cdot d\mathbf{r} = \int_r^\infty \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r}$$

当  $R_2 \leq r \leq R_3$  时

$$u = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{R_3} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_3}^\infty \mathbf{E}_4 \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_3}^\infty \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 R_3}$$

当  $R_1 \leq r \leq R_2$  时

$$\begin{aligned} u &= \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{R_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_2}^{R_3} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_3}^\infty \mathbf{E}_4 \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_r^{R_2} \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2} dr + 0 + \int_{R_3}^\infty \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \end{aligned}$$

当  $0 \leq r \leq R_1$  时

$$\begin{aligned} u &= \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{R_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_2}^{R_3} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_3}^\infty \mathbf{E}_4 \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_r^{R_1} \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2} dr + 0 + \int_{R_3}^\infty \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{\rho R_1^2}{2 \epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6 \epsilon_0} + \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

对电势分布也可直接用电势叠加原理求解,具体解法如下:

若求空间任意一点  $P$  的电势,设  $P$  点距离球心为  $r$ ,则以半径为  $r$  的球面为界面,将电荷分为内、外两部分.内部电荷在场点  $P$  产生的电势就如同内部电荷全部集中在球心处的点电荷在  $P$  点产生的电势;而外部电荷可以视为由许多极薄的带电同心球壳叠加而成,每一个薄球壳在  $P$  点产生的电势就是此带电薄球壳单独存在时其本身的电势.所以

当  $r \geq R_3$  时

$$u = u_{\text{内}} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} = \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r}$$

当  $R_2 \leq r \leq R_3$  时

$$u = u_{\text{内}} + u_{\text{外}} = 0 + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_3} = \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 R_3}$$

当  $R_1 \leq r \leq R_2$  时

$$\begin{aligned} u &= u_{\text{内}} + u_{\text{外}} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} + \frac{-Q}{4\pi \epsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_3} \\ &= \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \end{aligned}$$

当  $0 \leq r \leq R_1$  时

$$u = u_{\text{内}} + u_{\text{外}} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3}{4\pi \epsilon_0 r} + \int_r^{R_1} \frac{\rho \cdot 4\pi r'^2 dr'}{4\pi \epsilon_0 r'} + \frac{-Q}{4\pi \epsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_3}$$

$$= \frac{\rho R_1^2}{2 \epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6 \epsilon_0} + \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0} \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}$$

**说明** 对于电荷分布具有某种对称性(球对称、面对称或柱对称)的情况,利用高斯定理计算电场分布极为方便.对于电势分布,一种方法是由电势定义直接求解,计算时注意,如果积分路径上各区域内电场强度的表达式不同时需分段积分;另一种方法是用电势叠加原理解.二者比较,后者是标量运算,计算较简单些.

**8-3** 如图 8-3 所示,两块靠近的平行金属板间原为真空.现使它们分别带上等量异号电荷直至两板上电荷密度分别为  $+\sigma_0$  和  $-\sigma_0$ ,而板间电压  $u_0 = 300\text{V}$ ,这时保持两板上电量不变,将板间一半空间充以相对介电常数为  $\epsilon_r = 5$  的电介质,求板间电压变为多少?(计算时忽略边缘效应).

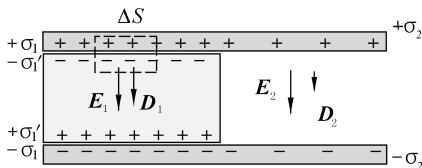


图 8-3

**解** 设金属板的面积为  $S$ ,板间距离为  $d$ ,在充入电介质前板的面电荷密度为  $\sigma_0$ ,这时板间电场为  $E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0$ ,而两板间电压为  $u_0 = E_0 d$ .

由于并不是均匀地将电介质充入整个平行板间,所以必导致平行板上自由电荷的重新分布.不考虑边缘效应,则可假定平行板左半部分和右半部分的电荷分别均匀分布.以  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  表示金属板上左半部分和右半部分的面电荷密度.板间各处的电场强度  $E$  与电位移矢量  $D$  的方向都垂直于板面且在两半空间内部分是均匀的,以  $E_1, E_2$  和  $D_1, D_2$  分别表示板间左半部分和右半部分的电场强度和电位移矢量.为了求出此时板间的电压,需要先求出电场分布.因此在板间左半部作一底面积为  $\Delta S$  的封闭柱面作为高斯面,其轴线与板面垂直,两底面与金属板平行,而且上底面在金属板内.如图 8-3 所示,则由电介质中的高斯定理

$$\oint_S \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\text{上底}} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\text{下底}} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\text{侧面}} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} = \sigma_1 \Delta S$$

由于金属板内场强为零,  $D_1$  也为零;在侧面上处处  $D_1$  与  $d\mathbf{S}$  垂直,所以上式对上底面和侧面的积分均为零,因此

$$\oint_S \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} = D_1 \Delta S = \sigma_1 \Delta S$$

$$D_1 = \sigma_1$$

从而可知

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

同理,对于右半部,  $D_2 = \sigma_2$ ,  $E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}$

由于静电平衡时两导体都是等势体,所以左右两部分两板间的电势差是相等的,即

$$E_1 d = E_2 d$$

所以

$$E_1 = E_2$$

将上面的  $E_1$  和  $E_2$  的值代入可得

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_r} \quad (1)$$

此外,因为金属板上总电量保持不变,即

$$\sigma_1 \frac{S}{2} + \sigma_2 \frac{S}{2} = \sigma_0 S$$

由此得

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_0 \quad (2)$$

将方程(1)、(2)联立求解,可得

$$\sigma_1 = \frac{2\epsilon_r}{1 + \epsilon_r} \sigma_0 > \sigma_0$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{1 + \epsilon_r} \sigma_0 < \sigma_0$$

这时板间的电场强度为

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} = \frac{2\sigma_0}{\epsilon_0(1 + \epsilon_r)} = \frac{2}{1 + \epsilon_r} E_0$$

求出了场强,可知电压为

$$u = Ed = \frac{2}{1 + \epsilon_r} E_0 d = \frac{2}{1 + \epsilon_r} u_0 = \frac{2}{1 + 5} \times 300 = 100(\text{V})$$

**说明** 由于两极板都是等势体,所以两板间左半部分和右半部分的电场强度相同,但由  $1 > \frac{2}{1 + \epsilon_r} > \frac{1}{\epsilon_r}$  可知,电场和电压比板间全部为真空时的场强和电压减弱了,但并不减弱到  $\epsilon_r$  分之一,这是因为电介质并未充满两板间的空间的缘故。

**8-4** 一平行板电容器极板面积为  $S$ ,间距为  $d$ ,接在电源上以保持电压为  $u$ ,将极板的距离拉开一倍,计算:

(1)静电能的改变;

(2) 电场对电源做的功;

(3) 外力对极板做的功.

解 (1) 此处静电能即电场能. 因为电压不变, 所以拉开前的电场能为

$$\begin{aligned} W_{e1} &= \iiint_{V_1} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Sd \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 Sd \left( \frac{u}{d} \right)^2 = \frac{\epsilon_0 S u^2}{2d} \end{aligned}$$

同样, 拉开后的电场能为

$$\begin{aligned} W_{e2} &= \iiint_{V_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S \cdot 2d \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 S \cdot 2d \left( \frac{u}{2d} \right)^2 = \frac{\epsilon_0 S u^2}{4d} \end{aligned}$$

则静电能的改变量为

$$\Delta W_e = W_{e2} - W_{e1} = -\frac{\epsilon_0 S u^2}{4d}$$

负号表示静电能减少.

(2) 当保持电压一定时, 电场对电源做的功为

$$A = -u \Delta Q$$

$\Delta Q$  为两极板距离从  $d$  拉开到  $2d$  时极板上电荷的增量

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = C_2 u - C_1 u = \left( \frac{\epsilon_0 S}{2d} - \frac{\epsilon_0 S}{d} \right) u = -\frac{\epsilon_0 S}{2d} u$$

所以

$$A = -u \Delta Q = \frac{\epsilon_0 S}{2d} u^2$$

(3) 外力对极板做的功, 由功能关系式可知

$$A' = \Delta W_e + A = \left( -\frac{\epsilon_0 S}{4d} u^2 \right) + \frac{\epsilon_0 S}{2d} u^2 = \frac{\epsilon_0 S}{4d} u^2$$

说明 由此可以看出, 当保持电压不变时, 外力拉开极板的物理过程是: 外力所作的功  $A$  和电场能量的减少量  $-\Delta W_e$  都变成了电源的能量, 即  $A = A' + (-\Delta W_e)$ . 另外须注意, 若将电容器极板接在电源上改变电容器两极板的距离或其间的电介质等, 不变的量是电容器两极板间的电压; 若断开电源, 改变电容器的以上各量, 不变的量是极板上的电荷总量.

### 三、习题详解

#### 8.1 选择题

(1)真空中两平行均匀带电平板相距为  $d$ , 面积为  $S$ , 且有  $d^2 \ll S$ , 带电量分别为  $+q$  与  $-q$ , 则两极间的作用力大小为 (D)

$$(A) F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$$

$$(B) F = \frac{q^2}{\epsilon_0 S}$$

$$(C) F = \frac{2q^2}{\epsilon_0 S}$$

$$(D) F = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S}$$

(2)如图 8.1 所示, 闭合曲面  $S$  内有一点电荷  $q$ ,  $P$  为  $S$  面上一点, 在  $S$  面外  $A$  点有一点电荷  $q'$ , 若将  $q'$  移至  $B$  点, 则 (B)

(A) 穿过  $S$  面的电通量改变,  $P$  点的电场强度不变

(B) 穿过  $S$  面的电通量不变,  $P$  点的电场强度改变

(C) 穿过  $S$  面的电通量和  $P$  点的电场强度都不变

(D) 穿过  $S$  面的电通量和  $P$  点的电场强度都改变

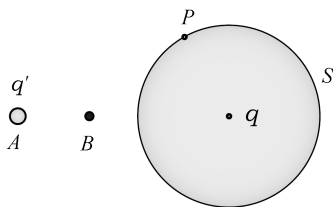


图 8.1

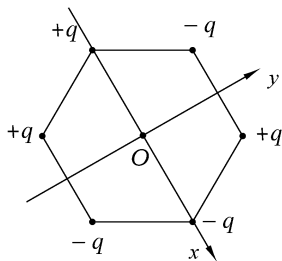


图 8.2

#### 8.2 填空题

(1)电量和符号都相同的三个点电荷  $q$  放在等边三角形的顶点上. 为了不使它们由于斥力的作用而散开, 可在三角形的中心放一符号相反的点电荷  $q'$ . 则  $q'$  的电量为  $-\frac{\sqrt{3}}{3}q$ .

(2)在边长为  $a$  的正六角形的六个顶点都放有电荷, 如图 8.2 所示. 则六角形中心  $O$  处的电场强度为  $-\frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \mathbf{i}$ .

**8.3** 电子所带电量最先是由密立根通过油滴实验测定的. 其原理是一个很小的带电油滴在匀强电场内, 调节电场强度  $\mathbf{E}$  使作用在油滴上的电场力与油滴的重力平衡. 如果油滴的半径为  $1.64 \times 10^{-4} \text{ cm}$ , 平衡时的电场强度为  $1.92 \times 10^5 \text{ V/m}$ ,

油滴的密度为  $0.851 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . 试求油滴上的电量.

**解** 以带电油滴为研究对象. 设其带电量为  $q$ , 半径为  $R$ , 质量密度为  $\rho$ . 当油滴平衡时, 有

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{Eq} + m\boldsymbol{g} = 0$$

即

$$qE = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g$$

解得

$$\begin{aligned} q &= \frac{4\pi R^3 \rho g}{3E} = \frac{4 \times 3.14 \times (1.64 \times 10^{-6})^3 \times 0.851 \times 10^3 \times 9.8}{3 \times 1.92 \times 10^5} \\ &= 8.02 \times 10^{-19} \text{ (C)} \end{aligned}$$

**8.4** 一长为  $l$  的均匀带电直导线, 其电荷线密度为  $\lambda$ , 试求导线延长线上距离近端为  $a$  处一点的电场强度.

**解** 建立如图 8.4 所示的坐标系. 在带电直导线上取电荷元  $dq = \lambda dx$ , 它在  $P$  点产生的电场强度大小为

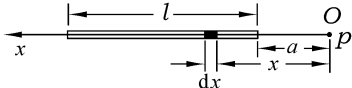


图 8.4

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

因为任一电荷元在场点  $P$  处产生的电场强度的方向相同, 所以整个带电直导线在  $P$  点产生的电场强度的大小为

$$E = \int dE = \int_a^{a+l} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a(a+l)}$$

故

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a(a+l)} \boldsymbol{i}$$

**8.5** 如图 8.5(a)所示的一半圆柱面, 高和直径都是  $l$ , 均匀地带有电荷, 其面密度为  $\sigma$ . 试求其轴线中点  $O$  处的电场强度.

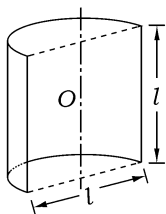
**解** 将带电半圆柱面视为无限多条沿半圆平行排列的带电直线段所组成 (如图 8.5(b)所示). 我们知道, 带电线密度为  $\lambda$  的有限长线段在空间一点  $(\theta_1, \theta_2, a)$  (如图 8.5(c)所示) 处的电场强度为

$$E_{x'} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

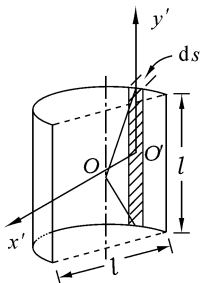
$$E_{y'} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)$$

对本题, 在圆柱面上取电荷元  $dq = \sigma l ds$ , 其中,  $ds$  为弧长, 如图 8.5(b)所示, 则

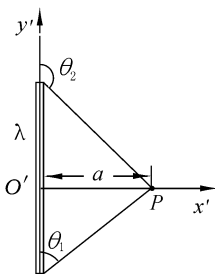
$$\lambda = \frac{dq}{l} = \sigma ds$$



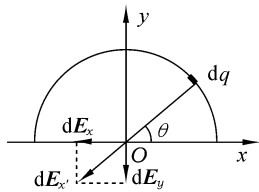
(a)



(b)



(c)



(d)

图 8.5

所以此电荷元在  $O$  点产生的电场强度为

$$dE_{x'} = \frac{\sigma ds}{4\pi\epsilon_0 \frac{l}{2}} (\cos 45^\circ - \cos 135^\circ) = \frac{\sqrt{2}\sigma ds}{2\pi\epsilon_0 l}$$

$$dE_{y'} = \frac{\sigma ds}{4\pi\epsilon_0 \frac{l}{2}} (\sin 135^\circ - \sin 45^\circ) = 0$$

对整个半圆柱面而言,由对称性可知  $O$  点的  $E$  沿  $xOy$  坐标系的  $y$  轴负方向(如图 8.5(d)所示),所以有

$$\begin{aligned} dE_y &= dE_{x'} \sin \theta = \frac{\sqrt{2}\sigma ds}{2\pi\epsilon_0 l} \sin \theta = \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\pi\epsilon_0 l} \sin \theta \cdot \frac{l}{2} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

$$E = E_y = \int dE_y = \int_0^\pi \frac{\sqrt{2}\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta d\theta = \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\pi\epsilon_0}$$

故

$$\mathbf{E} = -\frac{\sqrt{2}\sigma}{2\pi\epsilon_0} \mathbf{j}$$

**8.6** 一宽为  $b$  的无限长均匀带电平面薄板,其电荷面密度为  $\sigma$ ,如图 8.6 所示.试求:

- (1)薄板所在平面内,距薄板边缘为  $a$  处的电场强度;
- (2)通过薄板的几何中心的垂直线上与薄板的距离为  $h$  处的电场强度.

**解** 如图所示,建立  $Oxyz$  坐标系,在薄板上取一宽为  $dx$  的窄条视为无限长均匀带电直线,其单位长度上带电量为  $\lambda = \sigma dx$ .

(1)它在  $P_1$  点产生的电场强度大小为

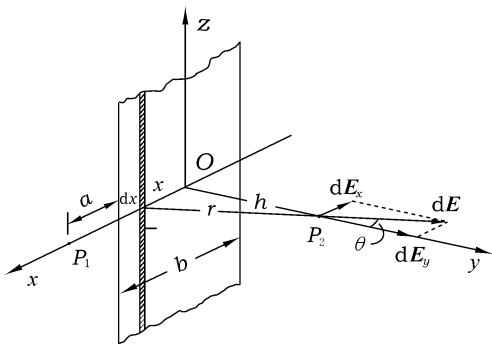


图 8.6

$$dE = \frac{\sigma dx}{2\pi\epsilon_0 \left( a + \frac{b}{2} - x \right)}$$

整个薄板在  $P_1$  点产生的电场强度大小为

$$E = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\sigma dx}{2\pi\epsilon_0 \left( a + \frac{b}{2} - x \right)} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a+b}{2}$$

$E$  的方向,当  $\sigma > 0$  时,沿  $x$  轴正方向;当  $\sigma < 0$  时,则沿  $x$  轴的负方向.

(2) 窄条在  $P_2$  点产生的电场强度大小为

$$dE = \frac{\sigma dx}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$dE_x = dE \sin \theta = \frac{\sigma dx}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \frac{x}{r} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x dx}{x^2 + h^2}$$

$$dE_y = dE \cos \theta = \frac{\sigma dx}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \frac{h}{r} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{h dx}{x^2 + h^2}$$

则整个薄板在  $P_2$  点产生的电场强度的分量各为

$$E_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \frac{x dx}{(x^2 + h^2)} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln(x^2 + h^2) \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = 0$$

$$E = E_y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \frac{h dx}{(x^2 + h^2)} = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \arctan \frac{b}{2h}$$

$E$  的方向,当  $\sigma > 0$  时,沿  $y$  正方向;当  $\sigma < 0$  时,则沿  $y$  轴负方向.

**8.7** 一半径为  $R$ ,长为  $l$  的圆柱形薄片,其上电荷均匀分布,电量为  $q$ .试求在其轴线上与近端距离为  $h$  处的电场强度.并讨论当  $R \rightarrow 0$  时,其结果如何? 并与 8.4 题的结果作一比较.

**解法一** 取如图 8.7(b)所示的坐标,在圆柱上取宽为  $dz$  的圆环,其上带电量

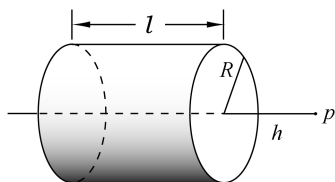


图 8.7(a)

为  $dq = \frac{q}{l} dz$ , 该圆环在轴线上任一点  $P$  产生的电场强度大小为

$$dE = \frac{(l + h - z) \frac{q}{l} \cdot dz}{4\pi\epsilon_0 [R^2 + (l + h - z)^2]^{3/2}}$$

整个圆形薄片在  $P$  点产生的电场强度的大小为

$$\begin{aligned} E &= \int_0^l \frac{g(l + h - z) dz}{4\pi\epsilon_0 l [R^2 + (l + h - z)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (h + l)^2}} \right) \end{aligned}$$

$E$  的方向, 当  $q > 0$  时, 沿  $z$  正方向; 当  $q < 0$  时, 沿  $z$  负方向.

当  $R \rightarrow 0$  时, 由上式可得

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{h(l + h)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda l}{h(l + h)}$$

可见, 8.4 题是本题在  $R \rightarrow 0$  时的极限情况.

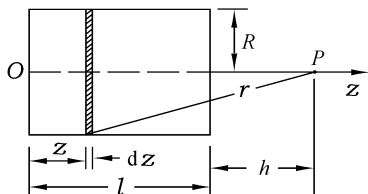


图 8.7(b)

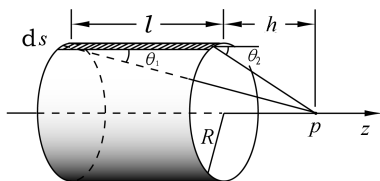


图 8.7(c)

**解法二** 将圆柱形薄片视为无限个带电直线段, 如图 8.7(c) 所示. 由对称性

可知, 电场强度必沿轴线方向. 取电荷元  $dq = \sigma l ds$ , 则其线密度  $\lambda = \frac{q}{l} = \sigma l$ , 在  $P$  点产生的电场强度的  $z$  轴分量为

$$\begin{aligned} dE_z &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \\ &= \frac{\sigma ds}{4\pi\epsilon_0 R} \left( \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + (h + l)^2}} \right) \end{aligned}$$

而  $\sigma = \frac{q}{2\pi R l}$ , 所以

$$E = \int dE_z = \int_0^{2\pi R} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 R} \left( \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + (h + l)^2}} \right) ds$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 R} \left( \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + (h+l)^2}} \right) \cdot 2\pi R \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (h+l)^2}} \right)
 \end{aligned}$$

$E$  的方向及  $R \rightarrow 0$  时的情况同解法一.

**8.8** 长为  $l$  的带电细导体棒,沿  $x$  轴放置,棒的一端在原点.设电荷的线密度为  $\lambda = Ax$ ,  $A$  为常量.求  $x$  轴上坐标为  $x = l+b$  处的电场强度大小.

**解** 在带电细导体棒上取电荷元  $dq = \lambda dx = Axdx$ ,它在  $P$  点(坐标为  $l+b$ )产生的电场强度的大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(l+b-x)^2} = \frac{A}{4\pi\epsilon_0} \frac{xdx}{(l+b-x)^2}$$

整个带电棒在  $P$  点产生的电场强度大小为

$$\begin{aligned}
 E &= \int dE = \frac{A}{4\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{xdx}{(l+b-x)^2} \\
 &= \frac{A}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{l}{b} - \ln\left(1 + \frac{l}{b}\right) \right]
 \end{aligned}$$

**8.9** 半径为  $b$  的细圆环,圆心在  $Oxy$  坐标系的原点上.圆环所带电荷的线密度  $\lambda = A \cos \theta$ ,其中  $A$  为常量,如图 8.9 所示.求圆心处电场强度的  $x, y$  分量.

**解** 取电荷元  $dq = A \cos \theta \cdot b d\theta$ ,它在坐标原点  $O$  产生的电场强度沿坐标轴的分量为

$$dE_x = \frac{-A \cos \theta \cdot b d\theta}{4\pi\epsilon_0 b^2} \cos \theta$$

$$dE_y = \frac{-A \cos \theta \cdot b d\theta}{4\pi\epsilon_0 b^2} \sin \theta$$

整个细圆环产生的电场强度分量为

$$E_x = \int dE_x = \frac{A}{4\pi\epsilon_0 b} \int_0^{2\pi} -\cos^2 \theta d\theta = -\frac{A}{4\epsilon_0 b}$$

$$E_y = \int dE_y = \frac{-A}{4\pi\epsilon_0 b} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$$

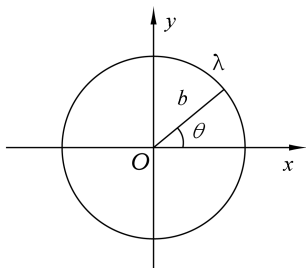


图 8.9

**8.10** 两个同心的均匀带电球面,半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ ,带电量分别为  $+q$  和  $-q$ ,求其电场强度分布.

**解** 两个均匀带电的同心球面,分别产生的电场强度分布,由高斯定理可知为

$$0 \quad (r < R_1)$$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{r}^0 \quad (r > R_1)$$

$$E_2 = \begin{cases} 0 & (r < R_2) \\ -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{r}^0 & (r > R_2) \end{cases}$$

根据叠加原理,两个同心球面产生的电场强度分布

$$\text{当 } R_1 < R_2 \text{ 时, } E = E_1 + E_2 = \begin{cases} 0 & (r < R_1) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{r}^0 & (R_1 < r < R_2) \\ 0 & (r > R_2) \end{cases}$$

**8.11** 两根相互平行的“无限长”直导线,其上均匀带电,电荷线密度分别为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ ,两直导线间的距离为  $d$ ,求电场强度为零的点所连成的直线的位置.

**解** 由于每根“无限长”带电直线所产生的电场强度都是轴对称的,所以,叠加后  $E=0$  的点连成的直线只能在两平行带电直线所在的平面内.

当  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  同号时,  $E=0$  的直线在两带电直线之间,如图 8.11(a)所示.

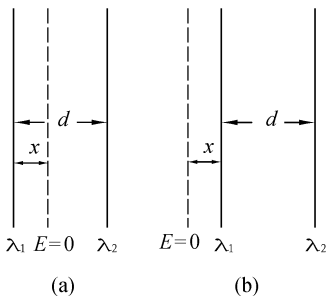


图 8.11

$$\text{由 } \frac{|\lambda_1|}{2\pi\epsilon_0 x} - \frac{|\lambda_2|}{2\pi\epsilon_0 (d-x)} = 0 \text{ 得 } x = \frac{|\lambda_1|d}{|\lambda_1| + |\lambda_2|}.$$

当  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  异号时,  $E=0$  的直线在电荷线密度小的直线的外侧. 设  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ , 如图 8.11(b)所示.

$$\text{由 } \frac{|\lambda_1|}{2\pi\epsilon_0 x} - \frac{|\lambda_2|}{2\pi\epsilon_0 (d+x)} = 0, \text{ 得 } x = \frac{|\lambda_1|d}{|\lambda_2| - |\lambda_1|}.$$

**8.12** 如图 8.12(a)所示,厚度为  $b$  的“无限大”均匀带电平板,其电荷体密度

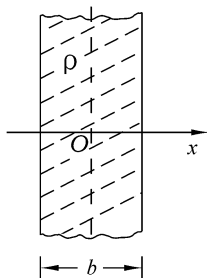


图 8.12(a)

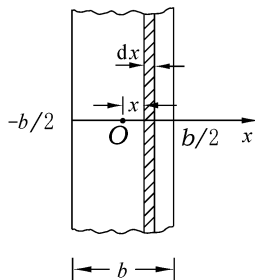


图 8.12(b)

为  $\rho$ . 求板内外任一点的电场强度.

**解** 取如图 8.12(b) 所示的坐标系, 设所求点的坐标为  $x$ .

(1) 平板外任一点  $\left(x > \frac{b}{2}, \text{ 或 } x < -\frac{b}{2}\right)$  的电场强度. 在带电平板内任取一厚度为  $dx$  的“无限大”均匀带电薄层, 其电荷面密度为  $\rho dx$ , 它在所求点的电场强度的大小为  $dE = \frac{\rho dx}{2\epsilon_0}$ . 平板上各薄层所产生的  $dE$  方向相同, 故整个板所产生的电场强度的大小为

$$E = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\rho dx}{2\epsilon_0} = \frac{b\rho}{2\epsilon_0}$$

当  $\rho > 0$  时,  $E$  的方向垂直板面向外;  $\rho < 0$  时,  $E$  的方向垂直指向板面.

(2) 平板内任一点  $\left(-\frac{b}{2} < x < \frac{b}{2}\right)$  的电场强度.

过所求点作一平行板面的平面, 将带电板分成两部分, 则在所求点产生的电场强度等于这两部分所产生的电场强度的叠加, 即

$$E(x) = \frac{\rho \cdot \left(x + \frac{b}{2}\right)}{2\epsilon_0} - \frac{\rho \cdot \left(\frac{b}{2} - x\right)}{2\epsilon_0} = \frac{\rho x}{\epsilon_0}$$

当  $\rho > 0, x > 0$  或  $\rho < 0, x < 0$  时,  $E(x)$  沿  $x$  轴正方向;

当  $\rho < 0, x > 0$  或  $\rho > 0, x < 0$  时,  $E(x)$  沿  $x$  轴负方向.

**8.13** 电荷均匀分布在半径为  $R$  的球形空间内, 电荷体密度为  $\rho$ . 试求球内、外及球面上的电场强度.

**解** 根据电荷分布的球对称性, 可知电场分布也具有球对称性. 以带电体球的球心为球心, 作半径为  $r$  的球形高斯面, 由高斯定理知:

$$0 \leq r < R \text{ 时, } \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3\epsilon_0} \pi \rho r^3$$

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

$r = R$  时

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi R^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$E = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}$$

$r > R$  时

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

此题也可用叠加原理求解.

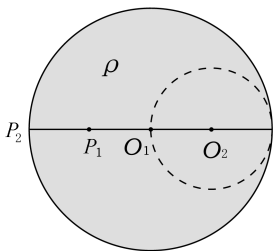


图 8.14

**8.14** 半径为  $2R$  的均匀带电球, 电荷的体密度为  $\rho$ , 球心为  $O_1$ , 设想在球内有一个半径为  $R$  的球形空腔, 球心为  $O_2$ ,  $O_1O_2 = R$ , 如图所示. 根据叠加原理求  $O_1, O_2, P_1, P_2$  四点电场强度的大小.  $P_1$  和  $P_2$  在  $O_1$  和  $O_2$  的连线上, 且  $P_1O_1 = R, P_2O_1 = 2R$ .

**解** 该带电球壳所产生的电场, 可视为半径为  $2R$ , 电荷体密度为  $+\rho$  的带电球体, 与半径为  $R$ 、电荷体密度为  $-\rho$  的带电球体所产生的电场的叠加, 应用上题的结果得:

$$E_{O_1} = 0 + \frac{-\rho}{3\epsilon_0} R = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} R$$

$$E_{O_2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R + 0 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R$$

$$E_{P_1} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R - \frac{\rho}{12\epsilon_0} R = \frac{\rho}{4\epsilon_0} R$$

$$E_{P_2} = \frac{2\rho}{3\epsilon_0} R - \frac{\rho}{27\epsilon_0} R = \frac{17\rho}{27\epsilon_0} R$$

**8.15** 氢原子是一个中心带正电  $q_e$  的原子核(可视为点电荷), 外边是带负电的电子云. 在正常状态时, 电子云的电荷分布密度是球对称的:

$$\rho_e = -\frac{q_e}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

式中  $a_0$  为一常量(玻尔半径). 试求原子电场强度大小的分布.

**解** 根据电荷分布的球对称性, 可知电场分布也是球对称性的. 以原子核为球心, 以  $r$  为半径作一球形高斯面, 由高斯定理知

$$\oint_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 \cdot E = \frac{q'}{\epsilon_0}$$

$q'$  为高斯面内包围的总电量. 令其中电子云的电量为  $q''$ , 则

$$\begin{aligned} q'' &= \iiint_V \rho_e(r) dV = -\frac{q_e}{\pi a_0^3} \int_0^r 4\pi r'^2 \cdot dr \cdot e^{-\frac{2r}{a_0}} \\ &= -\frac{4q_e}{a_0^3} \int_0^r r'^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} dr = q_e \left( 2 \frac{r^2}{a_0^2} + 2 \frac{r}{a_0} + 1 \right) e^{-\frac{2r}{a_0}} - q_e \end{aligned}$$

$$q' = q_e + q'' = q_e \left( 2 \frac{r^2}{a_0^2} + 2 \frac{r}{a_0} + 1 \right) e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

所以

$$E = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( 2 \frac{r^2}{a_0^2} + 2 \frac{r}{a_0} + 1 \right) e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

**8.16** 如图 8.16(a)所示,在半导体 pn 结附近总是堆积着正、负电荷,n 区内是正电荷,p 区内是负电荷,两区内的电量相等.把 pn 结看作一对带正、负电荷的“无限大”平板,它们相互接触. $x$  轴的原点取在 pn 结的交接面上,方向垂直于板面.n 区的范围是 $-x_n \leq x \leq 0$ ;p 区的范围是 $0 \leq x \leq x_p$ .设两区内电荷分布都是均匀的.

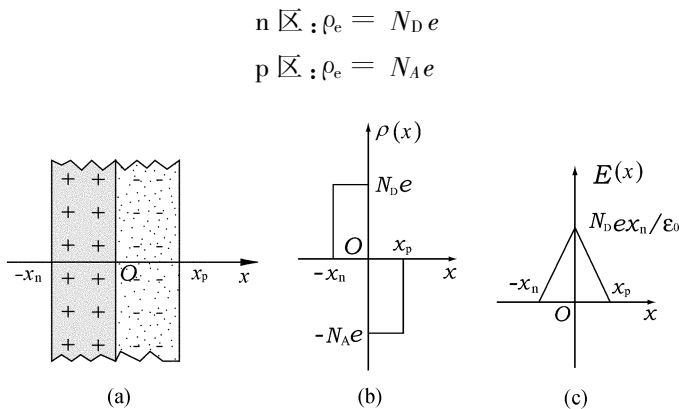


图 8.16

这种分布称为实变形模型.其中  $N_D, N_A$  都是常数,且有  $x_n N_D = x_p N_A$  (两区内的电荷数量相等).试证电场强度的大小为

$$\text{n 区: } E(x) = \frac{N_D e}{\epsilon_0} (x_n + x)$$

$$\text{p 区: } E(x) = \frac{N_A e}{\epsilon_0} (x_p - x)$$

并画出  $\rho_e(x)$  和  $E(x)$  随  $x$  的变化曲线.

**解** 在 n 区内任一点的电场强度为

$$\begin{aligned} E(x) &= \left[ \int_{-x_n}^x \frac{N_D e}{2 \epsilon_0} dx - \int_x^0 \frac{N_D e}{2 \epsilon_0} dx \right] + \int_0^{x_p} \frac{N_A e}{2 \epsilon_0} dx \\ &= 2 \frac{N_D e}{2 \epsilon_0} x + \frac{N_D e}{2 \epsilon_0} x_n + \frac{N_A e}{2 \epsilon_0} x_p \end{aligned}$$

由于  $N_A x_p = N_D x_n$ ,所以上式可写为

$$E(x) = \frac{N_D e}{\epsilon_0} (x_n + x)$$

在 p 区内任一点的电场强度为

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \int_{-x_n}^0 \frac{N_D e}{2 \epsilon_0} dx + \left[ -\int_0^x \frac{N_A e}{2 \epsilon_0} dx + \int_x^{x_p} \frac{N_A e}{2 \epsilon_0} dx \right] \\
 &= \frac{N_D e}{2 \epsilon_0} x_n - 2 \frac{N_A e}{2 \epsilon_0} x + \frac{N_A e}{2 \epsilon_0} x_p \\
 &= \frac{N_A e}{\epsilon_0} (x_p - x)
 \end{aligned}$$

题目得证.

$\rho_e(x)$ 和  $E(x)$ 随  $x$  的变化曲线如图 8.16(b)和(c)所示.

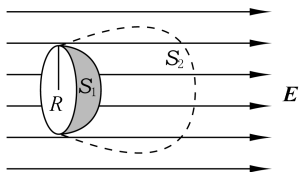


图 8.17

**8.17** 设均匀电场的电场强度  $E$  与半径为  $R$  的半球面的轴平行,试计算通过此半球面  $S_1$  的电通量.若以半球面的边线为边线,另作一个任意形状的曲面  $S_2$ ,则通过  $S_2$  面的电通量又是多少?

**解** 由  $S_1$  和以  $R$  为半径的大圆面  $S_0$  组成一个封闭曲面  $S$ ,由高斯定理知:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_i = 0$$

而

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

所以

$$\phi_{e_{S_1}} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_{S_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = ES = E\pi R^2$$

同理,由  $S_2$  和以  $R$  为半径的大圆面  $S_0$  组成一个封闭曲面  $S'$ ,则可得

$$\phi_{e_{S_2}} = -\iint_{S_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = ES = E\pi R^2$$

**8.18** 用高斯定理重新解 8.10 题,并画出电场线.

**解** 作半径为  $r$  的同心球面为高斯面.

当  $r < R_1$  时,有

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2 = 0$$

$$E = 0$$

当  $R_1 < r < R_2$  时,有

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

当  $r > R_2$  时,有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} (q - q) = 0$$

$$E = 0$$

电场线如图所示.

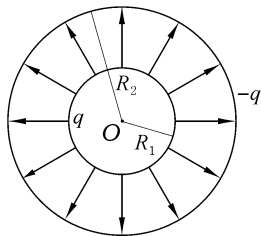


图 8.18

**8.19** 实验表明:在靠近地面处的电场强度约为  $1.0 \times 10^2 \text{ N/C}$ ,方向指向地球中心.在离地面  $1.5 \times 10^3 \text{ m}$  高处,电场强度约为  $20 \text{ N/C}$ ,方向也是指向地球中心.试求:

(1)地球所带的总电量.

(2)离地面  $1.5 \times 10^3 \text{ m}$  下的大气层中电荷的平均密度.

**解** (1)根据电场分布的对称性,以地球中心为球心,以近似于地球半径  $R$  为半径作同心球面为高斯面.则由高斯定理有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_1 \cos\pi \cdot 4\pi R^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{i1} = \frac{1}{\epsilon_0} q_1$$

得

$$q_1 = -4\pi\epsilon_0 R^2 E_1 = -4.6 \times 10^5 \text{ C}$$

(2)以  $r = R + h$  为半径作同心球面为高斯面,则由高斯定理有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_2 \cos\pi \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{i2} = \frac{1}{\epsilon_0} q_2$$

得

$$q_2 = -4\pi\epsilon_0 r^2 E_2$$

则大气的电荷平均体密度为

$$\rho = \frac{q_2 - q_1}{\frac{4}{3}\pi(r^3 - R^3)} = 4.72 \times 10^{-13} \text{ C/m}^3$$

**8.20** 一对“无限长”的同轴直圆筒,半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ),筒面上都均匀带电,沿轴线单位长度的电量分别为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ .试求空间的电场强度分布.

**解** 根据电荷的轴对称分布可知电场应是轴对称分布的,以直圆筒轴线为轴,作一半径为  $r$ ,高为  $l$  的闭合圆柱面为高斯面.由高斯定理有

(1)  $r < R_1$  区域

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = 0$$

$$E = 0$$

(2)  $R_1 < r < R_2$  区域

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\epsilon_0} l \lambda_1$$

$$E = \frac{\lambda_1}{2\pi \epsilon_0 r}$$

(3)  $r > R_2$  区域

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\epsilon_0} (\lambda_1 + \lambda_2) l$$

$$E = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi \epsilon_0 r}$$

**8.21** 半径为  $R$  的“无限长”的均匀带电直圆柱体, 设体密度为  $\rho$ , 试求圆柱体内和圆柱体外任一点的电场强度.

**解** 根据电场的轴对称分布, 作一与圆柱体同轴的半径为  $r$ 、长为  $l$  的闭合圆柱面为高斯面. 由高斯定理有

当  $r < R$  时

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\epsilon_0} \pi r^2 \cdot l \cdot \rho$$

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$$

当  $r > R$  时

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\epsilon_0} \pi R^2 \cdot l \cdot \rho$$

$$E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$$

若  $\rho > 0$ ,  $\mathbf{E}$  的方向沿径向向外; 若  $\rho < 0$ ,  $\mathbf{E}$  的方向沿径向指向轴线.

**8.22** “无限长”的同轴圆柱与圆筒均匀带电. 圆柱的半径为  $R_1$ , 其电荷体密度为  $\rho_1$ , 圆筒的内外半径分别为  $R_2$  和  $R_3$  ( $R_1 < R_2 < R_3$ ), 其电荷体密度为  $\rho_2$ . (1) 试求空间任一点的电场强度? (2) 若当  $r > R_3$  区域中的电场强度为零, 则  $\rho_1$  和  $\rho_2$  应有什么样的关系.

**解** 由电荷分布的轴对称性, 可知电场分布亦具有轴对称性. 作一半径为  $r$ 、长为  $l$  的闭合同轴圆柱面为高斯面. 由高斯定理可知

(1) 当  $r < R_1$  时

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\epsilon_0} \pi r^2 l \rho_1$$

$$E = \frac{\rho_1}{2\epsilon_0} r$$

当  $R_1 < r < R_2$  时

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\epsilon_0} \pi R_1^2 l \rho_1$$

$$E = \frac{\rho_1 R_1^2}{2 \epsilon_0 r}$$

当  $R_2 < r < R_3$  时

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\epsilon_0} [\pi R_1^2 l \rho_1 + \pi (r^2 - R_2^2) l \rho_2]$$

$$E = \frac{1}{2 \epsilon_0 r} [R_1^2 \rho_1 + (r^2 - R_2^2) \rho_2]$$

当  $r > R_3$  时

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\epsilon_0} [\pi R_1^2 l \rho_1 + \pi (R_3^2 - R_2^2) l \rho_2]$$

$$E = \frac{1}{2 \epsilon_0 r} [R_1^2 \rho_1 + (R_3^2 - R_2^2) \rho_2]$$

上述  $\mathbf{E}$  的指向由  $\rho_1$  和  $\rho_2$  的正负决定.

(2) 若  $r > R_3$  的区域内  $E=0$ , 则  $R_1^2 \rho_1 + (R_3^2 - R_2^2) \rho_2 = 0$ , 由于  $R_2 < R_3$ , 可见  $\rho_1$  和  $\rho_2$  应为异号. 即  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = -\frac{R_3^2 - R_2^2}{R_1^2}$ .

**8.23** 设气体放电形成的等离子体圆柱内电荷的体密度可用下式表示:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left[1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^2}$$

式中  $r$  是到轴线的距离,  $\rho_0$  是轴线上的电荷体密度,  $a$  为常量 (它是  $\rho$  减少到  $\rho_0/4$  处的半径). 求圆柱体内的电场强度分布.

**解** 由电荷分布的轴对称性可知电场分布也是轴对称的. 作一半径为  $r$ 、长为  $l$  的闭合圆柱面为高斯面, 由高斯定理有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \frac{\rho_0}{\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2} \cdot 2\pi x \cdot l \cdot dx$$

$$= \frac{\pi a^2 \rho_0 l r^2}{\epsilon_0 (a^2 + r^2)}$$

得

$$E = \frac{a^2 \rho_0 r}{2 \epsilon_0 (a^2 + r^2)}$$

**8.24** 用高斯定理重新解题 8.12.

**解** 由电荷分布的面对称性,分析电场也具有面对称性.

(1)在平板外一点的电场强度.

作如图 8.24(a)所示的柱形高斯面,由高斯定理有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2ES = \frac{1}{\epsilon_0} bS\rho$$

得

$$E = \frac{b\rho}{2\epsilon_0}$$

(2)在平板内一点的电场强度

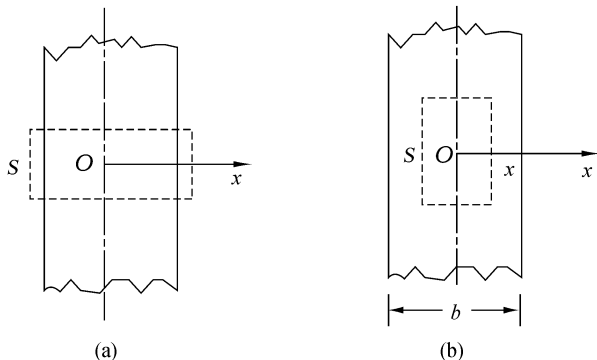


图 8.24

作如图 8.24(b)所示的柱形高斯面,由高斯定理有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2ES = \frac{1}{\epsilon_0} 2xS\rho$$

得

$$E = \frac{\rho x}{\epsilon_0}$$

方向与 8.12 题结果相同.

**8.25** 用高斯定理重新解题 8.16.

**解** 作如图所示的闭合柱形高斯面.由高斯定理有  
在  $n$  区内,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(x)S = \frac{1}{\epsilon_0} (x_n + x)SN_{De}$$

得

$$E(x) = \frac{N_{De}}{\epsilon_0} (x_n + x)$$

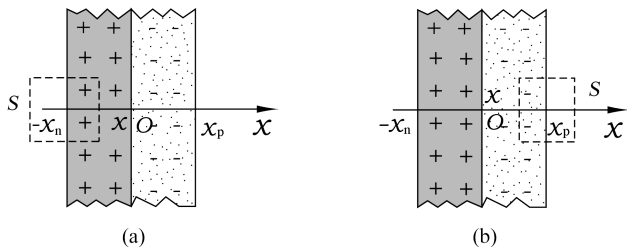


图 8.25

在 p 区内

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(x)S = \frac{1}{\epsilon_0}(x_p - x)S N_A e$$

得

$$E(x) = \frac{N_A e}{\epsilon_0}(x_p - x)$$

**8.26** 把单位正电荷从电偶极子轴线的中点  $O$  沿任意路径移到无限远处,求静电力对它作的功.

**解** 图中  $O$  点的电势为

$$u_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(l/2)} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(l/2)} = 0$$

根据

$$A_{ab} = q_0(u_a - u_b)$$

得

$$A_{0\infty} = 0$$

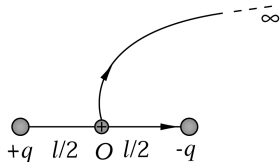


图 8.26

**8.27** 在氢原子中,正常状态下电子到质子的距离为  $5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ ,已知氢原子核(质子)和电子带电量各为  $+e$  和  $-e$  ( $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ).把原子中的电子从正常状态下离核的距离拉开到无限远处,所需的能量叫做氢原子的电离能.求此电离能是多少电子伏.

**解** 由牛顿第二定律知

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = m \frac{v^2}{a}$$

得

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

所以氢原子系统具有的能量为

$$W = E_P + E_K = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a} = -13.6 \text{ eV}$$

故氢原子的电离能为  $+13.6\text{eV}$  .

**8.28** 求与点电荷  $q=2.0\times 10^{-8}\text{C}$  分别相距  $a=1.0\text{m}$  和  $b=2.0\text{m}$  的两点的电势差 .

解 
$$\Delta u = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = 90 \text{ V}$$

**8.29** 两个点电荷的电量都是  $q$ , 相距为  $2r$ . 求中垂面上某点的电势. 该点到两个点电荷连线中点的距离为  $x$ , 说明通过该点的等势线的形状 .

解 
$$u_p = u_1 + u_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{1/2}} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{1/2}}$$
  

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x^2 + r^2)^{1/2}}$$

等势线是中垂面内半径为  $x$  的圆, 圆心在两电荷的连线的中点 .

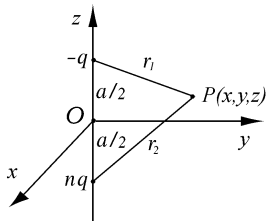


图 8.30

**8.30** 有两个带异号的点电荷  $nq (n>1)$  和  $-q$ , 相距为  $a$ . 证明: (1) 电势是零的等势面是一个球面; (2) 球心在两点电荷连线的延长线上, 且在  $-q$  的点电荷的外侧; (3) 这个球面的半径为  $\frac{na}{n^2-1}$  .

解 取如图所示的坐标系. 设  $P$  点的电势为零. 则

$$\frac{nq}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = 0$$

所以

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{n}$$

而

$$r_1 = \left[ x^2 + y^2 + \left( z - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$r_2 = \left[ x^2 + y^2 + \left( z + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

代入上式中化简得

$$x^2 + y^2 + \left[ z - \frac{(n^2+1)a}{(n^2-1) \cdot 2} \right]^2 = \left( \frac{na}{n^2-1} \right)^2$$

此式为一球面方程, 球心的坐标为  $0, 0, \frac{(n^2+1)a}{(n^2-1)2}$  . 即球心在  $z$  轴上.  $z =$

$\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)\frac{a}{2} > \frac{a}{2}$ , 说明球心在  $-q$  点电荷的外侧, 球面的半径为  $\frac{na}{n^2-1}$ .

**8.31** 金元素的原子核可看作均匀带电球体, 其半径为  $6.9 \times 10^{-15} \text{ m}$ , 电量为  $q = 79 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ . 求它表面上的电势.

解  $u = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} = 1.65 \times 10^7 \text{ V}$

**8.32** 用电势叠加原理求 8.7 题中  $P$  点的电势.

解 如图 8.7 所示, 在圆柱形薄片上取一宽为  $dz$  的圆环, 此圆环上所带的电量为  $dq = \frac{q}{l} dl$ . 由均匀带电圆环在轴线上一点的电势关系式及电势叠加原理有

$$\begin{aligned} u &= \int_0^l \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q/l}{[(h+l-z)^2 + R^2]^{3/2}} dz \\ &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{h+l + [(h+l)^2 + R^2]^{1/2}}{h + (h^2 + R^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

**8.33** 一半径为  $R$  的均匀带电球体, 其电荷的体密度为  $\rho$ . 求: (1) 球外任一点的电势; (2) 球表面上的电势; (3) 球内任一点的电势.

解 由高斯定理求出均匀带电球体的电场分布为

$$E = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} r & (r \leq R) \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} & (r \geq R) \end{cases}$$

以无穷远为电势零参考点, 则

(1) 球外一点的电势 ( $r > R$ ):

$$u = \int_r^\infty \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$$

(2) 球面上的电势 ( $r = R$ ):

$$u = \int_R^\infty \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$$

(3) 球内一点的电势 ( $r < R$ ):

$$u = \int_r^R \frac{\rho}{3\epsilon_0} r dr + \int_R^\infty \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

**8.34** 长为  $2a$  的线段上均匀地分布着电量为  $q$  的电荷. (1)  $P$  点在线段的垂直平分面上, 离线段的中点  $O$  的距离为  $r$ , 求  $P$  点的电势和  $OP$  方向上的电场强度分量. (2)  $P$  点在线段的延长线上, 离  $O$  点的距离为  $z$ , 求  $P$  点的电势和  $OP$  方向的电场强度分量. (3)  $P$  点在通过线段端点  $A$  的垂直面上, 离该端点的距离为  $r$ , 求  $P$  点的电势及  $AP$  方向的电场强度分量.

**解** 取如图 8.34(a)所示的坐标系,以无穷远为电势的零参考点.

(1)取电荷元  $dq$ ,它在  $P$  点产生的电势为

$$\begin{aligned} du &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \\ &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

根据电势叠加原理,整个带电直线在  $P$  点产生的电势为

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{1/2}} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \int_{-a}^a \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 + r^2}}{r} \right) \\ E_{OP} &= -\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{\partial}{\partial r} \left( \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + r^2}}{r} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r(a^2 + r^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

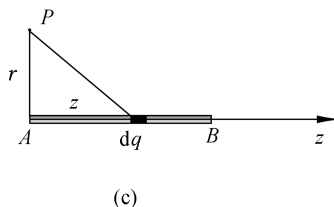
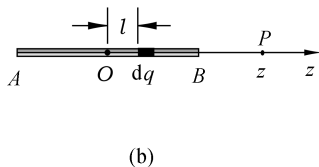
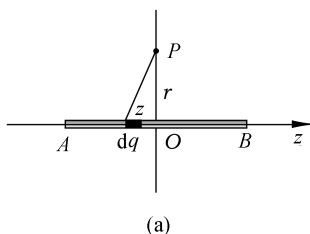


图 8.34

(2)取如图 8.34(b)所示的电荷元  $dq$ ,它在  $P$  点产生的电势为

$$du = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{z - l} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 a} \cdot \frac{dl}{z - l}$$

则整个带电直线在  $P$  点产生的电势为

$$u = \int \frac{1}{8\pi\epsilon_0 a} \cdot \frac{dl}{z - l} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 a} \int_{-a}^a \frac{dl}{z - l} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 a} \ln \frac{z + a}{z - a}$$

$$E_{OP} = -\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2 - a^2}.$$

(3) 取如图 8.34(c) 所示的坐标系和电荷元  $dq$ , 在  $P$  点产生的电势为

$$du = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{1/2}}$$

则整个带电直线在  $P$  点产生的电势

$$\begin{aligned} u &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \int_0^{2a} \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{1/2}} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \ln \frac{2a + \sqrt{r^2 + 4a^2}}{r} \\ E_{AP} &= -\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \frac{\partial}{\partial r} \left( \ln \frac{2a + \sqrt{r^2 + 4a^2}}{r} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r(r^2 + 4a^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

**8.35** 半径为  $R$  的“无限长”圆柱体内均匀带电, 电荷体密度为  $\rho$ . 试求它所产生的电场的电势分布(选圆柱的轴线为电势的零参考点).

**解** 由高斯定理知带电圆柱体的电场分布

$$E = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0} & (r \leq R) \\ \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r} & (r \geq R) \end{cases}$$

其电势分布为

当  $r \leq R$  时

$$u = \int_r^0 \frac{\rho}{2\epsilon_0} r dr = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2$$

当  $r \geq R$  时

$$\begin{aligned} u &= \int_r^R \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r} dr + \int_R^0 \frac{\rho}{2\epsilon_0} r dr \\ &= -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R}{r} \end{aligned}$$

**8.36** 证明在习题 8.16 中突变型 pn 结内电势的分布是

$$\begin{aligned} \text{n 区: } u &= -\frac{N_D e}{\epsilon_0} \left( x_n x + \frac{1}{2} x^2 \right) \\ \text{p 区: } u &= -\frac{N_A e}{\epsilon_0} \left( x_p x - \frac{1}{2} x^2 \right) \end{aligned}$$

**解** 取 p 区与 n 区接触面为电势零面. 则

$$\text{n 区: } u(x) = \int_x^0 \frac{N_D e}{\epsilon_0} (x_n + x) dx = -\frac{N_D e}{\epsilon_0} x_n x + \frac{1}{2} x^2$$

$$p \text{ 区}: u(x) = \int_x^0 \frac{N_A e}{\epsilon_0} (x_p - x) dx = -\frac{N_A e}{\epsilon_0} \left( x_p x - \frac{1}{2} x^2 \right)$$

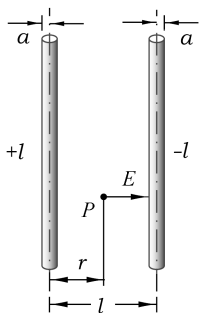


图 8.37

**8.37** 有两个半径均为  $a$ , 轴线间相距为  $l$  的“无限长”直导线 ( $l > 2a$ ), 带有等量异号的电荷, 单位长度上带电量分别为  $+\lambda$  和  $-\lambda$ , 假设当  $l$  相当大时, 两导线上的电荷仍为均匀分布. 试求这两根导线上的电势差.

**解** 两导线之间任一点的电场强度为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (l-r)}$$

两导线间的电势差为

$$\Delta u = \int_a^{l-a} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr + \int_a^{l-a} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (l-r)} dr \approx \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{l}{a}$$

**8.38** 半径为  $R$  的薄圆盘带正电, 电荷在其上均匀分布, 面密度为  $\sigma$ . 试求: (1) 圆盘轴线上的电势分布; (2) 求圆盘边缘上一点  $A$  的电势; (3) 比较  $A$  点和圆心  $O$  处电势的大小.

**解** (1) 把带电圆盘视为无数个不同半径的圆环. 在轴线上距盘心为  $x$  处的  $P$  点的电势等于这些带电圆环在该点产生的电势的叠加. 取半径为  $r$ , 宽度为  $dr$  的圆环, 其所带的电量为  $dq = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$ , 它在  $P$  点产生的电势为

$$\begin{aligned} du &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(r^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr}{(r^2 + x^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

则整个带电薄圆盘在  $P$  点产生的电势为

$$\begin{aligned} u &= \int du = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + x^2} - x) \end{aligned}$$

(2) 如图 8.38 所示, 以  $A$  为圆心, 以  $r$  和  $r+dr$  分别为半径作细圆环, 它带电量为  $dq = \sigma \cdot 2r\theta \cdot dr$ , 其在  $A$  点产生的电势为

$$du = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{2\sigma}{4\pi\epsilon_0} \theta dr$$

因为

$$r = 2R \cos \theta$$

所以

$$dr = -2R \sin \theta d\theta$$

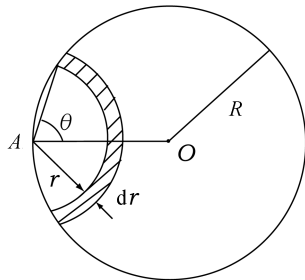


图 8.38

故

$$du = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \theta(-2R\sin\theta d\theta)$$

则整个带电圆盘在  $A$  点产生的电势为

$$\begin{aligned} u_A &= \int du = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0} (-\theta\sin\theta d\theta) = \frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin\theta d\theta \\ &= \frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0} (\sin\theta - \theta\cos\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0} \end{aligned}$$

(3)由(1)知,当  $x \rightarrow 0$  时,  $u_0 = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$ , 因此有  $u_0 > u_A$ .

**8.39** 一电子初速为零,在 5 000 V 的电压下获得速度后水平飞入两平行板空间的中央,若平板是水平放置的,且板长  $b=5$  cm,两板间距离  $d=1$  cm.问至少要在两板上加多大电压,才能使电子不再飞出两板的空间?

**解** 设电子不飞出板间,两板上所加电压为  $u$ ,则板间电场强度  $E=u/d$ .忽略电子所受重力,因而有

$$y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \left( \frac{b}{v} \right)^2 \geq \frac{d}{2}$$

将  $E=u/d$  代入上式整理可得

$$u_{\min} = \left( \frac{d}{b} \right)^2 \frac{mv^2}{e}$$

因为加速电压  $u_0=5000$  V, 而  $eu_0 = \frac{1}{2} mv^2$ , 故有  $mv^2 = 2eu_0$ , 代入得

$$u_{\min} = \left( \frac{d}{b} \right)^2 \frac{2eu_0}{e} = 2 \left( \frac{d}{b} \right)^2 u_0 = 2 \times \left( \frac{1}{5} \right)^2 \times 5000 = 400 \text{ (V)}$$

**8.40** 二极管的主要构件是一个半径为  $R_1=5.0 \times 10^{-4}$  m 的圆柱状阴极和一个套在阴极外的半径为  $R_2=4.5 \times 10^{-3}$  m 的同轴圆筒状阳极.阳极与阴极间电势差为  $u_+ - u_- = 300$  V.

(1)设一电子从阴极出发时的初速度很小,可以忽略不计.求该电子到达阳极时所具有的动能.

(2)求证两极间距离轴线为  $r$  的一点处电场强度为

$$E = \frac{1}{r} \frac{u_+ - u_-}{\ln(R_2/R_1)}$$

**解** (1)电场力作功等于电子动能的增量

$$\frac{1}{2} mv^2 = e(u_+ - u_-)$$

由此得

$$v = \sqrt{\frac{2e(u_+ - u_-)}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 300}{9.1 \times 10^{-31}}} \\ = 1.05 \times 10^7 \text{ (m/s)}$$

(2) 作同轴的闭合圆柱形高斯面, 由高斯定理有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda l$$

解得

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

由电势差的定义有

$$u_- - u_+ = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{R_1}^{R_2} -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

因而有

$$\lambda = 2\pi\epsilon_0 \frac{u_+ - u_-}{\ln R_2 / R_1}$$

代入得

$$E = \frac{1}{r} \frac{u_+ - u_-}{\ln R_2 / R_1}$$

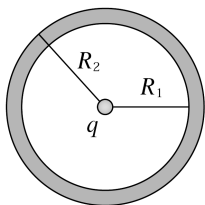


图 8.41 (a)

**8.41** 带电量为  $q$  的点电荷处在导体球壳的中心, 球壳的内、外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 求球壳内、外及壳上任一点的电场强度和电势. 并画出  $E-r$  和  $u-r$  线.

**解** 应用高斯定理, 求出电场强度分布为

$$E = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} & (r < R_1) \\ 0 & (R_1 < r < R_2) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} & (r > R_2) \end{cases}$$

由电势定义知

当  $r \leq R_1$  时

$$u = \int_r^{R_1} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + 0 + \int_{R_2}^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

当  $R_1 \leq r \leq R_2$  时

$$u = 0 + \int_{R_2}^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

当  $r \geq R_2$  时

$$u = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$E-r$  和  $u-r$  线如图 8.41(b) 和 (c) 所示.

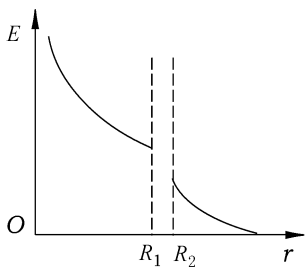


图 8.41(b)

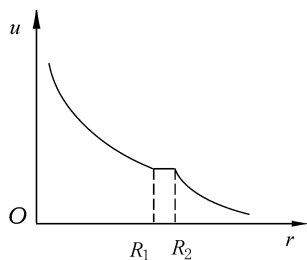


图 8.41(c)

**8.42** 半径为  $R_1$  的导体球带电量为  $q$ , 球外套以内、外半径分别为  $R_2$  和  $R_3$  的同心导体球壳, 球壳上带电量为  $Q$ . (1) 求球和球壳的电势; (2) 求球与球壳间的电势差; (3) 用导线把球和球壳连接起来, 再回答 (1)(2) 两问; (4) 若将球壳外面接地, 再回答 (1)(2) 两问.

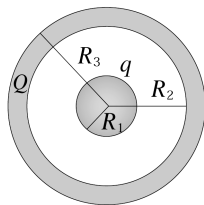


图 8.42

**解** (1) 先由高斯定理求出电场强度分布

$$E = \begin{cases} 0 & (r < R_1) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} & (R_1 < r < R_2) \\ 0 & (R_2 < r < R_3) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q+Q}{r^2} & (r > R_3) \end{cases}$$

再根据电势的定义得导体的电势为

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_3}^{\infty} \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} \end{aligned}$$

导体壳的电势为

$$u_2 = \int_{R_3}^{\infty} \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

(2) 导体球与球壳间的电势差为

$$u_1 - u_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

(3) 用导线将导体球与球壳连接后, 电荷全部分布在球壳的外表面上, 其电量为  $q+Q$ . 在这种情况下, 电场强度的分布为

$$E = \begin{cases} 0 & (r < R_3) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q+Q}{r^2} & (r > R_3) \end{cases}$$

此时

$$u_1 = u_2 = \int_{R_3}^{\infty} \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q+Q}{R_3}$$

因此

$$u_1 - u_2 = 0$$

(4) 用导线将球壳的外表面接地, 则球壳只有内表面有电量  $-q$  分布. 此时, 电场强度的分布为

$$E = \begin{cases} 0 & (r < R_1) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} & (R_1 < r < R_2) \\ 0 & (r > R_2) \end{cases}$$

因此有

$$u_2 = 0$$

$$u_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$u_1 - u_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

**8.43** 两个金属球半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 所带电量分别为  $q_1$  和  $q_2$ . 两球相距很远, 将两球用导线连接, 设导线很长, 两球上电荷仍可视作均匀分布. 试证: 在静电平衡时, 两球上电荷的面密度与它们的半径成反比.

**解** 设两球连接后处于静电平衡时两球带电量分别为  $q'_1$ 、 $q'_2$ , 则两金属球上电荷的面密度分别为

$$\sigma_1 = \frac{q'_1}{4\pi R_1^2}, \quad \sigma_2 = \frac{q'_2}{4\pi R_2^2}$$

而两球的电势分别为

$$u_1 = \frac{q'_1}{4\pi R_1}, \quad u_2 = \frac{q'_2}{4\pi R_2},$$

由于  $u_1 = u_2$ , 因而可得

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

题目得证.

**8.44** 范德格拉夫起电机的球壳直径为  $1.0\text{m}$ , 空气的击穿电场强度为  $30\text{kV/cm}$ , 求这起电机最多能达到多高的电势?

**解** 因为球壳表面电场强度  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , 其电势为

$$u = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} R = ER$$

所以电机能达到的最高电势为

$$u = E_{\text{击}} R = 30 \times 10^5 \times \frac{1}{2} = 1.5 \times 10^6 (\text{V})$$

**8.45** 两块平行的金属板相距为  $d$ , 用一电源充电, 两极板间的电势差为  $\Delta u$ . 将电源断开, 在两极间平行地插入一块厚度为  $l$  的金属板 ( $l < d$ , 且与极板不接触), 忽略边缘效应, 问两金属板间的电势差改变多少? 插入的金属板的位置对结果有无影响?

**解** 充电后, 插入金属板前, 若板上电荷面密为  $\sigma$ , 则

板间的电场强度为  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , 两板间的电势差为

$$\Delta u = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

断开电源, 插入金属板后, 两极板上的电荷分布不会发生变化, 而处于静电平衡状态的金属板面出现与极板上电量相同的感应电荷, 如图 8.45 所示. 金属板内  $E=0$ , 其余空间的电场强度仍为  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , 故两极板间的电势差

$$\Delta u' = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d-l)$$

电势差的改变  $\Delta u - \Delta u' = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d - \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d-l) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} l = \frac{l}{d} \Delta u$ .

可见金属板的位置对结果无影响.

**8.46** 两只电容分别为  $C_1 = 3 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 6 \mu\text{F}$  的电容器串联, 用电压  $U = 10 \text{V}$  的电源给它们充电, 然后把电源断开. 再把断开的导线两端连接起来, 问每只电容器极板上最后所带的电量是多少?

**解** 零.

**8.47** 两导体相距很远, 相对于无限远处的电势分别为  $u_1$  和  $u_2$ , 电容分别为  $C_1$  和  $C_2$ , 当用细线把它们连接起来时, 将有电荷的流动. 计算流动的电量及导体

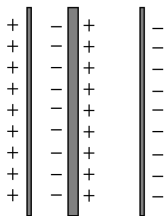


图 8.45

最后的电势.

**解** 两导体原来带电量为

$$Q_1 = C_1 u_1, \quad Q_2 = C_2 u_2$$

用导线连接后

$$u_1 = u_2$$

电容变为

$$C = C_1 + C_2$$

由电荷守恒定律有

$$Q = Q_1 + Q_2$$

因此,导体最后的电势为

$$u = \frac{Q}{C} = \frac{C_1 u_1 + C_2 u_2}{C_1 + C_2}$$

流动的电量为

$$Q_1 - Q'_1 = C_1 u_1 - C_1 u = \frac{C_1 C_2 (u_1 - u_2)}{C_1 + C_2}.$$

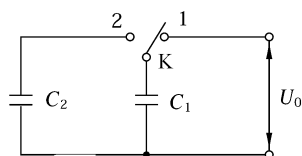


图 8.48

**8.48** 图中  $C_1 = 8 \mu\text{F}$ ,  $U_0 = 120 \text{ V}$ ,  $C_2 = 4 \mu\text{F}$ , K 为单刀双掷开关.把 K 接在 1 处,给  $C_1$  充电到 120 V,再把 K 接 2 处.计算电容器中能量的变化.

**解** 当 K 合至 1 处,使  $C_1$  充电,

$$q_1 = C_1 u_0 = 8 \times 10^{-6} \times 120 = 9.6 \times 10^{-4} (\text{C})$$

电容器中的能量

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 u_0^2 = \frac{1}{2} \times 8 \times 10^{-6} \times 120^2 = 5.76 \times 10^{-2} (\text{J})$$

当 K 合至 2 处, $C_1$  向  $C_2$  放电,电荷重新分布

$$q'_1 + q'_2 = q_1$$

由  $C_1$ 、 $C_2$  上电压相等知

$$q'_1 : q'_2 = C_1 : C_2 = 2 : 1$$

解得

$$q'_1 = 6.4 \times 10^{-4} \text{ C}, \quad q'_2 = 3.2 \times 10^{-4} \text{ C}, \quad u = \frac{q'_1}{C_1} = 80 \text{ V}$$

电容器中的能量

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{2} C_1 u^2 + \frac{1}{2} C_2 u^2 \\ &= 0.5 \times (8 + 4) \times 10^{-6} \times 80^2 \\ &= 3.84 \times 10^{-2} (\text{J}) \end{aligned}$$

能量变化为

$$\begin{aligned}\Delta W &= W_2 - W_1 = 3.84 \times 10^{-2} - 5.76 \times 10^{-2} \\ &= -1.92 \times 10^{-2} \text{ (J)}\end{aligned}$$

**8.49** 有一平行板空气电容器,极板的面积均为  $S$ ,极板间距为  $d$ ,把厚度为  $d'$  ( $d' < d$ ) 的金属平板平行于极板插入电容器内(不与极板接触)。

(1) 计算插入后电容器的电容;

(2) 给电容器充电到电势差为  $U_0$  后,断开电源,再把金属板从电容器中抽出,外界要作多少功?

**解** (1) 插入厚度为  $d'$  的金属板,相当于原来空气电容器间距减小为  $d - d'$ ,故

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d - d'}$$

$$(2) \text{ 充电后, } Q_0 = C_0 u_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d - d'} u_0,$$

$$W_0 = \frac{1}{2} C_0 u_0^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d - d'} u_0^2.$$

抽出金属板后,电容变为

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

因为电量不变,所以

$$u = \frac{Q_0}{C} = \frac{d}{d - d'} u_0, \quad W = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S d}{(d - d')^2} u_0^2$$

显然,  $W > W_0$ , 故抽出过程中外界需作功

$$A = W - W_0 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S d'}{(d - d')^2} u_0^2$$

**8.50** 空气中有一直径为 10 cm 的导体球,电势为 8 000 V,计算它表面处静电能密度。

**解** 导体球的电容  $C = 4\pi\epsilon_0 R$ , 故球上带电量为  $Q = Cu$ . 导体球表面的电场强度为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi R^2 \epsilon_0} = \frac{Cu}{C \cdot R} = \frac{u}{R}$$

导体球表面的电能密度

$$\begin{aligned}w &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{u}{R} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 8.85 \times 10^{-12} \times \frac{8000^2}{30 \times 10^{-2}}\end{aligned}$$

$$=0.113(\text{J/m}^3)$$

**8.51** 球形电容器的内外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 电势差为  $u$ , 计算电容器储藏的静电能.

解  $W = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} u^2 = 2\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} u^2$

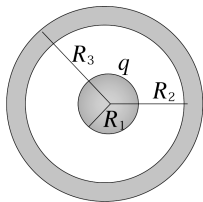


图 8.52

**8.52** 半径为 2.0 cm 的导体球外套一个与它同心的导体球壳, 球壳的内、外半径分别为 4.0 cm 和 5.0 cm, 当内球带电量为  $3.0 \times 10^{-3} \text{C}$  时, 计算它储藏的静电能? 如果用导线将它们连在一起, 它储藏的静电能又是多少?

解 由高斯定理可知系统的电场强度分布为

$$E = \begin{cases} 0 & (r < R_1) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} & (R_1 < r < R_2) \\ 0 & (R_2 < r < R_3) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} & (R_3 < r) \end{cases}$$

则在  $R_1 < r < R_2$  和  $r > R_3$  区间的电场能量密度

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}$$

在以  $r$  为半径、以  $dr$  为厚度的体积元中贮藏的能量为

$$dW = w dV = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 \cdot dr = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0 r^2} dr$$

电场贮藏的总能量为

$$\begin{aligned} W &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_3}^{\infty} \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \\ &= \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \left[ \frac{(R_2 - R_1)R_3 + R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3} \right] \\ &= 1.82 \times 10^6 \text{J} \end{aligned}$$

如果用导线将它们连在一起, 则电荷全部分布在球壳的外表面, 此时电场的能量为

$$W = \int_{R_3}^{\infty} \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \frac{1}{R_3} = 8.1 \times 10^5 \text{J}$$

**8.53**  $A$ 、 $B$ 、 $C$  为三块平行金属板,面积均为  $200 \text{ cm}^2$ .  $A$ 、 $B$  相距  $4.0 \text{ mm}$ ,  $A$ 、 $C$  相距  $2.0 \text{ mm}$ .  $B$ 、 $C$  板都接地,如图所示.设  $A$  板带电量  $q = 3.0 \times 10^{-7} \text{ C}$ ,不计边缘效应.

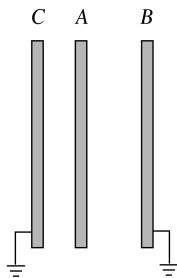


图 8.53

(1) 若平板间为空气 ( $\epsilon_r = 1.00$ ), 求  $B$  板和  $C$  板上的感应电荷, 以及  $A$  板的电势;

(2) 若在  $A$ 、 $B$  间充以另一  $\epsilon_r = 5$  的均匀电介质, 再求  $B$ 、 $C$  板上的感应电荷及  $A$  板的电势.

**解** 假设  $B$  板和  $C$  板上的感应电荷分别为  $-q_1$ ,  $-q_2$ , 则由金属板内的电场强度为零可知,  $A$  板左右两板面上的电荷分别为  $q_2$ ,  $q_1$ , 由电荷守恒定律可知

$$q_1 + q_2 = q \quad (1)$$

由  $A$  板是等势体可知

$$u_{AC} = u_{AB}$$

而

$$u_{AC} = E_{AC} d_{AC} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} d_{AC} = \frac{q_2}{\epsilon_0 s} d_{AC}$$

$$u_{AB} = E_{AB} d_{AB} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} d_{AB} = \frac{q_1}{\epsilon_0 s} d_{AB}$$

所以有

$$\begin{aligned} \frac{q_2}{\epsilon_0 s} d_{AC} &= \frac{q_1}{\epsilon_0 s} d_{AB} \\ q_2 d_{AC} &= q_1 d_{AB} \end{aligned} \quad (2)$$

由式(1)和式(2)可解得

$$q_1 = \frac{q d_{AC}}{d_{AC} + d_{AB}} = \frac{3.0 \times 10^{-7} \times 2}{2 + 4} = 1.0 \times 10^{-7} \text{ (C)}$$

$$q_2 = \frac{q d_{AB}}{d_{AC} + d_{AB}} = \frac{3.0 \times 10^{-7} \times 4}{2 + 4} = 2.0 \times 10^{-7} \text{ (C)}$$

所以  $B$  板和  $C$  板上的感应电荷为  $-1.0 \times 10^{-7} \text{ C}$  和  $-2.0 \times 10^{-7} \text{ C}$ .

故

$$u_A = u_{ab} = \frac{q_1}{\epsilon_0 s} d_{AB} = \frac{1.0 \times 10^{-7} \times 4 \times 10^{-3}}{8.85 \times 10^{-12} \times 200 \times 10^{-4}} = 2.3 \times 10^3 \text{ V}$$

(2) 解法同(1), 由电荷守恒定律和  $A$  板是等势体可知

$$q_1 + q_2 = q$$

$$\frac{q_1}{\epsilon_0 \epsilon_r s} d_{AB} = \frac{q_2}{\epsilon_0 s} d_{AC}$$

解之得

$$q_1 = \frac{qd_{AC}}{\frac{d_{AB}}{\epsilon_r} + d_{AC}} = \frac{3.0 \times 10^{-7} \times 2}{\frac{4}{5} + 2} = 2.1 \times 10^{-7} \text{ (C)}$$

$$q_2 = \frac{qd_{AB}}{d_{AB} + \epsilon_r d_{AC}} = \frac{3.0 \times 10^{-7} \times 4}{4 + 5 \times 2} = 8.6 \times 10^{-8} \text{ (C)}$$

所以  $B$  板和  $C$  板上的感应电荷为  $-2.1 \times 10^{-7} \text{ C}$  和  $-8.6 \times 10^{-8} \text{ C}$ 。

故

$$u_A = u_{AC} = \frac{q_2}{\epsilon_0 s} d_{AC} = \frac{8.6 \times 10^{-8} \times 2 \times 10^{-3}}{8.85 \times 10^{-12} \times 200 \times 10^{-4}} = 9.7 \times 10^2 \text{ (V)}$$

**8.54** 一半径为  $R_1$  的长直导线的外面,套有内半径为  $R_2$  的同轴薄圆筒,它们之间充以相对介电常数为  $\epsilon_r$  的均匀电介质.设导线和圆筒都均匀带电,且沿轴线单位长度带电量分别为  $+\lambda$  和  $-\lambda$ 。

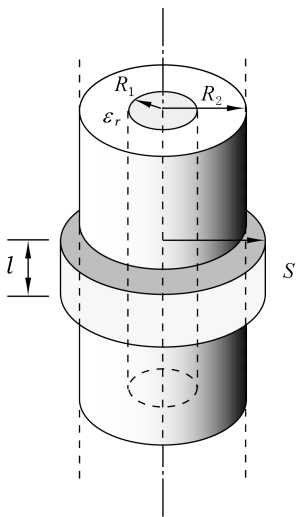


图 8.54

(1)试求导线内、导线和圆筒间、圆筒外三个空间区域中电场强度分布;

(2)求导线和圆筒间的电势差。

**解** (1)由电荷分布的柱对称性可知电场也是柱对称分布的.作与导线同轴的封闭圆柱面为高斯面,其上、下底面与轴线垂直.由介质中的高斯定理知

对  $r < R_1$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 2\pi r l = 0$$

$$D = 0$$

$$E = \frac{D}{\epsilon_0} = 0$$

$R_1 < r < R_2$ ,

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r}$$

$r > R_2$

$$D = 0$$

$$E = 0$$

$$(2) \quad \Delta u = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r} dr = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

**8.55** 导体球带电  $q=1.0\times 10^{-8}\text{C}$ , 半径为  $R=10.0\text{cm}$ , 球外有两种均匀电介质, 一种介质的相对介电常数  $\epsilon_{r1}=5.0$ , 紧贴球面成球壳状包围导体球, 厚度为  $d=10.0\text{cm}$ ; 另一种介质为空气  $\epsilon_{r2}=1.0$ , 充满整个空间.

(1) 求离球心  $O$  为  $r$  处的场强, 并算出  $r$  等于  $5.0\text{cm}$ 、 $15.0\text{cm}$  以及  $25.0\text{cm}$  处的电位移  $\boldsymbol{D}$  和场强  $\boldsymbol{E}$  的值.

(2) 求离球心  $O$  为  $r$  处的电势, 并算出  $r$  等于  $5.0\text{cm}$ 、 $15.0\text{cm}$ 、及  $25.0\text{cm}$  处的电势  $u$  的值.

**解** (1) 由电荷分布的球对称性可知电场也是球对称分布的, 电场强度  $\boldsymbol{E}$  和电位移矢量  $\boldsymbol{D}$  的方向是沿径向的. 作同心球面为高斯面, 由高斯定理很容易知道  $\boldsymbol{D}$  和  $\boldsymbol{E}$  的分布.

$$D = \begin{cases} 0, & r < 10\text{cm} \\ \frac{q}{4\pi r^2}, & 10\text{cm} < r < 20\text{cm} \\ \frac{q}{4\pi r^2}, & r > 20\text{cm} \end{cases}$$

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \begin{cases} 0, & r < 10\text{cm} \\ \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} r^2}, & 10\text{cm} < r < 20\text{cm} \\ \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} r^2}, & r > 20\text{cm} \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} r=5.0\text{cm}, \quad D_1=0, \quad E_1=0 \\ r=15.0\text{cm}, \quad D_2=\frac{q}{4\pi r^2}=\frac{1.0\times 10^{-8}}{4\pi\times (15\times 10^{-2})^2}=3.5\times 10^{-8}(\text{C}/\text{m}^2) \\ E_2=\frac{D_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}}=\frac{3.5\times 10^{-8}}{8.85\times 10^{-12}\times 5.0}=8.0\times 10^2(\text{N}/\text{C}) \\ r=25.0\text{cm}, \quad D_3=\frac{q}{4\pi r^2}=\frac{1.0\times 10^{-8}}{4\pi\times (25\times 10^{-2})^2}=1.3\times 10^{-8}(\text{C}/\text{m}) \\ E_3=\frac{D_3}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}=\frac{1.3\times 10^{-8}}{8.85\times 10^{-12}\times 1.0}=1.4\times 10^3(\text{N}/\text{C}) \end{aligned}$$

(2) 由电势的定义可知:

$$\begin{aligned} \text{当 } r \leq 10\text{cm} \text{ 时, } u &= \int_r^{0.1} 0 \mathrm{d}r + \int_{0.1}^{0.2} \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} r^2} \mathrm{d}r + \int_{0.2}^{\infty} \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} r^2} \mathrm{d}r \\ &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1}} \left( \frac{1}{0.1} - \frac{1}{0.2} \right) + \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2}} \frac{1}{0.2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1.0 \times 10^{-8}}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}} \left( \frac{1}{5} \times 5 + 1 \times 5 \right) \\
 &= 5.4 \times 10^2 \text{ (V)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10 \text{ cm} \leq r \leq 20 \text{ cm 时, } u &= \int_r^{0.2} \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r_1} r^2} dr + \int_{0.2}^{\infty} \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r_2} r^2} dr \\
 &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{1}{\epsilon_{r_1}} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{0.2} \right) + \frac{1}{\epsilon_{r_2}} \times \frac{1}{0.2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r \geq 20 \text{ cm 时, } u &= \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r_2} r^2} dr \\
 &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r_2} r}
 \end{aligned}$$

所以

$$r = 5.0 \text{ cm 时, } u_1 = 5.4 \times 10^2 \text{ V}$$

$$\begin{aligned}
 r = 15.0 \text{ cm 时, } u_2 &= \frac{1.0 \times 10^{-8}}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}} \times \left[ \frac{1}{5} \times \left( \frac{1}{0.15} - \frac{1}{0.2} \right) + \frac{1}{0.2} \right] \\
 &= 4.8 \times 10^2 \text{ (V)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r = 25.0 \text{ cm 时, } u_3 &= \frac{1.0 \times 10^{-8}}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 1.0 \times 0.25} \\
 &= 3.6 \times 10^2 \text{ (V)}
 \end{aligned}$$

**8.56** 在下列各图中,平行板电容器极板面积均为  $S$ ,相距为  $d$ ,充以均匀电介质,其相对介电常数为  $\epsilon_{r1}$ 、 $\epsilon_{r2}$ 、 $\epsilon_{r3}$ ,介质的位置如图所示,试分别求出各电容器的电容。

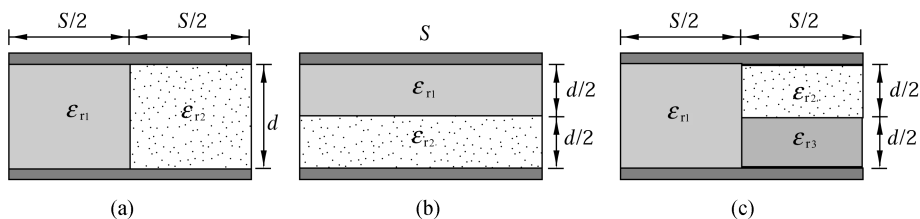


图 8.56

**解** (1)图 8.56(a)可看成是两个平行板电容器并联,如图 8.56(d)所示,则

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S/2}{d} \\
 C_2 &= \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} S/2}{d}
 \end{aligned}$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{2d} (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})$$

(2)图 8.56(b)可看成是两个平行板电容器串联,如图 8.56(e)所示,则

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S}{d/2}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} S}{d/2}$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$= \frac{2 \epsilon_0 S}{d} \frac{\epsilon_{r1} \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}$$

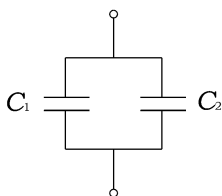


图 8.56(d)

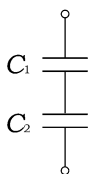


图 8.56(e)

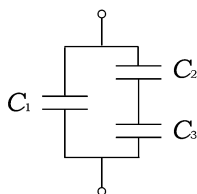


图 8.56(f)

(3)图 8.56(c)可看成右半部分两个平行板电容器串联起来,然后与左半部分平行板电容器并联起来,如图 8.56(f)所示,则

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S/2}{d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S}{2d}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} S/2}{d/2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} S}{d}$$

$$C_3 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r3} S/2}{d/2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r3} S}{d}$$

$$C = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$$

$$= \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S}{2d} + \frac{\epsilon_0 S}{d} \frac{\epsilon_{r2} \epsilon_{r3}}{\epsilon_{r2} + \epsilon_{r3}}$$

$$= \frac{\epsilon_0 S}{d} \frac{\epsilon_{r1}}{2} + \frac{\epsilon_{r2} \cdot \epsilon_{r3}}{\epsilon_{r2} + \epsilon_{r3}}$$

**8.57** 一平行板电容器的两极板上,带有等量异号电荷,板间充满  $\epsilon_r = 3.0$  的电介质,电介质中电场强度为  $1.0 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ ,不计边缘效应.试求:(1)电介质中电位移  $D$  的大小和方向;(2)极板电荷的面密度.

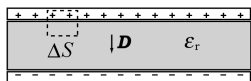


图 8.57

解 (1)因板间充满的是各向同性均匀介质,所以

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E = 3 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 1.0 \times 10^6 \\ = 2.7 \times 10^{-5} (\text{C/m}^2)$$

(2)设极板面电荷密度为  $\sigma$ ,在板间作一底面积为  $\Delta S$  的封闭柱面为高斯面,其轴线与板面垂直,两底面与极板面平行,而且上底面在极板内(如图 8.57 所示),由电介质中的高斯定理知:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot \Delta S = \sigma \cdot \Delta S$$

所以

$$\sigma = D = 2.7 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

**8.58** 如图 8.58(a)所示,一平行板电容器两极板相距为  $d$ ,面积为  $S$ ,其中平行于极板存放有一层厚度为  $t$  的均匀电介质,它的相对介电常数为  $\epsilon_r$ .设两极板间的电势差为  $u$ ,不计边缘效应.试求(1)电介质中电场强度和电位移的大小;(2)极板上的电荷  $Q$ ;(3)电容器的电容.

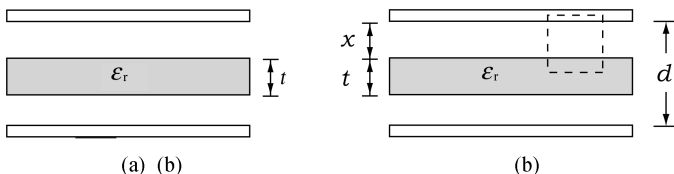


图 8.58

解 (1)设空气中的场强为  $E_0$ ,介质中的场强为  $E$ ,则

$$u = E_0 x + Et + E_0 (d - x - t) \\ = E_0 (d - t) + Et$$

由介质中的高斯定理可知,在两板间  $D$  处处相等.

$$E_0 = \frac{D}{\epsilon_0}, \quad E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

所以

$$u = \frac{D}{\epsilon_0} (d - t) + \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} t \\ = \frac{D}{\epsilon_0} \left( d - t + \frac{t}{\epsilon_r} \right)$$

$$D = \frac{u \epsilon_0}{d - t + \frac{t}{\epsilon_r}}$$

$$= \frac{u \epsilon_0 \epsilon_r}{\epsilon_r d + (1 - \epsilon_r) t}$$

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{u}{\epsilon_r d + (1 - \epsilon_r) t}$$

(2)如图 8.58(b)所示,作一柱形高斯面,由介质中的高斯定理可得

$$\sigma_0 = D$$

所以

$$Q = \sigma_0 S = DS = \frac{u \epsilon_0 \epsilon_r S}{\epsilon_r d + (1 - \epsilon_r) t}$$

$$(3) \quad C = \frac{Q}{u} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{\epsilon_r d + (1 - \epsilon_r) t}$$

**8.59** 在上题中,设未插入电介质时,极板间的电势差为  $U_0$ ,然后将电介质插入.试求插入电介质后(1)极板上的电荷  $Q$ ;(2)电介质中的电位移  $D$  和场强的大小;(3)电容器的电容.

**解** (1)极板上所带电量为

$$Q = u_0 c_0 = \frac{u_0 \epsilon_0 S}{d}$$

(2)用电介质中的高斯定理求得

$$D = \sigma_0 = Q/S = u_0 \epsilon_0 / d$$

介质中的  $D$  与空气中的  $D$  相等.故介质中的场强为

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{u_0}{\epsilon_r d}$$

(3)空气中的场强为

$$E_0 = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{u_0}{d}$$

所以

$$u = E_0(d - t) + Et = \frac{u_0}{d}(d - t) + \frac{u_0}{\epsilon_r d}t$$

$$= \frac{u_0}{\epsilon_r d}[\epsilon_r d + (1 - \epsilon_r)t]$$

所以

$$C = \frac{Q}{u} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{\epsilon_r d + (1 - \epsilon_r)t}$$

**8.60** 如图 8.60 所示,两层均匀电介质充满圆柱形电容器,其相对介电常数分别为  $\epsilon_{r1}$  和  $\epsilon_{r2}$ ,设沿轴线单位长度上内、外圆筒带电为  $+\lambda$  和  $-\lambda$  的,求:(1)两介质中的  $D$  和  $E$ ;(2)内外筒间的电势差;(3)此电容器单位长度的电容.

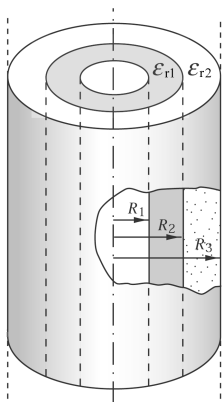


图 8.60

解 (1)作一封闭同轴圆柱面为高斯面,其上、下底面垂直于轴,则利用高斯定理得:介质 1 中

$$D_1 = \frac{\lambda}{2\pi r}, \quad E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$D_1$  和  $E_1$  均沿  $r$  向外.同理,介质 2 中

$$D_2 = \frac{\lambda}{2\pi r}, \quad E_2 = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} r} \quad (R_2 < r < R_3)$$

$D_2$  与  $E_2$  均沿  $r$  向外.

$$(2) \text{电势差} \quad u_1 - u_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} r} dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} r} dr$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \ln \frac{R_3}{R_2} \right)$$

(3)单位长度上的电容

$$C = \frac{\lambda}{u_1 - u_2} = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \epsilon_{r1} \ln \frac{R_3}{R_2}}$$

## 第9章 稳恒电流的磁场

### 一、基本内容和主要公式

#### 1. 磁感应强度 $B$

定义  $B$  的大小:  $B = \frac{dF_{\max}}{Idl}$ , 其中  $dF_{\max}$  为电流元  $Idl$  在该点受到的最大磁场力.  $B$  的方向为电流元  $Idl$  在该点受到的磁场力为零时电流元所指的方向, 且指向满足安培力公式  $dF = Idl \times B$ .

磁感应强度  $B$  是用来描述磁场的基本物理量.

#### 2. 毕奥-萨伐尔定律

##### (1) 毕奥-萨伐尔定律

$$\text{微分形式: } dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times r}{r^3}$$

$$\text{积分形式: } B = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times r}{r^3}$$

式中,  $Idl$  是在电流上任取的电流元,  $r$  是由  $Idl$  指向研究场点的位矢,  $r$  为  $r$  的大小.

毕奥-萨伐尔定律是电流激发磁场的基本规律, 由它很容易得到运动电荷的磁场.

$$(2) \text{运动电荷的磁场} \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \times r}{r^3}$$

式中,  $r$  是从电荷  $q$  指向研究场点的位矢,  $v$  是电荷的运动速度,  $q$  是电荷的电量.

#### 3. 磁通量和高斯定理

$$(1) \text{磁通量: } \Phi_m = \iint_S B \cdot dS$$

$$(2) \text{高斯定理: } \oiint_S B \cdot dS = 0$$

此定理表明, 磁场线是无头无尾的闭合曲线, 即磁场是无源场.

#### 4. 安培环路定理

$$\oint_L B \cdot dl = \mu_0 \sum_i I_{i(\text{内})}$$

式中  $\sum_i I_{i(\text{内})}$  是环路  $L$  包围的所有电流的代数和, 当  $I_i$  与  $L$  绕行方向满足右螺旋法则时,  $I_i > 0$ , 反之,  $I_i < 0$ . 此式表明, 稳恒磁场是有旋场.

## 5. 磁场对载流导线和运动电荷的作用

(1) 磁场对载流导线的作用力——安培力

微分形式:  $d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$

积分形式:  $\mathbf{F} = \int_L I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$

其中,  $I d\mathbf{l}$  是载流导线上的电流元,  $\mathbf{B}$  是  $I d\mathbf{l}$  所在处的磁感应强度.

(2) 均匀磁场对平面载流线圈的作用

合力:  $\sum \mathbf{F} = 0$

磁力矩:  $\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}$

式中,  $\mathbf{p}_m$  是载流线圈的磁矩,  $\mathbf{p}_m = NIS$ , 其中,  $N$  是线圈匝数,  $I$  是线圈中的电流,  $S$  是线圈的面积, 且  $S$  的方向与电流环绕方向满足右螺旋法则.

(3) 磁力的功

$$A = \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} I d\Phi_m = I(\Phi_{m2} - \Phi_{m1}) = I\Delta\Phi_m$$

此式表明, 当回路中电流不变时, 磁力的功等于电流乘以通过回路所包围面积内的磁通量的增量.

(4) 磁场对运动电荷的作用

洛伦兹力:  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

式中,  $q$  为带电粒子的电荷量, 是代数量;  $v$  为带电粒子的运动速度.

(5) 霍尔效应

在磁场中的载流导体上出现横向电势差的现象称为霍尔效应. 它是磁场对运动电荷作用的直接体现.

理论上可以推知, 横向电势差  $u = k \frac{IB}{d} = \frac{IB}{nqd}$

式中  $k$  为霍尔系数,  $d$  为磁场方向上导体的厚度,  $I, B$  分别为导体中的电流和导体所在处的磁感应强度,  $n$  为载流子浓度,  $q$  为单个载流子的电荷量.

## 6. 磁介质

(1) 磁介质的分类

抗磁质 ( $\mu_r < 1$ ), 顺磁质 ( $\mu_r > 1$ ), 铁磁质 ( $\mu_r \gg 1$ )

(2) 磁介质的磁化

在外磁场中固有磁矩沿外磁场的取向或感应磁矩的产生使磁介质的表面(或内部)出现束缚电流.

(3) 磁介质中的安培环路定理:  $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_{0(\text{内})}$

式中  $\sum I_{0(\text{内})}$  (内) 为闭合路径  $L$  所包围的传导电流的代数和,  $\mathbf{H}$  为磁场强度矢量.

在各向同性磁介质中,  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$

(4) 铁磁质的  $\mu_r$  随磁场改变, 有磁滞现象.

## 二、典型例题

**9-1** 如图 9-1(a) 所示, 一无限长半径为  $R$  的  $\frac{1}{3}$  圆筒形金属薄片, 自下而上均匀地通有电流  $I$ , 试求其轴线上一点  $P$  处的磁感应强度  $\mathbf{B}$ .

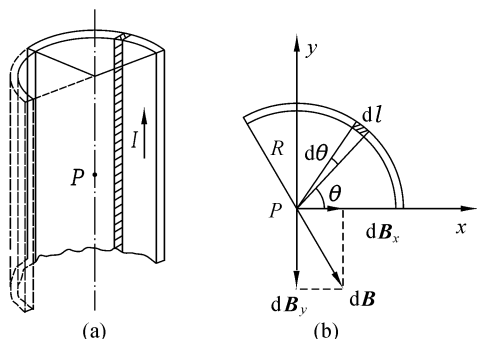


图 9-1

**解** 该载流金属薄片可以看作是由许多沿轴线方向长直载流直导线组成. 整个薄片在  $P$  点产生的磁感应强度, 就是这许多长直载流导线在  $P$  点产生的磁感应强度的矢量叠加.

过轴线上一点  $P$  作垂直于轴线的截面, 在此截面上建立如图 9-1(b) 所示的  $xPy$  坐标系, 其中,  $P$  为原点. 在无限长金属圆筒片上, 截取宽度为  $dl$  的元段, 将其视为无限长直导线, 其中通过的元电流为  $dI$ , 则

$$dI = \frac{3I}{2\pi R} dl$$

则横截面为  $dl$  的无条长载流直导线, 在  $P$  点产生的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{3\mu_0 I}{4\pi^2 R^2} dl = \frac{3\mu_0 I}{4\pi^2 R} d\theta$$

方向如图 9-1(b) 所示 (按右手螺旋关系确定).

$P$  点的总磁感应强度  $\mathbf{B}$ , 即为各无限长载流直导线分别在  $P$  点所产生的  $d\mathbf{B}$  的矢量和. 由于各  $d\mathbf{B}$  方向均不相同, 所以通常在选定的坐标系中把  $d\mathbf{B}$  分解成两个分量  $dB_x$  和  $dB_y$ . 先对各分量进行计算. 再叠加求出总的磁感应强度.

从图 9-1(b) 可知

$$dB_x = dB \sin \theta = \frac{3\mu_0 I}{4\pi^2 R} \sin \theta d\theta$$

$$dB_y = -dB \cos \theta = -\frac{3\mu_0 I}{4\pi^2 R} \cos \theta d\theta$$

所以

$$B_x = \int dB_x = \frac{3\mu_0 I}{4\pi^2 R} \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin \theta d\theta = \frac{9\mu_0 I}{8\pi^2 R}$$

$$B_y = \int dB_y = \frac{-3\mu_0 I}{4\pi^2 R} \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \cos \theta d\theta = -\frac{3\sqrt{3}\mu_0 I}{8\pi^2 R}$$

$P$  点磁感应强度的大小为

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{3\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi^2 R}$$

方向为(与  $x$  轴夹角)

$$\tan \alpha = \frac{B_y}{B_x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \alpha = -\frac{\pi}{6}$$

**说明** 此题属于利用磁感应强度叠加原理求  $B$  的题型.应用毕奥—萨伐尔定律和磁感应强度叠加原理原则上可以求出载流导线在空间任意一点所产生的磁场.方法是:先在导线上任选电流元  $Idl$ ,再写出此电流元在研究场点处所产生的磁感应强度  $dB$ ,最后对整个电流积分,即  $Idl \rightarrow dB \rightarrow B = \int dB$ .如果电流分布于形状规则的导体内,这些导体可以看成无数细长导线(或圆电流)组成,直接利用载流直导线(或圆电流)的公式予以积分,即可求出其磁感应强度.此题就属于这一情况.

**9-2** 在电流强度为  $I_0$  的长直导线产生的磁场中,有一等腰直角三角形线圈,线圈平面与长直导线在同一平面内,线圈通过的电流强度为  $I$ ,如图 9-2(a)所示,求各边受到的磁场力及整个线圈受到的合力.

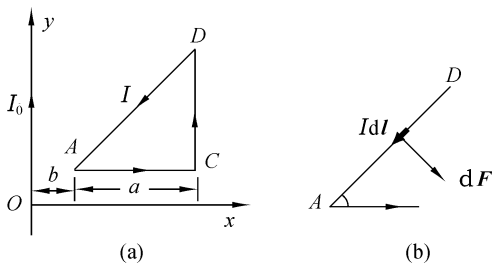


图 9-2

**解** 三角形线圈处于长直导线产生的非均匀磁场中,根据安培力公式可分别求出每边受到的磁场力,进而求出线圈所受的合力.

建立如图 9-2 (a)所示的坐标系.长直导线电流  $I_0$  产生的磁场为:  $B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x}$ , 方向垂直纸面向里,因为线圈上任意电流元  $I dl$  的方向都与该处  $B$  垂直,所以各边所受磁场力计算如下.

对于  $CD$  边,将其分割为无限个电流元  $I dl$ ,由于每个电流元所在处磁感应强度大小相等,方向一致.由安培力公式可知  $F$  的大小为

$$F_{CD} = BIl = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi(a+b)} Ia = \frac{\mu_0 I_0 Ia}{2\pi(a+b)}$$

方向沿  $x$  轴负方向.

对于  $AC$  边,每个电流元受到的安培力方向相同,但每个电流元所在处的磁感应强度大小不同,所以

$$\begin{aligned} F_{AC} &= \int_b^{a+b} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x} I dx = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi} \int_b^{a+b} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b} \end{aligned}$$

方向沿  $y$  轴正向.

对于  $DA$  边,每个电流元受安培力方向相同,如图 9-2(b)所示,因而

$$dF = I dl B$$

$$F_{DA} = \int \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x} I dl$$

统一积分变量,由几何关系可知

$$-dx = dl \cos \frac{\pi}{4}$$

代入  $F_{DA}$  公式可得

$$\begin{aligned} F_{DA} &= \int_{a+b}^b \frac{\mu_0 I_0 I (-dx)}{2\pi x \cos \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi \frac{\sqrt{2}}{2}} \int_b^{a+b} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{\sqrt{2} \mu_0 I_0 I}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b} \end{aligned}$$

把  $F_{DA}$  投影到坐标轴上,

$$F_{DAx} = F_{DA} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b}, \text{方向沿 } x \text{ 轴正向.}$$

$$F_{DAy} = F_{DA} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b}, \text{方向沿 } y \text{ 轴负向.}$$

线圈受到的合力为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} \\ &= \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi} \left( \ln \frac{a+b}{b} - \frac{a}{a+b} \right) \mathbf{i} \end{aligned}$$

**说明** 本题是应用安培力公式求通电导线在非均匀磁场中受力的问题,基本解题思路为:先确定电流元受到的作用力  $d\mathbf{F}$ ,再对整个通电导线积分,即  $\mathbf{F} = \int d\mathbf{F}$ .在具体处理过程中,一般将  $d\mathbf{F}$  投影到直角坐标系的各个轴上,把矢量积分变成标量积分,最后求出合力的大小和方向.

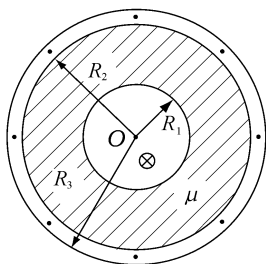


图 9-3

**9-3** 一长直同轴电缆,其横截面尺寸如图所示,中间充满磁导率为  $\mu$  的各向同性非铁磁质,传导电流从内芯流入,又从外导体流出,试求磁场强度  $\mathbf{H}$  和磁感应强度  $\mathbf{B}$  的分布.

**解** 由电流和磁介质的轴对称分布可知,磁场分布具有轴对称性,可利用安培环路定理求解.

在横截面内取半径为  $r$ 、圆心在电缆轴线上的圆形积分回路  $L$ ,  $L$  的绕向与内芯传导电流的方向满足右手螺旋法则.

(1)当  $r < R_1$  时,积分回路  $L$  只包含导线中传导电流的一部分.由磁介质中安培环路定理得

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H = \frac{I}{\pi R_1^2} \pi r^2 = \frac{I r^2}{R_1^2}$$

所以

$$H = \frac{I r}{2\pi R_1^2}$$

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

$\mathbf{B}$  的方向与  $L$  绕向相同.

(2)当  $R_1 < r < R_2$  时,穿过回路  $L$  的电流为通过内芯的电流,因此

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H = I$$

所以

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

$B$  的方向与  $L$  绕向相同.

(3) 当  $R_2 < r < R_3$  时, 穿过回路  $L$  的电流为内芯上的电流和外导体中电流的一部分, 但二者流向相反. 故有

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi rH = I - \frac{\pi(r^2 - R_2^2)}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} I$$

所以

$$H = \frac{I}{2\pi r} \left( \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)$$

$$B = \frac{\mu_0 I (R_3^2 - r^2)}{2\pi r (R_3^2 - R_2^2)}$$

$B$  的方向与  $L$  绕向相同.

(4) 当  $R_3 < r$  时, 穿过回路  $L$  的传导电流为零, 于是有

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi rH = 0$$

由此得

$$H = 0$$

$$B = 0$$

**说明** 从上面的计算可以看出, 对电流分布对称且有磁介质存在的情况下, 应用磁介质中的安培环路定理可以很方便地得到磁场强度  $H$  的分布, 进而可以求出  $B$  的分布. 与安培环路定理相比较, 避免了求束缚电流的分布.

### 三、习题详解

#### 9.1 选择题

(1) 有两条长直导线各载有 5 A 的电流, 分别沿  $x, y$  轴正向流动. 在 (40, 20, 0) (cm) 处的  $B$  是 (B).

(A)  $3.5 \times 10^{-6}$  T 沿  $z$  负向.

(B)  $2.5 \times 10^{-6}$  T 沿  $z$  正向.

(C)  $4.5 \times 10^{-6}$  T 沿  $z$  负向.

(D)  $5.5 \times 10^{-6}$  T 沿  $z$  正向.

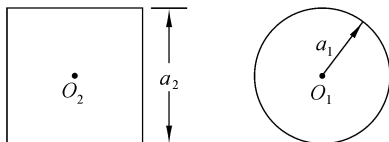


图 9.1(2)

(2) 半径为  $a_1$  的载流圆形线圈与边长为  $a_2$  的方形载流线圈, 通有相同的电

流,若两线圈中心  $O_1$  和  $O_2$  的磁感应强度大小相同,则半径与边长之比  $a_1 : a_2$  为 (D) .

(A)  $1:1$

(B)  $\sqrt{2}\pi:1$

(C)  $\sqrt{2}\pi:4$

(D)  $\sqrt{2}\pi:8$

(3) 无限长空心圆柱导体的内外半径分别为  $a$  和  $b$ , 电流在导体截面上均匀分布, 则在空间各处  $B$  的大小与场点到圆柱中心轴线的距离  $r$  的关系, 定性分析如图 9.1(3) 所示 (D) .

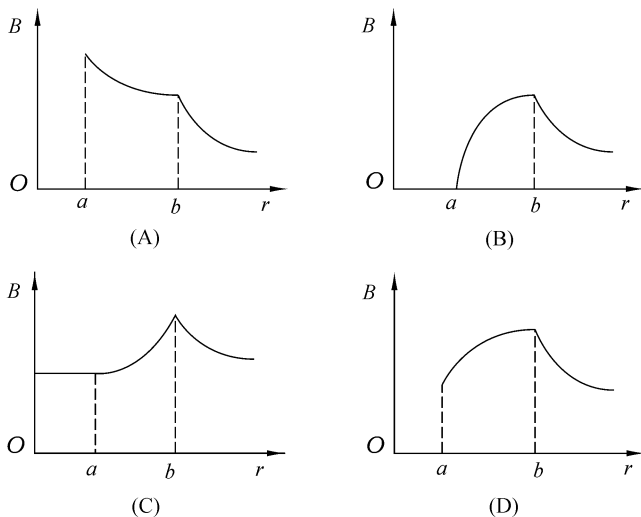


图 9.1(3)

(4) 氢原子处在基态 (正常状态) 时, 它的电子可看作是沿半径为  $a = 0.53 \times 10^{-8} \text{ cm}$  的轨道作匀速圆周运动, 速率为  $2.2 \times 10^8 \text{ cm/s}$ , 那么在轨道中心  $B$  的大小为 (B) .

(A)  $8.5 \times 10^{-6} \text{ T}$

(B)  $12.5 \text{ T}$

(C)  $8.5 \times 10^{-4} \text{ T}$

(5) 回旋加速器的结构是由两个半圆形空心金属容器作为电极 (通常称为 D 形电极) 固定在巨大功率电磁铁两极之间, 如图 9.1(3) 所示. 设有一电荷量为  $q$ 、质量为  $m$  的带电粒子, 以速率  $v$  在垂直于磁感应强度为  $B$  的匀强磁场中运动,  $B$  的方向垂直纸面向外, 粒子作圆周运动的半径为  $r$ , 单位时间内圆周运动的圈数即频率  $f$  (也是 D 形电极电势差的交换频率) 为 (B) .

(A)  $\frac{Bv}{2\pi m}$

(B)  $\frac{qB}{2\pi m}$

(C)  $\frac{qBv}{2\pi^2 m}$

(6) 无限长载流直导线与一个无限长薄电流板构成闭合回路, 电流板宽为  $a$ , 导线与板在同一平面内, 则导线与电流板间单位长度上的作用力大小为 (C) .

(A)  $\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a} \ln 2$

(B)  $\frac{\mu_0 I^2}{2\pi a^2} \ln 2$

(C)  $\frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \ln 2$

(D)  $\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^2} \ln 2$

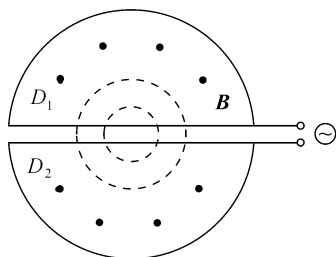


图 9.1(5)

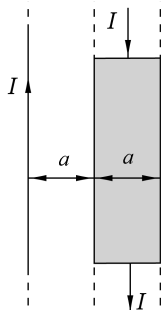


图 9.1(6)

(7) 有一磁铁棒,其矫顽力为  $4 \times 10^3 \text{ A/m}$ ,把它插入长 12 cm 绕有 60 匝的螺线管中,使它去磁,此螺线管应通过的电流为(C)。

(A) 6 A

(B) 3 A

(C) 8 A

(D) 4 A

(8) 如图所示,一细螺绕环,它由表面绝缘的导线在铁环上密绕而成,每厘米绕 10 匝,当导线中的电流  $I$  为 2.0 A 时,测得铁环内的磁感应强度的大小为 1.0 T.则可求得铁环的相对磁导率为(B)。

(A)  $7.96 \times 10^2$

(B)  $3.98 \times 10^2$

(C)  $1.99 \times 10^2$

(D)  $63.3 \times 10^2$

(真空磁导率  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$ )

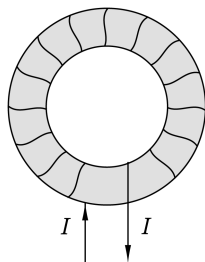


图 9.1(8)

## 9.2 填空题

(1) 在同一平面内有两条互相垂直的导线  $L_1$  和  $L_2$ ,  $L_1$  为无限长直导线,  $L_2$  为长  $2a$  的直导线,二者相对位置如图所示.若  $L_1$  和  $L_2$  同时通以电流  $I$ ,那么作用在  $L_2$  上对于  $O$  点的磁力矩为  $\frac{\mu_0 I^2 a}{\pi} (2\ln 3 - 1)$ 。

(2) 矩形截面的螺绕环尺寸如图 9.2(2)所示,绕有  $N$  匝线圈,则在截面中  $r$  处的磁感应强度为  $\mu_0 NI / 2\pi r$ ;通过截面(用阴影画出的部分)的磁通量为  $\frac{\mu_0 NI h}{2\pi}$

$$\cdot \ln \frac{D_1}{D_2}.$$

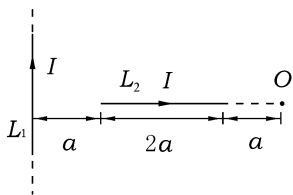


图 9.2(1)

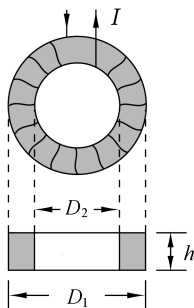


图 9.2(2)

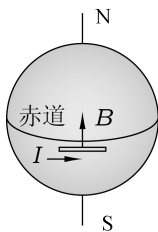


图 9.2(3)

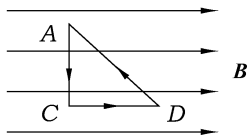


图 9.2(4)

(3) 每单位长度的质量为  $0.009 \text{ kg/m}$  的导线, 取东西走向放置在赤道的正上方, 如图 9.2(3) 所示. 在导线所在的地点的地磁水平朝北, 大小为  $3 \times 10^{-5} \text{ T}$ , 试问要使磁力正好支承导线的重量, 导线中的电流应为  $2.940 \text{ A}$ .

(4) 一等腰直角三角形  $ACD$ , 直角边长为  $a$ , 线圈维持恒定电流  $I$ , 放在磁感应强度为  $B$  的匀强磁场中, 线圈平面与磁场方向平行, 如图所示. 如果  $AC$  边固定,  $D$  点绕  $AC$  边向纸面外旋转  $\pi/2$ , 则磁力所作的功为  $-IBa^2/2$ ; 如果  $CD$  边固定,  $A$  点绕  $CD$  边向纸面外旋转  $\pi/2$ , 则磁力所作的功为  $0$ ; 如果  $AD$  边固定,  $C$  点绕  $AD$  边向纸面外旋转  $\pi/2$ , 则磁力所作的功为  $\frac{\sqrt{2}}{4} IBa^2$ .

(5) 一线圈半径为  $R$ , 载有电流  $I$ , 放在均匀的外磁场  $B$  中, 如图 9.2(5) 所示, 此线圈中的张力为  $IBR$ .

(6)图 9.2(6)所示的是一块半导体样品,其体积是  $a \times b \times c$ .沿  $X$  方向通有电流  $I$ ,在  $Z$  方向有匀强磁场  $B$ .实验所得的数据是: $a=0.10\text{ cm}$ , $b=0.35\text{ cm}$ , $c=1.0\text{ cm}$ , $I=1.0\text{ mA}$ , $B=0.3\text{ T}$ ,两侧电压  $U_{AA'}=6.55\text{ mV}$ .该半导体样品的载流子浓度是  $2.86 \times 10^{14}/\text{cm}^3$ ,该半导体是正电荷导电(p)型还是负电荷导电(n)型.

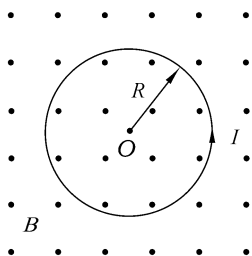


图 9.2(5)

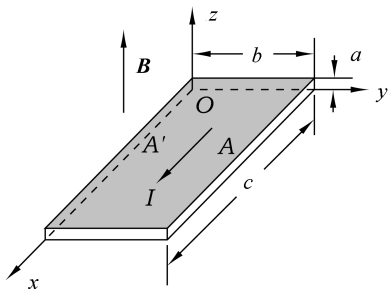


图 9.2(6)

(7)如图 9.2(7)所示,一个载流线圈绕组中通有电流  $I=3\text{ A}$ ,分别写出:

$$\oint_{L_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \underline{-6\text{ A}};$$

$$\oint_{L_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \underline{12\text{ A}};$$

$$\oint_{L_3} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \underline{15\text{ A}};$$

$$\oint_{L_4} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \underline{-3\text{ A}}.$$

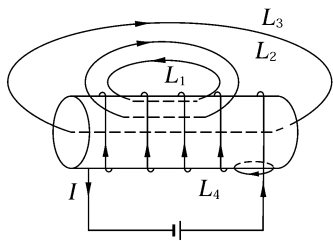


图 9.2(7)

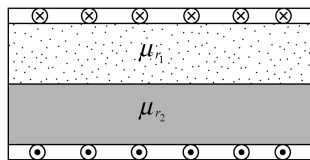


图 9.2(8)

(8)在两块无限大的导体平板上均匀地通有电流,每块导体板单位宽度的电流均为  $I$ ,两块板上的电流互相平行,方向相反.两块导体板之间插有两块相对磁导率为  $\mu_{r1}$  及  $\mu_{r2}$  的顺磁介质,如图所示.则两板之间的  $H_1 = \underline{\quad} I$ ;  $H_2 = \underline{\quad} I$ ;  $B_1 = \underline{\mu_0 \mu_{r1} I}$ ;  $B_2 = \underline{\mu_0 \mu_{r2} I}$ .

**9.3** 如图 9.3 所示,载流正方形线圈边长为  $2a$ ,电流为  $I$ ,试求此线圈轴线上距中心为  $x$  处的磁感应强度.

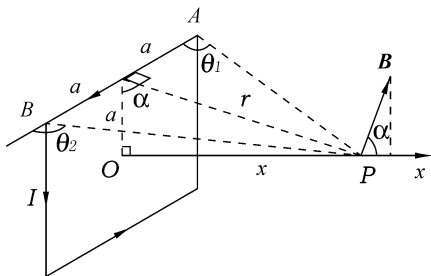


图 9.3

**解**  $P$  点的磁感应强度是由正方形线圈的四根导线在  $P$  点产生的磁感应强度叠加而成. 由对称性可知, 每根导线在  $P$  点产生的  $\mathbf{B}$  的大小相等, 而总的磁感应强度的方向沿  $x$  轴方向, 所以只须求出一根载流导线在  $P$  点产生的  $\mathbf{B}$  的  $x$  分量, 即可很容易得到总的  $\mathbf{B}$ .

导线  $AB$  在  $P$  点的磁感应强度  $\mathbf{B}_1$  的大小为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

式中  $r = \sqrt{x^2 + a^2}$ ,  $\cos \theta_1 = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + 2a^2}}$ ,  $\theta_2 = 180^\circ - \theta_1$

所以

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} 2\cos \theta_1 = \frac{\mu_0 I a}{2\pi \sqrt{x^2 + a^2} \sqrt{x^2 + 2a^2}}$$

$\mathbf{B}_1$  在  $x$  方向上的分量为

$$B_{1x} = B_1 \cos \alpha = B_1 \cdot \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi (x^2 + a^2) \sqrt{x^2 + 2a^2}}$$

整个正方形线圈在  $P$  点的磁场沿  $x$  方向, 磁感应强度大小为

$$B = B_x = 4B_{1x} = \frac{2\mu_0 I a^2}{\pi (x^2 + a^2) \sqrt{x^2 + 2a^2}}$$

方向沿  $x$  轴正向.

**9.4** 将一无限长直导线弯成如图 9.4(a) 所示的形状, 其上载有电流  $I$ , 试计算圆心  $O$  点处  $\mathbf{B}$  的大小.

**解** 如图 9.4(b) 所示, 圆心  $O$  点处的  $\mathbf{B}$  是由长直导线  $AB$ 、 $DE$  和  $\frac{1}{3}$  圆弧导线  $BCD$  三部分电流产生的磁场叠加而成, 因此可用叠加原理求解.

$BCD$  在  $O$  点产生的磁感应强度  $\mathbf{B}_1$  的大小为

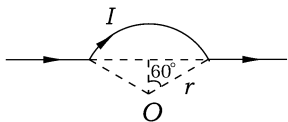


图 9.4(a)

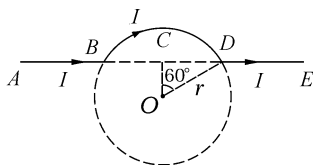


图 9.4(b)

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Idl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Ird\theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{6r}$$

方向垂直纸面向里. 载流长直导线  $AB$  在  $O$  点产生磁感应强度  $B_2$  的大小为

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

其中  
故

$$\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = \frac{5\pi}{6}, a = r \cos 60^\circ = \frac{r}{2}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

方向垂直纸面向里.

载流直导线  $DE$  在  $O$  点产生的磁感应强度  $B_3$  的大小为

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta'_1 - \cos \theta'_2)$$

$$\theta'_1 = \frac{5\pi}{6}, \theta'_2 = \pi, a = r \cos 60^\circ = \frac{r}{2}$$

故

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

方向垂直纸面向里.

$O$  点的合磁感应强度的大小为

$$\begin{aligned} B &= B_1 + B_2 + B_3 \\ &= \frac{\mu_0 I}{6r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0.21 \frac{\mu_0 I}{r} \end{aligned}$$

方向垂直纸面向里.

**9.5** 半径为  $R$  的圆片上均匀带电, 面密度为  $\sigma_0$ , 若该片以角速度  $\omega$  绕它的轴旋转, 如图 9.5 所示. 试求轴线上距圆片中心为  $x$  处的磁感应强度  $B$  的大小.

**解** 在圆盘上取一半径为  $r$ 、宽度为  $dr$  的细环, 所带电量为  $dq = \sigma_0 2\pi r dr$ , 细

环转动相当于一圆电流,其电流大小为

$$dI = \sigma_0 2\pi r dr \frac{\omega}{2\pi} = \sigma_0 \omega r dr$$

它在轴线上距盘心为  $x$  处所产生的磁感应强度大小为

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0 r^2 dI}{2(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 r^2}{2(r^2 + x^2)^{3/2}} \sigma_0 \omega r dr \\ &= \frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2} \frac{r^3 dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

图 9.5

总磁感应强度大小为

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2} \int_0^R \frac{r^3}{(r^2 + x^2)^{3/2}} dr \\ &= \frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2} \left[ \frac{R^2 + 2x^2}{\sqrt{R^2 + x^2}} - 2x \right] \end{aligned}$$

**9.6** 在半径为  $R$  的木球上,绕有细导线  $N$  匝,若导线中通有电流  $I$ ,试求在球心处的磁感应强度.(设所绕线圈是彼此平行且紧密相靠的以单层盖住半个球面.)

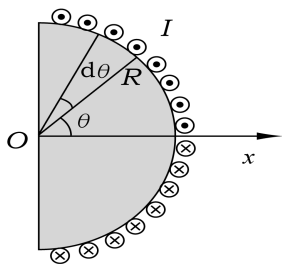


图 9.6(a)

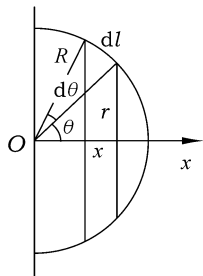


图 9.6(b)

**解** 平行导线绕在球面上,取弧长  $dl$  所对应的一个圆环,如图 9.6(b)所示,把此环看成一圆线圈,通过它的电流为

$$dI = \frac{N}{\pi R} Idl = \frac{2N}{\pi R} IR d\theta = \frac{2N}{\pi} Id\theta$$

它在球心产生的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{r^2 dI}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

图中  $r = R \sin \theta$ ,  $x = R \cos \theta$ , 所以

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0}{2} \frac{r^2 dI}{(R^2 \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{2} \frac{r^2}{R^3} \frac{2N}{\pi} Id\theta = \frac{\mu_0 NI}{\pi R} \sin^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

那么所有线圈在球心处产生的磁感应强度为

$$B = \int dB = \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0 NI}{\pi R} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\mu_0 NI}{4R}$$

其方向沿  $x$  轴正向.

**9.7** 有一长为  $b$ 、线密度为  $\lambda$  的带电线段  $AB$ , 可绕一端距离为  $a$  的  $O$  点旋转, 如图所示. 设旋转角速度为  $\omega$ , 转动过程中线段  $A$  端距轴  $O$  的距离  $a$  保持不变, 试求带电线段在  $O$  点产生的磁感应强度和磁矩.

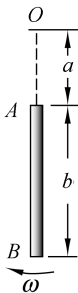


图 9.7(a)

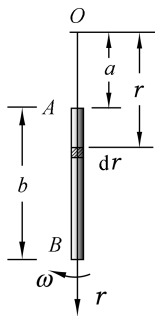


图 9.7(b)

**解** 由于带电线段  $AB$  不同位置绕  $O$  点转动的线速度不同, 在  $AB$  上任取一线元  $dr$ , 它距  $O$  点的距离为  $r$ , 如图 9.7(b) 所示, 其上带电量为  $dq = \lambda dr$ , 当  $AB$  以角速度  $\omega$  旋转时,  $dq$  形成环形电流, 其电流强度为

$$dI = \frac{\omega dq}{2\pi} = \frac{\lambda \omega}{2\pi} dr$$

根据圆电流在圆心  $O$  的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r}$$

则有

$$dB = \frac{\lambda \omega \mu_0}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

带电线段  $AB$  旋转时在  $O$  点的总磁感应强度为

$$B_0 = \int dB = \frac{\lambda \omega \mu_0}{4\pi} \int_a^{a+b} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda \mu_0 \omega}{4\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

方向垂直纸面向里(当  $\lambda > 0$  时).

旋转带电线元  $dr$  的磁矩为

$$dp_m = \pi r^2 dI = \frac{\lambda \omega}{2} r^2 dr$$

转动带电线段  $AB$  的总磁矩

$$p_m = \int dp_m = \int_a^{a+b} \frac{\lambda \omega}{2} r^2 dr = \frac{\lambda \omega}{6} [(a+b)^3 - a^3]$$

方向垂直纸面向里.

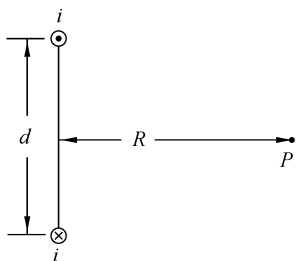


图 9.8(a)

**9.8** 有两根平行长直导线,相距为  $d$ , 载有大小相等而方向相反的电流  $i$ ,如图 9.8 (a)所示.设有一点  $P$ ,与这两根导线的距离相等,试证  $P$  点处的  $B$  由下式给出,即

$$B = \frac{2\mu_0 id}{\pi(4R^2 + d^2)}$$

**证明**  $P$  点处的  $B$  由两根平行长直导线在  $P$  点产生的磁感应强度  $B_1$ 、 $B_2$  矢量叠加而成.如图 9.8(b)所示,由对称性可知,  $B$  沿  $Ox$

方向,  $B_1$ 、 $B_2$  的大小相等.所以

$$\begin{aligned} B &= 2 B_1 \cos \alpha \\ &= 2 \cdot \frac{\mu_0 i}{2\pi \left( R^2 + \left( \frac{d}{2} \right)^2 \right)^{1/2}} \sin \beta \\ &= \frac{\mu_0 id}{2\pi \left( R^2 + \frac{d^2}{4} \right)} \end{aligned}$$

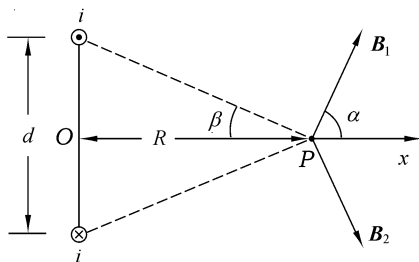


图 9.8(b)

$$= \frac{2 \mu_0 i d}{\pi (4 R^2 + d^2)}$$

**9.9** (a) 有一根导线, 作成  $n$  边的正多边形, 这多边形的外接圆半径为  $a$ . 设该导线载有电流  $i$ , 试求证在这外接圆中心处的磁感应强度由下式给出:

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2 \pi a} \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

(b) 求证: 当  $n \rightarrow \infty$  时, 上式就简化成载流圆线圈在中心处产生磁感应强度的结果.

**证明** (a) 这外接圆中心  $O$  处的磁感应强度由组成  $n$  边的正多边形的  $n$  条载流直导线叠加而成. 由对称性可知, 每条载流直导线在  $O$  处的  $B$  大小相等, 而且方向相同. 所以

$$B = n B_1 = n \frac{\mu_0 i}{4 \pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

由图可知,  $r = a \cos \frac{\pi}{n}$ ,  $\theta_1 = \frac{1}{2} \left( \pi - \frac{2\pi}{n} \right)$ ,  $\theta_2 = \pi - \theta_1$

代入  $B$  中, 得

$$\begin{aligned} B &= n \frac{\mu_0 i}{4 \pi a \cos \frac{\pi}{n}} \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right) + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right) \right) \\ &= \frac{\mu_0 n i}{2 \pi a} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} = \frac{\mu_0 n i}{2 \pi a} \tan \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 n i}{2 \pi a} \tan \frac{\pi}{n} = \frac{\mu_0 i}{2 a}$$

显然, 此时  $O$  点的  $B$  就是圆电流在  $O$  点的磁感应强度. 原命题得证.

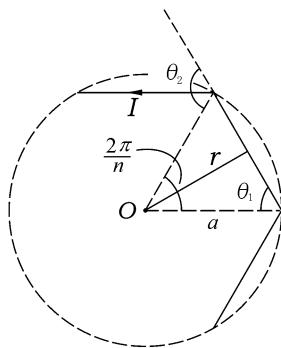


图 9.9

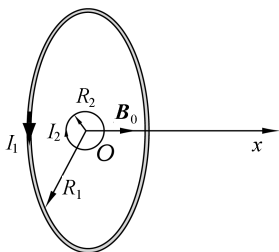


图 9.10

**9.10** 一个圆形铜线回路, 半径为  $0.1 \text{ m}$ , 载有电流  $15 \text{ A}$ . 在这回路的中心处放着第二个回路, 第二个回路的半径为  $0.01 \text{ m}$ , 共有  $50$  匝, 载有电流  $1.0 \text{ A}$ . 试求 (a) 铜线在第二个回路中心处产生的磁感应强度  $B$  为多少? (b) 作用在第二个回路上的磁力矩有多大? 假定两个的平面互相垂直, 而且由铜线回路所产生的磁感应强度  $B$  在第二个回路所占据的整个体积中, 基

本上是均匀的。

**解** (a)由圆电流在轴线上任一点产生的磁感应强度公式可知,铜线在第二个回路中心处产生的  $B_0$  的大小为

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{\mu_0 I_1}{2 R_1} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 15}{2 \times 0.1} \\ &= 9.42 \times 10^{-5} (\text{T}) \end{aligned}$$

方向垂直于铜线回路构成的平面。

(b) 因为假定第二个回路所在处  $B$  是均匀的,所以,由  $M = p_m \times B$  可得所要求的结果。

$$\begin{aligned} p_m &= N_2 I_2 S_2 \\ B &= B_0 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} |M| &= p_m \cdot B_0 = 50 \times 1.0 \times \pi \times (0.01)^2 \times 9.42 \times 10^{-5} \\ &= 1.48 \times 10^{-6} (\text{N} \cdot \text{m}) \end{aligned}$$

**9.11** 电缆由导体圆柱和一同轴的导体圆筒构成,使用时电流  $I$  从导体流出,从另一导体流回,电流均匀分布在横截面上,如图 9.11 所示.设圆柱体的半径为  $r_1$ ,圆筒的内外半径分别为  $r_2$  和  $r_3$ ,若场点到轴线的距离为  $r$ ,试求  $r$  从 0 到  $\infty$  范围内各处磁感应强度的大小。

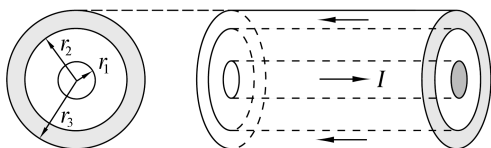


图 9.11

**解** 在导体横截面内以导体轴线为圆心作半径为  $r$  的圆为积分环路,则根据安培环路定理有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = \mu_0 I$$

当  $r < r_1$  时,有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = \mu_0 \frac{\pi r^2}{\pi r_1^2} I$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2}$$

当  $r_1 < r < r_2$  时,有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi rB = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

当  $r_2 < r < r_3$  时,有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi rB = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I (r_3^2 - r^2)}{2\pi (r_3^2 - r_2^2) r}$$

当  $r > r_3$  时,有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = I - I = 0$$

$$B = 0$$

**9.12** 一半径为  $R$  的球面上均匀分布着电荷,面密度为  $\sigma_0$ ,当它以角速度  $\omega$  绕直径旋转时,试求在球心处的磁感应强度  $\mathbf{B}$  的大小.

**解** 将绕直径旋转的带电球面可视为无数个位于球面上的同轴圆电流.如图所示,位于  $(r, \theta)$  处的电流  $dI$  在球心  $O$  处产生的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{r^2 dI}{R^3}$$

其中  $dI = \sigma ds f$ , 而  $ds = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$ ,  $r =$

$R \sin\theta$ ,  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ , 代入得

$$\begin{aligned} dI &= \sigma 2\pi R^2 \sin\theta d\theta \frac{\omega}{2\pi} \\ &= \sigma \omega R^2 \sin\theta d\theta \end{aligned}$$

因为各  $d\mathbf{B}$  方向相同,所以

$$\begin{aligned} B &= \int_0^\pi dB \\ &= \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} \left( \frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{2 \mu_0 \sigma \omega R}{3} \end{aligned}$$

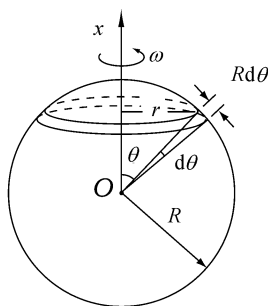


图 9.12

**9.13** 有一个导体,由无限多根邻近的导线组成,每根导线都无限长并且各载有电流  $i$ . 试求证:(a)磁感应线将如图 9.13(a)所示;(b)这个无限大电流片前面所有各点处  $\mathbf{B}$  的大小由下式给出:

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n i$$

式中  $n$  表示每单位长度上导线的数目. 试用安培环路定理导出此式.

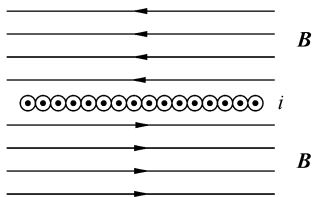


图 9.13(a)

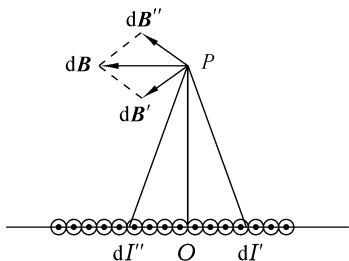


图 9.13(b)

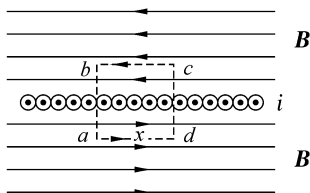


图 9.13(c)

**证明** (a)分析磁场中任一点  $P$  处的磁场方向.如图(a)所示,以  $\overline{OP}$  为对称轴,取一对关于  $OP$  对称的长直电流  $dI'$  和  $dI''$  ( $dI' = dI'' = i$ ),它们在  $P$  点产生的磁场分别为  $d\mathbf{B}'$  和  $d\mathbf{B}''$ .由于二者大小相等,所以其合磁场  $d\mathbf{B}$  的方向一定平行于电流平面.这样,无数对对称直电流在  $P$  点的总磁场方向也一定平行于电流平面.但在该平面两侧的  $\mathbf{B}$  的方向相反.磁感应线如图 9.13(c)所示.

(b)取矩形闭合路径  $abcd$  为闭合积分路径  $L$ ,使  $ab$  边,  $cd$  边平行于导体面且关于导体面对称,积分环绕方向与电流方向满足右螺旋法则,如图 9.13(c)所示,因此由安培环路定理有

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{ab} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{bc} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{cd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{da} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \\ &= Bx + 0 + Bx + 0 = 2Bx = \mu_0 nix \end{aligned}$$

式中  $x = \overline{ab} = \overline{cd}$ .

故

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n i$$

原命题得证.

**9.14** 图 9.14(a)所示是一根无限长的圆柱形导体,半径为  $R_1$ ,其内有一半径为  $R_2$  的无限长圆柱形空腔,它们的轴线相互平行,轴间距离为  $a$  ( $R_2 < a < R_1 - R_2$ ), $I$  沿导体轴线方向流动,且均匀地分布在横截面上.试求:

(1)圆柱体轴线上  $B$  的大小;

(2)空腔部分轴线上  $B$  的大小;

(3)设  $R_1 = 10 \text{ mm}$ ,  $R_2 = 0.5 \text{ mm}$ ,  $a = 5.0 \text{ mm}$ ,  $I = 20 \text{ A}$ ,分别计算上述两处  $B$  的大小.

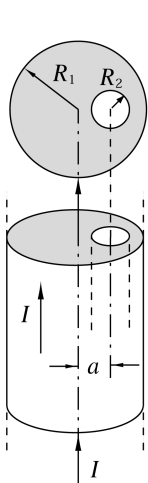


图 9.14(a)

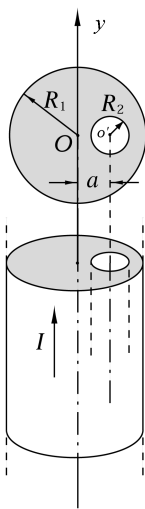


图 9.14(b)

**解** 如图 9.14(b)所示,设圆柱形导体可看作电流沿  $y$  轴正向,半径为  $R_1$  的圆柱导体和电流沿  $y$  轴负方向半径为  $R_2$  的圆柱导体所组成.其中

$$I_1 = \frac{I}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} \pi R_1^2 = \frac{I}{(R_1^2 - R_2^2)} R_1^2$$

$$I_2 = \frac{I}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} \pi R_2^2 = \frac{I}{(R_1^2 - R_2^2)} R_2^2$$

应用叠加原理,圆柱体轴线上一点  $O$  的磁感应强度为

$$B_0 = B_{R_1} + B_{R_2}$$

因  $R_1=0, B_{R_1}=0$ . 根据磁场中安培环路定理, 得

$$\begin{aligned} B_0 &= B_{R_2} \\ &= \frac{\mu_0 I R_2^2}{2\pi a (R_1^2 - R_2^2)} \\ &= 2 \times 10^{-6} \text{ T} \end{aligned}$$

同理, 空腔轴线上的磁感应强度

$$B_{0'} = B_{0'1} + B_{0'2}$$

因  $R_2=0, B_{0'2}=0$ , 故

$$B_{0'1} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi (R_1^2 - R_2^2)} = 2 \times 10^{-4} \text{ T}$$

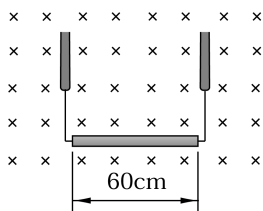


图 9.15

**9.15** 有一根金属导线, 长为  $0.6 \text{ m}$ , 质量为  $1.0 \times 10^{-2} \text{ kg}$ , 用两根柔软的细导线悬在磁感应强度为  $0.40 \text{ T}$  的磁场中. 如图所示. 试求金属导线中的电流的大小和方向要为何, 才能抵消悬线中的张力?

**解** 显然, 题设要求金属导线受安培力方向向上, 且

$$IBl = mg$$

所以

$$I = \frac{mg}{Bl} = \frac{1.0 \times 10^{-2} \times 9.8}{0.4 \times 0.6} = 0.41 \text{ (A)}$$

方向向右.

**9.16** 如图 9.16 所示, 一半径为  $a$  的导线圆环与一个径向对称的发散磁场处处正交. 在环上各点处磁感应强度  $B$  都有相同的大小, 而在环上各点处这个磁感应强度的方向都和环平面的法线成  $\theta$  角. 扭在一起的接线对本问题没有影响. 如图 9.16 中所示, 若导线环上载有一电流  $i$ , 试求磁场作用在环上的力的大小和方向.

**解** 由安培力  $d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}$  知

$$\mathbf{F} = \int_L d\mathbf{F} = \int_L Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

由对称性可知, 导线圆环所受合力方向向上, 所以其大小为

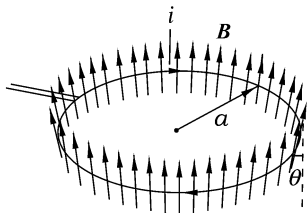


图 9.16

$$\begin{aligned}
 F_{\text{合}} &= \int_L dF \sin \theta = \int_L Idl \cdot B \sin \theta = IB \sin \theta \int_L dl \\
 &= IB \sin \theta \cdot 2\pi a \\
 &= 2\pi IB a \sin \theta
 \end{aligned}$$

方向竖直向上.

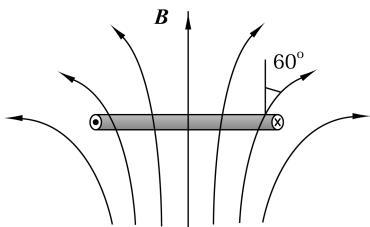


图 9.17(a)

**9.17** 一细导线弯成半径为 4.0 cm 的圆环,置于不均匀的外磁场中,磁场方向对称于圆心并都与圆平面的法线成  $60^\circ$  角,如图 9.17(a)所示.导线所在处  $B$  的大小是 0.1 T.试求当电流  $I=15.8$  A 时线圈所受的合力.

**解** 因为  $d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}$

$$d\mathbf{F} = dF_x \mathbf{i} + dF_y \mathbf{j}$$

由对称性可知导线受合力方向沿  $y$  轴方向,如图 9.17(b)所示,所以

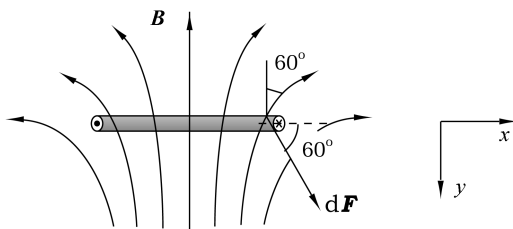


图 9.17(b)

$$\begin{aligned}
 dF_y &= BIdl \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} BIdl \\
 F &= \int dF_y = 2 \int_{\text{半圆}} dF_y = \int_{\text{半圆}} 3IBdl \\
 &= 3IB \int_{\text{半圆}} dl = 3\pi RIB = 0.34 \text{ N}
 \end{aligned}$$

方向垂直向下.

**9.18** 设真空中有两条长均为  $L$  相距为  $a$ ,分别通有平行反向电流  $I_1$  和  $I_2$  的载流直导线,试求它们之间的相互作用力.

**解** 如图 9.18 所示,在载流导线  $I_2$  上选一电流元  $I_2 d\mathbf{l}$ ,则该电流元受到的磁场力大小为

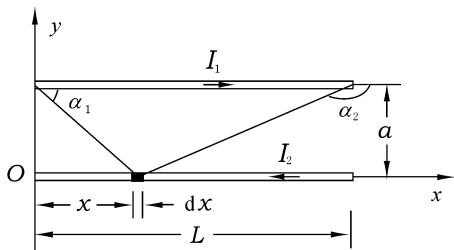


图 9.18

$$|d\mathbf{F}| = |I_2 d\mathbf{l} \times \mathbf{B}| = I_2 B dx$$

其中  $B = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$

作用在载流导线  $I_2$  上的安培力为

$$\begin{aligned} F &= \int_0^L dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi a} \int_0^L \left[ \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{L-x}{\sqrt{a^2 + (L-x)^2}} \right] dx \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi a} \left[ \sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{a^2 + (L-x)^2} \right] \Big|_0^L \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi a} [2(\sqrt{L^2 + a^2} - a)] = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} (\sqrt{L^2 + a^2} - a) \end{aligned}$$

$\mathbf{F}$  方向竖直向下. 同理可计算知电流  $I_2$  对  $I_1$  的作用力为  $\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} (\sqrt{L^2 + a^2} - a)$ , 方向竖直向上.

**9.19** 如图 9.19(a)所示, 一半径为  $R$  的无限长半圆柱面导体, 其上电流与其轴线上一无限长直导线的电流等值反向, 电流  $I$  在半圆柱面上均匀分布. 试求:

(1) 轴线上导线单位长度所受的力.

(2) 若将另一无限长直导线(通有大小、方向与半圆柱面相同的电流  $I$ )代替圆柱面, 产生同样的作用力, 该导线应放在何处?

**解** (1) 先求出半圆柱面上的电流在轴线处的磁感应强度. 将载流圆柱面视为一系列载流长直导线的组合, 则

$$i = \frac{I}{\pi R}, \quad dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 i dl}{2\pi R}$$

由对称性可知  $\mathbf{B}$  沿  $x$  轴方向(如图 9.19(b)所示)

$$\begin{aligned} dB_x &= \frac{\mu_0 i R d\theta}{2\pi R} \cos \theta \\ B &= \int dB_x = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0 i \cos \theta d\theta}{2\pi} = \frac{\mu_0 i}{\pi} \end{aligned}$$

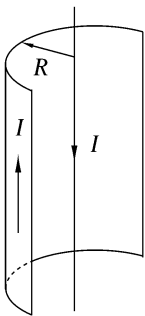


图 9.19(a)

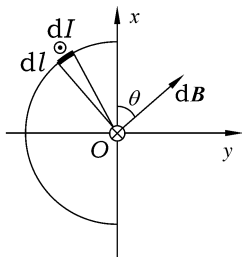


图 9.19(b)

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

所以

$$F = BIl = \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R}$$

矢量表示为

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R} \mathbf{j}$$

(2) 设该异线应放在  $y = -d$  处, 显然, 该异线在轴线处产生的磁感应强度应与原来的半圆柱面产生的磁感应强度相同, 即

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

所以

$$d = \frac{\pi R}{2}$$

因而, 另一导线应放在  $y = -\frac{\pi R}{2}$  处.

**9.20** 载有电流  $I_1$  的无限长直导线, 旁边有一个正三角形线圈, 边长为  $a$ , 电流为  $I_2$ , 它们共面, 如图 9.20(a) 所示, 一边与长直导线平行, 三角形中心到直导线的距离为  $b$ , 试求  $I_1$  对该三角形线圈的作用力.

**解** 如图 9.20(b) 所示,  $I_1$  在  $AB$  线上各点的磁感应强度的大小均相等:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \left( b - \frac{\sqrt{3}}{6} a \right)}$$

而作用在  $AB$  上力的大小则为

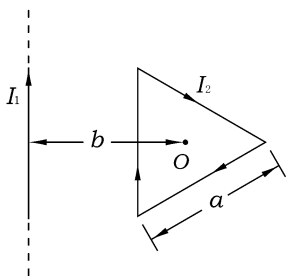


图 9.20(a)

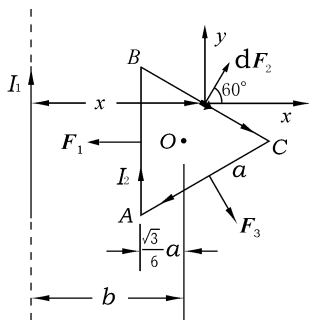


图 9.20(b)

$$F_1 = I_2 B_1 a = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi \left( b - \frac{\sqrt{3}}{6} a \right)}$$

$F_1$  的方向如图 9.20(b)所示. 在  $BC$  上任取电流元  $I_2 d\mathbf{l}$ , 它距直导线距离为  $x$ , 则该电流元受力的大小为

$$dF_2 = I_2 B_2 dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dl$$

因为  $dl = \frac{dx}{\cos 30^\circ}$ , 所以  $BC$  上受力大小为

$$F_2 = \int dF_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \cos 30^\circ} \int_{b - \frac{\sqrt{3}}{6} a}^{b + \frac{\sqrt{3}}{3} a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\sqrt{3}\pi} \ln \left[ \frac{b + \frac{a}{\sqrt{3}}}{b - \frac{a}{2\sqrt{3}}} \right]$$

方向如图 9.20(b)所示.

$$F_{2x} = F_2 \cos 60^\circ = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\sqrt{3}\pi} \ln \left[ \frac{b + \frac{a}{\sqrt{3}}}{b - \frac{a}{2\sqrt{3}}} \right]$$

$$F_{2y} = F_2 \sin 60^\circ = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{b + \frac{a}{\sqrt{3}}}{b - \frac{a}{2\sqrt{3}}}$$

同理可求得作用于  $AC$  边上的力  $F_3$  及  $F_{3x}$  和  $F_{3y}$ , 但  $F_{2y} = F_{3y}$  方向相反, 互相抵消.

$$F_{3x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\sqrt{3}\pi} \ln \left[ \frac{b + \frac{a}{\sqrt{3}}}{b - \frac{a}{2\sqrt{3}}} \right]$$

故线圈所受的合力为

$$\begin{aligned} F &= F_{2x} + F_{3x} - F_1 \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{b + \frac{a}{\sqrt{3}}}{b - \frac{a}{2\sqrt{3}}} - \frac{a}{6 - \frac{\sqrt{3}}{6} a} \right] \end{aligned}$$

方向向右。

**9.21** 如图 9.21(a)所示,矩形线圈的面积是  $8.0 \times 6.0 \text{ cm}^2$ ,每厘米长的质量为  $0.10 \text{ g}$ ,可绕  $ab$  边自由转动.磁场沿  $y$  轴正方向.当线圈中电流为  $10 \text{ A}$  时,线圈偏离平衡位置与铅直方向成  $30^\circ$ 角.试求:

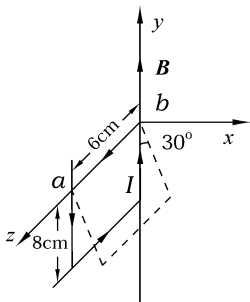


图 9.21(a)

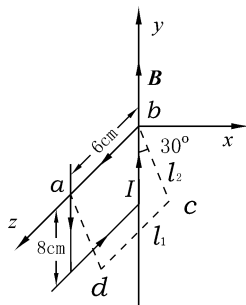


图 9.21(b)

(1)  $B$  的大小;

(2) 若  $B$  沿  $x$  轴方向,线圈又将如何?

**解** (1) 线圈所受磁力矩为

$$M = ISB \sin \theta = ISB \sin(90^\circ - 30^\circ) = Il_1 l_2 B \sin 60^\circ$$

$M$  方向沿  $z$  轴方向。

线圈所受重力矩为

$$M_G = M_{bc} + M_{cd} + M_{da}$$

$$M_{bc} = M_{da} = \int_0^{l_2} \rho dl g \cdot l \sin 30^\circ = \rho g \sin 30^\circ \cdot \frac{l_2^2}{2}$$

$$M_{cd} = \rho l_1 g \cdot l_2 \sin 30^\circ$$

所以

$$M_C = (l_1 + l_2) \rho g l_2 \sin 30^\circ \quad (\rho \text{ 为导线的密度})$$

$M_C$  方向沿  $z$  轴负方向. 线圈平衡时, 有

$$Il_1 l_2 B \sin 60^\circ = (l_1 + l_2) \rho g l_2 \sin 30^\circ$$

所以

$$\begin{aligned} B &= \frac{\rho g}{I} \left( 1 + \frac{l_2}{l_1} \right) \tan 30^\circ \\ &= \frac{0.01 \times 9.8}{10} \times \left( 1 + \frac{8}{6} \right) \times 0.58 = 1.32 \times 10^{-2} \text{ T} \end{aligned}$$

(2) 由  $\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}$  知, 若  $\mathbf{B}$  沿  $x$  轴方向, 则  $\theta = 0$ , 可得  $M = 0$ , 线圈不受磁力矩作用, 将静止在垂直位置不偏转.

**9.22** 一根导线长  $L$ , 载有电流  $i$ . 试求证: 如果把这根导线弯成一个圆形线圈, 则当线圈只有一匝时, 它在给定的匀强磁场  $\mathbf{B}$  中所受的最大磁力矩的数值为

$$\tau = \frac{1}{4\pi} L^2 i B$$

**证明** 线圈在均匀磁场  $\mathbf{B}$  中所受的力矩为

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B} = i S \mathbf{n} \times \mathbf{B}$$

若  $S$  取其最大值, 且  $\mathbf{n}$  与  $\mathbf{B}$  垂直时  $\mathbf{M}$  为最大, 而我们知道, 长为  $l$  的线围成的平面图形中圆的面积最大, 所以

$$|\mathbf{M}|_{\max} = i S_{\text{圆}} B = i \pi \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2 B = \frac{1}{4\pi} L^2 i B$$

**9.23** 半径为  $R = 0.10 \text{ m}$  的半圆形闭合线圈, 载有电流  $I = 10 \text{ A}$ , 置于匀强磁场中, 磁场方向与线圈平面平行,  $\mathbf{B}$  的大小为  $5.0 \times 10^{-1} \text{ T}$ . 试求:

(1) 线圈所受的磁力矩;

(2) 在磁力矩作用下, 线圈转过  $90^\circ$  角时, 磁力矩作的功是多少?

**解** (1)  $M = p_m B \sin 90^\circ = IBS = I \frac{\pi R^2}{2} B$

$$= 10 \times \frac{\pi \times 0.1^2}{2} \times 5.0 \times 10^{-1} = 7.85 \times 10^{-2} \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

(2) 由于回路中电流不变, 所以

$$\begin{aligned} A &= I \Delta \Phi_m = I(BS \cos 0^\circ - BS \cos 90^\circ) \\ &= IBS = 10 \times 5.0 \times 10^{-1} \times \frac{\pi \times 0.1^2}{2} \\ &= 7.85 \times 10^{-2} \text{ (J)} \end{aligned}$$

**9.24** 盘面与匀强磁场  $\mathbf{B}$  成  $\varphi$  角的带正电圆盘, 半径为  $R$ , 电荷量  $Q$  均匀分布在表面上. 圆盘以角速度  $\omega$  绕通过盘心, 与盘面垂直的轴转动. 试求此带电旋转圆盘在磁场中所受的磁力矩.

**解** 取距盘心为  $r$  处宽度为  $dr$  的圆环, 设其带电量为  $dq$ , 则

$$dq = \sigma dS = \sigma(2\pi r dr)$$

由于圆盘以  $\omega$  旋转, 故圆环中电流

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{dq\omega}{2\pi} = \sigma\omega r dr \quad \left( \text{式中 } \sigma = \frac{Q}{\pi R^2} \right)$$

环中电流的磁矩  $dp_m = dIS = \sigma\pi\omega r^3 dr$

故

$$p_m = \int dp_m = \int_0^R \sigma\omega\pi r^3 dr = \frac{1}{4} \sigma\pi\omega R^4 = \frac{1}{4} \omega QR^2$$

磁力矩为

$$M = p_m B \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{1}{4} \omega QR^2 B \cos \varphi$$

方向按  $M = p_m \times B$  决定, 垂直于  $p_m$  和  $B$  所组成的平面, 即垂直纸面向里.

**9.25** 真空有一半径为  $R$  的圆线圈通有电流  $I_1$ , 另有一电流  $I_2$  的无限长直导线, 与圆线圈平面垂直, 且与圆线圈相切(彼此绝缘), 如图 9.25 所示, 试求:

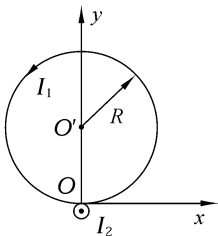


图 9.25(a)

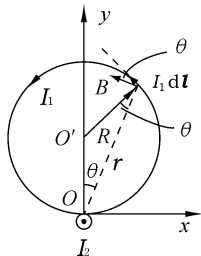


图 9.25(b)

- (1) 圆线圈在图示位置时所受到的磁力矩;
- (2) 圆线圈将怎样运动;
- (3) 若无限长直导线  $I_2$  改放在圆线圈中心位置, 此时线圈受到的磁力矩为多大.

**解** (1) 取如图 9.25(b) 所示的坐标系, 在圆环  $p$  处取一电流元  $I_1 dl$ , 长直导线在该处产生的磁感应强度为  $B = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$ , 方向如图 9.25(b) 所示.

电流元  $I_1 dl$  所受到的安培力为

$$dF = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} I_1 dl \sin \theta$$

方向垂直圆环平面(即纸面)向外.该安培力对  $y$  轴的力矩为

$$dM = dF r \sin \theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \sin^2 \theta dl$$

由图 9.25(b)可知

$$dl = R d(2\theta) = 2R d\theta$$

整个圆线圈受到的磁力矩为

$$M = \int dM = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \sin^2 \theta 2R d\theta = \frac{1}{2} \mu_0 I_1 I_2 R$$

(2)圆线圈在磁力作用下将发生转动,迎着  $y$  轴看其转动方向为顺时针方向,如图(c)所示.最后处于圆线圈与长直导线共面的平衡位置.

(3)当长直导线  $I_2$  处于圆线圈中心,且  $I_2$  流向与圆线圈平面垂直时,由于电流元  $I_1 dl$  所受到的安培力  $d\mathbf{F} = I_1 dl \times \mathbf{B} = 0$  (此时  $I_1 dl$  与  $\mathbf{B}$  之间夹角处处为零,故线圈所受到的磁力矩  $M=0$  线圈不转动).

**9.26** 一无限长直载流导线,通有电流 50 A,在离它 0.05 m 处有一电子以速率  $v=1.0 \times 10^7$  m/s 运动.已知电子电荷的数值为  $1.6 \times 10^{-19}$  C,试求(1) $v$  平行于导线电流时,作用在电子上的洛伦兹力;(2) $v$  垂直于导线并向着导线时,作用在电子上的洛伦兹力;(3) $v$  垂直于导线和电子所构成的平面时,作用在电子上的洛伦兹力.

**解** 由安培环路定理可解得电子所经处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

由洛伦兹公式可知

$$\begin{aligned} (1) F &= qvB \sin 90^\circ = qv \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ &= 1.6 \times 10^{-19} \times 1.0 \times 10^7 \times \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 50}{2\pi \times 0.05} \\ &= 3.2 \times 10^{-16} \text{ N} \end{aligned}$$

若  $v$  与电流同向时,  $\mathbf{F}$  的方向垂直导线并背离导线,若  $v$  与电流反向时,  $\mathbf{F}$  指向导线.

$$(2) F = qvB \sin 90^\circ = 3.2 \times 10^{-16} \text{ N}$$

$\mathbf{F}$  的方向与电流同向.

$$(3) F = qvB \sin 90^\circ = 0$$

**9.27** 电子在  $B=2 \times 10^{-3}$  T 的匀强磁场中运动,其轨迹是半径为 2.0 cm、螺距为 5 cm 的螺旋线,试求这个电子的速度大小.

**解** 电子螺旋线运动可分解为匀速率圆周运动和匀速直线运动,电子作圆周运动的半径为

$$R = \frac{mv_{\perp}}{eB} \quad \text{而} \quad T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{eB}$$

螺旋线的螺距为

$$h = v_{\parallel} T = v_{\parallel} \frac{2\pi m}{eB}$$

所以

$$v_{\parallel} = \frac{h}{T} = \frac{eBh}{2\pi m}$$

$$v_{\perp} = \frac{eBR}{m}$$

故

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2} = \frac{eB}{m} \sqrt{\frac{h^2}{4\pi^2} + R^2} \\ &= \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^{-3}}{9.1 \times 10^{-31}} \sqrt{\frac{(5 \times 10^{-2})^2}{4\pi^2} + (2.0 \times 10^{-2})^2} \\ &= 7.57 \times 10^6 \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

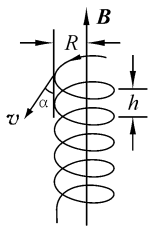


图 9.27

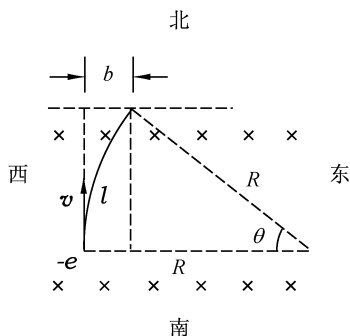


图 9.28

**9.28** 在显像管里,电子沿水平方向从南向北运动,动能是  $1.2 \times 10^4 \text{ eV}$ ,该处地球磁场的磁感应强度在竖直方向的分量的方向向下,大小是  $0.55 \times 10^{-4} \text{ T}$ ,试求:

- (1) 由于地球磁场的影响,电子如何偏转?
- (2) 电子的加速度多大?
- (3) 电子在显像管内运动 20 cm 时,偏转有多少?

**解** (1) 运动电子受到地磁场的作用由洛伦兹力  $f = -e(v \times B)$  可以确定电子向东偏转。

(2) 电子所受洛伦兹力的大小为

$$f = evB$$

又因

$$f = ma_n = evB$$

故

$$a_n = \frac{evB}{m}$$

电子动能  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  故

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.2 \times 10^4 \times 1.6 \times 10^{-19}}{9.1 \times 10^{-31}}} \\ = 6.5 \times 10^7 \text{ (m/s)}$$

$$a_n = \frac{evB}{m} \\ = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 6.5 \times 10^7 \times 5.5 \times 10^{-5}}{9.1 \times 10^{-31}} \\ = 6.3 \times 10^{14} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

(3) 电子受洛伦兹力作用而沿圆弧运动, 其轨道半径为

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{9.1 \times 10^{-31} \times 6.5 \times 10^7}{1.6 \times 10^{-19} \times 5.5 \times 10^{-5}} = 6.7 \text{ (m)}$$

由图可知, 电子偏转距离为

$$b = R - R \cos \theta = R \left[ 1 - \cos \left( \frac{l}{R} \right) \right] \\ = 6.7 \times \left[ 1 - \cos \left( \frac{20 \times 10^{-2}}{6.7} \right) \right] \\ = 9.1 \times 10^{-7} \text{ (m)}$$

由于偏转距离微小, 所以地磁对电视的影响可以忽略.

**9.29** 一质子、一氦核与一  $\alpha$  粒子通过相同的电势差加速后进入一匀强磁场中, 这些粒子进入磁场时的运动方向与  $B$  成正交. (a) 试比较这些粒子的动能; (b) 如果质子在磁场中运动的圆轨道半径为 0.1 m, 试求氦核与  $\alpha$  粒子的轨道半径各有多大?

**解** (a) 在各粒子经电场加速过程中, 由动能定理知

$$qu = \frac{1}{2}mv^2 = E \quad (1)$$

因为

$$q_{\text{质子}} = q_{\text{氦核}} < q_{\alpha}, \quad u \text{ 相同}$$

所以

$$E_{\text{质子}} : E_{\text{氦核}} : E_{\alpha} = q_{\text{质子}} : q_{\text{氦核}} : q_{\alpha} = 1 : 1 : 2$$

(b) 粒子受洛伦兹力作圆周运动, 则

$$qvB = m \frac{v^2}{R} \quad (2)$$

式(1)、(2)联立, 消去  $v$ , 得  $R = \frac{2mu}{qB^2}$

因为  $u$ ,  $B$  相同, 所以半径之比为  $\sqrt{\frac{m}{q}}$  之比, 即

$$R_{\text{质子}} : R_{\text{氦核}} : R_{\alpha} = \sqrt{\frac{m_{\text{质子}}}{q_{\text{质子}}}} : \sqrt{\frac{m_{\text{氦核}}}{q_{\text{氦核}}}} : \sqrt{\frac{m_{\alpha}}{q_{\alpha}}} = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{2}$$

所以氦核与  $\alpha$  粒子的轨道半径均为  $14.4 \text{ cm}$ .

**9.30** 质量为  $m$  的带电粒子, 带有电荷量  $q$ , 以速度  $v$  射入匀强磁场中,  $v$  的方向与  $B$  垂直, 粒子从磁场出来后, 继续运动, 如图所示. 已知磁场在  $x$  轴方向的宽度为  $l$ , 粒子从磁场出来后, 在  $x$  方向又前进了  $L - l/2$ , 试求它的偏转距离  $y$ .

**解** 粒子在磁场区域中沿圆弧轨道运动的圆半径为

$$R = mv/qB$$

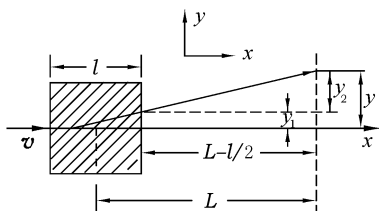


图 9.30(a)

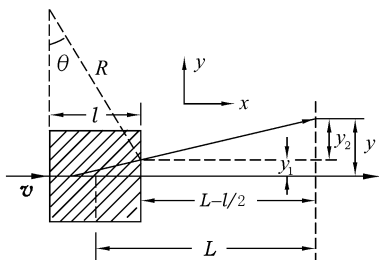


图 9.30(b)

由图 9.30(b)可知

$$y_1 = R - \sqrt{R^2 - l^2}$$

粒子离开磁场后作匀速直线运动, 如图 9.30(b)所示. 速率未变, 但方向发生了变化, 这时速度方向与  $x$  轴夹角为  $\theta_0$ , 所以有

$$v_x = v \cos \theta, v_y = v \sin \theta$$

带电粒子沿  $x$  方向前进距离  $\left(L - \frac{l}{2}\right)$  所需时间为

$$t = \frac{L - \frac{l}{2}}{v_x} = \frac{L - l/2}{v \cos \theta}$$

故

$$\begin{aligned} y_2 &= v_y t = v \sin \theta \frac{(L - l/2)}{v \cos \theta} \\ &= L - \frac{l}{2} \tan \theta \\ &= l(L - l/2) / \sqrt{R^2 - l^2} \end{aligned}$$

故总偏转为

$$y = y_1 + y_2 = R - \sqrt{R^2 - l^2} + \frac{l(L-l/2)}{\sqrt{R^2 - l^2}}$$

式中  $R = \frac{mv}{qB}$ , 当  $R \gg L$  时, 上式可简化为  $y \approx \frac{LL}{R} = \frac{qLLB}{mv}$

**9.31** 一质子、一氦核与一  $\alpha$  粒子都具有相同的动能, 进入匀强磁场, 其运动方向与  $\mathbf{B}$  成正交. 试比较这些粒子的圆轨道半径.

解 由  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  及  $qvB = m\frac{v^2}{R}$  知

$$R = \frac{\sqrt{2mE_k}}{qB}$$

所以

$$R_{\text{质子}} : R_{\text{氦核}} : R_{\alpha} = \frac{\sqrt{m_{\text{质子}}}}{q_{\text{质子}}} : \frac{\sqrt{m_{\text{氦核}}}}{q_{\text{氦核}}} : \frac{\sqrt{m_{\alpha}}}{q_{\alpha}} = 1 : \sqrt{2} : 1$$

即  $R_{\text{氦核}} = \sqrt{2} R_{\text{质子}}$ ,  $R_{\alpha} = R_{\text{质子}}$ .

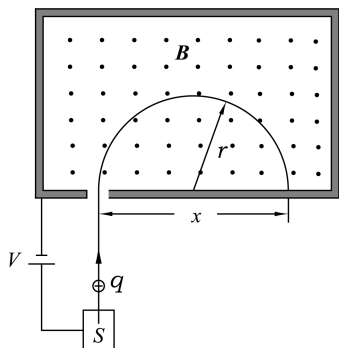


图 9.32

**9.32** 质谱仪. 如图 9.32 所示, 德姆斯特测定离子质量所用的装置. 离子源  $S$  产生一个质量为  $M$  电荷为  $+q$  的离子, 离子产生出来时基本上是静止的. 离子源是气体正在放电的小室. 离子产生出来后, 被电势差所加速, 再进入磁感应强度为  $\mathbf{B}$  的磁场中. 在磁场中, 离子沿一半圆周运动后射到离入口缝隙  $x$  远处的照相底片上, 并由照相底片把它记录下来. 试证明离子的质量  $M$  由下式给出

$$M = \frac{B^2 q x^2}{8V}$$

**证明** 在离子加速过程中, 由动能定理知

$$qV = \frac{1}{2}Mv^2 \quad (1)$$

离子在磁场中受洛伦兹力作圆周运动时, 由牛顿定律知

$$qvB = M\frac{v^2}{R} \quad (2)$$

又已知

$$R = \frac{x}{2} \quad (3)$$

式(1)、(2)、(3)联立解得  $M = \frac{B^2 q}{8V} x^2$ .

原命题得证.

**9.33** 有两个与纸面垂直的磁场以平面  $AA'$  为界面,如图 9.33(a)所示,已知它们的磁感应强度的大小分别为  $B$  和  $2B$ ,设有一质量为  $m$ ,电荷量为  $q$  的粒子以速度  $v$  自下向上地垂直射达界面  $AA'$ ,试画出带电粒子运动的轨迹,并求出带电粒子运动的周期和沿分界面方向的平均速率.

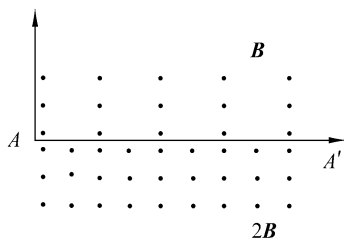


图 9.33(a)

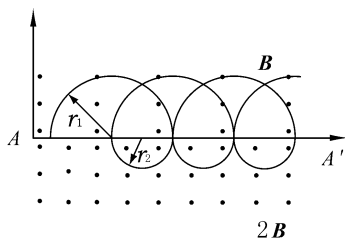


图 9.33(b)

**解** 带电粒子在磁场中作圆周运动时,有

$$\frac{mv^2}{r} = Bqv \quad \text{即} \quad r = \frac{mv}{Bq}$$

由于界面  $AA'$  上下磁场不同,粒子在  $AA'$  面上方圆运动半径大  $\left( r_1 = \frac{mv}{Bq} \right)$ ,下方圆运动半径小  $\left( r_2 = \frac{mv}{2Bq} \right)$ ,故得  $r_2 = \frac{1}{2} r_1$ ,轨迹如图 9.33(b)所示.又因  $t_1 = \frac{T_1}{2} = \frac{\pi r_1}{v}$ ,  $t_2 = \frac{\pi r_2}{v}$ ,所以粒子运动的周期为

$$T = t_1 + t_2 = \frac{\pi(r_1 + r_2)}{v} = \frac{\pi(3r_2)}{v} = \frac{3m\pi}{2Bq}$$

每一周期粒子沿  $AA'$  平面移动的距离为

$$l = 2(r_1 - r_2) = r_1$$

故带电粒子沿  $AA'$  平面向右移动的平均速率为

$$v = \frac{r_1}{T} = \frac{2v}{3\pi}$$

**9.34** 飞行时谱仪.歌德斯密设计过测量重离子质量的准确方法,这个方法是测量重离子在已知磁场中的旋转周期.一个单独的带电碘离子,在  $4.5 \times 10^{-2} \text{ T}$  的磁场中,旋转 7 周所需的时间约为  $1.29 \times 10^{-3}$  秒.试求,这个碘离子的质量有多少千克(近似的)? 实际上,质量测定时所达到的准确度远比这些近似数据所能表示的高得多.

**解** 假定带电碘离子仅受洛伦兹力,则

$$qvB = m\omega^2 r$$

而

$$v = \omega r$$

所以

$$qB = m\omega$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{qB}{\omega} = \frac{qB}{2\pi} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{qB}{2\pi} T = \frac{qB}{2\pi} \cdot \frac{t}{7} \\ &= \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 4.5 \times 10^{-2}}{2\pi} \times \frac{1.29 \times 10^{-3}}{7} \\ &= 2.11 \times 10^{-25} \text{ (kg)} \end{aligned}$$

即这个带电碘离子的质量近似为  $2.11 \times 10^{-25} \text{ kg}$ .

**9.35** 将磁导率为  $\mu = 50 \times 10^{-4} \text{ Wb} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  的铁磁质做成一个细圆环,环上密绕线圈,单位长度匝数  $n = 500$ ,形成有铁心的螺绕环.当线圈中电流  $I = 4 \text{ A}$  时,试求:(1)环内  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  的大小;(2)磁化电流产生的附加磁感应强度  $\mathbf{B}'$ .

**解** (1)由介质中的安培环路定理知

$$H = nI = 500 \times 4 = 2 \times 10^3 \text{ (A/m)}$$

$$B = \mu H = 50 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^3 = 10 \text{ (T)}$$

$$(2) \quad B' = B - B_0$$

$$B_0 = \mu_0 nI = 4\pi \times 10^{-7} \times 2 \times 10^3 \times 4 = 0.01 \text{ (T)}$$

$$B' = B - B_0 = 10 - 0.01 = 9.99 \approx 10 \text{ (T)}$$

**9.36** 螺绕环平均周长  $l = 0.1 \text{ m}$ ,环上线圈  $N = 200$  匝,线圈中电流  $I = 100 \text{ mA}$ ,试求:(1)管内  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  的大小;(2)若管内充满相对磁导率  $\mu_r = 4200$  的磁介质,管内的  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  的大小.

**解** (1)由介质中的安培环路定理知

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \Sigma I_0$$

$$H2\pi r = NI_0$$

$$H = \frac{NI_0}{2\pi r} = \frac{200 \times 0.1}{0.1} = 200 \text{ (A/m)}$$

$$B_0 = \mu_0 nI_0 = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{200}{0.1} \times 0.1 = 2.5 \times 10^{-4} \text{ (T)}$$

$$(2) \quad B = \mu H = \mu_0 \mu_r H = 4\pi \times 10^{-7} \times 4200 \times 200 = 1.05 \text{ (T)}$$

$$B' = B - B_0 = 1.05 - 2.5 \times 10^{-4} \approx 1.05 \text{ (T)}$$

**9.37** 在平均半径为  $0.1 \text{ m}$ ,横截面积为  $6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  的铸钢圆环上,均匀密

绕 200 匝线圈,当线圈内通入  $0.63\text{ A}$  的电流时,钢环中的磁通量为  $3.24 \times 10^{-4}\text{ Wb}$ ,当电流增至  $4.7\text{ A}$  时,磁通量为  $6.18 \times 10^{-4}\text{ Wb}$ .试求两种情况下钢环的磁导率  $\mu$ .

**解** 当环上的线圈绕得很密时,则其磁场几乎全部集中在环内,环内的磁场线都是同心圆,环外的磁场可以忽略.由对称性可知,在同一条磁场线上各点的磁感应强度  $\boldsymbol{B}$  的大小相等,方向沿着圆的切线方向.选取半径为  $r$  的磁场线为积分路径  $L$ ,根据介质中的安培环路定理,有

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = NI$$

由此得

$$H = \frac{NI}{2\pi r}$$

因为圆环的横截面积很小,所以  $r \approx \bar{r}$ ,环内任一点的磁场强度大小为

$$H = \frac{NI}{2\pi \bar{r}}$$

所以

$$B = \mu H = \frac{\mu NI}{2\pi \bar{r}}$$

$$\Phi_m = BS = \frac{\mu NIS}{2\pi \bar{r}}$$

故

$$\mu = \frac{\Phi_m 2\pi \bar{r}}{NIS}$$

$$\mu_1 = \frac{\Phi_{m1} 2\pi \bar{r}}{NI_1 S} = \frac{3.24 \times 10^{-4} \times 2\pi \times 0.1}{200 \times 0.63 \times 6 \times 10^{-4}} = 2.69 \times 10^{-3} (\text{N/A}^2)$$

$$\mu_2 = \frac{\Phi_{m2} 2\pi \bar{r}}{NI_2 S} = \frac{6.18 \times 10^{-4} \times 2\pi \times 0.1}{200 \times 4.7 \times 6 \times 10^{-4}} = 6.88 \times 10^{-4} (\text{N/A}^2)$$

## 第 10 章 变化的磁场和变化的电场

### 一、基本内容和主要公式

#### 1. 电动势

$$\mathcal{E} = \int_{-(\text{电源内})}^{+} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}$$

即非静电力把单位正电荷从负极通过电源内部搬移到正极所作的功,称为电源电动势.

如果一个闭合电路  $L$  上处处都有非静电力  $\mathbf{F}_k$  存在,这时整个闭合电路内的总电动势为

$$\mathcal{E} = \oint_L \frac{\mathbf{F}_k}{q} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}$$

电源的电动势是表征电源本身性质的物理量,它与外电路的性质以及电源所在电路是否接通无关.

#### 2. 法拉第电磁感应定律

$$(1) \text{ 法拉第电磁感应定律: } \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

此定律表明导体回路中产生的感应电动势  $\mathcal{E}$  的大小与穿过回路的磁通量的变化率  $\frac{d\Phi}{dt}$  成正比.“ $-$ ”号是楞次定律的数学表示,即闭合回路中感应电流的方向总是使得它自身所产生的磁通量反抗引起感应电流的磁通量的变化.

若回路由  $N$  匝线圈串联组成,则

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(\Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N) = -\frac{d\psi}{dt} \quad (\psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i, \text{ 称为磁链数})$$

$$(2) \text{ 感应电流: } I_i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

$$(3) \text{ 感应电荷: } \Delta q_i = \frac{1}{R} |\Phi_2 - \Phi_1|$$

#### 3. 动生电动势和感生电动势

$$(1) \text{ 动生电动势: } \mathcal{E} = \int_a^b \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

$$(2) \text{ 感生电动势: } \mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

其中,  $\mathbf{E}_k$  为与洛伦兹力相对应的非静电性场强,  $\mathbf{E}_v$  是变化磁场产生的有旋电场的

电场强度.

动生电动势和感生电动势是从感应电动势的产生原因的不同进行分类的.

#### 4. 自感和互感

$$(1) \text{自感电动势: } \mathcal{E} = -\frac{d\psi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

其中,  $L = \frac{\psi}{I}$ , 称为自感系数. 如果回路周围不存在铁磁质时,  $L$  与电流无关, 仅由回路的匝数、几何形状和大小以及周围磁介质的磁导率而决定.

$$(2) \text{互感电动势: } \mathcal{E}_M = -M \frac{dI}{dt}$$

其中,  $M = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \frac{\psi_{12}}{I_2}$ ,  $M$  称为互感系数.  $M$  由回路的几何形状、尺寸、匝数、周围介质(非铁磁质)的磁导率以及回路的相对位置决定, 与回路的电流无关. 如果回路周围有铁磁质存在,  $M$  与回路中的电流有关.

自感电动势和互感电动势是从感应电动势的产生方式的不同进行的分类. 自感电动势是由导体回路自身电流发生变化而在自己回路中产生的感应电动势, 而互感电动势是由于一个导体回路中的电流发生变化而在邻近其它导体回路中产生的感应电动势.

#### 5. 磁场的能量

$$(1) \text{自感磁能: } W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

$$(2) \text{磁能密度: } w_m = \frac{1}{2} BH = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2$$

$$(3) \text{磁场能量: } W_m = \iiint_V w_m dV = \iiint_V \frac{1}{2} BH dV = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu} dV$$

#### 6. 位移电流和全电流安培环路定理

$$(1) \text{位移电流: } I_D = \frac{d\Phi_D}{dt}$$

$$(2) \text{全电流安培环路定理: } \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum (I + I_D)$$

其中  $\sum (I + I_D)$  称为全电流, 此定理表明不仅传导电流  $I$  能产生磁场, 位移电流  $I_D$  也能产生磁场.

#### 7. 麦克斯韦方程组

$$(1) \text{电场的高斯定理: } \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i q_i$$

它说明尽管电荷和变化的磁场都能产生电场, 但总的电场和电荷的联系总服从这一定理.

$$(2) \text{法拉第电磁感应定律: } \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

此定律说明了变化的磁场和电场的联系.虽然电场与电荷也有联系,但总的电场和磁场的联系总符合这一规律.

(3) 磁场的高斯定理:  $\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

此定理说明目前的电磁场理论认为自然界中没有“磁单极”存在.

(4) 全电流的安培环路定理:  $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum (I_0 + I)$

此定理定量说明了磁场和电流以及变化的电场的联系.

从这一组方程式出发,通过数学推导,可以得出电磁场的各种性质.在已知电荷和电流分布的情况下,这组方程可以给出电场和磁场的惟一分布.

(5) 对于各向同性介质,  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  及  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  满足以下物质方程

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

## 二、典型例题

**10-1** 在半径为  $R$  的圆柱形空间里,有垂直纸面向里的均匀磁场且此磁场以恒定的变化率  $\frac{dB}{dt}$  增加.边长为  $R$  的等边三角形金属线框  $Oab$  放在圆柱形磁场中,如图所示,其平面垂直于  $\mathbf{B}$ .试求线圈中感应电动势的大小和方向.

**解法一** 用感生电动势的定义来求

选取  $OabO$  为积分绕行正方向,由感生电动势的定义可知,

$$\mathcal{E}_{Oab} = \int_O^a \mathbf{E}_{\text{感}} \cdot d\mathbf{l} + \int_a^b \mathbf{E}_{\text{感}} \cdot d\mathbf{l} + \int_b^O \mathbf{E}_{\text{感}} \cdot d\mathbf{l}$$

但由于在  $Oa$  和  $bO$  两条边上处处  $\mathbf{E}_{\text{感}}$  与  $d\mathbf{l}$  垂直,故积分为零,所以

$$\mathcal{E}_{Oab} = \mathcal{E}_{ab} = \int_a^b \mathbf{E}_{\text{感}} \cdot d\mathbf{l}$$

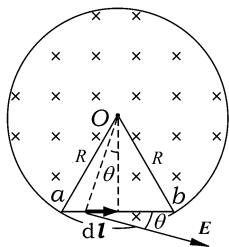


图 10-1

我们已知在圆柱形空间内任意半径  $r$  处感生电场的数值为  $\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$ ,方向为以  $O$  为圆心,以  $r$  为半径的圆的切线方向,此题为逆时针方向.将其代入上式中有

$$\mathcal{E}_{ab} = \int_a^b \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \cdot \cos \theta dl$$

由几何关系可知,  $\cos \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} R}{r}$ , 所以

$$\mathcal{E}_{ab} = \int_a^b \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{dB}{dt} R \cdot dl = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{dB}{dt} R^2$$

因为  $\mathcal{E}_{0ab} = \mathcal{E}_{ab} > 0$ , 所以所求线圈中的电动势沿逆时针方向.

**解法二** 用法拉第电磁感应定律计算

设均匀磁场为  $B$ , 则通过正三角形面积  $S$  内的磁通量为

$$\Phi_m = B \cdot S = \frac{R}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R \cdot B = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 B$$

由法拉第电磁感应定律可得三角形线圈内的感应电动势大小为

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{dB}{dt} R^2$$

由楞次定律可知感应电动势的方向沿  $Oab$  方向.

**说明** 上面所用的两种方法是计算感生电动势的基本方法. 判断感生电动势的方向时既可由楞次定律直接判断, 也可以用数学计算得到感生电动势的方向. 如本题第一种解法用计算得出  $\mathcal{E}_{ab}$  的方向; 第二种解法则用楞次定律直接判断得到.

**10-2** 如图 10-2 所示, 一个半径为  $a$  的小线圈, 起初和一个半径为  $b$  ( $a \ll b$ ) 的大线圈共面并同心, 大线圈通入一恒定电流  $I_2$  并保持不动, 而小线圈以角速度  $\omega$  绕直径转动. 小线圈的电阻为  $R$ , 其感抗可以忽略不计. 试求:

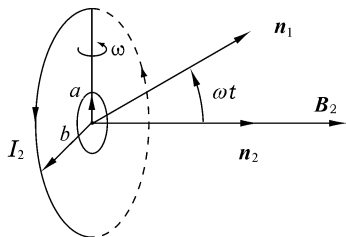


图 10-2

- (1) 两线圈的互感系数;
- (2) 小线圈中的电流 (表示成时间的函数);
- (3) 大线圈的感生电动势 (表示成时间的函数).

**解** (1) 设小线圈为线圈 1, 大线圈为线圈 2. 线圈 2 在其中心处所产生的磁感应强度为  $B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2b}$ . 由题意知  $a \ll b$ , 线圈 1 所在处的磁场可视为均匀磁场. 则通过线圈 1 的磁通量为

$$\psi_{12} = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{S}_1 = B_2 S_1 \cos \theta = \left( \frac{\mu_0 I_2 \pi a^2}{2b} \right) \cos \omega t$$

式中角  $\theta = \omega t$  为  $t$  时刻两线圈平面法线之间的夹角. 则两线圈的互感系数为

$$M = \frac{\psi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b} \cos \omega t$$

(2) 由法拉第电磁感应定律, 得小线圈中的感应电动势为

$$\mathcal{E}_1 = - \frac{d\psi_{12}}{dt} = \frac{\mu_0 I_2 \pi a^2}{2b} \omega \sin \omega t$$

故小线圈中的电流为

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R} = \left( \frac{\mu_0 I_2 \pi a^2}{2 b R} \right) \omega \sin \omega t$$

(3)由式(1)和(2)知,小线圈中的电流  $I_1$  所产生的磁场穿过大线圈的磁通量为

$$\begin{aligned} \phi_{21} &= M I_1 = \left( \frac{\mu_0 \pi a^2}{2 b} \right)^2 \frac{I_2}{R} \omega \sin \omega t \cos \omega t \\ &= \left( \frac{\mu_0 \pi a^2}{2 b} \right)^2 \frac{I_2}{R} \omega \frac{\sin 2 \omega t}{2} \end{aligned}$$

由法拉第电磁感应定律得大线圈中的感生电动势为

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d \phi_{21}}{dt} = - \left( \frac{\mu_0 \pi a^2 \omega}{2 b} \right)^2 \frac{I_2}{R} \cos 2 \omega t \quad (3)$$

**说明** 用  $M = \frac{\phi_{21}}{I_1}$  或  $M = \frac{\phi_{12}}{I_2}$  均可计算互感系数,但选择哪一个线圈通电,计算的难易程度不同,本题选择给大线圈通电方便于计算.本题中因为小线圈相对于大线圈转动,即二线圈的相对位置是变化的,所以互感系数  $M$  成为变量;另外,因为大线圈中的电流不随时间变化,所以不会产生自感电动势.若电流  $I_2$  是时间的函数,则在大线圈的感生电动势中应加上自感电动势.

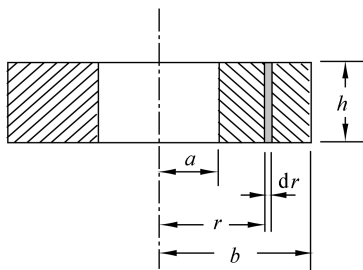


图 10-3

**10-3** 一环形螺线管,共  $N$  匝,横截面为长方形,其尺寸如图所示.试证此螺线管的自感系数为

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

**证法一** 假设螺线管中通有电流  $I$ ,则通过长方形截面的磁通量为

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_a^b B h dr = \int_a^b \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

由自感定义,得

$$L = \frac{N \Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

**证法二** 由安培环路定理,有

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

又

$$dV = 2\pi r dr h$$

所以管内磁场能量为

$$\begin{aligned} W &= \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \int_a^b \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{NI}{2\pi r} \right)^2 2\pi r h dr \\ &= \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

与能量公式  $W = \frac{1}{2} LI^2$  比较, 可得

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

**说明** 通过计算, 可以看出自感系数  $L$  是一个与电流  $I$  无关, 仅由回路的匝数、几何形状和大小及周围介质的磁导率决定的物理量. 在此, 我们总结以上两种求解自感系数的方法如下:

方法一: ① 在被研究的线圈回路中, 假设通入电流为  $I$ ;

② 根据电流  $I$  及其分布, 求出它所产生的磁感应强度  $B$  的分布;

③ 求出该磁场在线圈自身回路中穿过的磁链数  $\psi$ ;

④ 将  $I$ 、 $\psi$  代入公式  $L = \frac{\psi}{I}$  求出自感系数.

方法二: ①、②同方法一;

③ 利用  $W = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu} dV$  求出磁场能量;

④ 将磁场能量与  $W = \frac{1}{2} LI^2$  比较可得  $L$ .

另外, 如果已知电流的变化率  $\frac{dI}{dt}$  和自感电动势  $\mathcal{E}$ , 或者通过其它条件能将  $\frac{dI}{dt}$

及  $\mathcal{E}$  求出, 则用公式  $L = \frac{\mathcal{E}}{\frac{dI}{dt}}$  也可求出自感系数, 这种方法被广泛地应用于实验测

量  $L$ .

### 三、习题详解

#### 10.1 选择题

(1) 两个闭合的金属环, 穿在一光滑的绝缘杆上, 如习题图所示. 当条形磁铁 N 极自右向左插向圆环时, 两圆环的运动是 (C)

- (A) 边向左移动边分开;
- (B) 边向右移动边合拢;
- (C) 边向左移动边合拢;
- (D) 同时同向运动.

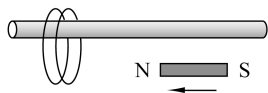


图 10.1 (1)

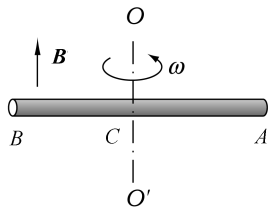
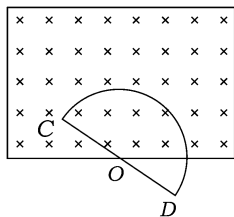


图 10.1 (2)

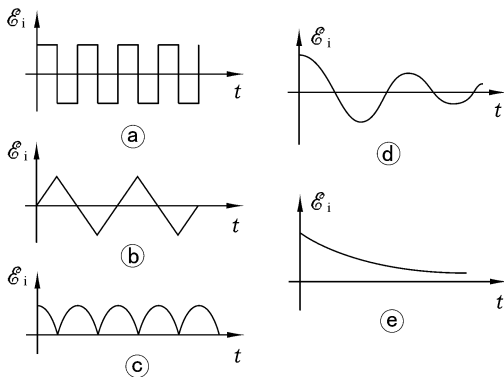
(2) 导体棒  $AB$  在均匀磁场中绕  $OO'$  轴匀角速度转动. 磁感应强度为  $B$ , 方向平行  $OO'$  轴, 角速度为  $\omega$ .  $OO'$  轴垂直于  $AB$  且通过其中点  $C$ , 棒长为  $l$ , 如图所示.  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点的电势以  $u_A$ 、 $u_B$ 、 $u_C$  表示, 则(A)和(C)是正确的.

- (A)  $u_A > u_C$ ;
- (B)  $u_C > u_A$ ;
- (C)  $u_B > u_C$ ;
- (D)  $u_B < u_C$ .

(3) 一半圆形的闭合金属导线, 绕轴  $O$  在矩形均匀分布稳恒磁场中作逆时针方向匀速转动, 如图 10.1 (3a) 所示. 图 10.1 (3b) 中哪一条曲线能表示导线中感应电动势  $\mathcal{E}_i$ - $t$  的函数关系? (Ⓐ)



(a)



(b)

图 10.1 (3)

(4) 如图 10.1 (4) 所示, 在圆形均匀分布的磁场中, 磁场的磁感应强度变化率  $\frac{dB}{dt} < 0$ , 在磁场中有三条导线, 分别为直线  $\overline{ab}$ 、曲线  $acb$  和折线  $acb$ , 导线中感应电动势最大的是(曲线  $acb$ )、最小的是(直线  $\overline{ab}$ ).

(5)  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{E}_v$  分别表示静电场和有旋电场的电场强度, 下列关系式中正确的是 (A, D)

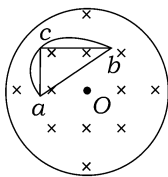


图 10.1 (4)

- (A)  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ; (B)  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$ ;  
(C)  $\oint \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{l} = 0$ ; (D)  $\oint \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{l} \neq 0$ .

## 10.2 填空题

(1) 一导线被弯折成图 10.2(1) 所示的扇形回路, 两半径  $ac$  与  $cb$  长为  $l$ , 夹角为  $\theta$ , 在垂直纸面的均匀磁场中按图示方向运动, ①  $cb$  段上的动生电动势  $\mathcal{E}_{cb}$  为  $vBl\cos\theta$ ; ②  $adb$  段上的动生电动势  $\mathcal{E}_{adb}$  的大小和方向为  $vBl(1-\cos\theta)$ .

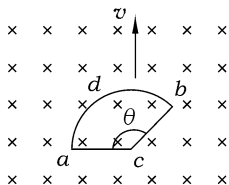


图 10.2(1)

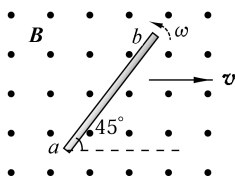


图 10.2(2)

(2) 长为  $l$  的导体棒, 放在磁感应强度为  $B$  的均匀磁场中, 棒与磁场垂直, 见图 10.2(2). ① 当棒在垂直于磁场平面内、与选定的参考线  $45^\circ$  角, 以速度  $v$  平行于参考线向右运动时, 棒两端的动生电动势  $\mathcal{E}_{ab}$  为  $-\frac{\sqrt{2}}{2} vBl$ ; ② 当棒以角速度  $\omega$  绕  $a$  点运动时, 棒两端的动生电动势  $\mathcal{E}_{ab}$  为  $\frac{1}{2} \omega Bl^2$ .

(3) 一宽为  $l$  的金属框架, 放在均匀磁场  $B$  中, 如图 10.2(3) 所示, 一长为  $l$ , 质量为  $m$  的导体杆  $ab$  可在框架上无摩擦地滑动, 现给导体杆一向右的初速度  $v_0$ , 当导体棒的瞬时速度为  $v$  时, 其加速度的大小为  $a = \frac{B^2 l^2 v}{mR}$ , 方向为向左,  $v$  随时间  $t$  变化的函数关系为  $v = v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t}$ , 回路中的感应电流  $i = \frac{Bl}{R} v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t}$ . 若忽略辐射引起的能量损失, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 电阻  $R$  放出总焦耳热为  $\frac{1}{2} m v_0^2$ .

(4) 一无限长导线通以  $I = I_0 e^{-\alpha t}$  的电流, 式中  $I_0$  和  $\alpha$  均为常量, 紧靠长直线有一矩形线圈, 长直导线与线圈共面, 直导线和线圈的互感系数为  $\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln 3$ ; 线圈内的互感电动势为  $\frac{\mu_0 b}{2\pi} \alpha I_0 \ln 3 e^{-\alpha t}$ .

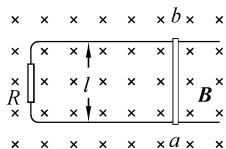


图 10.2(3)

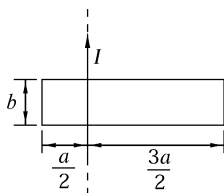


图 10.2(4)

(5) 如果均匀电场中的能量密度与一个  $B=0.5\text{T}$  的磁场中所具有的能量密度相同, 则电场强度的大小为  $1.5 \times 10^8 \text{ N/C}$  .

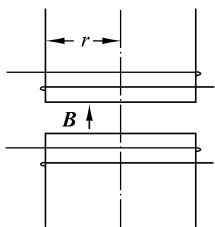


图 10.3

**10.3** 一半径为  $r=0.20\text{ m}$ , 具有轴对称的电磁铁, 如图 10.3 所示, 在它的半径范围内磁场可以认为是均匀的, 超过此半径, 磁场可以忽略不计, 今欲在不击穿空气的情况下, 使磁场的磁感应强度在尽可能短的时间  $\tau$  内, 由零线性的升高至  $10\text{T}$ , 试确定  $\tau$ . 设空气击穿电场强度为  $3 \times 10^6 \text{ V/m}$  .

**解** 变化的磁场产生有旋电场, 由于磁场分布具有轴对称性, 所以产生的有旋电场的磁力线是以轴上各点为圆心的同心圆. 由感生电动势的公式

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

可知

$r' < r$  时

$$E_v \cdot 2\pi r' = \frac{\partial B}{\partial t} \pi r'^2$$

$$E_v = \frac{r'}{2} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{r'}{2} \frac{10-0}{\tau} = \frac{5r'}{\tau}$$

$r' > r$  时

$$E_v \cdot 2\pi r' = \frac{\partial B}{\partial t} \pi r^2$$

$$E_v = \frac{r^2}{2r'} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{5r^2}{\tau r'}$$

由此得

$$E_{v \max} = \frac{5r}{\tau} \leq E_{\text{击穿}}$$

故

$$\tau_{\min} = \frac{5r}{E_{\text{击穿}}} = \frac{5 \times 0.20}{3 \times 10^6} = 3.33 \times 10^{-7} (\text{s})$$

**10.4** 在地球南半球某地,地磁场的磁感应强度大小  $B=42\text{ }\mu\text{T}$ ,指向向上并与铅垂线夹角为  $57^\circ$ ,见 10.4 图,试计算通过平面上面积为  $2.5\text{ m}^2$  的磁通量.

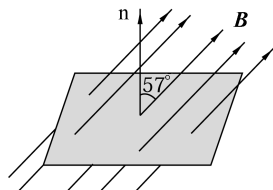


图 10.4

**解** 取向上的方向为平面法线正方向,则

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \iint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_s B dS \cos\theta \\ &= B \cos\theta \iint_s dS = B S \cos\theta = 42 \times 10^{-6} \times 2.5 \times \cos 57^\circ \\ &= 5.7 \times 10^{-5} (\text{Wb})\end{aligned}$$

**10.5** 在高频电视天线线圈直径  $d=11\text{ cm}$ ,电视信号的匀强磁场方向与线圈平面垂直.时刻  $t$ ,磁感应强度大小的变化率  $\frac{dB}{dt}=0.6\text{ T/s}$ ;试求天线线圈中的感应电动势.

**解** 由法拉第电磁感应定律知:

$$\begin{aligned}|\mathcal{E}| &= \left| -\frac{d\Phi_m}{dt} \right| = \left| -\frac{d}{dt} \iint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right| = \frac{d}{dt} \iint_s B dS = \frac{dB}{dt} \iint_s dS = \frac{dB}{dt} \cdot \pi r^2 \\ &= 0.6 \times 3.14 \times \left( \frac{11 \times 10^{-2}}{2} \right)^2 \\ &= 5.7 \times 10^{-3} (\text{V})\end{aligned}$$

**10.6** 电阻为  $R=20\text{ m}\Omega$ 、边长为  $20\text{ cm}$  的正方形线圈;它的平面与匀强磁场方向垂直,磁感应强度大小为  $B=2.0\text{ T}$ .如果在线圈的相对两边拉线圈,则另两相对边将自动相互靠近,以致线圈面积逐渐减小.设线圈面积在时间  $\Delta t=0.20\text{ s}$  内减小到零.试求:(1)线圈中的平均感应电动势;(2)在  $\Delta t$  时间内线圈中平均感应电流.

**解** (1)取线圈的环绕正方向与  $\mathbf{B}$  满足右螺旋法则

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \iint_s B dS = -B \iint_s \frac{dS}{dt}$$

所以

$$\mathcal{E}_i = -B \cdot \frac{0 - S_0}{\Delta t} = 2.0 \times \frac{0.2 \times 0.2}{0.20} = 0.4 (\text{V})$$

$$(2) i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{0.4}{20 \times 10^{-3}} = 2.0 \times 10^5 (\text{A})$$

**10.7** 将半径  $r=3.7\text{ cm}$  的圆形闭合回路沿其直径  $ab$  折叠成相互垂直的两个半圆,匀强磁场的磁感应强度大小  $B=76\text{ mT}$ ,指向垂直于直径  $ab$  并与两半圆平面成  $45^\circ$  角,见图,磁感应强度在  $4.5\text{ ms}$  内均匀的减小到零.试求:(1)回路中感

应电动势的大小和方向;(2)回路中感应电流的方向。

**解** (1)取  $acbdba$  方向为绕行正方向,则通过闭合回路的磁通量为

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_1 + \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_2 \\ &= BS_1 \cos 135^\circ + BS_2 \cos 135^\circ = BS \cos 135^\circ\end{aligned}$$

由法拉第电磁感应定律知回路中的感应电动势为

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\Phi_m}{dt} = -S \cos 135^\circ \frac{dB}{dt} = -\pi r^2 \cos 135^\circ \times \frac{0-B}{\Delta t} \\ &= 3.14 \times (3.7 \times 10^{-2})^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{0-76 \times 10^{-3}}{4.5 \times 10^{-3}} \\ &= -5.1 \times 10^{-2} (\text{V}) < 0\end{aligned}$$

方向与所取绕行正方向相反,即沿  $adbca$  方向。

(2)回路中感应电流方向为  $adbca$  方向。

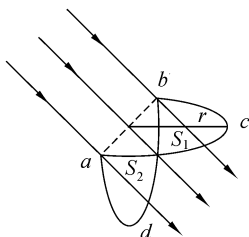


图 10.7

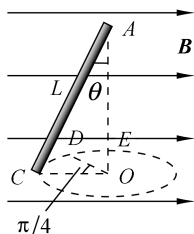


图 10.8

**10.8** 长为  $L$  的直导线  $AC$ ,在均匀磁场中与竖直方向  $AO$  夹角为  $\theta$ ,以角速度  $\omega$  沿顺时针方向转动,见图.试求:

(1) 当转到图示位置时,  $A, C$  两点间的动生电动势的大小和方向;

(2) 当  $C$  点转到  $D$  点处时,  $A, C$  两点间的电动势的大小。

**解** (1)  $\mathcal{E}_{AC} = \int_A^C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^L v B \sin \varphi \cos \theta dl$

式中  $\varphi$  为  $\mathbf{v}$  与  $\mathbf{B}$  的夹角,此处  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $v = \omega l \sin \theta$ ,所以

$$\mathcal{E}_{AC} = B \omega \sin \theta \cos \theta \int_0^L l dl = \frac{1}{2} B \omega L^2 \cos \theta \sin \theta$$

方向为由  $A$  指向  $C$ ,即  $A$  处电势低,  $C$  处电势高。

(2)在  $D$  点处,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,所以

$$\mathcal{E}_{AD} = B \omega \sin \theta \cos \theta \sin 45^\circ \int_0^L l dl = \frac{\sqrt{2}}{4} B \omega L^2 \cos \theta \sin \theta$$

**10.9** 质量为  $m$ , 宽为  $L$ , 电阻为  $R$  的导体线圈悬挂在  $aa'$  线以上、与纸面垂直向里的匀强磁场中, 如图所示, 剪断悬挂处, 线圈加速下落直至达到一终极速率, 不计阻力, 试求终极速率(假定线圈足够长)。

**解** 释放线圈后, 线圈在重力作用下必加速下落, 在下落过程中线圈一边切割磁力线必产生感应电流, 感应电流会受到磁场向上的磁力的作用。这两种力相互作用的结果, 使线圈由加速运动逐渐趋于匀速直线运动, 此时的速度的大小即为终极速率。所以线圈达到终极速率时, 必有

$$mg = ILB$$

$$I = \frac{mg}{LB} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\int_L (v \times B) \cdot dl}{R} = \frac{1}{R} \int v B dl = \frac{v B L}{R}$$

故

$$v = \frac{mgR}{B^2 L^2}$$

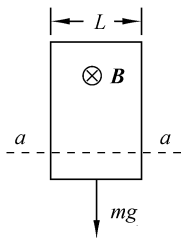


图 10.9

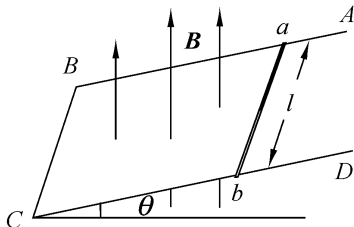


图 10.10

**10.10** 如图所示, 质量为  $M$ , 长度约为  $l$  的金属棒  $ab$  从静止开始沿倾斜的绝缘框架下滑, 设磁场  $B$  竖直向上, (1) 求棒内的动生电动势与时间的函数关系。设摩擦可忽略不计。(2) 如果金属棒  $ab$  沿光滑的金属框架下滑, 试求金属杆下滑时达到的稳定速度为多大? 回路电阻  $R$  已知。

**解** (1) 金属棒从绝缘框架下滑的加速度为  $a = g \sin \theta$ , 时刻  $t$  时的速度为  $v = at = gt \sin \theta$ 。金属棒下滑切割磁力线, 产生的感生电动势为

$$\mathcal{E} = \int_0^l (v \times B) \cdot dl = \int_0^l B v \cos \theta dl = Bl g \sin \theta \cos \theta \cdot t$$

(2) 对于金属框架, 金属棒  $ab$  中产生的  $\mathcal{E}$  将在  $aBCb$  回路中产生感应电流

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B v l \cos \theta}{R}$$

于是金属棒  $ab$  受到沿斜面向上的安培力

$$F_m = Bl \cos \theta = \frac{(Bl \cos \theta)^2}{R} v$$

金属棒沿斜面下滑的运动方程为

$$Mg \sin \theta - \frac{(Bl \cos \theta)^2}{R} v = M \frac{dv}{dt}$$

解此微分方程,并代入初始条件  $t=0, v=0$ , 可得

$$v = \frac{MgR \sin \theta}{(Bl \cos \theta)^2} (1 - e^{-(Bl \cos \theta)^2 t / MR})$$

当  $t \rightarrow \infty$  时达到稳定速度

$$v_f = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{MgR \sin \theta}{(Bl \cos \theta)^2} (1 - e^{-(Bl \cos \theta)^2 t / MR}) = \frac{MgR \sin \theta}{(Bl \cos \theta)^2}$$

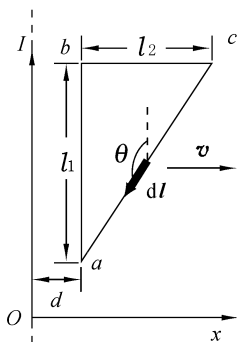


图 10.11

**10.11** 如图 10.11 所示,长直载流为  $I$  的导线与一直角导线回路  $abc$  共面,长为  $l_1$  的边  $ab$  起始时与导线的距离为  $d$ ,边  $bc$  长为  $l_2$ ,现使回路以速度  $v_1$  垂直于长直导线向右运动.试求在时刻  $t$  回路中的动生电动势.

**解** 本题为导体在恒定的非均匀磁场中运动,产生动生电动势的情况.利用  $\mathcal{E} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$  分别求出导体的三个边中的动生电动势,即可得整个回路中的动生电动势,即

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_a^b (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \int_b^c (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \int_c^a (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_a^b v_1 B dl + 0 + \int_c^a v_1 B dl \cos \theta \\ &= v_1 \int_0^{l_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi(d + v_1 t)} dl + v_1 \int_{l_2 + d + v_1 t}^{d + v_1 t} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dl \cos \theta \end{aligned}$$

其中,第二项中  $dl = -\frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{l_2} dx$ ,  $\cos \theta = -\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}$ , 所以

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{\mu_0 I v_1 l_1}{2\pi(d + v_1 t)} - \frac{\mu_0 I v_1}{2\pi} \cos \theta \frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{l_2} \int_{d + l_2 + v_1 t}^{d + v_1 t} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{\mu_0 I v_1 l_1}{2\pi(d + v_1 t)} + \frac{\mu_0 I v_1}{2\pi} \frac{l_1}{l_2} \ln \frac{d + v_1 t}{d + l_2 + v_1 t} \end{aligned}$$

**10.12** 如图 10.12 所示,长直载流  $I$  导线与一导体棒  $OM$  共面,棒长为  $l$ .今棒以角速度  $\omega$  绕端点  $O$  转动,导线至点  $O$  的距离为  $r_0$ .试分别计算出棒转至与导

线平行和垂直两位置时,棒中动生电动势的大小和方向.

**解** 与导线平行时:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int_0^M (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^l vB \cdot dl \\ &= \int_0^l v \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} dl = \int_0^l \omega r \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} dr = \frac{\mu_0 I \omega l^2}{4\pi r_0} > 0\end{aligned}$$

所以  $\mathcal{E}$  的方向为由  $O$  指向  $M$ , 即  $M$  点的电势高.

与导线垂直时:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int_0^N (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^l vB dl \\ &= \int_0^l \omega r \frac{\mu_0 I}{2\pi(r_0 + r)} dr = \frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left( l - r_0 \ln \frac{r_0 + l}{r_0} \right) > 0\end{aligned}$$

所以此时  $\mathcal{E}$  的方向为从  $O$  指向  $N$ , 即  $N$  点电势高.

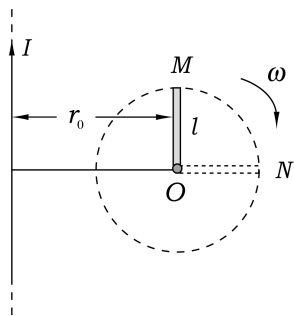


图 10.12

**10.13** 均匀磁场  $\mathbf{B}$  被限制在半径  $R=0.10$  m 的无限长圆柱空间内, 方向垂直纸面向外, 设磁场以  $\frac{dB}{dt}=100$  T/s 的匀速率增加, 已知  $\theta=\frac{\pi}{3}$ ,  $Oa=Ob=0.04$  m, 试求等腰梯形导线框  $abcd$  内的感应电动势, 并判断感应电流的方向.

**解** 根据法拉第电磁感应定律, 感生电动势的大小为

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{d\Phi}{dt} = \frac{dB}{dt} S = \frac{dB}{dt} \left( \frac{1}{2} R^2 \theta - \frac{1}{2} \overline{ab} \cdot h \right) \\ &= \left( \frac{100}{6} \pi - 4\sqrt{3} \right) \times 10^{-2} \text{ V}\end{aligned}$$

式中  $h$  为由  $O$  到  $\overline{ab}$  的垂直距离, 感应电流沿顺时针方向.

此题也可用  $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{l}$  公式直接积分求解.

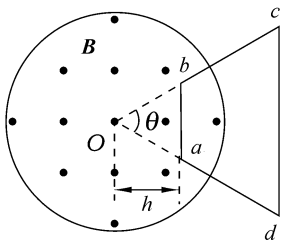


图 10.13

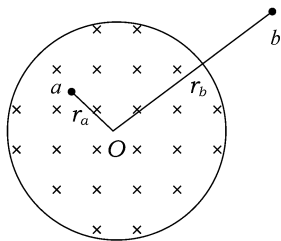


图 10.14

**10.14** 半径  $R=10$  cm 圆柱形空间的横截面, 如图 10.4 所示, 圆柱形内有匀

强磁场,其磁感应强度按  $\frac{dB}{dt}=0.1 \text{ T/s}$  的规律变化,已知  $r_a=5 \text{ cm}$ ,  $r_b=15 \text{ cm}$ . 试求  $a$ 、 $b$  两点的有旋电场.

**解** 在圆柱形内,即  $r < R$  的区域,取以  $O$  为圆心,以  $r_a$  为半径的圆形闭合路径,按逆时针方向进行积分,由感生电动势公式可知

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{l} = E_v \cdot 2\pi r_a = \frac{dB}{dt} \cdot \pi r_a^2$$

所以

$$E_{va} = \frac{r_a}{2} \frac{dB}{dt} = \frac{5 \times 10^{-2}}{2} \times 0.1 = 2.5 \times 10^{-3} \text{ (N/C)}$$

方向垂直于  $Oa$  且沿逆时针方向.

同样,以  $O$  为圆心,以  $r_b$  为半径作圆形闭合路径,按逆时针方向进行积分,由感生电动势公式知

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{l} = E_v \cdot 2\pi r_b = \frac{dB}{dt} \cdot \pi R^2$$

$$E_v = \frac{R^2}{2r_b} \frac{dB}{dt} = \frac{(10 \times 10^{-2})^2}{2 \times 15 \times 10^{-2}} \times 0.1 = 3.3 \times 10^{-3} \text{ (N/C)}$$

方向垂直于  $Ob$  且沿逆时针方向.

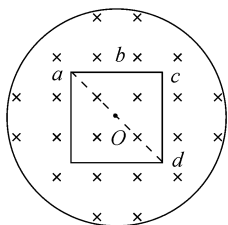


图 10.15

**10.15** 圆柱形空间的横截面如图所示,圆柱形

内匀强磁场的磁感应强度按  $\frac{dB}{dt}=0.1 \text{ T/s}$  的规律变化.管内有一边长  $l=0.2 \text{ m}$  的正方形导体回路,正方形中心在圆柱的轴线上, $b$  为  $ac$  的中点,试求:(1)  $a$ 、 $b$  两点的有旋电场强度;(2)  $abcd$  折线上的感生电动势.

**解** (1) 以  $O$  为圆心,分别以  $Oa$ 、 $Ob$  为半径作圆形闭合回路,按逆时针方向进行积分,则

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{l} = E_v \cdot 2\pi r = \frac{dB}{dt} \pi r^2$$

所以

$$E_v = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

$$E_{va} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}l}{2} \frac{dB}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 0.2 \times 0.1 = 7.1 \times 10^{-3} \text{ (V/m)}$$

方向垂直于  $Oa$  且沿逆时针方向.

$$E_{vb} = \frac{\frac{1}{2}l}{2} \frac{dB}{dt} = \frac{1}{4} \times 0.2 \times 0.1 = 5 \times 10^{-3} \quad (\text{V/m})$$

方向垂直于  $ob$  且沿逆时针方向.

(2) 连接时  $ad$ , 由  $abcd$  构成三角形闭合回路, 由法拉第电磁感应定律知

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \iint_s B dS \\ &= -\frac{dB}{dt} \iint_s dS = -\frac{dB}{dt} \frac{1}{2} l^2 \\ &= \mathcal{E}_{abcd} + \mathcal{E}_{da} \end{aligned}$$

对  $da$  段, 由于  $\mathbf{E}_v$  与  $d\mathbf{l}$  处处垂直, 所以  $\mathcal{E}_{da} = \int \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{l} = 0$

$$\mathcal{E}_{abcd} = -\frac{dB}{dt} \cdot \frac{1}{2} l^2 = -0.1 \times \frac{1}{2} \times 0.2^2 = -2 \times 10^{-3} \quad (\text{V})$$

方向为与积分绕行方向相反, 即沿  $dca$  方向.

**10.16** 面积为  $S$ 、电阻为  $R$  的天线线圈平面垂直于磁感应强度为  $\mathbf{B}$  的匀强磁场. 在时间  $\Delta t$  内, 磁感应强度线性地减小到零. 试计算线圈在  $\Delta t$  时间内耗散的势能.

**解** 由法拉第电磁感应定律知电势大小为

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}| &= \left| -\frac{d\Phi_m}{dt} \right| = \frac{dB}{dt} S = \frac{B-0}{\Delta t} \cdot S = \frac{BS}{\Delta t} \\ i &= \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BS}{R\Delta t} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} dq &= idt = \frac{BS}{R\Delta t} dt \\ E_{\text{势}} &= \int \mathcal{E} dq = \int_0^{\Delta t} \frac{BS}{\Delta t} \frac{BS}{R\Delta t} dt = \left( \frac{BS}{\Delta t} \right)^2 \frac{\Delta t}{R} = \frac{B^2 S^2}{R\Delta t} \end{aligned}$$

**10.17** 有一由金属丝绕成的没有铁芯的螺绕环, 单位长度上的匝数  $n=5000 \text{ m}^{-1}$ , 截面为  $S=2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ . 金属丝两端和电源  $\mathcal{E}$  以及可变电阻串联成一闭合电路, 在环上再绕一线圈  $A$ , 匝数  $N=5$ , 电阻  $R=2.0 \Omega$ , 如图 10.17 所示. 调节可变电阻, 使通过螺绕环的电流强度  $I$  每秒降低  $20 \text{ A}$ . (1) 求线圈  $A$  中产生的感应电动势  $\mathcal{E}$  及感应电流  $i$ ; (2) 求  $2 \text{ s}$  钟内通过线圈  $A$  的感应电量  $q$ .

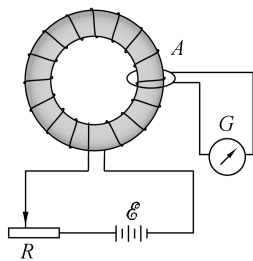


图 10.17

**解** (1) 若螺绕环中的电流为  $I$ , 则可知螺绕

环中的磁感应强度  $B = \mu_0 nI$ , 所以线圈  $A$  中的感应电动势大小为

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= NS_{\text{螺}} \frac{dB}{dt} = NS_{\text{螺}} \mu_0 n \frac{dI}{dt} \\ &= 5 \times 2 \times 10^{-3} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5000 \times 20 \\ &= 1.26 \times 10^{-3} \quad (\text{V})\end{aligned}$$

感应电流为

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{1.26 \times 10^{-3}}{2.0} = 6.3 \times 10^{-4} \quad (\text{A})$$

(2) 感应电量为

$$q = \int Idt = I\Delta t = 2 \times 6.3 \times 10^{-4} = 1.26 \times 10^{-3} \quad (\text{C})$$

**10.18** 某地地球磁场的磁感应强度大小  $B = 0.590 \text{ Gs}$  ( $1 \text{ T} = 10^4 \text{ Gs}$ ), 方向向下与水平面夹角为  $70.0^\circ$ , 半径为  $10.0 \text{ cm}$ , 总电阻为  $85.0 \Omega$ , 有 1000 匝水平放置的圆线圈与一内阻为  $140 \Omega$  电表相联, 今使线圈绕其直径翻转  $180^\circ$  又回到水平位置, 试计算在翻转过程中, 通过电表的电量大小.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad q &= \left| \int idt \right| = \left| \int \frac{\mathcal{E}}{R} dt \right| = \left| \int \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} dt \right| = \int \frac{1}{R} d\Phi = \left| \frac{1}{R} (\Phi_2 - \Phi_1) \right| \\ &= \frac{1}{R} [nBS \cos 20^\circ - nBS \cos(90^\circ + 70^\circ)] = \frac{2nBS}{R} \cos 20^\circ \\ &= \frac{2 \times 1000 \times 0.59 \times 10^{-4} \times \pi \times (10 \times 10^{-2})^2}{85.0 + 140} \cos 20^\circ \\ &= 1.55 \times 10^{-5} \quad (\text{C})\end{aligned}$$

**10.19** 在半径  $r_1 = 20.0 \text{ cm}$  和  $r_2 = 30.0 \text{ cm}$  的圆形区域  $R_1$  和  $R_2$  中有匀强磁场.  $R_1$  中的磁感应强度大小  $B_1 = 50.0 \text{ mT}$ , 方向垂直纸面向里;  $R_2$  中的  $B_2 = 75.0 \text{ mT}$ , 方向垂直纸面向外 (不考虑两磁场边缘情况), 这两个磁场按同一速率  $8.50 \text{ mT/s}$  减小, 试对习题 10.19 图上的三条路径分别计算  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ .

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \oint_{L_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{d}{dt} \iint_S B_1 dS = \frac{dB_1}{dt} \pi r_1^2 \\ &= (-8.50 \times 10^{-3}) \times 3.14 \times (20.0 \times 10^{-2})^2 \\ &= -1.07 \times 10^{-3} \quad (\text{V})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\oint_{L_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S} = \frac{dB_2}{dt} \pi r_2^2 \\ &= (-8.5 \times 10^{-3}) \times 3.14 \times (30.0 \times 10^{-2})^2 \\ &= -2.40 \times 10^{-3} \quad (\text{V})\end{aligned}$$

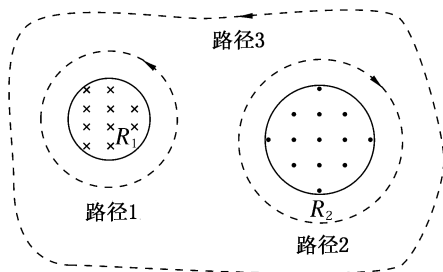


图 10.19

$$\begin{aligned}\oint_{L_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \iint_{R_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} + \iint_{R_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S} \right) = \frac{dB}{dt} (\pi r_1^2 - \pi r_2^2) \\ &= -8.5 \times 10^{-3} \times 3.14 \times [(20 \times 10^{-2})^2 - (30 \times 10^{-2})^2] \\ &= 1.33 \times 10^{-3} \quad (\text{V})\end{aligned}$$

**10.20** 一螺绕环,横截面的半径为  $a$ ,中心线的半径为  $R$ ,  $R \gg a$ ,其上由表面绝缘的导线均匀地密绕两个线圈,一个  $N_1$  匝,另一个  $N_2$  匝,试求:

- (1) 两个线圈的自感  $L_1$  和  $L_2$ ;
- (2) 两个线圈的互感  $M$ ;
- (3)  $M$  与  $L_1$  和  $L_2$  的关系.

**解** (1) 设匝数为  $N_1$  的螺绕环中通以电流  $I_1$ ,它在本螺绕环中产生的磁感应强度为

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 = \frac{\mu_0 N_1}{2\pi R} I_1$$

故

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} = \frac{N_1 B_1 S_1}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1^2 \pi a^2}{2\pi R} = \frac{\mu_0 N_1^2 a^2}{2R}$$

同理

$$L_2 = \frac{N_2 \Phi_2}{I_2} = \frac{\mu_0 N_2^2 a^2}{2R}$$

(2) 设螺绕环 1 中通电流  $I_1$ ,它在螺绕环 2 中产生的总磁通量为  $\Phi_{21} = N_2 B_1 S_2 = N_2 \mu_0 n_1 I_1 \pi a^2$ ,故互感系数为

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = N_2 \mu_0 n_1 \pi a^2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 a^2}{2R}$$

(3)  $M = \sqrt{L_1 L_2}$  此两线圈为完全耦合.

**10.21** 在一纸筒上绕有两个相同的线圈  $ab$  和  $a'b'$ ,两个线圈的自感都是

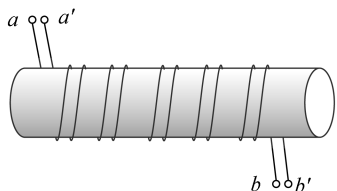


图 10.21

0.05 H, 如图所示. 试求:

(1)  $a$  和  $a'$  相接时,  $b$  和  $b'$  间的自感;

(2)  $a'$  与  $b$  相接时,  $a$  和  $b'$  间的自感.

**解** (1) 当  $a'$  与  $a$  相接, 在  $b$  与  $b'$  之间通以电流时, 两线圈中的电流等值反向, 穿过线圈的总磁通量为 0, 故

$$L = \frac{\Phi}{I} = 0$$

(2)  $a'$  与  $b$  相接, 对  $a$  和  $b'$  两端, 则为两个线圈顺接串联, 此时穿过线圈的总磁通量为

$$\Phi = \Phi_{11} + \Phi_{12} + \Phi_{21} + \Phi_{22} = L_1 I_1 + M_{12} I_2 + M_{12} I_1 + L_2 I_2$$

此处  $I_1 = I_2 = I$ ,  $M_{12} = M_{21} = M = \sqrt{L_2 L_1}$ , 所以

$$\begin{aligned} L &= \frac{\Phi}{I} = L_1 + 2M + L_2 \\ &= 0.05 + 2 \times \sqrt{(0.05)^2} + 0.05 = 0.2 \text{ H} \end{aligned}$$

**10.22** 如图 10.22(a)所示, 两条平行长直载流输电导线, 和一矩形的导线框共面, 已知两导线中的电流同为  $I = I_0 \sin \omega t$ , 但方向相反, 导线框的长为  $a$ , 宽为  $b$ . 试求:

(1) 输电回路与导线框之间的互感系数;

(2) 回路中的感应电动势.

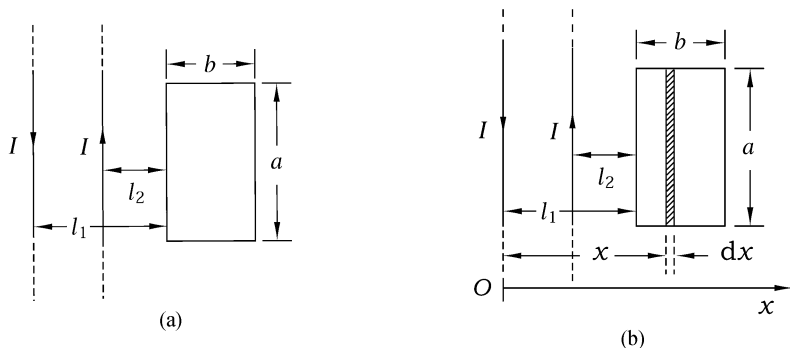


图 10.22

**解** (1) 建立如图 10.22(b)所示的坐标系, 两条载流长直导线在空间一点产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{x} - \frac{1}{x - (l_1 - l_2)}$$

通过线框的磁通量为

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int B a dx \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left( \int_{l_1}^{l_1+b} \frac{dx}{x} - \int_{l_1}^{l_1+b} \frac{dx}{x - l_1 + l_2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left( \frac{l_1 + b}{l_1} \cdot \frac{l_2}{l_2 + b} \right)\end{aligned}$$

所以互感系数为

$$\begin{aligned}M &= \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \left( \frac{l_1 + b}{l_1} \cdot \frac{l_2}{l_2 + b} \right) \\ (2) \quad \mathcal{E}_M &= -M \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \left( \frac{l_1 + b}{l_1} \cdot \frac{l_2}{l_2 + b} \right) \frac{dI}{dt} \\ &= -\frac{\mu_0 I_0 a \omega}{2\pi} \cos \omega t \ln \frac{l_2 (l_1 + b)}{l_1 (l_2 + b)}\end{aligned}$$

**10.23** 一截面为矩形的螺绕环,内、外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 高为  $h$ , 共有  $N$  匝, 螺绕环的轴处, 置一无限长直导线. 试求当螺绕环中通以  $I = I_0 \sin \omega t$  的交变电流时, 长直导线中的感应电动势.

**解** 设无限长直电流通以电流  $I$ , 则在螺绕环中产生的总磁通量为

$$\Phi = N \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = N \int_{R_1/2}^{R_2/2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

则长直导线对螺绕环的互感系数为

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

由于长直导线对螺绕环的互感系数与螺绕环对长直导线的互感系数相等, 所以当螺绕环通以  $I = I_0 \sin \omega t$  电流时, 长直导线中的感应电动势为

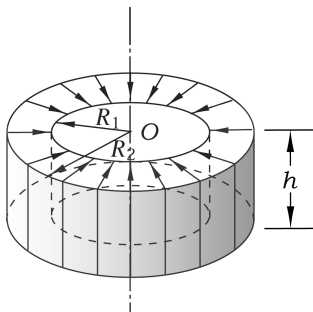


图 10.23

$$\mathcal{E} = -M \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 N h \omega I_0}{2\pi} \cos \omega t \ln \frac{R_2}{R_1}$$

**10.24** 一根同轴电缆由内圆柱体和与它同轴的外圆筒构成,内圆柱的半径为  $a$ ,圆筒的内、外半径为  $b$  和  $c$ .电流  $I$  由外圆筒流出,从内圆柱体流回.在横截面上电流都是均匀分布的.

(1)求下列各处每米长度内的磁通密度  $w_m$ :圆柱体内、圆柱体与圆筒之间、圆筒内、圆筒外;

(2)当  $a=1.0 \text{ mm}$ ,  $b=4.0 \text{ mm}$ ,  $c=5.0 \text{ mm}$ ,  $I=10 \text{ A}$  时,每米长度同轴电缆中储存多少磁能?

**解** (1)在  $r < a$  的圆柱体内,由安培环路定理得

$$H = \frac{Ir}{2\pi a^2}, \quad B = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2} \quad (\text{此处视导体内 } \mu_r = 1)$$

则

$$w_m = \frac{1}{2} BH = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4}$$

圆柱体内每米长度的磁场能量为

$$W_{m1} = \iiint w_m dV = \int_0^a \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4} 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

在  $b < r < a$  区域内

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

故此区域中

$$w_m = \frac{1}{2} BH = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^4}$$

此区域中每米长的磁场能量为

$$W_{m2} = \iiint w_m dV = \int_a^b \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

在  $c < r < b$  区域内,环形截面积为  $\pi(c^2 - b^2)$ ,此区域内单位截面积上的电流为  $\frac{I}{\pi(c^2 - b^2)}$ ,由安培环路定理

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H = \left[ I - \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} \pi(r^2 - b^2) \right]$$

知

$$H = \frac{I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

所以

$$w_m = \frac{1}{2} BH = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \left( \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right)^2$$

内外半径分别为  $b, c$  的环形柱筒内, 每米长度的磁场能量为

$$\begin{aligned} W_{m3} &= \iiint \frac{1}{2} BH dV = \int_b^c \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \left( \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right)^2 2\pi r dr \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi(c^2 - b^2)^2} \int_b^c \frac{(c^2 - r^2)^2}{r} dr \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi(c^2 - b^2)^2} \left( 4c^4 \ln \frac{c}{b} - 3c^4 + 4c^2 b^2 - b^4 \right) \end{aligned}$$

在  $r > c$  区域内,  $H=0, B=0$ , 所以  $w_m=0, W_m=0$

(2) 每米长度同轴电缆内储存的磁能为上述磁能之和

$$\begin{aligned} W &= W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[ \frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4(c^2 - b^2)^2} (4c^2 \ln \frac{c}{b} - 3c^4 + 4b^2 c^2 - b^4) \right] \\ &\approx 1.7 \times 10^{-5} \text{ J} \cdot \text{m}^{-1} \end{aligned}$$

**10.25** (1) 地球磁场的磁感应强度大小  $B=50 \mu\text{T}$ , 试计算地球磁场能量密度; (2) 在地球表面附近, 与地球半径相比小的距离范围内, 设地球磁场能量密度为常量, 试计算在地面与离地面 16 Km 间储藏的地球磁能。

解 (1)  $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(50 \times 10^{-6})^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 9.9 \times 10^{-4} \text{ (J/m}^3\text{)}$

$$\begin{aligned} (2) \quad W_m &= \int_R^{16 \times 10^3 + R} w_m dV = \int_R^{16 \times 10^3 + R} w_m 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{3} r^3 w_m \Big|_R^{16 \times 10^3 + R} \\ &= 8.1 \times 10^{15} \text{ (J)} \quad (R \text{ 为地球半径, } R = 6370 \text{ km}) \end{aligned}$$

**10.26** 设电荷在半径为  $R$  的圆形平行板电容器极板上均匀分布(边缘效应忽略不计). 当它接在圆频率为  $\omega$  的简谐交流电路中, 电流为  $i = I_0 \cos \omega t$ . 计算电容器极板间磁感应强度的分布(用  $r$  表示离极板轴线的距离)。

解 利用安培环路定律, 则对离轴线为  $r$  的各点, 有

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H = I_D = \frac{i}{\pi R^2} \pi r^2 = \frac{r^2}{R^2} i$$

所以

$$H = \frac{r I_0}{2\pi R^2} \cos \omega t$$

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 r I_0}{2\pi R^2} \cos \omega t$$

**10.27** 平行板电容器正方形极板的边长为 1.0 m, 如图 10.27 所示, 设 2.0 A 充电电流在极板间产生的匀强电场垂直于极板, 试求:

- (1)极板间的位移电流;(2)极板间的 $\frac{dE}{dt}$ ;(3)极板间,虚线区域的位移电流;  
(4)沿虚线路径的 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ .

**解** (1)由全电流安培环路定理 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + I_D$ 及极板间 $I = 0$ ,极板外 $I_D = 0$ ,知

$$I_D = \oint_L \mathbf{H} \cdot \mathbf{l} = I_{\text{外传}} = 2.0(\text{A})$$

(2)由 $I_D = \frac{d\Phi_D}{dt}$ ,  $\Phi_D = DS = \epsilon_0 ES$ 知

$$I_D = \frac{d(DS)}{dt} = \frac{d(\epsilon_0 ES)}{dt}$$

所以

$$\frac{dE}{dt} = \frac{I_D}{\epsilon_0 S} = \frac{2.0}{8.85 \times 10^{-12} \times 1.0^2} = 2.26 \times 10^{11} (\text{V/m} \cdot \text{s})$$

(3)假设极板间位移电流是均匀分布的,则

$$I'_D = \frac{I_D}{S} \cdot S' = \frac{2.0}{1.0^2} \times 0.5^2 = 0.5(\text{A})$$

(4)由 $\oint_{L_{\text{虚}}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I'_D$ ,  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$ 知

$$\oint_{L_{\text{虚}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I'_D = 4\pi \times 10^{-7} \times 0.5 = 2\pi \times 10^{-7} (\text{N} \cdot \text{A}^{-1})$$

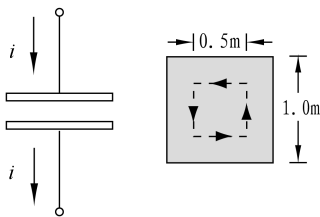


图 10.27

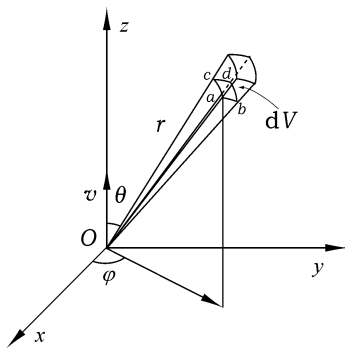


图 10.28

**10.28** 设电子是一半径为  $a$  的小球,电荷  $e$  分布在它的表面上.当电子以速度  $v$  运动时,电子在周围的空间建立磁场.计算磁场中的总能量.

**解** 在球面坐标中,设电子  $e$  在坐标原点处以速度  $v$  沿  $z$  轴运动,根据毕奥-

萨伐尔定律可得

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev \sin \theta}{r^2}$$
$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{ev \sin \theta}{4\pi r^2}$$

在  $r$  处取体积元

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

故磁场中的总能量为

$$\begin{aligned} W_m &= \iiint_V \frac{1}{2} BH dV \\ &= \frac{\mu_0}{2} \iiint_V \left( \frac{ev \sin \theta}{4\pi r^2} \right)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{\mu_0}{32\pi^2} e^2 v^2 \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{\mu_0}{32\pi^2} e^2 v^2 \left[ -\frac{1}{r} \right]_a^\infty \left[ -\frac{1}{3} \cos \theta (\sin^2 \theta + 2) \right]_0^\pi \left[ \varphi \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\mu_0 e^2 v^2}{12\pi a} \end{aligned}$$

# 第三篇 热 学

## 第 11 章 热力学基础

### 一、基本内容及主要公式

#### 1. 热力学过程

平衡态: 在没有外界影响的条件下, 系统各部分的宏观性质不随时间发生变化的状态.

热力学过程: 热力学系统的状态随时间变化过程叫热力学过程.

准静态过程: 如果在系统所经历的热力学过程中, 任一中间状态都无限接近平衡态, 则此过程叫准静态过程, 准静态过程可用过程方程描述.

#### 2. 功、热量、内能及热力学第一定律

功和热量: 功和热量是系统与外界交换能量的两种形式, 是与热力学过程有关的量, 它们的值都与状态的变化过程相关.

内能: 内能是系统状态的单值函数, 是一个状态量, 系统内能的变化只与系统的始、末状态有关, 与过程无关.

热力学第一定律:

$$Q = (E_2 - E_1) + A$$

对于微小的元过程

$$dQ = dE + dA$$

其中,  $Q$  表示系统从外界吸收的热量,  $A$  表示系统对外界做功,  $E_2 - E_1$  表示内能的增量.

#### 3. 准静态过程功的计算

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

#### 4. 准静态过程系统从外界吸收的热量

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} \nu C dT$$

其中,  $\nu$  为系统的摩尔数,  $C$  为系统在过程中的摩尔热容.

5 .摩尔热容

$$C = \frac{1}{\nu} \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)$$

定体摩尔热容

$$C_V = \frac{1}{\nu} \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_V$$

定压摩尔热容

$$C_p = \frac{1}{\nu} \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_p$$

理想气体  $C_p$  和  $C_V$  关系

$$C_p = C_V + R$$

比热容比

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}$$

6 .理想气体的典型过程和多方过程

典型过程见表 11 .1

表 11 .1 理想气体在一些典型过程中的重要公式

| 过程 | 特征              | 过程方程                                                                                           | 吸收热量 $Q$                                         | 对外作功 $A$                                                           | 内能增量 $\Delta E$       |
|----|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 等体 | $V = \text{常量}$ | $\frac{p}{T} = \text{常量}$                                                                      | $\nu C_V (T_2 - T_1)$                            | 0                                                                  | $\nu C_V (T_2 - T_1)$ |
| 等压 | $p = \text{常量}$ | $\frac{V}{T} = \text{常量}$                                                                      | $\nu C_V (T_2 - T_1)$                            | $p (V_2 - V_1)$<br>$\nu R (T_2 - T_1)$                             | $\nu C_V (T_2 - T_1)$ |
| 等温 | $T = \text{常量}$ | $pV = \text{常量}$                                                                               | $\nu RT \ln V_2 / V_1$<br>$\nu RT \ln p_1 / p_2$ | $A = Q$                                                            | 0                     |
| 绝热 | $Q = 0$         | $pV^\gamma = C_1$<br>$V^{\gamma-1} T = C_2$<br>$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T^{-\gamma} = C_3$ | 0                                                | $-\nu C_V (T_2 - T_1)$<br>$\frac{1}{\gamma-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$ | $\nu C_V (T_2 - T_1)$ |

多方过程  $pV^n = \text{常数}$  .

7 .循环过程和卡诺循环效率

热机效率

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

其中,  $A$  为循环过程对外作的功,  $Q_1$  为循环过程吸收热量的总和,  $Q_2$  为循环过程放出热量的总和.

致冷效率

$$w = \frac{Q_2}{A}$$

其中,  $Q_2$  为致冷循环中, 从冷库吸取的热量,  $A$  为制冷循环中外界对系统所作功之总和.

卡诺热机效率

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

其中,  $T_1$  为高温热源的温度,  $T_2$  为低温热源的温度.

卡诺逆循环的致冷系数

$$w = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

其中,  $T_2$  为冷库的温度,  $T_1$  为高温热源的温度.

## 8. 热力学第二定律

开尔文表述: 不可能只从单一热源吸收热量, 使之完全转变为功而不引起其他变化.

克劳修斯表述: 不可能使热量从低温物体传向高温物体而不引起其他变化.

9. 热力学第二定律的实质是一切与热现象有关的实际过程都是单方向进行的不可逆过程.

## 二、典型例题

**11-1** 理想气体的多方过程用过程方程  $pV^n = C$  表示, 对同一过程,  $n$  和  $C$  都为常数, 不同的  $n$  值对应不同的过程, 分析过程中热量交换与  $n$  的关系, 设过程中  $dV > 0$ .

**解** 令理想气体的摩尔数为  $\nu$ , 则

$$dQ = dE + pdV \quad (1)$$

对理想气体

$$dE = \nu C_V dT \quad (2)$$

$$pV = \nu RT$$

得

$$d(pV) = \nu R dT \quad (3)$$

且满足过程方程

$$pV^n = C$$

微分后得

$$Vdp + npdV = 0 \quad (4)$$

将式(2)、(3)、(4)代入式(1),消去  $dT$  和  $dp$ ,得

$$dQ = \left( \frac{C_V}{R} + 1 - n \frac{C_V}{R} \right) p dV$$

当  $dQ > 0$  时,过程吸热,又  $P > 0, dV > 0$

所以  $dQ > 0$ , 即  $\frac{C_V + R}{R} - n \frac{C_V}{R} > 0$ ,

$$n < \frac{C_V + R}{C_V} = \frac{C_p}{C_V} = \gamma, \text{过程吸热.}$$

当  $dQ < 0$  时,过程放热,即  $n > \gamma$  时过程放热.

因而,对于理想气体,当其进行多方过程  $pV^n = C$ , 且  $dV > 0$  时,若  $n < \gamma$ , 则过程为吸热;若  $n > \gamma$ , 则过程为放热.

**说明** 对理想气体的任意准静态过程,分析其热量交换情况常用热力学第一定律的元过程表示形式  $dQ = dE + pdV$  来讨论,当  $dQ > 0$  时,该元过程吸热;当  $dQ < 0$  时,该元过程放热.

**11-2** 除非温度很低,许多物质的定压摩尔热容都可以表示为

$$C_p = a + 2bT - cT^2$$

式中,  $a, b, c$  均为常数.试求:

(1)在定压情况下,1 mol 物质的温度从  $T_1$  升至  $T_2$  时需要吸收的热量;

(2)在温度  $T_1$  和  $T_2$  之间的平均摩尔热容.

**解** (1)温度从  $T_1$  升至  $T_2$  的等压过程中,系统吸收的热量为

$$\begin{aligned} Q_p &= \int_{T_1}^{T_2} C_p dT = \int_{T_1}^{T_2} (a + 2bT - cT^2) dT \\ &= a(T_2 - T_1) + b(T_2^2 - T_1^2) - \frac{1}{3}c(T_2^3 - T_1^3) \end{aligned}$$

(2)在  $T_1$  和  $T_2$  之间的平均摩尔热容为

$$\bar{C}_p = \frac{Q_p}{T_2 - T_1} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} C_p dT}{T_2 - T_1} = a + b(T_2 + T_1) - \frac{1}{3}c(T_2^2 + T_1 T_2 + T_1^2)$$

**说明** 物质的摩尔热容  $C$  可用实验方法测定,则物质在过程中的吸热可用  $Q = \int_{T_1}^{T_2} \nu C dT$  来计算,过程的平均摩尔热容为过程吸收的总热量除以系统在过程始末

两态的温度增量。

**11-3** 1 mol 服从范德瓦尔斯状态方程  $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$  的气体, 如果它的内能由式  $E = cT - \frac{a}{V}$  ( $V$  为摩尔体积,  $a$  为状态方程的常数之一,  $c$  为常量) 给出, 计算摩尔热容  $C_p$  和  $C_V$ 。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad C_V &= \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = \left(\frac{dE + p dV}{dT}\right)_V \\ &= \left[\frac{d\left(cT - \frac{a}{V}\right)}{dT}\right]_V + \left(\frac{p dV}{dT}\right)_V \\ &= c \\ C_p &= \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = \left(\frac{dE + p dV}{dT}\right)_p = \left(\frac{dE}{dT}\right)_p + p \left(\frac{dV}{dT}\right)_p \\ &= c + a \frac{1}{V^2} \left(\frac{dV}{dT}\right)_p + p \left(\frac{dV}{dT}\right)_p \\ &= c + \left(\frac{a}{V^2} + p\right) \left(\frac{dV}{dT}\right)_p \end{aligned}$$

由状态方程  $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$  求等压下  $\left(\frac{dV}{dT}\right)_p$  有

$$\left(\frac{dV}{dT}\right)_p = \frac{R}{p - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3}}$$

因此

$$C_p = c + \frac{R\left(\frac{a}{V^2} + p\right)}{p - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3}}$$

再把状态方程代入消去  $p$  得

$$C_p = c + \frac{R}{1 - \frac{2a(V^2 - b^2)}{RTV^3}}$$

**说明** 若已知气体的状态方程和内能函数就可根据定压摩尔热容和定容摩尔热容的定义求出  $C_V$  和  $C_p$ ; 计算结果表明, 摩尔热容与表示气体性质的状态方程和进行的热力学过程有关。因此, 计算摩尔热容时, 一定要和过程相对应。

**11-4** 由  $\nu_1$  mol 氦气和  $\nu_2$  mol 的氮气组成混合理想气体, 若此混合气体经历一准静态绝热过程, 求: (1) 混合气体的状态方程, 定容摩尔热容和定压摩尔热容。

(2) 混合气体在准静态绝热过程中的过程方程。

**解** (1) 设混合气体在任意平衡态时有状态参量  $p, V, T$ , 此时氦气和氮气的

压强分别为  $p_1$  和  $p_2$ , 对氦气和氮气有

$$p_1 V = \nu_1 R T$$

$$p_2 V = \nu_2 R T$$

两式相加得

$$(p_1 + p_2) V = (\nu_1 + \nu_2) R T$$

对混合气体有

$$p = p_1 + p_2, \quad \nu = \nu_1 + \nu_2$$

则

$$p V = \nu R T$$

此为混合气体的状态方程, 其中  $\nu = \nu_1 + \nu_2$  为混合气体的总摩尔数.

混合气体在等体过程中, 温度升高  $\Delta T$  时, 系统吸收的热量为

$$Q = \nu C_V \Delta T = \nu_1 C_{V1} \Delta T + \nu_2 C_{V2} \Delta T$$

式中  $C_V$  为混合气体定体摩尔热容,  $C_{V1}$  和  $C_{V2}$  分别为氦气和氮气的定体摩尔热容, 因此

$$C_V = \frac{(\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2}) \Delta T}{\nu \Delta T} = \frac{\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2}}{\nu_1 + \nu_2}$$

同样, 对于定压摩尔热容有

$$C_P = \frac{\nu_1 C_{P1} + \nu_2 C_{P2}}{\nu_1 + \nu_2}$$

其中  $C_{P1}$  和  $C_{P2}$  分别为氦气和氮气的定压摩尔热容.

(2) 混合气体经绝热准静态过程有  $dQ=0$ , 即

$$dQ = dE + p dV = 0 \quad (1)$$

其中

$$dE = \nu_1 C_{V1} dT + \nu_2 C_{V2} dT \quad (2)$$

对混合气体状态方程  $pV = (\nu_1 + \nu_2) R T$  微分得

$$p dV + V dp = (\nu_1 + \nu_2) dT \quad (3)$$

将式(2)、(3)代入式(1)并消去  $dT$ , 得

$$\frac{\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2}}{R(\nu_1 + \nu_2)} (p dV + V dp) + p dV = 0$$

$$\frac{dp}{p} + \left[ 1 + \frac{(\nu_1 + \nu_2) R}{\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2}} \right] \frac{dV}{V} = 0$$

令  $\frac{(\nu_1 + \nu_2) R}{\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2}} + 1 = \gamma$ , 且  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$

积分上式得

$$p V^\gamma = \text{常数}$$

此为混合气体的准静态绝热过程方程。

**说明** 对混合气体分析其状态方程的关键是应用道尔顿分压定律,求摩尔热容是用普适关系  $Q = \nu C \Delta T$ ,求过程方程是要用过程的热力学第一定律的微分形式和内能的微分形式。

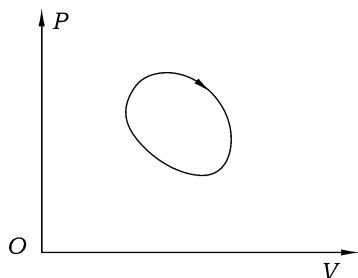


图 11-5

**11-5** 试证明如图 11-5 所示的循环过程其摩尔热容不能为常量。

**解** 用反证法.假设该循环的摩尔热容  $C$  为常数.当系统从某一初态开始经图 11-5 所示循环又回到初态时,系统内能不变,即

$$\Delta E = 0$$

由图可以看出,在该循环中,系统对外作功  $A > 0$  由热力学第一定律,系统在一个循环中吸收的热量

$$Q = \Delta E + A > 0$$

由于  $C$  为常数,则循环中  $Q = \nu C \Delta T$ ,经过循环后  $\Delta T = 0$ ,则  $Q = 0$ 。

这与  $Q > 0$  的结论相矛盾,因而假设不成立,即循环过程的摩尔热容不可能为常量。

**说明** 循环过程的摩尔热容不能为常量,从本质上讲它是热力学第一定律的结果.对于这类问题,一般用反证法处理,使其和热力学第一定律或热力学第二定律相矛盾。

**11-6** 地球上的人要在月球上居住,首要问题就是保持他们的起居室处于一个舒适的温度,现考虑用卡诺循环机来作温度调节,设月球的白昼温度为  $100^\circ\text{C}$ ,而夜间温度为  $-100^\circ\text{C}$ ,起居室温度要保持在  $20^\circ\text{C}$ ,通过起居室墙壁导热的速率为每度温差  $0.5 \text{ kW}$ ,试求白昼和夜间给卡诺机所供的功率。

**解** 在白昼室内温度低,卡诺机工作示意图如 11-6(a)所示,工作于致冷机状态,从室内吸取热量  $Q_2$ ,向室外放出热量  $Q_1$ ,单位时间给卡诺机供的功为  $A$ ,因致冷系数  $\omega$  有

$$\omega = \frac{Q_2}{A} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

当外界通过室壁单位时间透入室内的热量  $C(T_1 - T_2)$  等于  $Q_2$  时,室内温度恒定,其中  $C = 0.5 \text{ kW}/^\circ\text{C}$ ,所以

$$A = \frac{Q_2}{\omega} = Q_2 \frac{T_1 - T_2}{T_2} = C(T_1 - T_2)^2 / T_2$$

$$= 0.5 \times 10^3 \times (100 - 20)^2 / (273 + 20) = 10.9 \times 10^3 \text{ W}$$

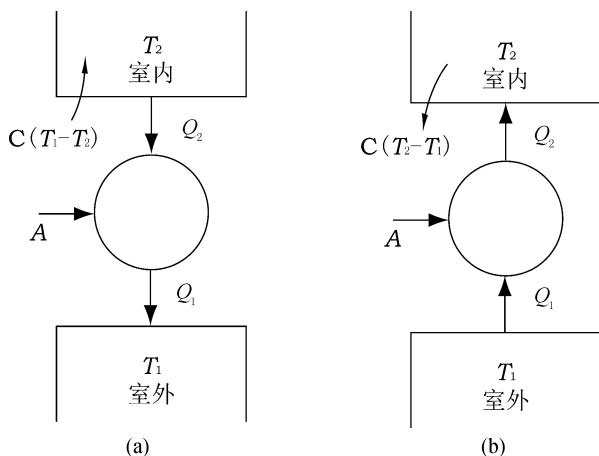


图 11-6

在黑夜里室内温度比室外高,卡诺机工作示意图如 11-6 (b)所示,从室外低温  $T_1$  处吸取热量  $Q_1$ ,向室内放热  $Q_2$ ,单位时间给卡诺机提供功为  $A$ ,室壁单位时间内向室外放出热量  $C(T_2 - T_1)$ ,当其放热等于  $Q_2$  时,室内恒温,此时有

$$Q_2 = Q_1 + A = C(T_2 - T_1)$$

而

$$\omega = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} \quad Q_1 = \frac{T_1}{T_2 - T_1} A$$

所以

$$\begin{aligned} C(T_2 - T_1) &= A + \frac{T_1}{T_2 - T_1} A = \frac{T_2}{T_2 - T_1} A \\ A &= \frac{C(T_2 - T_1)^2}{T_2} = \frac{0.5 \times 10^3 \times [20 - (-100)]^2}{20 + 273} \\ &= 24.6 \times 10^3 \text{ W} \end{aligned}$$

即白天需给卡诺机提供 10.9 kW 的功率,晚上提供 24.6 kW 功率,才能保持室内温度  $20^\circ\text{C}$ 。

**说明** 本题是卡诺机效率的应用题,关键是要根据具体情况分析吸热,放热,做功以及温度平衡条件,再用循环理想效率估算,结果表明此种用逆循环原理制作的空调装置既可加热,又可降温,这即是所谓的冷暖双制空调。

### 三、习题解答

#### 11.1 选择题

(1)一绝热的封闭容器,用隔板分成相等的两部分.左边充有一定的某种气体,压强为  $p$ ;右边为真空.若把隔板抽去(对外不漏气),当又达到平衡时,气体的压强为(B)

- (A)  $p$     (B)  $\frac{p}{2}$     (C)  $2p$     (D)  $p/2^\gamma$     (E)  $2^\gamma p$

(2)一定量的理想气体,其内能  $E$  随体积  $V$  的变化关系为一直线(其延长线过原点),则此过程为(C)

- (A)等温过程    (B)等体过程    (C)等压过程    (D)绝热过程

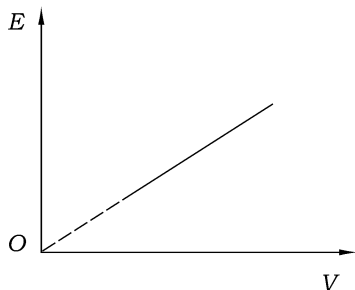


图 11.1(2)

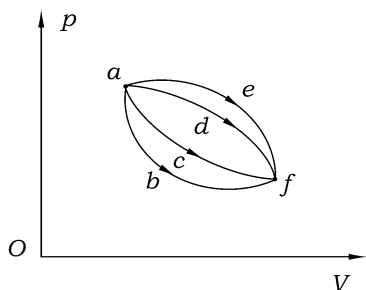


图 11.1(3)

(3)如图所示,理想气体由状态  $a$  到达状态  $f$ ,经历四个过程,其中  $acf$  为绝热过程,则平均摩尔热容最大的过程为(D)

- (A)  $acf$     (B)  $adf$     (C)  $aef$     (D)  $abf$

(4)如图 11.1(4)所示,某热力学系统经历一个  $ced$  过程,其中  $c$ 、 $d$  为绝热过程曲线  $ab$  上的任意两点.则系统在该过程中(E)

- (A) 不断向外界放出热量  
(B) 不断从外界吸收热量  
(C) 有的阶段吸热,有的阶段放热,吸收的热量等于放出的热量  
(D) 有的阶段吸热,有的阶段放热,吸收的热量大于放出的热量  
(E) 有的阶段吸热,有的阶段放热,吸收的热量小于放出的热量

(5)如图 11.1(5)所示,  $T_1$  和  $T_2$  为两条等温线.若  $ab$  为一绝热压缩过程,则理想气体由状态  $c$  经  $cb$  过程被压强到  $b$  状态,在该过程中气体的热容  $C$  为(B)

- (A)  $C > 0$     (B)  $C < 0$     (C)  $C = 0$     (D) 不能确定

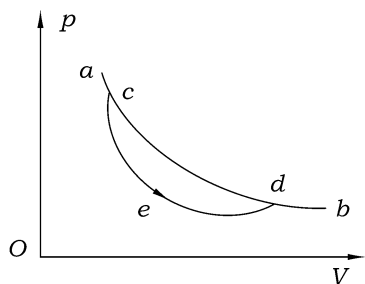


图 11.1(4)

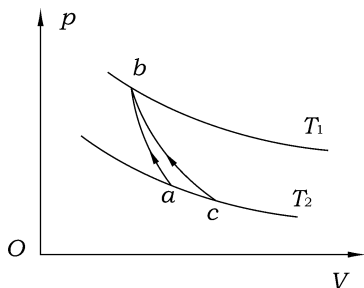


图 11.1(5)

(6) 理想气体经历如图 11.1(6) 所示的循环过程由两个等温和两个等体过程构成, 其效率为  $\eta$ . 若以  $T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$  的等温过程将该循环剖为两个循环, 其效率分别为  $\eta_1$  和  $\eta_2$ . 则 (A)

(A)  $\eta > \eta_2 > \eta_1$       (B)  $\eta < \eta_1 < \eta_2$

(C)  $\eta > \eta_1 > \eta_2$       (D)  $\eta = \eta_1 = \eta_2$

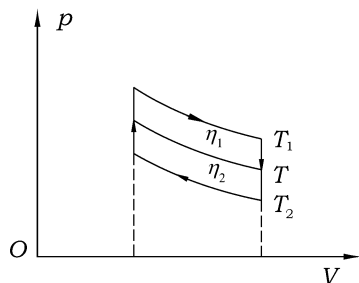
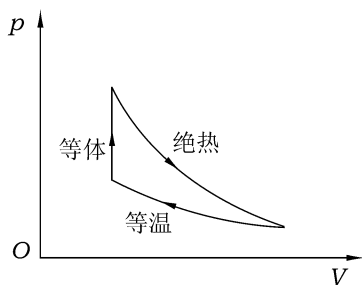
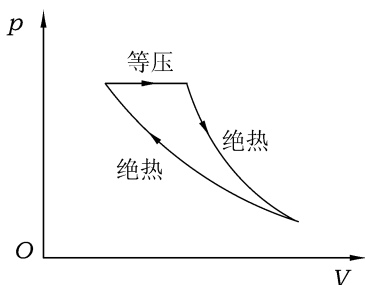


图 11.1(6)

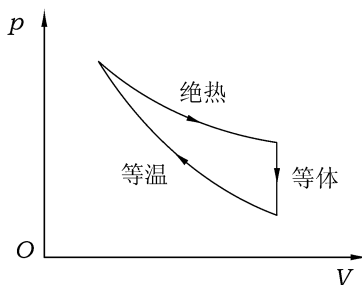
(7) 下列四个循环过程中 (见图 11.1(7)), 从理论上讲能够实现的循环过程是图 (a)



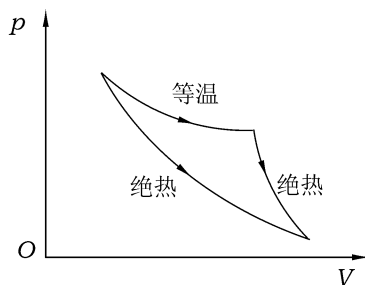
(a)



(b)



(c)



(d)

图 11.1(7)

## 11.2 填空题

(1)一定量的理想气体在  $p$ - $V$  图中,如等温线与绝热线交点处的斜率之比为 0.714,则该气体的定体摩尔热容为  $21 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$ .

(2)氢气和氦气可视为理想气体,如果从同一初态出发,分别作绝热膨胀,则在  $p$ - $V$  图上两者的绝热线是否重合? 否. 因为  $\gamma$  不同.

(3)一定量的理想气体从同一初态开始,分别经  $ad$ ,  $ac$ ,  $ab$  过程到达具有相同温度的终态. 其中  $ac$  为绝热过程,如图 11.2(3)所示,则  $ab$  过程是放热;  $ad$  过程是吸热.(填吸热或放热)

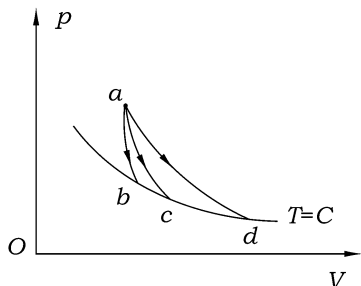


图 11.2(3)

(4)设 1mol 的理想气体的压强  $p$  随体积  $V$  变化的函数关系为  $p = p_0 - \alpha V^2$ , 式中  $p_0$  和  $\alpha$  为常数,则该气体最大的可能温度  $T_{\max} = \frac{2p_0}{3R} \sqrt{\frac{p_0}{3\alpha}}$ .

(5)一设计者企图设计一热机,它从温度为 400 K 的热源中吸热  $1.06 \times 10^7 \text{ J}$ ,向温度为 200 K 的冷源中放出  $4.22 \times 10^6 \text{ J}$  的热量,这样的热机能否制造成功? 否. 因为  $\eta > \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ .

(6)某理想气体进行如图 11.2(6)所示的循环. 第一个循环中,  $ab$  为等温过

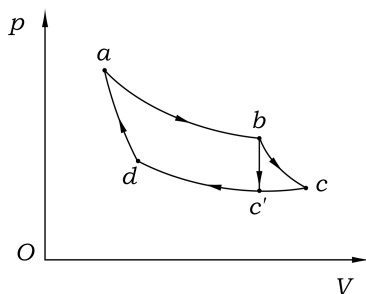


图 11.2(6)

程,  $bc$  为绝热过程,  $cd$  为等温过程,  $da$  为绝热过程; 第二个循环中,  $bc'$  为等体过程. 循环效率较高的是第一个循环.

**11.3** 一打气机, 每打一次可将压强  $p_0 = 1 \text{ atm}$ , 温度  $t = -3^\circ\text{C}$ , 体积  $V = 4.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  的气体压至容器内. 设容器容积为  $V_0 = 1.5 \text{ m}^3$ , 试问需打多少次, 才能使容器内气体在温度升为  $45^\circ\text{C}$  时, 可达压强为  $2 \text{ atm}$ , 设原来容器中气体的压强为  $1 \text{ atm}$ , 温度为  $-3^\circ\text{C}$ .

**解** 设气体的摩尔质量为  $M$ , 容器中原来气体的质量为  $m_0$ , 每次打进的质量为  $m_1$ , 容器最后质量为  $m$ , 最后压强为  $p = 2 \text{ atm}$ , 温度  $T = 273 + 45 = 318 \text{ K}$ , 根据气体状态方程有

$$p_0 V_0 = \frac{m_0}{M} RT_0 \quad T_0 = 273 + (-3) = 270 \text{ K}$$

$$p_0 V = \frac{m_1}{M} RT_0$$

$$p V_0 = \frac{m}{M} RT$$

需打  $n$  次,  $n = \frac{m - m_0}{m_1}$ , 将以上各式代入此式得

$$n = \frac{\frac{p V_0}{T} - \frac{p_0 V_0}{T_0}}{\frac{p_0 V}{T_0}} = \frac{\frac{2 \times 1.5}{318} - \frac{1 \times 1.5}{270}}{\frac{1 \times 4.0 \times 10^{-3}}{270}} = 262 (\text{次})$$

**11.4** 容器内贮有  $10 \text{ L}$  氢气, 因开关损坏而漏气. 在温度为  $7^\circ\text{C}$  时, 容器上压强计的读数为  $5.067 \times 10^6 \text{ Pa}$ . 过一段时间后温度升到  $17^\circ\text{C}$ , 但压强计读数未变, 问漏去氢气的质量是多少?

**解** 设氢气原来质量为  $m_1$ , 漏去的质量为  $m_2$ , 则有

$$pV = \frac{m_1}{M} RT_1, \quad pV = \frac{(m_1 - m_2)}{M} RT_2$$

由以上二式可得

$$\begin{aligned} m_2 &= m_1 \left( 1 - \frac{T_1}{T_2} \right) = \frac{pVM}{RT_1} \left( 1 - \frac{T_1}{T_2} \right) \\ &= \frac{5.067 \times 10^6 \times 10 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-3}}{8.31 \times (273 + 7)} \\ &\quad \times \left( 1 - \frac{273 + 7}{273 + 17} \right) = 1.5 \times 10^{-3} \text{ kg} \end{aligned}$$

**11.5** 一定质量理想气体的状态按  $p$ - $V$  图中的曲线沿箭头所指的方向变化.

(1) 已知在状态  $a$  时气体的温度是  $T_a = 300 \text{ K}$ , 求气体在状态  $b, c, d$  的温度.

(2)将上述变化过程在  $p$ - $T$  图和  $V$ - $T$  图上画出,并标明过程的方向.

解 对  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  各态写出状态方程,有

$$p_a V_a = \nu R T_a$$

$$p_b V_b = \nu R T_b$$

$$p_c V_c = \nu R T_c$$

$$p_d V_d = \nu R T_d$$

则当  $T_a=300\text{ K}$  时,代入数据,可求出  $T_b=600\text{ K}$ ,  $T_c=600\text{ K}$ ,  $T_d=300\text{ K}$ .

过程的  $V$ - $T$  及  $p$ - $T$  图线如图 11.5(b)、(c)所示.

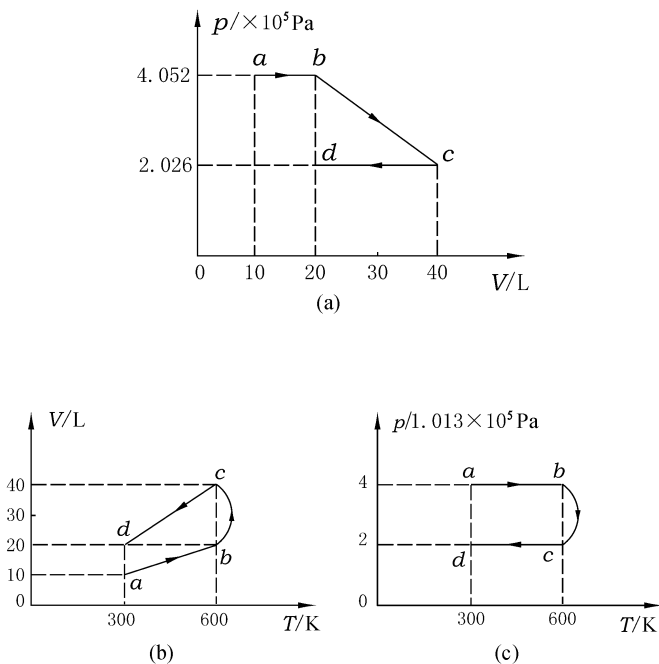


图 11.5

**11.6** 试求上题图 11.5 所示的变化中,气体在  $a-b$ ,  $b-c$ ,  $c-d$  过程以及整个过程  $a-b-c-d$  中所作的功.

解 设气体在  $a-b$ ,  $b-c$ ,  $c-d$  及  $a-b-c-d$  过程中作功分别为  $A_{ab}$ ,  $A_{bc}$ ,  $A_{cd}$  和  $A$ , 则有

$$\begin{aligned} A_{ab} &= p_a (V_b - V_a) \\ &= 4 \times 1.013 \times 10^5 \times (20 - 10) \times 10^{-3} \\ &= 4052 (\text{J}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{bc} &= p_c(V_c - V_b) + \frac{1}{2}(p_a - p_c)(V_c - V_b) \\
 &= 2 \times 1.013 \times 10^5 \times (40 - 20) \times 10^{-3} + \frac{1}{2}(4 - 2) \\
 &\quad \times 1.013 \times 10^5 \times (40 - 20) \times 10^{-3} \\
 &= 6078(\text{J})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{cd} &= p_c(V_d - V_c) \\
 &= 2 \times 1.013 \times 10^5 \times (20 - 40) \times 10^{-3} \\
 &= -4052(\text{J})
 \end{aligned}$$

$$A = A_{ab} + A_{bc} + A_{cd} = 4052 + 6078 - 4052 = 6078(\text{J})$$

**11.7** 一定质量气体从外界吸收热量 1731.8 J,并保持在压强为  $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$  下,体积从 10 L 膨胀到 15 L.问气体对外作功多少? 内能增加多少?

**解** 在等压条件下,气体对外作功

$$\begin{aligned}
 A &= p(V_2 - V_1) = 1.013 \times 10^5 \times (15 - 10) \times 10^{-3} \\
 &= 507(\text{J})
 \end{aligned}$$

气体的内能增加为

$$\Delta E = Q - A = 1713.8 - 507 = 1206.8(\text{J})$$

**11.8** 质量为 0.02 kg 的氦气( $C_V = \frac{3}{2}R$ ),温度由  $17^\circ\text{C}$  升为  $27^\circ\text{C}$ ,若在升温过程中:(1)体积保持不变;(2)压强保持不变;(3)与外界不交换热量.试分别计算各过程中气体吸收的热量、内能的改变和对外所作的功.

**解** 已知氦气的摩尔质量  $M = 4 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ ,则 0.02 kg 氦气的摩尔数  $\nu = \frac{0.02}{4 \times 10^{-3}} = 5 \text{ mol}$ ,内能变化  $\Delta E = \nu C_V(T_2 - T_1)$

$$\Delta E = 5 \times \frac{3}{2} \times 8.31 \times (300 - 290) = 623(\text{J})$$

(1)体积不变时, $A=0$  且

$$Q = \Delta E + A = \Delta E = 623 \text{ J}$$

(2)压强不变时

$$Q = \nu C_P(T_2 - T_1) = 5 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times (300 - 290) = 1040(\text{J})$$

$$A = Q - \Delta E = 1040 - 623 = 416(\text{J})$$

(3)与外界不交换热量, $Q=0$ ,则

$$Q = A + \Delta E = 0, \quad A = -\Delta E = -623 \text{ J}$$

**11.9** 标准状态下  $1.6 \times 10^{-2} \text{ kg}$  的氧气,分别经过下列过程并从外界吸热 334.4 J

- (1) 经等体过程, 求末状态的压强;  
 (2) 经等温过程, 求末状态的体积;  
 (3) 经等压过程, 求气体内能的改变.

**解** 已知氧气的摩尔质量为  $M=32 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$

$$Q = 334.4 \text{ J}$$

(1) 在等体过程中,  $Q = \frac{m}{M} C_V (T - T_0)$ , 则

$$T = \frac{MQ}{mC_V} + T_0 = \frac{32 \times 10^{-3} \times 334.4}{0.016 \times \frac{5}{2} \times 8.31} + 273 = 305 \text{ (K)}$$

由  $p/T = p_0/T_0$  得

$$\begin{aligned} p &= \frac{p_0}{T_0} T = \frac{1}{273} \times 1.013 \times 10^5 \times 305 \\ &= 1.13 \times 10^5 \text{ (Pa)} \end{aligned}$$

(2) 在等温过程中,  $Q = \frac{m}{M} RT_0 \ln \frac{V}{V_0}$ , 且已知

$$V_0 = \frac{m}{M} \times 22.4 \times 10^{-2} = \frac{0.016}{32 \times 10^{-3}} \times 22.4 \times 10^{-2} = 1.12 \times 10^{-2} \text{ (m}^3\text{)}$$

而

$$\ln \frac{V}{V_0} = \frac{MQ}{mRT_0} = \frac{32 \times 10^{-3} \times 334.4}{0.016 \times 8.31 \times 273} = \frac{334}{1134}$$

所以有

$$V = V_0 e^{334/1134} = 1.12 \times 10^{-2} \times 1.34 = 1.50 \times 10^{-2} \text{ (m}^3\text{)}$$

(3) 在等压过程中,  $Q = \frac{m}{M} C_p (T - T_0)$ , 则

$$T = \frac{MQ}{mC_p} + T_0 = \frac{32 \times 10^{-3} \times 334.4}{0.016 \times \frac{7}{2} \times 8.31} + 273 = 269 \text{ (K)}$$

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{m}{M} C_V (T - T_0) \\ &= \frac{0.016}{32 \times 10^{-3}} \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times (269 - 273) \\ &= 239 \text{ (J)} \end{aligned}$$

**11.10** 压强为  $1.013 \times 10^6 \text{ Pa}$ 、温度为  $27^\circ \text{C}$  的氮气  $56 \text{ g}$ , 使它先作等温膨胀, 待压强变为  $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$  后再等压加热, 直到其体积增加一倍为止. 试求氮气在整个过程中吸收的热量、增加的内能和对外所作的功.

**解** 依题意设氮气初态为  $(p_0, V_0, T_0)$ , 等温膨胀到  $(p_1, V_1, T_0)$ , 再等压加热到末态  $(p_1, V_2, T)$ , 且  $V_2 = 2V_1$ , 如图所示, 已知氮气的摩尔质量为  $M = 28 \times$

$10^{-3} \text{ kg/mol}$ . 则

$$V_1 = \frac{p_0 V_0}{p_1} = \frac{1.013 \times 10^6}{1.013 \times 10^5} V_0 = 10 V_0$$

$$T = \frac{V_2}{V_1} T_0 = \frac{2 V_1}{V_1} T_0 = 2 \times 300 = 600 (\text{K})$$

对等温膨胀过程有

$$\begin{aligned} Q_T &= A_T = \frac{m}{M} R T_0 \ln \frac{V_1}{V_0} \\ &= \frac{56 \times 10^{-3}}{28 \times 10^{-3}} \times 8.31 \times 300 \ln \frac{10 V_0}{V_0} \\ &= 1.148 \times 10^4 (\text{J}) \end{aligned}$$

$$\Delta E_T = 0$$

对等压加热过程

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= \frac{m}{M} C_V (T - T_0) \\ &= \frac{56 \times 10^{-3}}{28 \times 10^{-3}} \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times (600 - 300) \\ &= 1.247 \times 10^4 (\text{J}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_p &= \frac{m}{M} C_p (T - T_0) \\ &= \frac{56 \times 10^{-3}}{28 \times 10^{-3}} \times \frac{7}{2} \times 8.31 \times (600 - 300) \\ &= 1.745 \times 10^4 (\text{J}) \end{aligned}$$

$$A_p = Q_p - \Delta E_p = 1.745 \times 10^4 - 1.247 \times 10^4 = 4986 (\text{J})$$

故知

$$\Delta E = \Delta E_p + \Delta E_T = 1.247 \times 10^4 \text{ J}$$

$$\begin{aligned} A &= A_T + A_p = 1.148 \times 10^4 + 4986 \\ &= 1.647 \times 10^4 (\text{J}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= Q_T + Q_p = 1.148 \times 10^4 + 1.745 \times 10^4 \\ &= 2.902 \times 10^4 (\text{J}) \end{aligned}$$

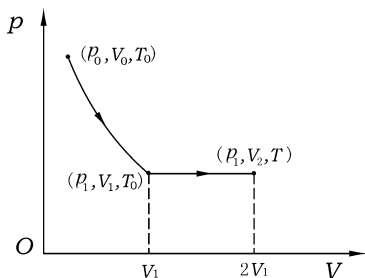


图 11.10

**11.11** 1mol 氢气, 压强为  $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 温度为  $20^\circ\text{C}$  时体积为  $V_0$ . (1) 保持体积不变, 加热使其温度升高到  $80^\circ\text{C}$ , 然后等温膨胀到体积为  $2 V_0$ ; (2) 先等温膨胀到体积为  $2 V_0$ , 然后等体加热到  $80^\circ\text{C}$ . 试分别计算两种过程中气体吸收的热量、增加的内能与所作的功, 并在同一  $p$ - $V$  图中作出表示两过程的曲线.

解 过程的  $p$ - $V$  曲线如图 11.11 所示.

(1)  $a-b$  的等体过程中,  $A_{ab}=0$ , 内能增量

为

$$\begin{aligned}\Delta E_{ab} &= C_V \Delta T = \frac{5}{2} R (T_2 - T_1) \\ &= \frac{5}{2} \times 8.31 \times (80 - 20) = 1246 \text{ (J)}\end{aligned}$$

在  $b-c$  的等温过程中,  $\Delta E_{bc}=0$ , 气体做功

为

$$A_{bc} = RT \ln \frac{V}{V_0} = 8.31 \times 353 \times \ln \frac{2V_0}{V_0} = 2033 \text{ J}$$

在  $a-b-c$  过程中, 气体做功为

$$A_{abc} = A_{ab} + A_{bc} = 0 + 2033 \text{ J} = 2033 \text{ (J)}$$

内能变化为

$$\Delta E_{abc} = \Delta E_{ab} + \Delta E_{bc} = 1246 + 0 = 1246 \text{ (J)}$$

吸热为

$$Q_{abc} = \Delta E_{abc} + A_{abc} = 1246 + 2033 = 3279 \text{ (J)}$$

(2) 在  $a-d$  的等温过程中, 内能不变, 气体做功为

$$A_{ad} = RT_0 \ln \frac{V}{V_0} = 8.31 \times 293 \times \ln 2 = 1687 \text{ (J)}$$

内能变化  $\Delta E_{ad}=0$

在  $d-c$  的等体过程中, 内能增量为

$$\Delta E_{dc} = C_V \Delta T = \Delta E_{ab} = 1246 \text{ J}$$

$$A_{dc} = 0$$

在  $a-d-c$  过程中, 气体做功为

$$A_{adc} = A_{ad} + A_{dc} = 1687 \text{ J}$$

内能变化为

$$\Delta E_{adc} = \Delta E_{ad} + \Delta E_{dc} = 1246 \text{ J}$$

吸热为

$$Q_{adc} = \Delta E_{adc} + A_{adc} = 1246 + 1687 = 2933 \text{ (J)}$$

**11.12** 10 mol 单原子理想气体, 在压缩过程中外界对它做功 209 J, 其温度升高 1 K. 试求气体吸收的热量与内能的增量, 此过程中气体的摩尔热容是多少?

解 内能增量

$$\begin{aligned}\Delta E &= \nu C_V \Delta T = \nu \frac{3}{2} R \Delta T = 10 \times \frac{3}{2} \times 8.31 \times 1 \\ &= 124.7 \text{ (J)}\end{aligned}$$

由于  $A = -209 \text{ J}$ , 则吸热为

$$Q = \Delta E + A = 124.7 - 209 = -84.3(\text{J})$$

过程中的热容为

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{-84.3}{1} = -84.3(\text{J/K})$$

摩尔热容为

$$C_m = \frac{C}{\nu} = \frac{-84.3}{10} = -8.43(\text{J/mol} \cdot \text{K})$$

**11.13** 一定质量的理想气体, 其  $\gamma = 1.40$ , 若在等压下加热, 使其体积增大为原体积的  $n$  倍为止. 试求传给气体的热量中, 用于对外做功与增加内能的热量之比.

**解** 在等压过程中,  $\Delta E = \nu C_V \Delta T$ ,  $pV = \nu RT$ , 所以

$$p\Delta V = \nu R\Delta T = A$$

$$\frac{A}{\Delta E} = \frac{\nu R\Delta T}{\nu C_V \Delta T} = \frac{R}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \frac{C_p}{C_V} - 1 = 1.4 - 1 = 0.4$$

**11.14** 侧面绝热的气缸内贮有  $1 \text{ mol}$  单原子理想气体, 温度为  $T_1 = 273 \text{ K}$ . 活塞外的大气压  $p = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 活塞面积为  $s = 0.02 \text{ m}^2$ , 活塞质量  $m = 102 \text{ kg}$ . 假定活塞绝热、不漏气并且与气缸壁间的摩擦可以忽略不计.

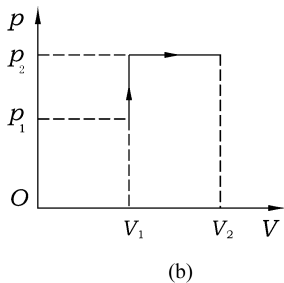
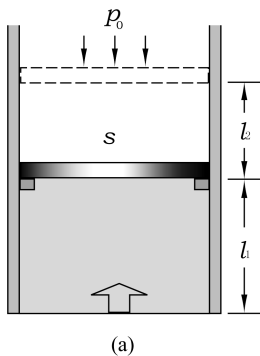


图 11.14

由于气缸内小突出物的阻碍, 活塞起初停在距气缸底部  $l_1 = 1 \text{ m}$  处. 今从气缸底部缓慢加热使气体膨胀, 最后活塞停在原位置上部  $l_2 = 0.5 \text{ m}$  处, 如图 11.14(a) 所示. 试作出此过程的  $p$ - $V$  图线, 求出整个过程中气体吸收的热量与内能增量.

**解** 过程可分为两步:

第一步: 等体吸热过程  $p_1 \rightarrow p_2$ ,  $T_1 \rightarrow T_2$

$$p_1 = \frac{\nu RT_1}{V_1} = \frac{1 \times 8.31 \times 273}{0.02 \times 1} = 1.134 \times 10^5 \text{ (Pa)}$$

又由  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}$  得

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{p_2}{p_1} T_1 = \frac{p_0 + mg/s}{p_1} T_1 \\ &= \frac{1.103 \times 10^5 + 102 \times 9.8/0.02}{1.134 \times 10^5} \times 273 = 364 \text{ (K)} \end{aligned}$$

该过程吸收的热量为

$$\begin{aligned} Q_V &= \Delta E_V = \nu C_V (T_2 - T_1) \\ &= 1 \times \frac{3}{2} \times 8.31 \times (364 - 273) = 1137 \text{ (J)} \end{aligned}$$

第二步:等压过程,  $V_1 \rightarrow V_2, T_2 \rightarrow T_3$ , 则

$$T_3 = \frac{V_2}{V_1} T_2 = \frac{S(l_1 + l_2)}{Sl_1} T_2 = 1.5 \times 364 = 546 \text{ (K)}$$

$$\Delta E_p = \nu C_V (T_3 - T_2) = 1 \times \frac{3}{2} \times 8.31 \times 182 = 2269 \text{ (J)}$$

$$Q_p = \nu C_p (T_3 - T_2) = 1 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times 182 = 3781 \text{ (J)}$$

最后有

$$Q = Q_V + Q_p = 1137 + 3781 = 4918 \text{ (J)}$$

$$\Delta E = \Delta E_V + \Delta E_p = 1137 + 2269 = 3406 \text{ (J)}$$

过程的  $p$ - $V$  图线如图 11.14(b)所示.

**11.15** 试分析理想气体在如图 11.15 所示过程  $a-b$  中的热容  $C_R$  是大于、等于还是小于零,并说明理由.

**解** 过  $b$  点作气体的等温线交绝热线于  $c$ , 过  $a, b, c$  作垂直  $V$  轴线交  $V$  轴于  $d, e, f$ , 则  $a-b$  过程中, 内能变化  $\Delta E_{ab}$ ,

$$\Delta E_{ab} = -S_{acfd a} = \nu C_V \Delta T < 0,$$

则  $\Delta T < 0$

$$A_{ab} = S_{abed a}$$

$$Q_{ab} = \Delta E_{ab} + A_{ab} = S_{abefca} > 0$$

$$C_k = \frac{Q_{ab}}{\Delta T_{ab}} < 0$$

所以  $a-b$  过程中热容  $C_k < 0$ .

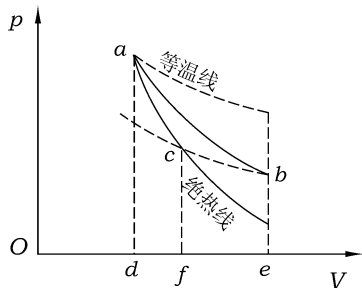


图 11.15

**11.16** 利用过程方程直接证明在绝热线和等温线的交点  $A$  处,绝热线斜率的绝对值比等温线斜率的绝对值大.

**解** 绝热过程中,  $pV^\gamma = C$

$$V^\gamma dp + \gamma V^{\gamma-1} p dV = 0$$

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_Q = -\gamma \frac{p}{V}$$

等温过程中,  $p = C/V$ , 则

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_T = -\frac{C}{V^2} = -\frac{pV}{V^2} = -\frac{p}{V}$$

由于  $\gamma > 1$ , 所以  $\left|\left(\frac{dp}{dV}\right)_Q\right| > \left|\left(\frac{dp}{dV}\right)_T\right|$ .

**11.17** 如图 11.17 中  $AB, DC$  是绝热线,  $COA$  是等温线. 已知系统在  $COA$  过程中放热  $100 \text{ J}$ ,  $OAB$  的面积是  $30 \text{ J}$ ,  $ODC$  的面积  $70 \text{ J}$ , 试问在  $BOD$  过程中系统是吸热还是放热? 热量是多少?

**解** 整个循环中,  $\Delta E = 0$ ,

$$A = S_{ODCO} - S_{OABO} = 70 - 30 = 40 (\text{J})$$

且有

$$Q = A + \Delta E$$

$$Q = Q_{BOD} + Q_{COA} = Q_{BOD} - 100 = 40 \text{ J} = A$$

故  $BOD$  过程中吸热为

$$Q_{BOD} = A - Q_{COA} = 40 - (-100) = 140 (\text{J})$$

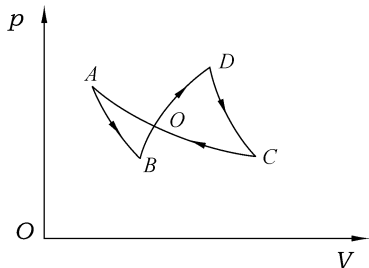


图 11.17

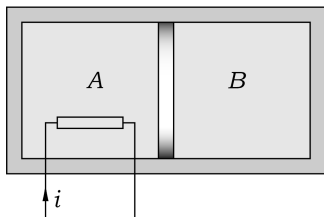


图 11.18

**11.18** 如图 11.18, 一容积为  $40 \text{ L}$  的绝热容器, 中间由一无摩擦的绝热可动活塞隔开.  $A, B$  两部分各贮有  $1 \text{ mol}$  氮气, 最初压强都是  $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$  而活塞停在中间. 现使微小电流  $i$  通过  $A$  中的电阻 (体积可忽略不计) 而缓慢加热, 直到  $B$  中气体体积缩小到一半为止. 试问: (1) 在无限小时间  $dt$  内,  $A$  中气体发生的微小

变化过程中,热力学第一定律应写成怎样的表示形式? (2)两部分气体各自的最后温度是多少? (3)A 中气体在整个过程中吸收的热量是多少?

**解** (1)  $t$  时刻, A 中气体状态为  $P, V, T$ , 在  $t \rightarrow t + dt$  时刻的  $dt$  时间内, A 中气体做功为  $p dV$ , 内能变化为  $dE = \frac{5}{2} R dT$ , 吸收热量  $dQ = i^2 r dt$  ( $r$  为电阻值)。

因此有

$$\frac{5}{2} R dT + p dV = i^2 r dt$$

(2) B 中气体为绝热压缩, 且  $V_A(20 \text{ L}) \rightarrow V'_A(30 \text{ L}), V_B(20 \text{ L}) \rightarrow V'_B(10 \text{ L})$ , 因此有

$$\text{初态 } T_B = \frac{p_B V_B}{R} = \frac{1.013 \times 10^5 \times 20 \times 10^{-3}}{8.31} = 244 (\text{K})$$

$$\text{末态 } T'_B = \left( \frac{V_B}{V'_B} \right)^\gamma - 1 \cdot T_B = \left( \frac{20}{10} \right)^{0.4} \times 244 = 322 (\text{K})$$

对 A 中气体,  $p_A \rightarrow p'_A, p_B \rightarrow p'_B, T_A = T_B \rightarrow T'_A$ , 则由

$$p'_A V'_A = R T'_A, \quad p'_B V'_B = R T'_B$$

得

$$\begin{aligned} T'_A &= \frac{p'_A V'_A}{R} = \frac{p'_B V'_A}{R} = \frac{R T'_B V'_A}{R V'_B} = \frac{V'_A}{V'_B} T'_B \\ &= 3 \times 322 = 966 (\text{K}) \end{aligned}$$

(3) 由于

$$\begin{aligned} \Delta E_A &= C_V (T'_A - T_A) \\ &= \frac{5}{2} \times 8.31 \times (966 - 244) = 1.50 \times 10^4 (\text{J}) \end{aligned}$$

A 中气体对 B 中气体做功为

$$\begin{aligned} A &= \Delta E_B = C_V (T'_B - T_B) \\ &= \frac{5}{2} \times 8.31 \times (322 - 244) = 1.62 \times 10^3 (\text{J}) \end{aligned}$$

A 中气体在整个过程中吸收的热量为

$$Q = \Delta E_A + A = 1.50 \times 10^4 + 1.62 \times 10^3 = 1.66 \times 10^4 (\text{J})$$

**11.19** 1mol 氧气, 温度为 300K 时体积是  $2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ . 若氧气经 (1) 绝热膨胀到体积为  $2 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ ; (2) 等温膨胀到体积  $2 \times 10^{-2} \text{ m}^3$  后, 再等体冷却到绝热膨胀最后达到的温度. 试计算两种过程中氧气所作的功, 并说明这两种功值有差别的原因.

**解** (1) 绝热膨胀中

$$T_2 = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \cdot T_1 = \left( \frac{2 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-2}} \right)^{0.4} \times 300 = 119 (\text{K})$$

$$Q = A + \Delta E = 0$$

则

$$A = -\Delta E$$

$$A = -\nu C_V (T_2 - T_1) = 1 \times \frac{5}{2} R (300 - 119) = 3760 (\text{J})$$

(2) 等温膨胀到  $V_2$  再冷却到  $T_2$ , 后一过程为等体过程, 气体不作功, 所以整个过程中做功为

$$A' = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 1 \times 9.31 \times 273 \times \ln 10 = 5224 (\text{J})$$

**11.20** 下面是一种测定气体  $\gamma = C_p / C_V$  的方法. 取一定质量的气体, 初始时压强、温度和体积分别为  $p_0, T_0, V_0$ . 用一根通电的铂丝对它加热, 第一次保持气体体积  $V_0$  不变, 使压强与温度分别变为  $p_1$  与  $T_1$ ; 第二次加热时, 保持气体压强  $p_0$  不变而温度和体积分别变为  $T_2$  和  $V_2$ . 假定两次加热的电流和时间都相同, 试证明:

$$\gamma = \frac{(p_1 - p_0) V_0}{(V_2 - V_0) p_0}$$

**解** 由题中条件知  $Q_V = Q_p$ , 但

$$Q_V = \nu C_V (T_1 - T_0), \quad Q_p = \nu C_p (T_2 - T_1)$$

并且

$$p_0 V_0 = \nu R T_0, \quad p_1 V_1 = \nu R T_1, \quad p_0 V_2 = \nu R T_2$$

由以上各式联立求解易得

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{(p_1 - p_0) V_0}{(V_2 - V_0) p_0}$$

**11.21**  $0.25 \text{ kg}$  氧气作如图所示循环, 此循环由两个等体过程和两个等温过程组成. 已知  $V_b = 2 V_a$ , 试求:

(1) 循环的效率;

(2) 若  $a, b, c, d$  各状态的压强分别为  $p_a$ ,

$p_b, p_c, p_d$ , 证明:  $p_a p_c = p_b p_d$

**解** (1)  $d \rightarrow a$  与  $a \rightarrow b$  过程中吸热分别为

$$Q_V = \frac{m}{M} C_V (T_a - T_d)$$

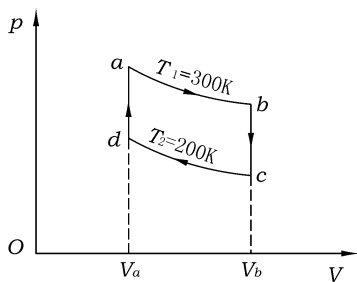


图 11.21

$$Q_T = A_T = \frac{m}{M} R T_a \ln \frac{V_b}{V_a} = \frac{m}{M} R T_2 \ln 2$$

$c-d$  过程中气体做功为

$$A'_T = -\frac{m}{M} R T_c \ln \frac{V_b}{V_a} = \frac{m}{M} R T_2 \ln 2$$

注意到  $T_a = T_b = T_1 = 300 \text{ K}$ ,  $T_c = T_d = T_2 = 200 \text{ K}$ ,  $C_V = \frac{5}{2} R$ ,  $M = 32 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ , 所以循环的效率为

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{A}{Q} = \frac{A_T + A'_T}{Q_V + Q_T} \\ &= \frac{\frac{m}{M} R T_1 \ln 2 - \frac{m}{M} R T_2 \ln 2}{\frac{m}{M} \cdot \frac{5}{2} R (T_1 - T_2) + \frac{m}{M} R T_1 \ln 2} \\ &= \frac{(T_1 - T_2) \ln 2}{\frac{5}{2} (T_1 - T_2) + T_1 \ln 2} = \frac{100 \times \ln 2}{\frac{5}{2} \times 100 + 300 \times \ln 2} = 15.1\% \end{aligned}$$

(2) 由于  $p_a V_a = p_b V_b$ ,  $p_c V_c = p_d V_d$ , 且  $V_a = V_d$ ,  $V_b = V_c$ , 所以

$$p_a V_c = p_b V_b \frac{V_b}{V_a} \cdot \frac{V_d}{V_c} = p_b p_d$$

**11.22** 图 11.22 示 1 mol 单原子理想气体所经历的循环过程, 其中  $ab$  为等温线. 假定  $V_2/V_1=2$ , 求循环的效率.

**解** 在  $c-a$  的等体过程中, 气体吸热为

$$\begin{aligned} Q_{ca} &= Q_V = C_V (T_a - T_c) = \frac{3}{2} R (T_a - T_c) \\ &= \frac{3}{2} (p_a - p_c) V_1 \end{aligned}$$

在  $a-b$  等温过程中, 气体吸热为

$$Q_{ab} = Q_T = R T_a \ln \frac{V_b}{V_a} = p_a V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

在  $b-c$  等压过程中, 气体放出的热量为

$$Q_{bc} = Q_p = C_p (T_b - T_c) = \frac{5}{2} R (T_b - T_c) = \frac{5}{2} p_c (V_2 - V_1)$$

整个循环中  $\Delta E = 0$ ,  $Q = \Delta E + A = A$

$$Q_{\text{吸}} = Q_{ca} + Q_{ab}$$

$$Q_{\text{放}} = Q_{bc}$$

$$Q = Q_{\text{吸}} - Q_{\text{放}}$$

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{吸}}} = \frac{A}{Q_{ca} + Q_{ab}} = \frac{Q_{ca} + Q_{ab} - Q_{bc}}{Q_{ca} + Q_{ab}}$$

$$= 1 - \frac{Q_p}{Q_v + Q_T} = 1 - \frac{\frac{5}{2} p_c (V_2 - V_1)}{\frac{3}{2} (p_a - p_c) V_1 + p_a V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

已知  $p_a V_1 = p_c V_2$ , 所以

$$\eta = 1 - \frac{5(V_2 - V_1)}{3(V_2 - V_1) + 2V_2 \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{5V_1}{3V_1 + 4V_1 \ln 2} = 13.4\%$$

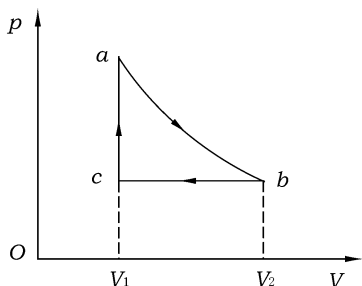


图 11.22

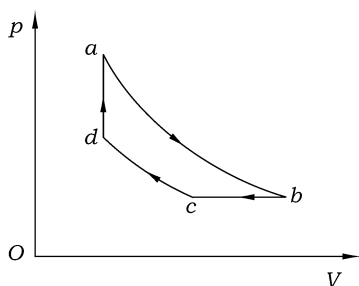


图 11.23

**11.23** 图 11.23 示为理想气体的一个循环过程, 其中  $ab, cd$  为绝热过程,  $bc, da$  分别是等压和等体过程. 试证明循环效率为

$$\eta = 1 - \gamma \frac{T_b - T_c}{T_a - T_d}$$

式中  $T_a, T_b, T_c, T_d$  分别是  $a, b, c, d$  各状态的温度,  $\gamma$  为比热容比.

**解** 在  $d-a$  等体过程中, 气体吸热

$$Q_{da} = Q_V = \nu C_V (T_a - T_d)$$

在  $b-c$  等压过程中, 气体放热为

$$Q_{bc} = Q_P = \nu C_P (T_a - T_c) = \nu \gamma C_V (T_b - T_c)$$

$$Q_{ab} = Q_{cd} = 0$$

整个循环中  $Q_{\text{吸}} = Q_{da}, Q_{\text{放}} = Q_{bc}, Q = Q_{\text{吸}} - Q_{\text{放}}$ , 且  $\Delta E = 0$ , 则

$$A = Q = Q_V - Q_P$$

所以

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{吸}}} = \frac{Q_V - Q_P}{Q_V} = 1 - \frac{\nu \gamma C_V (T_a - T_c)}{\nu C_V (T_a - T_d)} = 1 - \gamma \frac{T_b - T_c}{T_a - T_d}$$

**11.24** 1 mol 理想气体,  $C_V = \frac{3}{2}R$ , 进行图 11.24 示的循环.  $ab, cd$  为等压过程,  $bc, da$  为等体过程. 已知

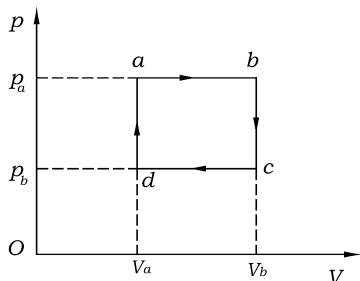


图 11.24

$$P_a = 2.026 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_a = 1.0 \text{ L}$$

$$p_c = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_b = 2.0 \text{ L}$$

试求循环的效率.

**解** 由定义知  $\eta = 1 - \frac{Q_{\text{放}}}{Q_{\text{吸}}} = \frac{Q}{Q_{\text{吸}}}$ , 所以

只要求出循环中气体吸收的热量  $Q_{\text{吸}}$  与放出的热量  $Q_{\text{放}}$ , 或者求气体所作的功  $A$ , 就可求出循环的效率  $\eta$ . 在循环中气体作功

$$\begin{aligned} A &= p_a(V_b - V_a) - p_c(V_b - V_a) = (p_a - p_c)(V_b - V_a) \\ &= (2 - 1) \times 1.013 \times 10^5 \times (2 - 1) \times 10^{-3} \\ &= 1.013 \times 10^2 \text{ J} \end{aligned}$$

在  $da$  等体过程及  $ab$  等压过程, 气体吸热

$$Q_{\text{吸}} = Q_{da} + Q_{ab} = C_V(T_a - T_d) + C_p(T_b - T_a)$$

因为

$$T_a = \frac{p_a V_a}{R} = \frac{2.026 \times 10^5 \times 1 \times 10^{-3}}{8.31} = 24.4 \text{ (K)}$$

$$T_b = \frac{p_b V_b}{R} = \frac{2.026 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3}}{8.31} = 48.8 \text{ (K)}$$

$$T_d = \frac{p_d V_d}{R} = \frac{1.013 \times 10^5 \times 1 \times 10^{-3}}{8.31} = 12.2 \text{ (K)}$$

代入前式得

$$\begin{aligned} Q_{\text{吸}} &= \frac{3}{2} \times 8.31 \times (24.4 - 12.2) + \frac{5}{2} \times 8.31 \times (48.8 - 24.4) \\ &= 659 \text{ (J)} \end{aligned}$$

故知

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{吸}}} = \frac{1.013 \times 10^2}{659} = 15.4\%$$

**11.25** 计算柴油机狄塞尔循环的效率. 它与奥托循环不同之处是先吸入空气, 燃料则在空气被压缩到一定的高压和高温时, 喷入气缸中燃烧. 所以, 循环的第一步可以看成绝热压缩过程, 气体由状态 I ( $V_1, T_1$ ) 达到状态 II ( $V_2, T_2$ ); 第二

个过程中气体在定压下燃烧膨胀,达到Ⅲ( $V_3, T_3$ );接着气体在绝热膨胀中达到状态Ⅳ( $V_1, T_4$ );最后等体放热回到初态,完成一个循环。

**解** 狄塞尔循环曲线如图所示.只在等压过程Ⅱ—Ⅲ中吸热  $Q_p$ ,在等体过程Ⅳ—I中放热  $Q_V$ .而且

$$Q_{\text{吸}} = Q_p = \nu C_p (T_3 - T_2)$$

$$Q_{\text{放}} = Q_V = \nu C_V (T_4 - T_1)$$

所以

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \frac{Q_V}{Q_p} = 1 - \frac{\nu C_V (T_4 - T_1)}{\nu C_p (T_3 - T_2)} \\ &= 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{\gamma (T_3 - T_2)}\end{aligned}$$

而对等压过程Ⅱ—Ⅲ有

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \quad \text{或} \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} = \rho$$

式中  $\rho$  称为定压膨胀比.对绝热过程Ⅲ—Ⅳ和Ⅰ—Ⅱ中,分别有

$$\frac{T_3}{T_4} = \left( \frac{V_1}{V_3} \right)^{\gamma-1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \delta^{\gamma-1}$$

式中  $\delta$  称为绝热压缩比.把  $T_1$ 、 $T_2$ 、 $T_4$  的表示式代入  $\eta$  的表示式中,并消去  $T_3$  得

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\left( \frac{V_3}{V_1} \right)^{\gamma-1} - \frac{V_2}{V_3} \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}}{1 - \frac{V_2}{V_3}} \\ &= 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\left( \frac{V_3}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1}{\left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \left( \frac{V_3}{V_2} - 1 \right)} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\rho^\gamma - 1}{\delta^{\gamma-1} (\rho - 1)} \\ &= 1 - \frac{\rho^\gamma - 1}{\gamma (\rho - 1)} \delta^{1-\gamma}\end{aligned}$$

**11.26** 一卡诺热机工作于温度为 1000 K 与 300 K 的两个热源之间,如果(1)将高温热源的温度提高 100 K;(2)将低温热源的温度降低 100 K,试问理论上热机的效率各增加多少?

**解** 卡诺机工作在 1000 K 与 300 K 之间时,其效率为

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{1000} = 70\%$$

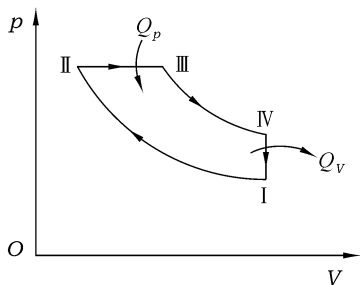


图 11.25

(1)若把高温热源提高 100 K 时,其效率为

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T'_1} = 1 - \frac{300}{1100} = 73\%$$

即效率提高了  $\eta - \eta_1 = 3\%$  .

(2)若把低温热源温度降低 100 K 时,其效率为

$$\eta_2 = 1 - \frac{200}{1000} = 80\%$$

可见效率提高了  $\eta_2 - \eta = 10\%$  .

**11.27** 一台电冰箱,为了制冰从 260 K 的冷冻室取走热量 209 kJ.如果室温是 300 K,试问电流做功至少应是多少(假定冰箱为理想卡诺循环致冷机)? 如果此冰箱能以 0.209 kJ/s 的速率取出热量,试问所需电功率至少应是多少?

**解** 此卡诺循环的致冷系数为

$$w = \frac{Q_2}{A} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{260}{300 - 260} = 6.5$$

若从冷冻室取走热量 209 kJ 时,所需电功至少为

$$A = \frac{Q_2}{w} = \frac{209 \times 10^3}{6.5} = 3.22 \times 10^4 \text{ J} = 32.2 \text{ kJ}$$

如果冰箱以 0.209 kJ/s 的速率取出热量,所需电功率至少为

$$p = 0.209 \times 10^3 / 6.5 = 32.2 (\text{W})$$

**11.28** 有一套动力装置,用蒸汽机带动致冷机.若蒸汽机锅炉的温度为 210 °C,用暖气系统作为蒸汽机的冷却器,冷却器温度为 60 °C;致冷机在温度为 15 °C 的天然蓄水池中吸热,并放热给暖气系统.试求每燃烧 1 kg 燃料(燃烧热值为  $2.09 \times 10^7 \text{ J/kg}$ )所能供给暖气系统热量的理想值.

**解** 蒸汽机的效率为

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{吸}}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{60 + 273}{210 + 273} = 31\%$$

从 1 kg 燃料中吸收的热量为

$$Q_1 = 2.09 \times 10^7 \times 1 = 2.09 \times 10^7 \text{ J}$$

对外做功为

$$A = \eta Q_1 = 0.31 \times 2.09 \times 10^7 = 6.48 \times 10^6 \text{ J}$$

因此放入暖气系统的热量为

$$Q_2 = Q_1 - A = 1.44 \times 10^7 \text{ J}$$

致冷机的致冷系数为

$$w = \frac{Q'_2}{A} = \frac{T'_2}{T'_1 - T'_2} = \frac{288}{333 - 288} = 6.4$$

则它从天然蓄水池(温度为  $T'_2$ )中吸取的热量为

$$Q'_2 = wA = 6.4 \times 6.48 \times 10^6 = 4.15 \times 10^7 \text{ (J)}$$

最后可得燃烧 1kg 燃料供给暖气系统的热量为

$$\begin{aligned} Q &= Q_2 + Q'_1 = Q_1 - A + Q'_2 + A = Q_1 + Q'_2 \\ &= (2.09 + 4.15) \times 10^7 = 6.24 \times 10^7 \text{ (J)} \end{aligned}$$

**11.29** 假定 1 mol 单原子理想气体在某过程中的热容为  $C=2R$  ( $R$  是摩尔气体常数), 试推求气体的压强与体积所遵从的过程方程.

解 按定义

$$C = \frac{dQ}{dT} = 2R$$

$$dQ = dE + pdV = C_V dT + pdV = \frac{3}{2} R dT + pdV$$

比较可见

$$\frac{1}{2} R dT - pdV = 0 \quad (1)$$

又由  $pV = RT$  求微分得

$$pdV + Vdp = R dT \quad (2)$$

从式(1)、(2)中消去  $dT$ , 得

$$pdV - Vdp = 0 \quad \frac{dV}{V} - \frac{dp}{p} = 0$$

积分上式即得

$$pV^{-1} = C(\text{常数})$$

**11.30** 热机工作于  $50^\circ\text{C}$  与  $250^\circ\text{C}$  之间, 在一个循环中作功  $1.05 \times 10^5 \text{ J}$ . 试求热机在一个循环中吸收和放出的热量至少应是多少?

$$\text{解 } \eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{273+50}{273+250} = 0.38$$

$$Q_1 = \frac{A}{\eta} = \frac{1.05 \times 10^5}{0.38} = 2.75 \times 10^5 \text{ J}$$

$$Q_2 = Q_1 - A = (2.75 - 1.05) \times 10^5 = 1.70 \times 10^5 \text{ (J)}$$

$Q_1$  和  $Q_2$  分别为热机在一个循环中吸收和放出的热量.

**11.31** 图 11.31 示一理想气体的循环过程, 由 3 条等温线和 3 条绝热线组成. 3 个等温过程的温度分别是  $T_1, T_2, T_3$ , 等温膨胀过程  $ab$  与  $cd$  中体积增长的倍数相同. 求此循环的效率.

解 循环中吸热为

$$Q_1 = Q_{ab} + Q_{cd} = \nu RT_1 \ln \frac{V_b}{V_a} + \nu RT_2 \ln \frac{V_d}{V_c}$$

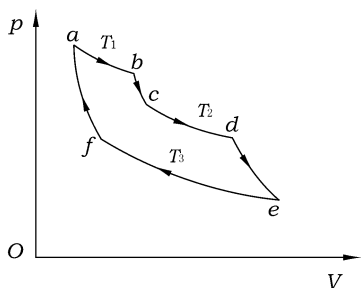


图 11.31

放热为

$$Q_2 = \nu R T_3 \ln \frac{V_e}{V_f}$$

已知  $\frac{V_b}{V_a} = \frac{V_d}{V_c}$ , 又由

$$T_1 V_a^{\gamma-1} = T_3 V_f^{\gamma-1}$$

$$T_2 V_d^{\gamma-1} = T_3 V_e^{\gamma-1}$$

$$T_1 V_b^{\gamma-1} = T_2 V_c^{\gamma-1}$$

可得

$$\frac{V_e}{V_f} = \frac{V_d}{V_a} \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{V_d}{V_a} \cdot \frac{V_b}{V_c} = \left( \frac{V_b}{V_a} \right)^2$$

所以

$$\begin{aligned} \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} &= 1 - \frac{\nu R T_3 \ln \frac{V_e}{V_f}}{\nu R T_1 \ln \frac{V_b}{V_a} + \nu R T_2 \ln \frac{V_d}{V_c}} \\ &= 1 - \frac{T_3 \ln \left( \frac{V_b}{V_a} \right)^2}{T_1 \ln \frac{V_b}{V_a} + T_2 \ln \frac{V_b}{V_a}} \\ &= 1 - \frac{2 T_3}{T_1 + T_2} \end{aligned}$$

## 第 12 章 气体动理论

### 一、基本内容和主要公式

#### 1. 理想气体状态方程

$$pV = \nu RT$$

或

$$p = nkT$$

其中  $\nu$  为理想气体的摩尔数,  $k$  为玻耳兹曼常数,  $n$  为分子数密度.

#### 2. 理想气体压强公式

$$p = \frac{n}{3} \mu \overline{v^2} = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}$$

其中  $\bar{\epsilon}$  为理想气体分子运动的平均平动动能,  $n$  为分子数密度,  $\mu$  为分子质量.

#### 3. 温度公式的统计意义

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} kT$$

式中  $\bar{\epsilon}$  为理想气体分子运动的平均平动动能.

#### 4. 速率分布函数

速率分布函数  $f(v)$  表示气体分子在  $v$  附近, 单位速率间隔中的分子数占总分子数的百分率, 即

$$f(v) = \frac{dN}{Ndv}$$

归一化条件为

$$\int_0^{+\infty} f(v) dv = 1$$

在  $v_1 \sim v_2$  速率间隔中的分子数为

$$\Delta N = \int_{v_1}^{v_2} N f(v) dv$$

平均速率为

$$\bar{v} = \int_0^{+\infty} v f(v) dv$$

方均根速率为

$$\overline{v^2} = \int_0^{+\infty} v^2 f(v) dv^{1/2}$$

## 5. 麦克斯韦速率分布律

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\mu v^2 / 2kT}$$

理想气体分子的最概然速率为

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad (M \text{ 为气体的摩尔质量})$$

理想气体分子的平均速率为

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

理想气体分子的方均根速率为

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

## 6. 能量均分定理

当系统处于平衡态时, 分子每个自由度所具有的平均动能为  $\frac{1}{2} kT$ , 一个自由

度为  $i$  的分子所具有的平均动能为  $\frac{i}{2} kT$ , 单原子分子  $i=3$ , 刚性双原子分子  $i=$

5.  $\nu$  摩尔的理想气体(刚性分子)的内能为  $E = \frac{i}{2} \nu RT$ .

## 7. 理想气体的摩尔热容

定容摩尔热容为

$$C_V = \frac{i}{2} R$$

定压摩尔热容为

$$C_P = C_V + R = \frac{i+2}{2} R$$

比热容比为

$$\gamma = \frac{i+2}{i}$$

## 8. 玻耳兹曼能量分布律

$$n = n_0 e^{-\epsilon_p / kT}$$

重力场中粒子按高度的分布为

$$n = n_0 e^{-\mu gh / kT}$$

重力场中气体压强按高度的分布(等温气压公式)为

$$p = p_0 e^{-\mu gh / kT}$$

## 9. 气体分子的平均碰撞频率和平均自由程

平均碰撞频率为

$$\bar{Z} = \sqrt{2\pi d^2 \bar{v} n} \quad (\text{其中 } d \text{ 为分子有效直径})$$

平均自由程为

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2 n}} = \frac{kT}{\sqrt{2\pi d^2 p}}$$

## 10. 熵的宏观表示

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

对于元过程有

$$TdS = dE + pdV$$

**11. 熵增加原理** 孤立系统的熵永不会减少, 即孤立系统  $\Delta S \geq 0$  或  $dS \geq 0$ .

## 二、典型例题

**12-1** 一容积为  $V = 1.0 \text{ m}^3$  的容器内装有  $N_1 = 1.0 \times 10^{24}$  个氧分子和  $N_2 = 3.0 \times 10^{24}$  个氮分子的混合气体, 混合气体的压强是  $2.58 \times 10^4 \text{ Pa}$ . 试求:

(1) 分子的平均平动动能;

(2) 混合气体的温度.

**解** (1) 由压强公式  $p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}$ , 有

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 = \frac{3}{2} \frac{p}{n} = \frac{3pV}{2(N_1 + N_2)} \\ &= \frac{3 \times 2.58 \times 10^4 \times 1.0}{2(1.0 \times 10^{24} + 3.0 \times 10^{24})} = 9.68 \times 10^{-21} \text{ (J)} \end{aligned}$$

(2) 由平均平动动能公式  $\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} kT$ , 有

$$T = \frac{2\bar{\epsilon}}{3k} = \frac{2 \times 9.68 \times 10^{-21}}{3 \times 1.38 \times 10^{-23}} = 468 \text{ (K)}$$

**说明** 本题的目的在于训练理想气体压强公式在混合气体方面的应用. 值得注意的是, 压强  $p$  和温度  $T$  都是宏观量, 分子平均平动动能  $\bar{\epsilon}$  是微观量的统计平均值, 因此压强和温度都是大量气体分子无序运动量统计平均的结果.

**12-2** 假想的气体分子, 其速率分布如图 12-2 所示. 当  $v > 5v_0$  时分子数为零. 试求:

(1) 根据  $N$  和  $v_0$ , 表示常数  $a$  的值;

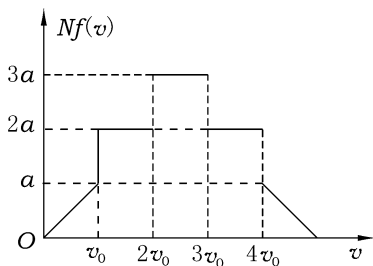


图 12-2

(2) 速率在  $v_0$  到  $3v_0$  间隔内的分子数;

(3) 分布在  $v_0$  到  $3v_0$  间隔内的气体分子的平均速率.

解 (1) 根据速率分布曲线, 速率分布可表示为

$$Nf(v) = \begin{cases} \frac{a}{v_0} v, & 0 < v < v_0 \\ 2a, & v_0 < v < 2v_0 \\ 3a, & 2v_0 < v < 3v_0 \\ 2a, & 3v_0 < v < 4v_0 \\ -\frac{a}{v_0}(v - 5v_0), & 4v_0 < v < 5v_0 \\ 0, & v > 5v_0 \end{cases}$$

由归一化条件, 有

$$\int_0^{\infty} Nf(v) dv = N$$

即

$$\int_0^{v_0} \frac{a}{v_0} v dv + \int_{v_0}^{2v_0} 2a dv + \int_{2v_0}^{3v_0} 3a dv + \int_{3v_0}^{4v_0} 2a dv + \int_{4v_0}^{5v_0} -\frac{a}{v_0}(v - 5v_0) dv = N$$

由上式可解得

$$a = \frac{N}{8v_0}$$

(2) 速率分布在  $v_0 \sim 3v_0$  间隔内的分子数  $\Delta N$  为

$$\begin{aligned} \Delta N &= N \int_{v_0}^{3v_0} f(v) dv = \int_{v_0}^{2v_0} 2a dv + \int_{2v_0}^{3v_0} 3a dv \\ &= 5av_0 = \frac{5N}{8} \end{aligned}$$

(3) 分布在  $v_0 \sim 3v_0$  间隔内的气体分子的平均速率  $\bar{v}$  为

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{\int_{v_0}^{3v_0} v f(v) dv}{\int_{v_0}^{3v_0} f(v) dv} \\ &= \frac{\int_{v_0}^{3v_0} v N f(v) dv}{\int_{v_0}^{3v_0} N f(v) dv} \\ &= \frac{1}{\Delta N} \left[ \int_{v_0}^{2v_0} 2av dv + \int_{2v_0}^{3v_0} 3av dv \right] \end{aligned}$$

将  $\Delta N = 5av_0$  代入上式, 积分化简后有

$$\bar{v} = \frac{21}{10} v_0$$

说明 本题的目的在于加深对速率分布函数  $f(v)$  的物理意义的理解. 读者可思考

求解  $v_0 < v < 3v_0$  区域中的平均速率与在整个区域中求平均速率的差别。

**12-3** 根据麦克斯韦速率分布率,试证明:速率在最概然速率  $v_P \sim v_P + \Delta v$  区间内的分子数与  $\sqrt{T}$  成反比(设  $\Delta v$  很小)。

证 对于理想气体,最概然速率为

$$v_P = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}}$$

代入到麦克斯韦速率分布律中,有

$$\begin{aligned} f(v) &= 4\pi \left( \frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\mu v^2 / 2kT} v^2 \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} v_P^{-3} e^{-v^2 / v_P^2} v^2 \end{aligned}$$

当  $v = v_P$  时有

$$f(v_P) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} v_P^{-1} e^{-1}$$

由于  $\Delta v$  很小,所以在  $v_P \sim v_P + \Delta v$  区间内的分子数可近似为

$$\Delta N \approx N f(v_P) \Delta v = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\mu}{2kT}} e^{-1} \Delta v$$

故

$$\Delta N \propto \frac{1}{\sqrt{T}}$$

**说明** 本题的目的在于加深对麦克斯韦速率分布律的理解,介绍用近似的方法计算小速率间隔内的分子数,但注意本近似方法只适合于速率间隔  $\Delta v$  很小的情况。

**12-4** 一容器内某理想气体的温度为  $T = 273 \text{ K}$ ,压强为  $p = 1.0 \times 10^{-3} \text{ atm}$ ,密度为  $\rho = 1.25 \text{ g/m}^3$ ,试求:

- (1) 气体分子运动的方均根速率?
- (2) 气体的摩尔质量,是何种气体?
- (3) 气体分子的平均平动动能和平均转动动能?
- (4) 单位体积内气体分子的总平动动能?
- (5) 设该气体有  $0.3 \text{ mol}$ ,气体的内能?

**解** (1) 由方均根速率公式,有

$$\sqrt{v} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3 \times 1.0 \times 10^{-3} \times 1.013 \times 10^5}{1.25 \times 10^{-3}}} = 493 \text{ (m/s)}$$

(2) 由  $pV = \frac{m}{M}RT$ ,有

$$M = \frac{\rho RT}{p} = \frac{1.25 \times 10^{-3} \times 8.31 \times 273}{10^{-3} \times 1.013 \times 10^5} = 0.028 \text{ (kg/mol)}$$

由结果可知,这是  $N_2$  或  $CO$  气体.

(3)由平均平动动能和转动动能公式,有

$$\overline{\epsilon_t} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 273 = 5.65 \times 10^{-21} \text{ (J)}$$

$$\overline{\epsilon_r} = kT = 1.38 \times 10^{-23} \times 273 = 3.77 \times 10^{-21} \text{ (J)}$$

(4)单位体积内气体分子的总平动动能为

$$E_t = \overline{\epsilon_t} \cdot n = \overline{\epsilon_t} \cdot \frac{p}{kT} = 5.56 \times 10^{-21} \times \frac{1.013 \times 10^2}{1.38 \times 10^{-23} \times 273} \\ = 1.52 \times 10^2 \text{ (J/m}^3\text{)}$$

(5)由气体的内能公式,有

$$E = \frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} RT = 0.3 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times 273 = 1.70 \times 10^3 \text{ (J)}$$

**说明** 本题为分子动理论中一些常用公式的直接应用.读者应熟悉这些公式,并能够根据题意,求解有关结果.本题中由于是双原子分子,故有 3 个平动自由度,2 个转动自由度,分别反映在  $\overline{\epsilon_t}$  和  $\overline{\epsilon_r}$  公式中,在气体内能公式中,系统的总自由度  $i=3+2=5$ .对于自由度概念的掌握值得充分重视.

**12-5** 在半径为  $R$  的球形容器里贮存有分子有效直径为  $d$  的气体,试求该容器中最多可容纳多少个分子,才能使分子之间不致相碰?

**解** 为使气体分子之间不相碰,则必须使分子的平均自由程不小于容器的直径,即必须满足

$$\overline{\lambda} \geq 2R$$

由分子的平均自由程  $\overline{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$ , 可得

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 \overline{\lambda}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 (2R)}$$

上式表明,为使分子之间不相碰,容器中可容许的最大分子数密度为  $n = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi d^2 R}$ , 因此,在容积  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  的容器中,最多可容许的分子数  $N$  为

$$N = nV = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi d^2 R} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3\sqrt{2}} \frac{R^2}{d^2} = 0.48 \frac{R^2}{d^2}$$

**说明** (1)所谓气体分子之间不相碰撞是指平均自由程  $\overline{\lambda} \geq$  容器线度,但气体分子之间仍有碰撞,只是碰撞频率较低而已.其平均碰撞频率仍用  $\overline{Z} = \frac{\overline{v}}{\overline{\lambda}} = \sqrt{2}\pi d^2 \overline{v} n$  计算.

(2)通常也将  $\overline{\lambda} \geq$  容器线度作为一个容器达到真空的条件.

**12-6** 拉萨海拔约为 3600 m,气温为 273 K,忽略气温随高度的变化.当海平

面上的大气压为  $1.0 \text{ atm}$  时,试求:

(1)拉萨的大气压强;

(2)若某人在海平面上每分钟呼吸 17 次,那么他在拉萨应呼吸多少次才能吸入同样质量的空气?(已知空气的摩尔质量为  $M=29 \times 10^{-3} \text{ kg}$ )

解 (1)根据等温气压公式,有

$$p = p_0 e^{-Mgz/RT} = 1.0 e^{-29 \times 10^{-3} \times 9.8 \times 3600 / 8.31 \times 273} \\ = 0.637 (\text{atm})$$

(2)设某人每次呼吸吸入的空气容积为  $V_0$ ,  $x$  为他在拉萨应呼吸的次数,则

$$p_0 (17 V_0) = p (x V_0)$$

所以

$$x = \frac{17 p_0}{p} = \frac{17 \times 1.0}{0.637} = 26.7$$

**说明** 本题是等温气压公式的直接应用.等温气压公式表明,在重力场中的压强随高度按指数规律减小.它可以用来近似估计距海平面上某高度处的大气压强,也可根据测得的大气压估计测量点的高度.从结果可知,随着高度的增加,压强  $p$  降低,人的呼吸次数明显应增加,感到呼吸急促.

**12-7** 设有  $A$ 、 $B$  两室,容积相同,外壁绝热,两室中间有一可导热的隔板,板上有一阀门,开始时,阀门关闭. $A$  室装有  $1 \text{ mol}$  单原子理想气体,温度为  $T_1$ ,压力与上方自由放置的活塞相平衡; $B$  室为真空.若将  $A$ 、 $B$  间阀门微微打开,则气体逐渐进入  $B$  室, $A$  室活塞随之下降,最后达到一平衡态.如图所示.试求气体在该过程中的熵变.

**解** 设初态时, $A$ 、 $B$  两室的体积均为  $V$ ,末态时温度为  $T_2$ ,活塞下降到使  $A$  室的体积为  $V_A$ .在初态时, $A$  室有

$$pV = RT_1$$

末态时, $A+B$  室有

$$p(V_A + V) = RT_2$$

由热力学第一定律可知

$$p(V - V_A) = C_V(T_2 - T_1)$$

有

$$T_2 = \frac{7}{5} T_1$$

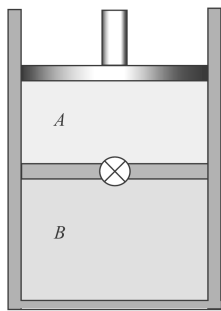


图 12-7

上述过程是一不可逆过程,但在计算熵变时可设想系统经历了一等压升温的准静态过程从初态到达末态,于是熵变为

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} C_p \frac{dT}{T} = \frac{5}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1} \\ &= \frac{5}{2} R \ln \frac{7}{5} > 0\end{aligned}$$

**说明** 上述过程是一不可逆过程,但由题可知,整个过程系统压强不变,在气体泻流到  $B$  室中,相当于气体体积增大,温度升高,所以可设想这一过程为等压升温过程.对于  $1\text{mol}$  理想气体的熵变,只要始末状态的参量已知,代入压强相同时的熵变公式  $\Delta S = C_p \ln \frac{V}{V_0} = C_p \ln \frac{T}{T_0}$ ,也可求得上述熵变.

### 三、习题详解

#### 12.1 选择题

(1)理想气体处于平衡状态,设温度为  $T$ ,气体分子的自由度为  $i$ ,则每个气体分子所具有的(C)

- (A) 动能为  $\frac{i}{2} kT$                       (B) 动能为  $\frac{i}{2} RT$   
(C) 平均动能为  $\frac{i}{2} kT$                 (D) 平均平动动能为  $\frac{i}{2} RT$

(2)质量为  $m$ 、摩尔质量为  $M$  的理想气体,经历了一个等压过程,温度增量为  $\Delta T$ ,则内能增量为(B)

- (A)  $\Delta E = \frac{m}{M} C_p \Delta T$                 (B)  $\Delta E = \frac{m}{M} C_v \Delta T$                 (C)  $\Delta E = \frac{m}{M} R \Delta T$   
(D)  $\Delta E = \frac{m}{M} (C_p + R) \Delta T$

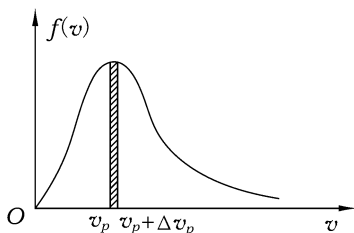


图 12.1

(3)处于平衡状态的理想气体,其分子的速率分布曲线如图 12.1,设  $v_p$  表示最概然速率,  $\Delta N_p/N$  表示速率分布在  $v_p \sim v_p + \Delta v$  之间的分子数占总分子数的百分率,当温度降低时,则(C)

- (A)  $v_p$  减小,  $\Delta N_p/N$  也减小  
(B)  $v_p$  增大,  $\Delta N_p/N$  也增大  
(C)  $v_p$  减小,  $\Delta N_p/N$  增大  
(D)  $v_p$  增大,  $\Delta N_p/N$  减小

(4)理想气体绝热地向真空自由膨胀,设初状态气体的温度为  $T_1$ ,气体分子的

平均自由程为  $\overline{\lambda_1}$ , 末状态温度为  $T_2$ , 自由程为  $\overline{\lambda_2}$ , 若气体体积膨胀为原来的两倍, 则(B)

$$(A) T_1 = T_2; \overline{\lambda_1} = \overline{\lambda_2} \quad (B) T_1 = T_2; \overline{\lambda_1} = \frac{1}{2} \overline{\lambda_2}$$

$$(C) T_1 = 2 T_2; \overline{\lambda_1} = \overline{\lambda_2} \quad (D) T_1 = \frac{1}{2} T_2; \overline{\lambda_1} = \frac{1}{2} \overline{\lambda_2}$$

## 12.2 填空题

(1) 某理想气体处于平衡状态, 已知压强为  $p = 1.013 \times 10^3 \text{ Pa}$ , 密度为  $\rho = 1.24 \times 10^{-2} \text{ kg/m}^3$ , 则该气体分子的方均根速率为  $\sqrt{\overline{v^2}} = 495 \text{ m/s}$ .

(2) 已知氧气的压强  $p = 2.026 \text{ Pa}$ , 体积  $V = 3.00 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ , 则其内能  $E = 0.152 \text{ J}$ .

(3) 某理想气体处于平衡状态, 其速率分布函数为  $f(v)$ , 则速率分布在速率间隔  $(v_1 \sim v_2)$  内的气体分子的平均速率的计算公式为  $\overline{v} = \frac{\int_{v_1}^{v_2} v f(v) dv}{\int_{v_1}^{v_2} f(v) dv}$ .

(4) 容器内贮有刚性多原子分子理想气体, 经绝热过程后, 压强减为初始压强的一半, 则始、末两个状态气体内能之比为  $E_1/E_2 = 1.19$ .

**12.3** 一容器中贮有氧气, 其压强为  $1.013 \times 10^6 \text{ Pa}$ , 温度为  $27^\circ\text{C}$ . 试求: (1)  $1 \text{ cm}^3$  中的分子数; (2) 分子间的平均距离, 此距离是氧分子直径 ( $3 \times 10^{-10} \text{ m}$ ) 的几倍?

**解** (1) 由理想气体状态方程, 有

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1.013 \times 10^6}{1.38 \times 10^{-23} \times (273 + 27)} = 2.45 \times 10^{26} (\text{m}^{-3})$$

所以,  $1 \text{ cm}^3$  中有  $2.45 \times 10^{20}$  个分子.

(2) 气体中分子间的平均距离为

$$d = \frac{1}{n^{1/3}} = 1.6 \times 10^{-9} (\text{m})$$

此距离与氧分子直径的比为

$$\alpha = \frac{d}{3 \times 10^{-10}} = 5.33$$

即气体中分子间的平均距离为氧分子直径的 5.33 倍.

**12.4** 试求压强为  $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、质量为  $2 \text{ g}$ 、体积为  $1.54 \text{ L}$  的氧气分子的平均平动动能.

**解** 由  $pV = \frac{m}{M} RT$  及  $R = kN_0$  得

$$\overline{\epsilon} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \frac{R}{N_0} \frac{MpV}{mR} = \frac{3}{2} \frac{MpV}{mN_0}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3 \times 32 \times 10^{-3} \times 1.013 \times 10^5 \times 1.54 \times 10^{-3}}{2 \times 2 \times 10^{-3} \times 6.022 \times 10^{23}} \\
 &= 6.22 \times 10^{-21} \text{ (J)}
 \end{aligned}$$

**12.5** 氢气分子的质量为  $3.32 \times 10^{-24} \text{ kg}$ , 如果每秒内有  $1.0 \times 10^{23}$  个氢分子, 以与墙面成  $45^\circ$  角的方向、 $10^5 \text{ cm/s}$  的速率撞击在面积为  $2.0 \text{ cm}^2$  的墙面上, 试求氢气作用在墙面上的压强。

**解** 设每秒与墙碰撞的分子数为  $N$ , 分子质量为  $\mu$ , 则  $\Delta t$  内与墙碰撞的分子数为  $N\Delta t$ , 碰撞前这些分子的动量在墙面法线方向的投影为

$$-N\Delta t \mu v \cos 45^\circ$$

碰撞后动量的投影为

$$N\Delta t \mu v \cos 45^\circ$$

若墙面对这些分子的平均冲力为  $\overline{F}$ , 则有

$$\begin{aligned}
 \overline{F}\Delta t &= N\Delta t \mu v \cos 45^\circ - (-N\Delta t \mu v \cos 45^\circ) \\
 &= 2N\Delta t \mu v \cos 45^\circ
 \end{aligned}$$

这些分子作用于墙面的冲力大小与  $\overline{F}$  相等, 故作用于墙面的压强为

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{\overline{F}}{S} = \frac{2N\mu v \cos 45^\circ}{S} \\
 &= \frac{2 \times 1.0 \times 10^{23} \times 3.32 \times 10^{-24} \times 10^3 \times 0.707}{2.0 \times 10^{-4}} \\
 &= 2.35 \times 10^6 \text{ (Pa)}
 \end{aligned}$$

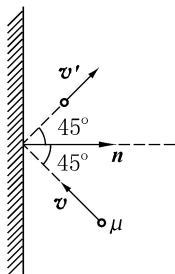


图 12.5

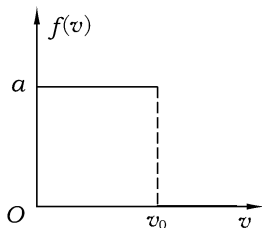


图 12.6

**12.6** 假定  $N$  个粒子的速率分布函数为

$$f(v) = \begin{cases} a & 0 < v < v_0 \\ 0 & v > v_0 \end{cases}$$

(1) 作出速率分布曲线;

(2) 由  $v_0$  求常数  $a$ ;

(3)求粒子的平均速率.

**解** (1)速率分布曲线如图 12.6 所示.

(2)由归一化条件,有

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = \int_0^{v_0} a dv = 1$$

$$a = \frac{1}{v_0}$$

(3)粒子的平均速率为

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \int_0^{v_0} v a dv$$

$$= \frac{1}{2} v_0^2 a = \frac{1}{2} v_0$$

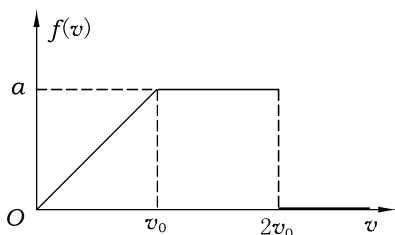


图 12.7

**12.7** 假定  $N$  个粒子的速率分布曲线如图 12.7 所示.

(1)由  $N$  和  $v_0$  求  $a$ ;

(2)求速率在  $1.5 v_0$  到  $2.0 v_0$  之间的粒子数;

(3)求粒子的平均速率.

**解** (1)由归一化条件,有

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = \int_0^{v_0} \frac{a}{v_0} v dv + \int_{v_0}^{2v_0} a dv = 1$$

解之,得

$$a = \frac{2}{3 v_0}$$

(2)速率在  $1.5 v_0$  到  $2.0 v_0$  之间的粒子数为

$$\Delta N = \int_{1.5 v_0}^{2.0 v_0} N f(v) dv = \int_{1.5 v_0}^{2.0 v_0} N a dv = \frac{2N}{3 v_0} (2.0 v_0 - 1.5 v_0) = \frac{1}{3} N$$

(3)粒子的平均速率为

$$\bar{v} = \int_0^{+\infty} v f(v) dv = \int_0^{v_0} \frac{a}{v_0} v^2 dv + \int_{v_0}^{2v_0} a v dv = \frac{11}{9} v_0$$

**12.8** 某系统由  $N$  个粒子组成,试证明:不论这些粒子的速率如何分布,其方均根速率恒大于或等于平均速率,即  $\sqrt{\overline{v^2}} \geq \bar{v}$ .

**证** 对于任何一个粒子的速率  $v$ ,恒有

$$(v - \bar{v})^2 \geq 0$$

将上式对所有粒子求平均,则有

$$\overline{(v - \bar{v})^2} \geq 0$$

此式展开后变为

$$\overline{v^2} - 2\overline{vv} + (\overline{v})^2 \geq 0$$

因此有

$$\overline{v^2} - 2\overline{vv} + (\overline{v})^2 \geq 0$$

由于

$$\overline{vv} = (\overline{v})^2$$

所以

$$\overline{v^2} - (\overline{v})^2 \geq 0$$

即

$$\overline{v^2} \geq (\overline{v})^2$$

两边开平方,即可得

$$\sqrt{\overline{v^2}} \geq \overline{v}$$

当所有粒子均以同一速率运动时,有  $\sqrt{\overline{v^2}} = \overline{v}$ , 否则,有  $\sqrt{\overline{v^2}} > \overline{v}$ .

**12.9** 根据麦克斯韦速率分布律,试求速率倒数的平均值  $\left(\frac{1}{v}\right)$ .

**解** 根据求平均值的定义,速率倒数的平均值  $\left(\frac{1}{v}\right)$  为

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{v}\right) &= \int_0^\infty \frac{1}{v} f(v) dv \\ &= \int_0^\infty 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\mu}{2kT}v^2} v dv \\ &= 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} \left(\frac{-kT}{\mu}\right) \int_0^\infty e^{-\frac{\mu}{2kT}v^2} d\left(\frac{\mu}{2kT}v^2\right) \\ &= \sqrt{\frac{2\mu}{\pi kT}} = \sqrt{\frac{\pi\mu}{8kT}} \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{v}\end{aligned}$$

即

$$\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{v}$$

显然,速率倒数的平均值不等于平均速率的倒数.

**12.10** 试利用麦克斯韦速率分布函数,推求气体分子的最概然速率  $v_P$ .

**解** 麦克斯韦速率分布函数为

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\mu v^2/2kT} = C v^2 e^{-\mu v^2/2kT}$$

对其求极值,有

$$\left. \frac{df(v)}{dv} \right|_{v=v_P} = C e^{-\mu v^2/2kT} 2v - \frac{\mu}{2kT} 2v^3 = 0$$

所以气体分子的最概然速率为

$$v_P = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}}$$

**12.11** 设氢气的温度为 300K,试求分布在速率间隔 3000~3010 m/s 内的分子数  $\Delta N_1$  与速率间隔  $v_P \sim v_P + 10$  m/s 内分布的分子数  $\Delta N_2$  之比.

**解** 气体分子的最概然速率为

$$v_P = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2 \times 8.31 \times 300}{2 \times 10^{-3}}} = 2182 \text{ (m/s)}$$

将最概然速率公式  $v_P = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}}$  代入麦克斯韦速率分布函数中,有

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{v_P} \right)^3 v^2 e^{-v^2/v_P^2} \quad (1)$$

若  $\Delta v$  很小,则分布  $v \sim v + \Delta v$  在内的分子数为

$$\Delta N = N \int_v^{v+\Delta v} f(v) dv \approx N f(v) \Delta v \quad (2)$$

设  $v_1 = 3000$  m/s,  $v_2 = v_P = 2182$  m/s,  $\Delta v_1 = \Delta v_2 = 10$  m/s 则

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} &= \frac{f(v_1) \Delta v_1}{f(v_2) \Delta v_2} = \frac{v_1^2 e^{-v_1^2/v_P^2}}{v_2^2 e^{-v_2^2/v_P^2}} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 e^{-\left( \frac{v_1}{v_P} \right)^2 + \left( \frac{v_2}{v_P} \right)^2} \\ &= \left( \frac{3000}{2182} \right)^2 e^{-\left( \frac{3000}{2182} \right)^2 + 1} = 0.78 \end{aligned}$$

**12.12** 证明:麦克斯韦速率分布函数可写成

$$\phi(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2}$$

其中

$$x = \frac{v}{v_P}$$

**证** 由上题(1)式有

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_P^3} e^{-v^2/v_P^2}$$

令  $x = \frac{v}{v_P}$ , 则  $\frac{dv}{dx} = v_P$ , 故有

$$\phi(x) = f(v) \frac{dv}{dx} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2}$$

**12.13** 在容积为  $30 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  的容器中,贮有  $20 \times 10^{-3} \text{ kg}$  的气体,其压强为  $50.7 \times 10^3 \text{ Pa}$ .试求该气体分子的最概然速率、平均速率及方均根速率.

解 由  $pV = \frac{m}{M}RT$ , 有

$$v_P = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2pV}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 50.7 \times 10^3 \times 30 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-3}}} = 390 \text{ (m/s)}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8pV}{\pi m}} = 440 \text{ (m/s)}$$

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3pV}{m}} = 478 \text{ (m/s)}$$

**12.14** 在什么温度下, 一个气体分子的平均平动动能等于一个电子由静止通过 1 V 电势差的加速作用所获得的动能?

解 由  $\bar{\epsilon} = \frac{3}{2}kT = 1 \text{ eV}$  有

$$T = \frac{2\bar{\epsilon}}{3k} = \frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19}}{3 \times 1.38 \times 10^{-23}} = 7.73 \times 10^3 \text{ (K)}$$

**12.15** 将温度为 273 K, 压强为  $1.013 \times 10^6 \text{ Pa}$  的氧气密封在一边长为 10 cm 的立方体容器中. 试将一个氧分子由容器的顶面落到底面时重力势能的变化和一个氧气分子的平均平动动能进行比较.

解 重力势能的变化为

$$\Delta \epsilon_p = \mu gh = \frac{M}{N_A} gh = \frac{32 \times 10^{-3}}{6.02 \times 10^{23}} \times 9.8 \times 10 \times 10^{-2}$$

$$= 5.21 \times 10^{-26} \text{ (J)}$$

平均平动动能为

$$\epsilon_k = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 273$$

$$= 5.65 \times 10^{-21} \text{ (J)}$$

所以

$$\frac{\epsilon_k}{\Delta \epsilon_p} = \frac{5.65 \times 10^{-21}}{5.21 \times 10^{-26}} = 1.1 \times 10^5$$

**12.16** 一个能量为  $10^{12} \text{ eV}$  的宇宙射线粒子, 射入氖管中, 氖管中有氖气 0.1 mol. 如果宇宙射线粒子的能量全部被氖气分子所吸收而变为分子热运动能量, 试问氖气的温度能升高几度?

解 由  $E = \frac{m}{M} \frac{3}{2} RT$ , 有

$$\Delta T = \frac{\Delta E}{\frac{m}{M} \frac{3}{2} R} = \frac{10^{12} \times 1.6 \times 10^{-19}}{0.1 \times \frac{3}{2} \times 8.31} = 1.28 \times 10^{-7} \text{ (K)}$$

**12.17** 容积为 2.5 L 的容器中,贮有  $10^{15}$  个氧分子、 $4 \times 10^{15}$  个氮分子和  $3.3 \times 10^{-7}$  g 氙气的混合气体.试求混合气体在温度为 433 K 时的压强.

**解** 依题意氙气的分子数为

$$\begin{aligned} N_3 &= \frac{m}{M} N_0 = \frac{3.3 \times 10^{-7} \times 10^{-3}}{40 \times 10^{-3}} \times 6.022 \times 10^{23} \\ &= 5 \times 10^{15} (\text{个}) \end{aligned}$$

由道尔顿分压定律,有

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 + p_3 = n_1 kT + n_2 kT + n_3 kT \\ &= \frac{1}{V} (N_1 + N_2 + N_3) kT \\ &= (1 + 4 + 5) \times 10^{15} \times \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 433}{2.5 \times 10^{-3}} \\ &= 2.39 \times 10^{-2} (\text{Pa}) \end{aligned}$$

**12.18** 温度为 27 °C 时,1 mol 氧气具有多少平动动能? 多少转动动能?

**解** 气体的平动动能为

$$E_t = \frac{3}{2} RT = \frac{3}{2} \times 8.31 \times 300 = 3.74 \times 10^3 (\text{J})$$

气体的转动动能为

$$E_r = \frac{2}{2} RT = 8.31 \times 300 = 2.49 \times 10^3 (\text{J})$$

**12.19** 在室温 300 K 时,1 mol 氢气的内能是多少? 1 g 氮气的内能是多少?

**解** 氢气的内能为

$$E_{H_2} = \frac{5}{2} RT = \frac{5}{2} \times 8.31 \times 300 = 6.23 \times 10^3 (\text{J})$$

氮气的内能为

$$E_{N_2} = \frac{m}{M} \frac{5}{2} RT = \frac{1 \times 10^{-3}}{28 \times 10^{-3}} \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times 300 = 223 (\text{J})$$

**12.20** 试求氧气在压强为 2.026 Pa、体积为  $3 \times 10^{-2} \text{ m}^3$  时的内能.

**解** 氧气的内能为

$$\begin{aligned} E &= \frac{5}{2} \nu RT = \frac{5}{2} PV = \frac{5}{2} \times 2.026 \times 3 \times 10^{-2} \\ &= 0.152 (\text{J}) \end{aligned}$$

**12.21** 已知空气分子的平均分子量为 28.97.求在  $T=300 \text{ K}$  的等温大气中,分子数密度相差一倍对应的高度差.

**解** 由  $n = n_0 e^{-\mu gh/kT}$ , 有

$$\frac{n_1}{n_2} = 2 = e^{\mu(h_2 - h_1)g/kT}$$

所以

$$\Delta h = (h_2 - h_1) = \frac{kT}{\mu g} \ln 2$$

式中  $\mu$  为气体分子的质量,其值为

$$\mu = \frac{M}{N_0} = \frac{28.97 \times 10^{-3}}{6.022 \times 10^{23}} = 4.81 \times 10^{-26} \text{ (kg)}$$

故

$$\Delta h = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 300}{4.81 \times 10^{-26} \times 9.8} \times \ln 2 = 6.09 \times 10^3 \text{ (m)}$$

**12.22** 实验测得常温下距海平面不太高处,每升高 10 m,大气压约降低 133.3 Pa.试用恒温气压公式验证此结果(海平面上大气压按  $1.013 \times 10^5$  Pa 计,温度取 273 K).

解 由  $p = p_0 e^{-\mu g h / kT} = p_0 e^{-M g h / RT}$  有

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh$$

$$dh = -\frac{RT}{Mg} \frac{dp}{p}$$

$$= -\frac{8.31 \times 273}{28.97 \times 10^{-3} \times 10} \times \frac{-133.3}{1.01 \times 10^5} = 10.3 \text{ (m)}$$

因此结论被验证.

**12.23** 比林曾通过测定悬浮在水中的球形藤黄粒子按高度分布的情况来计算阿伏伽德罗常数.在常温下( $t=27^\circ\text{C}$ ),实验得到高度相差为  $H=30 \mu\text{m}$  的两层中,粒子数之比  $\beta=2.08$ ,粒子的体积  $V=3.99 \times 10^{-20} \text{ m}^3$ ,粒子的密度为  $\rho=1.19 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,水的密度  $\rho_0=1.00 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .试由此估算阿伏伽德罗常数  $N_A$ .

解 液体中的藤黄粒子所受的合力大小为

$$F = \rho g V - \rho_0 g V = (\rho - \rho_0) g V$$

取竖直向上为  $z$  轴的正方向,以  $z=0$  处为零势能点,则粒了的高度  $z$  处的势能为

$$\varepsilon_p = (\rho - \rho_0) g V z$$

根据玻耳兹曼分布率,可得高度为  $z$  处的粒子数密度为

$$n = n_0 e^{-(\rho - \rho_0) g V z / kT}$$

同理,高度为  $z+H$  处的粒子数密度为

$$n_H = n_0 e^{-(\rho - \rho_0) g V (z+H) / kT}$$

以上两式相除,有

$$\beta = \frac{n}{n_H} = e^{-(\rho - \rho_0) g V z + (\rho - \rho_0) g V (z+H) / kT} = e^{-(\rho - \rho_0) g V H / kT}$$

将  $R = N_A k$  代入上式并整理有

$$N_A = \frac{RT \ln \beta}{(\rho - \rho_0) g V H} = \frac{8.31 \times 300 \times \ln 2.08}{(1.194 - 1) \times 10^3 \times 3.99 \times 10^{-20} \times 9.8 \times 30 \times 10^{-6}} \\ = 8.02 \times 10^{23} (\text{mol}^{-1})$$

**12.24** 试计算 1 mol 的范德瓦耳斯气体经等温膨胀, 体积由  $v_1$  变到  $v_2$  的过程中, 系统对外界所作的功.

**解** 由范德瓦耳斯气体的状态方程, 得

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2}$$

系统对外界所作的功为

$$A = \int_{v_1}^{v_2} p dv = \int_{v_1}^{v_2} \left( \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2} \right) dv \\ = RT \ln \frac{v_2 - b}{v_1 - b} + a \left( \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right)$$

**12.25** 氮分子的有效直径为  $3.8 \times 10^{-10} \text{ m}$ , 求它在标准状态下的平均自由程及平均碰撞频率.

**解** 平均自由程为

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p} \\ = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 273}{\sqrt{2} \pi \times (3.8 \times 10^{-10})^2 \times 1.013 \times 10^5} \\ = 5.8 \times 10^{-8} (\text{m})$$

平均碰撞频率为

$$\bar{Z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = \frac{1.59}{\bar{\lambda}} \sqrt{\frac{RT}{M}} = \frac{1.59}{5.8 \times 10^{-8}} \left( \frac{8.31 \times 273}{28 \times 10^{-3}} \right)^{1/2} \\ = 7.8 \times 10^9 (\text{s}^{-1})$$

**12.26** 真空管的线度为  $10^{-2} \text{ m}$ , 真空度为  $1.333 \times 10^{-3} \text{ Pa}$ . 设空气分子的有效直径为  $3 \times 10^{-10} \text{ m}$ , 求在  $27^\circ\text{C}$  时真空管中空气分子的数密度、平均碰撞频率和平均自由程.

**解** 空气的分子数密度为

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1.333 \times 10^{-3}}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} = 3.2 \times 10^{17} (\text{m}^{-3})$$

平均自由程为

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi \times (3 \times 10^{-10})^2 \times 3.2 \times 10^{17}}} = 7.8(\text{m})$$

平均碰撞频率为

$$\begin{aligned}\bar{Z} &= \sqrt{2\pi d^2 n v} = \sqrt{2\pi d^2 n} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \\ &= \sqrt{2\pi \times (3 \times 10^{-10})^2 \times 3.2 \times 10^{17}} \times \sqrt{\frac{8 \times 8.31 \times 300}{3.14 \times 28.97 \times 10^{-3}}} \\ &= 59.9(\text{s}^{-1})\end{aligned}$$

**12.27** 氮分子的有效直径为  $2.04 \times 10^{-10} \text{ m}$ , 求温度为  $600 \text{ K}$ 、压强为  $1.333 \times 10^2 \text{ Pa}$  时, 氮分子的平均碰撞频率.

**解** 分子的平均碰撞频率为

$$\begin{aligned}\bar{Z} &= \sqrt{2\pi d^2 n v} = \sqrt{2\pi d^2} \frac{p}{kT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \\ &= \sqrt{2\pi \times (2.04 \times 10^{-10})^2} \times \frac{1.333 \times 10^2}{1.38 \times 10^{-23} \times 600} \times \sqrt{\frac{8 \times 8.31 \times 300}{3.14 \times 20 \times 10^{-3}}} \\ &= 2.37 \times 10^6(\text{s}^{-1})\end{aligned}$$

**12.28** 实验测得标准状态下氧气的扩散系数为  $0.19 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ , 试由此计算氧分子的有效直径和平均自由程.

**解** 由  $D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$  得气体分子的平均自由程, 即

$$\bar{\lambda} = \frac{3D}{\bar{v}} = \frac{3 \times 0.19 \times 10^{-4}}{\sqrt{\frac{8 \times 8.31 \times 273}{32\pi \times 10^{-3}}}} = 1.34 \times 10^{-7}(\text{m})$$

由  $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2\pi d^2 p}}$  得气体分子的有效直径, 即

$$\begin{aligned}d &= \left( \frac{kT}{\sqrt{2\pi \lambda p}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 273}{\sqrt{2\pi \times 1.34 \times 10^{-7} \times 1.013 \times 10^5}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2.50 \times 10^{-10}(\text{m})\end{aligned}$$

**12.29** 设有  $\nu$  摩尔的理想气体, 经绝热自由膨胀, 从体积为  $V_1$  的平衡态  $A$  膨胀到体积为  $V_2$  的平衡态  $B$ . 试求气体熵的增量  $\Delta S$ .

**解** 在理想气体的自由膨胀过程中, 系统对外不作功, 即  $A=0$ , 与外界无热量交换, 即  $Q=0$ , 由热力学第一定律可知  $\Delta E=0$ , 因为理想气体的内能仅与气体的温度有关, 因此, 气体的初、末态温度相同, 即  $T_A = T_B = T$ . 因此, 可以设想气体经过一等温可逆过程, 从  $A$  态到达  $B$  态, 根据克劳修斯熵公式, 有

$$\Delta S = S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T}$$

由于等温过程  $T = T_A$ , 因而有

$$\int_A^B dQ = \nu R T_A \ln \frac{V_2}{V_1}$$

所以

$$\Delta S = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} > 0$$

绝热自由膨胀过程为孤立系统发生的过程, 由熵增加原理也有  $\Delta S > 0$  的结论.

**12.30** 设有  $\nu$  摩尔的某种物质, 该物质在某过程中具有恒定的摩尔热容  $C$ .

(1) 试求此物质由温度  $T_1$  变化到  $T_2$  时熵的变化.

(2) 讨论升温 and 降温过程该物质熵的变化.

**解** (1) 因为摩尔热容为常量  $C$ , 所以熵的变化为

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \nu C \frac{dT}{T} = \nu C \ln \frac{T_2}{T_1}$$

(2) 升温过程  $T_2 > T_1$ ,  $S_2 > S_1$ , 熵增加.

降温过程  $T_2 < T_1$ ,  $S_2 < S_1$ , 熵减少.

# 第四篇 波动和波动光学

## 第 13 章 机 械 波

### 一、基本内容和主要公式

**1. 波的描述** (1)在弹性细棒中,纵波的传播速度为

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

其中,  $Y$  是细棒的弹性模量;  $\rho$  是棒的密度.

(2)波速  $u$ 、波长  $\lambda$ 、周期  $T$ 、频率  $\nu$  之间的关系为

$$\lambda = uT \quad u = \nu\lambda$$

(3)平面简谐波的数学描述

$$y(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t \pm \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

$$y(x, t) = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right]$$

$$y(x, t) = A \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ut \pm x) + \varphi \right]$$

其中,  $x$  前面的  $\pm$  号由波的传播方向决定. 波沿  $x$  轴正向传播, 取负号; 沿  $x$  轴负向传播, 取正号.

**2. 惠更斯原理** 波面上的任意一点都可看作是新的次波源, 它们发出的次波的包络面就是以后某一时刻新的波面.

**3. 波的干涉** 两列相干波相遇, 在交叠区内会形成稳定的、强弱相间的强度(或振幅)分布. 在相差  $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$  处, 干涉相消; 在  $\Delta\varphi = 2k\pi$  处, 干涉加强.

**4. 波的能量** (1)平均能量密度

$$\overline{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$$

(2)波的强度

$$I = \overline{wu}$$

**5. 驻波** 驻波是一种特殊的干涉. 两列同振幅的相干波, 在一条直线上相向

传播. 它们在某些位置上干涉相消, 合振幅等于零, 形成波节; 某些位置上干涉加强, 合振幅最大, 形成波腹.

## 6. 多普勒效应

$$\nu = \frac{u + v_0}{u - v_s} \nu_s$$

其中,  $u$  为波速,  $v_0$ 、 $v_s$  分别为观测者、波源相对于介质的运动速度, 均为代数量, 相向运动取正, 远离运动取负.

## 二、典型例题

**13-1** 一平面简谐波沿  $x$  轴正向传播, 速度  $u = 0.20 \text{ m/s}$ , 已知  $x = 0.05 \text{ m}$  处的  $A$  点振动方程为  $y_A = 0.03 \cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$  (SI), 试求该简谐波的波函数.

**解** 由题设可知该波的波长为

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{0.20}{2} = 0.10 \text{ (m)}$$

在波线上任选一点  $P$ , 坐标为  $x$ , 如图所示. 波沿  $x$  轴正向传播, 则  $P$  点相位落后于  $A$ , 相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{PA} = \frac{2\pi}{0.10} (x - 0.05)$$

图 13-1

所以  $P$  点的振动方程为

$$\begin{aligned} y_P &= 0.03 \cos\left[4\pi t - \frac{\pi}{2} - \Delta\varphi\right] \\ &= 0.03 \cos\left[4\pi t - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{0.10} (x - 0.05)\right] \\ &= 0.03 \cos\left[4\pi\left(t - 5x\right) + \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

因为  $P$  是波线上任意一点, 所以简谐波波函数为

$$y = 0.03 \cos 4\pi(t - 5x) + \frac{\pi}{2} \quad (\text{m})$$

**说明** 求解波函数的关键是确定一个振动方程已知的质点与任意一质点的相位关系.

**13-2** 一平面简谐波沿  $x$  轴正向传播, 遇到一界面发生全反射, 如图 13-2. 入射波振幅为  $A$ , 周期为  $T$ , 波长为  $\lambda$ ,  $t=0$  时刻, 在原点  $O$  处的质点由平衡位置向位移为正的方向运动. 反射波振幅与入射波相同, 且反射点  $D$  为波节, 求:

- (1) 入射波波函数;
- (2) 反射波波函数;

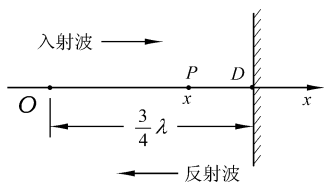


图 13-2

(3) 两波叠加形成的合成波的波函数, 并标出因两波叠加而静止各点的坐标.

**解** (1) 原点  $O$  处的质点, 在  $t=0$  时刻由平衡位置向位移为正的方向运动, 所以其初相为  $-\frac{\pi}{2}$ , 振动方程为

$$y_0 = A \cos\left(2\pi \frac{t}{T} - \frac{\pi}{2}\right)$$

在  $x$  轴上任选一点  $P$ , 坐标为  $x$  (如图), 其相位落后于原点  $O$ , 它们的相差  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{OP} = \frac{2\pi}{\lambda} x$ , 所以  $P$  点的振动方程, 亦即入射波的波函数为

$$\begin{aligned} y_{\lambda} &= A \cos\left(2\pi \frac{t}{T} - \frac{\pi}{2} - \Delta\varphi\right) \\ &= A \cos\left(2\pi \frac{t}{T} - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) \\ &= A \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

(2) 根据入射波波函数, 入射波在反射点  $D$  引起的振动方程为

$$\begin{aligned} y_{\lambda D} &= A \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_D}{\lambda}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \\ &= A \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\frac{3}{4}\lambda}{\lambda}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \\ &= A \cos 2\pi \frac{t}{T} \end{aligned}$$

反射点  $D$  为波节, 所以反射波在  $D$  引起的振动与入射波在  $D$  引起的振动反相, 振动方程为

$$y_{\text{反}D} = A \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \pi\right)$$

反射波沿  $x$  轴负向传播, 所以  $P$  点相位落后于  $D$ , 相位差

$$\begin{aligned} \Delta\varphi' &= \frac{2\pi}{\lambda} \overline{DP} = \frac{2\pi}{\lambda} (x_D - x_P) = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{3}{4}\lambda - x\right) \\ &= \frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{\lambda} x \end{aligned}$$

所以反射波在  $P$  点的振动方程, 亦即反射波的波函数为

$$y_{\text{反}} = A \cos 2\pi \frac{t}{T} + \pi - \Delta\varphi'$$

$$\begin{aligned}
 &= A \cos \left[ 2\pi \frac{t}{T} + \pi - \left( \frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \right] \\
 &= A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) - \frac{\pi}{2} \right]
 \end{aligned}$$

(3)合成波波函数为

$$\begin{aligned}
 y &= y_{\lambda} + y_{\bar{\lambda}} = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - \frac{\pi}{2} \right] + A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \\
 &= 2A \cos \left( 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \cos \left( 2\pi \frac{t}{T} - \frac{\pi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

合成波为驻波,振幅  $A(x) = 2A \left| \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|$ . 当  $2\pi \frac{x}{\lambda} = \left( k + \frac{1}{2} \right) \pi$  时,  $A(x) = 0$ , 质点静止不动, 因而有

$$x = \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} \quad \text{其中 } k = 1, 0, -1, -2, \dots$$

**说明** 反射波、入射波在反射点引起的两个振动反相, 这是求反射波波函数的关键. 如果反射点为波腹, 那么两个振动同相.

**13-3**  $S_1$ 、 $S_2$  为两相干波源, 频率  $\nu = 100 \text{ Hz}$ , 初相差为  $\pi$ , 二者相距  $30 \text{ m}$ , 波的传播速度  $u = 400 \text{ m/s}$ , 两波在  $S_1 S_2$  连线上各处的振幅相同且不随距离变化. 求  $S_1$ 、 $S_2$  之间因干涉而静止各点的位置坐标.

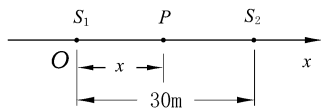


图 13-3

**解** 建立  $x$  轴, 如图 13-3 所示,  $S_1$  在原点处.

设  $S_1$ 、 $S_2$  的相位分别为  $\varphi_1(t)$ 、 $\varphi_2(t)$ . 在  $S_1$ 、 $S_2$  之间任选一点  $P$ , 坐标为  $x$ ,  $S_1$  发出的波在  $P$  点的相位为

$$\varphi_{1P}(t) = \varphi_1(t) - \frac{2\pi}{\lambda} \overline{S_1 P} = \varphi_1(t) - \frac{2\pi}{\lambda} x$$

$S_2$  发出的波在  $P$  点的相位为

$$\varphi_{2P}(t) = \varphi_2(t) - \frac{2\pi}{\lambda} \overline{S_2 P} = \varphi_2(t) - \frac{2\pi}{\lambda} (30 - x)$$

两波在  $P$  点的相差为

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi &= \varphi_{2P}(t) - \varphi_{1P}(t) \\
 &= \left[ \varphi_2(t) - \frac{2\pi}{\lambda} (30 - x) \right] - \left( \varphi_1(t) - \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \\
 &= (\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) - \frac{2\pi}{\lambda} (30 - 2x)
 \end{aligned}$$

其中  $\varphi_2(t) - \varphi_1(t) = \pi$ , 因而有

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{2\pi}{\lambda} (30 - 2x)$$

当  $\Delta\varphi=(2k+1)\pi$  时,两波在  $P$  点干涉相消,  $P$  点静止不动. 因此有

$$\pi - \frac{2\pi}{\lambda}(30-2x) = (2k+1)\pi$$

故

$$\begin{aligned} x &= 15 + k \frac{\lambda}{2} = 15 + \frac{k}{2} \cdot \frac{u}{\nu} = 15 + \frac{k}{2} \frac{400}{100} \\ &= 15 + 2k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 7) \end{aligned}$$

即  $x=1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29$  m 处的质点静止不动.

**说明** 分析相干加强或减弱各点的位置时, 关键是找出两波在任意一点(相遇区域内)的相位差.

**13-4** 蝙蝠在洞穴中飞来飞去, 能非常有效的利用超声波导航. 若蝙蝠发出的超声波频率  $\nu=39$  kHz, 而它以声速的  $\frac{1}{40}$  的速度向表面平直的岩壁飞去, 试求它听到的从岩壁反射回来的超声波频率为多少?

**解** 蝙蝠即是波源  $S$ , 又是接收者  $O$ , 两者相互靠近, 它们的速度大小为  $v_s = v_o = \frac{1}{40}u$ ,  $u$  是声速. 根据多普勒效应, 蝙蝠向岩壁发出的波的波长

$$\lambda' = (u - v_s)/\nu$$

反射波相对于蝙蝠的速度为

$$u' = u + v_o$$

蝙蝠接收到波的频率为

$$\nu' = \frac{u'}{\lambda'} = \frac{u + v_o}{u - v_s} \nu = \frac{1 + \frac{v_o}{u}}{1 - \frac{v_s}{u}} \nu = \frac{1 + \frac{1}{40}}{1 - \frac{1}{40}} \times 39 = 41 \text{ (kHz)}$$

### 三、习题详解

#### 13.1 选择题

(1) 已知平面简谐波的波函数为  $y = A \cos(at - bx)$  ( $a, b$  为正值), 则(D)

(A) 波的频率为  $a$  (B) 波的传播速度为  $\frac{b}{a}$

(C) 波长为  $\frac{\pi}{b}$  (D) 波的周期为  $\frac{2\pi}{a}$

(2) 传播速度为 100 m/s、频率为 50 Hz 的平面简谐波, 在波线上相距为 0.5 m 的两点之间的相位差是(C)

(A)  $\frac{\pi}{3}$  (B)  $\frac{\pi}{6}$

(C)  $\frac{\pi}{2}$

(D)  $\frac{\pi}{4}$

(3)一平面简谐波沿  $x$  轴负方向传播,其振幅  $A=0.01\text{ m}$ ,频率  $\nu=550\text{ Hz}$ ,波速  $u=330\text{ m/s}$ .若  $t=0$  时,坐标原点处的质点达到负的最大位移,则此波的波函数为(A)

(A)  $y=0.01\cos[2\pi(550t+1.67x)+\pi]$

(B)  $y=0.01\cos[2\pi(550t-1.67x)+\pi]$

(C)  $y=0.01\cos\left[2\pi(550t+1.67x)-\frac{\pi}{2}\right]$

(D)  $y=0.01\cos\left[2\pi(550t-1.67x)-\frac{\pi}{2}\right]$

(4)下列的平面简谐波的波函数中,选出一组相干波的波函数(A,C)

(A)  $y_1=A\cos\frac{\pi}{4}(x-20t)$

(B)  $y_2=A\cos 2\pi(x-5t)$

(C)  $y_3=A\cos 2\pi\left(2.5t-\frac{x}{8}+0.2\right)$

(D)  $y_4=A\cos\frac{\pi}{6}(x-240t)$

(5)在坐标原点处有一波源,其振动方程为  $y=A\cos 2\pi\nu t$ ,由波源发出的平面简谐波沿坐标轴  $x$  正方向传播.在距离波源  $d$  处有一平面将波反射(反射时无半波损失),如图 13.1,则反射波的表达式为(D)

(A)  $y=A\cos 2\pi\left(\nu t+\frac{x}{\lambda}\right)$

(B)  $y=A\cos 2\pi\left(\nu t-\frac{d-x}{\lambda}\right)$

(C)  $y=A\cos 2\pi\left(\nu t+\frac{d-x}{\lambda}\right)$

(D)  $y=A\cos 2\pi\left(\nu t-\frac{2d-x}{\lambda}\right)$

(E)  $y=A\cos 2\pi\left(\nu t+\frac{d-x}{\lambda}\right)$

### 13.2 填空题

(1)已知波源在坐标原点( $x=0$ )的平面简谐波波函数为  $y=A\cos(Bt-Cx)$ ,其中, $A,B,C$  为正值常数,则此波的振幅为  $A$ ,波速为  $B/C$ ,周期为  $2\pi/B$ ,波长为  $2\pi/C$ .在任意时刻,在波传播方向上相距为  $D$  的两点的相位差为  $CD$ .

(2)频率为  $500\text{ Hz}$  的波,其传播速度为  $350\text{ m/s}$ ,相位差为  $\frac{2}{3}\pi$  的两点间距为

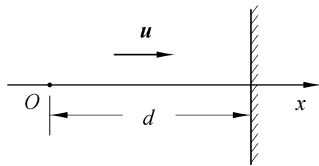


图 13.1

(3) 有一平面简谐波, 波速为  $u$ , 已知在传播方向上某点  $P$  的振动方程为  $y = A \cos(\omega t + \varphi)$ , 就下面四种选定的坐标系(图 13.2(3)), 写出各自的波函数.

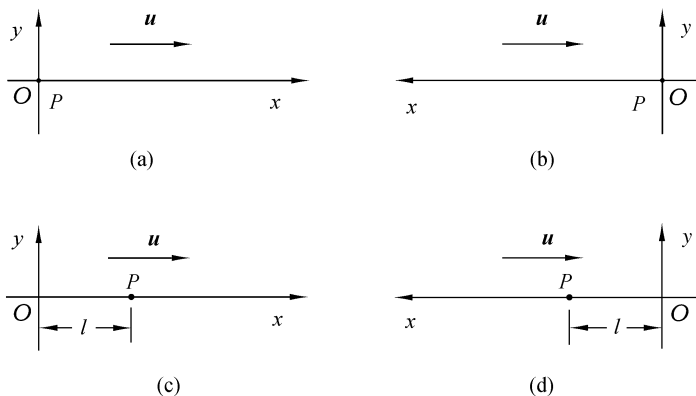


图 13.2(3)

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x-l}{u} \right) + \varphi \right]$$

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x-l}{u} \right) + \varphi \right]$$

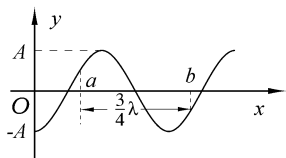


图 13.2(4)

(4) 如图 13.2(4) 所示可以是某时刻的驻波波形, 也可以是某时刻的行波波形, 图 13.2(4) 中  $\lambda$  为波长. 就驻波而言,  $a, b$  两点间的相位差为  $\pi$ ; 就行波而言,  $a, b$  两点间的相位差为  $\frac{3}{2}\pi$ .

(5) 设入射波的表达式为  $y_1 = A \cos 2\pi \cdot \left( \nu t + \frac{x}{\lambda} \right)$ , 波在  $x=0$  处发生反射, 若反射点为固定端, 则反射波的表达式为  $y_2 = A \cos \left[ 2\pi \left( \nu t - \frac{x}{\lambda} \right) + \pi \right]$ ; 若反射点为自由端, 则反射波的表达式为  $y_3 = A \cos \left[ 2\pi \left( \nu t - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$ .

### 13.3 作图题

(1) 一平面简谐波沿  $x$  轴正方向传播, 已知波线上  $O$  点的振动曲线如图 13.3

(1)(a) 所示, 试在 13.3(1)(b) 图上画出  $x = \frac{3}{4}\lambda$  处质点的振动曲线.

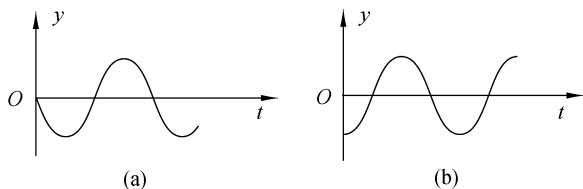


图 13.3(1)

(2)如图 13.3(2)所示为某一简谐波在  $t$  时刻的波形曲线,试在该图上画出  $t + \frac{T}{4}$  ( $T$  为该波的周期)时刻的波形线.

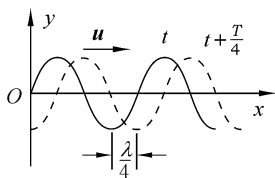


图 13.3(2)

(3)一角频率为  $\omega$  的平面简谐波沿  $x$  轴正方向传播,已知  $t=0$  时刻的波形曲线如 13.3(3)(a)图所示,试在 13.3(3)(b)图上画出  $t=0$  时  $x$  轴上各点的振动速度  $v$  与  $x$  轴坐标的关系曲线.

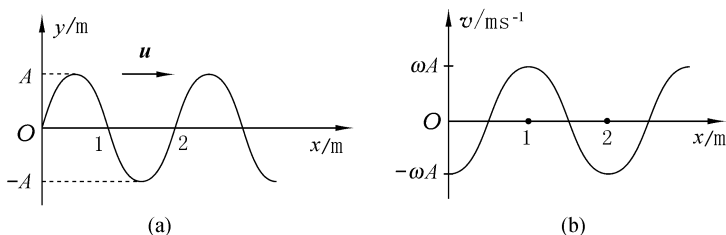


图 13.3(3)

**13.4** 有一钢丝,长  $2.00 \text{ m}$ ,质量  $20.0 \times 10^{-3} \text{ kg}$ ,拉紧后的张力是  $1000 \text{ N}$ ,问此钢丝上横波的传播速率是多大?

**解** 钢丝质量线密度为

$$\eta = \frac{m}{l} = \frac{20.0 \times 10^{-3}}{2.00} = 0.01 (\text{kg/m})$$

波速为

$$u = \sqrt{\frac{T}{\eta}} = \frac{1000}{0.01} = 316 (\text{m/s})$$

**13.5** 地震波纵波和横波的速度分别为  $8000 \text{ m/s}$  和  $4450 \text{ m/s}$ ,观测点测得这两种波到达的时间差  $\Delta t = 75.6 \text{ s}$ ,求震中到观测点的距离?

**解** 设  $r$  为震中到观测点的距离,且  $u_1 = 8000 \text{ m/s}$ ,  $u_2 = 4450 \text{ m/s}$ ,根据题意

得

$$\frac{r}{u_2} - \frac{r}{u_1} = \Delta t$$

所以

$$r = \frac{u_1 u_2}{u_1 - u_2} \Delta t = \frac{8000 \times 4450}{8000 - 4450} \times 75.6 = 7.58 \times 10^5 (\text{m})$$

**13.6** 一声波在空气中的波长是  $0.250 \text{ m}$ , 波速是  $340 \text{ m/s}$ . 当它进入另一种介质时, 波长变成了  $0.790 \text{ m}$ , 试求声波在这种介质中的波速.

**解** 在空气中, 波速  $u = 340 \text{ m/s}$ , 波长  $\lambda = 0.250 \text{ m}$ , 频率为

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{340}{0.250} = 1360 (\text{Hz})$$

在介质中, 波长  $\lambda' = 0.790 \text{ m}$ , 频率  $\nu' = \nu = 1360 \text{ Hz}$ , 波速为

$$u' = \nu' \lambda' = 1360 \times 0.790 = 1074.4 (\text{m/s})$$

**13.7** 在钢棒中声速为  $5200 \text{ m/s}$ , 钢的密度  $\rho = 7.80 \text{ g/cm}^3$ , 求钢的弹性模量是多少?

**解** 已知, 密度  $\rho = 7.80 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 波速  $u = 5200 \text{ m/s}$ , 设钢的弹性模量为

$Y$ , 由  $u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$  得

$$Y = \rho u^2 = 7.80 \times 10^3 \times 5200^2 = 2.11 \times 10^{11} (\text{N/m}^2)$$

**13.8** 已知一波的波函数为

$$y = 5.0 \sin(10\pi t - 0.6x) (\text{cm})$$

(1) 求波长、频率、波速和周期;

(2) 说明  $x=0$  时波函数的意义.

**解** (1) 将波函数与标准形式  $y = A \sin\left(2\pi \nu t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$  比较, 对应项相等

$$\text{即} \begin{cases} 2\pi \nu = 10\pi \\ \frac{2\pi}{\lambda} = 0.6 \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} \nu = 5 (\text{Hz}) \\ \lambda = 10.5 (\text{cm}) \\ u = \nu \lambda = 5 \times 10.5 = 52.5 (\text{cm/s}) \end{cases}$$

(2)  $x=0$  时,  $y = 5.0 \sin(10\pi t)$  是  $x=0$  处质元的振动方程.

**13.9** 一横波, 其波函数为  $y = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (ut - x)$ , 若  $A = 0.01 \text{ m}$ ,  $\lambda = 0.20 \text{ m}$ ,  $u = 25 \text{ m/s}$ , 试求  $t = 0.10 \text{ s}$  时,  $x = 2.0 \text{ m}$  处质点的位移、速度、加速度分别为多少?

**解** 波线上  $x$  处的质点, 在  $t$  时刻的速度、加速度分别为

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -A \frac{2\pi}{\lambda} u \sin \frac{2\pi}{\lambda} (ut - x)$$

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A \left( \frac{2\pi u}{\lambda} \right)^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (ut - x)$$

把  $A=0.01 \text{ m}$ ,  $\lambda=0.20 \text{ m}$ ,  $u=25 \text{ m/s}$ ,  $t=0.10 \text{ s}$ ,  $x=2.0 \text{ m}$  分别代入波函数以及上两式中, 求得质点的位移、速度、加速度分别为

$$y = 0.01 \cos \left[ \frac{2\pi}{0.20} (25 \times 0.10 - 2.0) \right] = -0.01 (\text{m})$$

$$v = -0.01 \times \frac{2\pi}{0.20} \times 25 \sin \left[ \frac{2\pi}{0.20} (25 \times 0.10 - 2.0) \right] = 0 (\text{m/s})$$

$$\begin{aligned} a &= -0.01 \times \left( \frac{2\pi}{0.20} \times 25 \right)^2 \cos \left[ \frac{2\pi}{0.20} (25 \times 0.10 - 2.0) \right] \\ &= 6.2 \times 10^3 (\text{m/s}^2) \end{aligned}$$

**13.10** 已知某一维平面简谐波的周期  $T=2.5 \times 10^{-3} \text{ s}$ , 振幅  $A=1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ , 波长  $\lambda=1.0 \text{ m}$ , 沿  $x$  轴正向传播. 试写出此一维平面简谐波的波函数(设  $t=0$  时,  $x=0$  处质点在正的最大位移处).

**解**  $t=0$  时, 在  $x=0$  处, 质点恰好处于正的最大位移处, 其振动的初相为 0, 振动方程为

$$y_0 = A \cos \left( 2\pi \frac{t}{T} + 0 \right) = A \cos \left( 2\pi \frac{t}{T} \right)$$

在  $x$  轴上任取一点  $P$ , 如图 13.10, 坐标为  $x$ ,  $P$  点相位落后于原点, 相位差为  $\Delta\varphi=2\pi \frac{x}{\lambda}$ , 其振动方程为

$$y_P = A \cos \left( 2\pi \frac{t}{T} - \Delta\varphi \right) = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$P$  点是任选的一点, 所以波函数为

$$\begin{aligned} y &= A \cos 2\pi \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \\ &= 1.0 \times 10^{-2} \cos 2\pi (400t - x) \quad (\text{m}) \end{aligned}$$

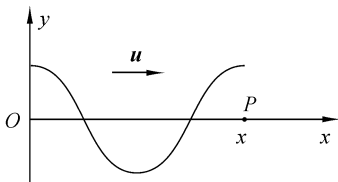


图 13.10

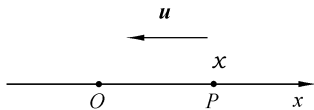


图 13.11

**13.11** 将一波源系在一螺旋形长弹簧上, 使这波源沿着螺旋弹簧激起一连续的正弦纵波. 波源的频率为  $25 \text{ Hz}$ , 而弹簧中相邻的两个稀疏区之间的距离为

24 cm .

(1) 试求这纵波的传播速率;

(2) 如果弹簧中质点的最大纵向振动位移为 0.30 cm, 而这个波沿  $x$  轴的负方向传播, 设波源在  $x=0$  处, 而  $x=0$  处的质点在  $t=0$  时恰好处在平衡位置处, 且向  $x$  轴的正方向运动, 试写出此正弦纵波的波函数.

**解** (1) 由题设可知, 波长  $\lambda=24$  cm, 频率  $\nu=25$  Hz, 因而波速为

$$u = \nu\lambda = 24 \times 25 = 600 \text{ (cm/s)}$$

(2) 根据题意,  $x=0$  处波源的初相  $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ , 其振动方程为

$$\begin{aligned} y_0 &= 0.30 \cos(2\pi \nu t + \varphi_0) = 0.30 \cos\left(50\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0.30 \sin 50\pi t \end{aligned}$$

在  $x$  轴上任取一点  $P$ , 如图 13.11, 坐标为  $x$ , 其相位比原点处的波源超前, 相位差  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}x$ , 其振动方程为

$$\begin{aligned} y_p &= 0.30 \sin(50\pi t + \Delta\varphi) \\ &= 0.30 \sin\left(50\pi t + \frac{2\pi}{24}x\right) \\ &= 0.30 \sin 2\pi\left(25t + \frac{x}{24}\right) \end{aligned}$$

$P$  是  $x$  轴上任选的一点, 所以波函数为

$$y = 0.30 \sin 2\pi\left(25t + \frac{x}{24}\right) \quad (\text{cm})$$

**13.12** 波源的振动方程为  $y = 6.0 \times 10^{-2} \cos \frac{\pi}{5} t$  m, 它所激起的波以 2.0 m/s 的速度在一直线上传播, 求:

(1) 距波源 6.0 m 处一点的振动方程;

(2) 该点与波源的相位差.

**解** (1) 6 m 处质点的相位落后于波源, 相位差为

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = \omega \cdot \frac{\Delta x}{u} = \frac{\pi}{5} \times \frac{6}{2} = \frac{3}{5}\pi$$

所以, 该质点的振动方程为

$$\begin{aligned} y &= 6.0 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{\pi}{5} t - \Delta\varphi\right) \\ &= 6.0 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{\pi}{5} t - \frac{3\pi}{5}\right) \quad (\text{m}) \end{aligned}$$

(2) 相位差  $\Delta\varphi = \frac{3}{5}\pi$

**13.13** 一平面简谐波沿  $x$  正向传播, 振幅  $A=10\text{ cm}$ , 角频率  $\omega=7\pi\text{ rad/s}$ , 当  $t=1.0\text{ s}$  时,  $x=10\text{ cm}$  处的  $a$  质点的振动状态为  $y_a=0$ ,  $\left(\frac{dy}{dt}\right)_a < 0$ ; 此时  $x=20\text{ cm}$  处的  $b$  质点的振动状态为  $y_b=5.0\text{ cm}$ ,  $\left(\frac{dy}{dt}\right)_b > 0$ . 设波长  $\lambda > 10\text{ cm}$ , 求该波的波函数.

**解** 在  $t=0$  时刻  $a$  质点  $y_a=0$ ,  $v_a=\left(\frac{dy}{dt}\right)_a < 0$ , 其相位

$$\varphi_a = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$b$  质点  $y_b=5.0\text{ cm}=\frac{A}{2}$ ,  $v_b=\left(\frac{dy}{dt}\right)_b > 0$ , 其相位

$$\varphi_b = 2k'\pi - \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$a, b$  两点相位差

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_a - \varphi_b = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \left(2k'\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\pi(k - k') + \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

$a, b$  两点间距  $\Delta x = x_b - x_a = 10\text{ cm}$ , 小于波长, 所以  $|\Delta\varphi| < 2\pi$ , 则  $\Delta\varphi$  的取值可分为两种情况.

(一) 当  $k - k' = 0$  时,  $\Delta\varphi = \varphi_a - \varphi_b = \frac{5\pi}{6}$

有

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

则

$$\lambda = \frac{\Delta x}{\Delta\varphi} \times 2\pi = \frac{10}{\frac{5}{6}\pi} \times 2\pi = 24(\text{cm})$$

另有  $\varphi_a > \varphi_b$ , 所以波由  $a$  向  $b$  传播, 沿着  $x$  轴的正方向, 则波函数可设为

$$y = A \cos\left(7\pi t - \frac{2\pi}{24}x + \varphi_1\right) = 10 \cos\left(7\pi t - \frac{2\pi}{24}x + \varphi_1\right)$$

当  $t=1.0\text{ s}$ ,  $x=10\text{ cm}$  时波函数的相位

$$7\pi \times 1.0 - \frac{\pi}{12} \times 10 + \varphi_1 = \varphi_a \quad (3)$$

由式(1)、(3)得

$$\varphi_1 = 2k\pi - \frac{17\pi}{3}$$

$k$  不妨取为 0, 则

$$\varphi_1 = -\frac{17\pi}{3}$$

波函数为

$$y = 10\cos\left(7\pi t - \frac{\pi}{12}x - \frac{17}{3}\pi\right) \quad (\text{cm})$$

(二) 当  $k - k' = -1$  时,  $\Delta\varphi = \varphi_a - \varphi_b = -\frac{7}{6}\pi$ , 有  $\varphi_a < \varphi_b$ , 则波由  $b$  向  $a$  传播, 沿着  $x$  轴的负方向, 与题意不符, 故舍去.

**13.14** 一横波沿绳子传播时的波函数为

$$y = 0.05\cos(10\pi t - 4\pi x)$$

式中  $x, y$  以米计,  $t$  以秒计.

(1) 求此波的波长和波速;

(2) 求  $x = 0.2 \text{ m}$  处的质点, 在  $t = 1 \text{ s}$  时的相位, 它是原点处质点在哪一时刻的相位?

(3) 分别图示  $t = 1 \text{ s}, 1.1 \text{ s}, 1.25 \text{ s}$  和  $1.5 \text{ s}$  各时刻的波形.

**解** (1) 把  $y = 0.05\cos(10\pi t - 4\pi x)$  与波函数的标准形式

$$y = A\cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi\right)$$

对比, 对应项相等, 即

$$2\pi\nu = 10\pi, \quad \frac{2\pi}{\lambda} = 4\pi$$

得

$$\nu = 5 \text{ Hz}, \quad \lambda = 0.5 \text{ m}$$

则

$$u = \nu\lambda = 5 \times 0.5 = 2.5 (\text{m/s})$$

(2)  $t = 1 \text{ s}$  时,  $x = 0.2 \text{ m}$  处质点的相位为

$$\varphi' = 10\pi t - 4\pi x = 10\pi \times 1.0 - 4\pi \times 0.2 = 9.2\pi$$

原点在  $t$  时刻相位为

$$\varphi_0(t) = 10\pi t - 4\pi x = 10\pi t - 4\pi \times 0 = 10\pi t$$

若  $\varphi' = \varphi_0(t)$ , 有

$$10\pi t = 9.2\pi$$

则

$$t = 0.92 (\text{s})$$

原点在  $t = 0.92 \text{ s}$  时的相位等于所求相位.

(3)

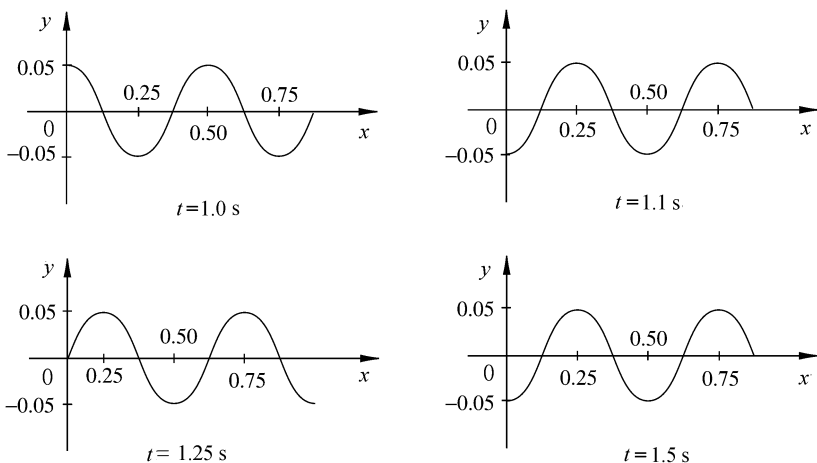


图 13.14

**13.15** 一平面余弦波沿  $x$  轴负方向传播, 已知  $t$  时刻的波形曲线如图 13.15 所示, 求在  $t + \frac{3}{4}T$  ( $T$  为周期) 时刻, 坐标为  $x_1, x_2, x_3, x_4$  各处质点的位移.

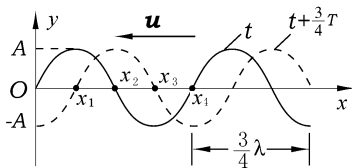


图 13.15

**解** 经过  $\Delta t = \frac{3}{4}T$  时间后, 波形曲线向  $x$  轴负向运动的距离为

$$\Delta x = u\Delta t = \frac{3}{4}(uT) = \frac{3}{4}\lambda$$

新的波形曲线如图 13.15 的虚线所示, 坐标为  $x_1, x_2, x_3, x_4$  的各质点的位移分别为  $0, A, 0, -A$ .

**13.16** 一平面简谐波, 沿  $x$  轴正方向传播, 波速为  $4 \text{ m/s}$ , 已知位于坐标原点处的波源的振动曲线如图 13.16(a) 所示. (1) 写出此波的波函数; (2) 试画出  $t = 3 \text{ s}$  时刻的波形图.

**解** (1) 波速  $u = 4 \text{ m/s}$ , 由图 13.16(a) 可知, 周期  $T = 4 \text{ s}$ , 所以波长为

$$\lambda = uT = 4 \times 4 = 16 (\text{m})$$

由图 13.16(a) 可知,  $t = 0$  时刻, 原点处的波源处于正的最大位移处, 所以波源初相  $\varphi = 0$ , 其振动方程为

$$y = A \cos(2\pi \nu t + \varphi) = A \cos(2\pi \nu t + 0) = A \cos 2\pi \nu t$$

所以,波函数为

$$y = A \cos \left( 2\pi \nu t - 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) = 4 \cos 2\pi \left( \frac{t}{4} - \frac{x}{16} \right)$$

(2)把  $t=3\text{ s}$  代入波函数,可得波形曲线方程为

$$y = 4 \cos 2\pi \frac{3}{4} - \frac{x}{16}$$

波形曲线如图 13.16(b)所示.

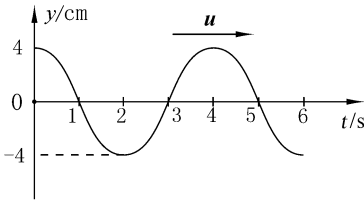


图 13.16(a)

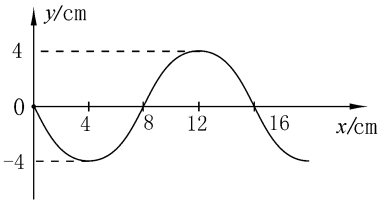


图 13.16(b)

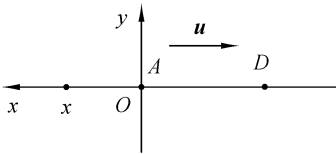
**13.17** 一平面简谐波在介质中以速率  $u=20\text{ m/s}$  自左向右传播,已知在传播路径上的某点  $A$  振动方程为

$$y = 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t - \pi)$$

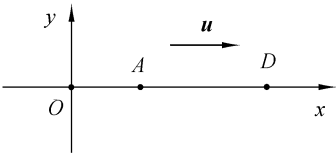
$D$  点在  $A$  点的右方  $9\text{ m}$  处.

(1)若取  $x$  轴方向向左,并以  $A$  点为坐标原点,如图 13.17(a)所示,试写此波的波函数,并求出  $D$  点的振动方程;

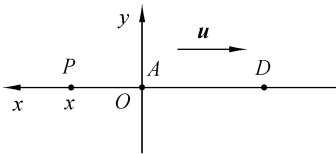
(2)若取  $x$  轴方向向右,以  $A$  点左方  $5\text{ m}$  处为坐标原点,如图 13.17(b)所示,重新写出波函数及  $D$  点的振动方程.



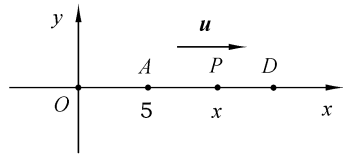
(a)



(b)



(c)



(d)

图 13.17

解 由题设可知

$$\nu = 2 \text{ Hz} \quad \lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{20}{2} = 10 (\text{m})$$

(1) 在  $x$  轴上任取一点  $P$ , 如图 13.17(c), 坐标为  $x$ , 波由左向右传播, 所以  $P$  点相位超前于  $A$ , 且相差为

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{PA} = \frac{2\pi}{\lambda} x = 2\pi \frac{x}{10}$$

$P$  点振动方程, 亦即波函数为

$$\begin{aligned} y &= 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t - \pi + \Delta\varphi) \\ &= 3 \times 10^{-2} \cos\left(2\pi\left(2t + \frac{x}{10}\right) - \pi\right) \end{aligned}$$

$x = -9 \text{ m}$  处的  $D$  质点, 振动方程为

$$\begin{aligned} y &= 3 \times 10^{-2} \cos\left(2\pi\left(2t + \frac{-9}{10}\right) - \pi\right) \\ &= 3 \times 10^{-2} \cos\left[4\pi t - \frac{14}{5}\pi\right] \end{aligned}$$

(2) 在  $x$  轴上任取一点  $P$ , 如图 13.17(d), 坐标为  $x$ , 其相位落后于  $A$ , 相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{AP} = \frac{2\pi}{10}(x - 5)$$

$P$  点的振动方程, 亦即波函数为

$$\begin{aligned} y &= 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t - \pi - \Delta\varphi) \\ &= 3 \times 10^{-2} \cos\left[4\pi t - \pi - \frac{2\pi}{10}(x - 5)\right] \\ &= 3 \times 10^{-2} \cos\left[2\pi\left(2t - \frac{x}{10}\right)\right] \end{aligned}$$

$D$  质点, 其坐标为

$$x = 5 + 9 = 14 (\text{cm})$$

把  $x = 14 \text{ m}$  代入波函数, 即可得  $D$  质点振动方程

$$\begin{aligned} y &= 3 \times 10^{-2} \cos\left[2\pi\left(2t - \frac{14}{10}\right)\right] \\ &= 3 \times 10^{-2} \cos 4\pi t - \frac{14}{5}\pi \end{aligned}$$

**13.18** 已知一平面简谐波沿  $x$  轴正向传播(见图 13.18), 周期  $T = 0.5 \text{ s}$ , 振幅  $A = 0.1 \text{ m}$ . 当  $t = 0$  时, 波源振动的位移恰好为正的极大值, 若波源取作坐标原点, 求:

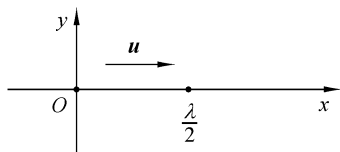


图 13.18

(1)沿波的传播方向距离波源为 $\frac{\lambda}{2}$ 处质点的振动方程;

(2)当 $t=\frac{T}{2}$ 时, $x=\frac{\lambda}{4}$ 处质点的振动速度.

解 (1) $t=0$ 时,波源达到正的最大位移,所以其初相为0,振动方程为

$$\begin{aligned}y_0 &= 0.1\cos\left(2\pi\frac{t}{T} + 0\right) = 0.1\cos\left(2\pi\frac{t}{0.5}\right) \\&= 0.1\cos(4\pi t) \text{ (m)}\end{aligned}$$

在 $x=\frac{\lambda}{2}$ 处的质点,其相位落后于波源,相位差 $\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{2}=\pi$ ,此质点振动方程为

$$y = 0.1\cos(4\pi t - \Delta\varphi) = 0.1\cos(4\pi t - \pi) \text{ (m)}$$

(2)与上述过程同理, $x=\frac{\lambda}{4}$ 处质点的振动方程为

$$y = 0.1\cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

质点的速度

$$v = \frac{dy}{dt} = -0.1 \times 4\pi \sin\left(4\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 0.4\pi \cos 4\pi t$$

当 $t=\frac{T}{2}=\frac{0.5}{2}\text{s}=0.25\text{ s}$ 时,速度为

$$v = 0.4\pi \cos(4\pi \times 0.25) = -0.4\pi \text{ (m/s)}$$

**13.19** 用聚焦超声波的方法在液体中可以产生强度达到 $I=120\text{ kW/cm}^2$ 的超声波.设该超声波的频率为 $\nu=500\text{ kHz}$ ,液体的密度 $\rho=10^3\text{ kg/m}^3$ ,在液体中声速 $u=1500\text{ m/s}$ .求液体质元振动的振幅.

解 设波的振幅为 $A$ .强度 $I=120\times 10^7\text{ W/m}^2$ ,密度 $\rho=10^3\text{ kg/m}^3$ ,频率 $\nu=500\times 10^3\text{ Hz}$ .

由 $I=\frac{1}{2}\rho A^2(2\pi\nu)^2 u$ 得

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{\frac{2I}{\rho u}} / 2\pi\nu = \sqrt{\frac{2 \times 120 \times 10^7}{10^3 \times 1500}} / (2\pi \times 500 \times 10^3) \\&= 1.27 \times 10^{-5} \text{ (m)}\end{aligned}$$

**13.20** 功率为 $4\text{ W}$ 的点波源,在无吸收的各向同性介质中向外发射球面波.试求离波源为 $2.0\text{ m}$ 处波的强度.

解 以波源为球心, $2\text{ m}$ 为半径作一球面,球面处波的强度为

$$I = \frac{P}{S_{\text{球面}}} = \frac{4}{4\pi \times 2^2} = 0.08 \text{ (W/m}^2\text{)}$$

**13.21** 无线电波以 $3.0 \times 10^8\text{ m/s}$ 的速度在无吸收的介质中传播(见图

13.21). 求距功率为 50 kW 的波源 500 km 处, 无线电波的平均能量密度 (设无线电波是球面波).

**解** 功率  $p = 50 \times 10^3 \text{ J/s}$ , 波速  $u = 3.8 \times 10^8 \text{ m/s}$ . 在很短的  $dt$  时间内, 波的传播距离  $dr = udt$ . 以波源为球心,  $r = 500 \text{ km}$  为半径作一球壳, 其厚度为  $dr$  (见图 13.21), 其体积

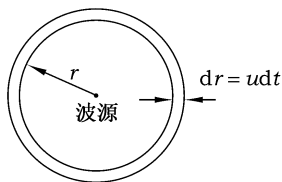


图 13.21

$$dV = 4\pi r^2 dr = 4\pi r^2 udt$$

平均来说, 球壳内电波的能量等于在  $dt$  时间内波源发出的能量

$$dW = p dt$$

球壳处平均能量密度为

$$\begin{aligned} \overline{w} &= \frac{dW}{dV} = \frac{p dt}{4\pi r^2 \cdot u \cdot dt} = \frac{p}{4\pi r^2 \cdot u} \\ &= \frac{50 \times 10^3}{4\pi \times (500 \times 10^3)^2 \times 3.0 \times 10^8} = 5.3 \times 10^{-17} \text{ (J/m}^3\text{)} \end{aligned}$$

**13.22** 一正弦空气波, 沿直径为 10 cm 的圆柱形管传播, 波的强度为  $18 \times 10^{-3} \text{ J/s} \cdot \text{m}^2$ , 频率为 300 Hz, 波速为 340 m/s. 问 (1) 波中平均能量密度和最大能量密度各是多少? (2) 相邻同相波面间的波段中含有多少能量?

**解** (1) 由  $I = \overline{w} u$  得

$$\begin{aligned} \overline{w} &= \frac{I}{u} = \frac{18 \times 10^{-3}}{340} = 5.3 \times 10^{-5} \text{ (J/m}^3\text{)} \\ w_{\max} &= 2\overline{w} = 2 \times 5.3 \times 10^{-5} = 10.6 \times 10^{-5} \text{ (J/m}^3\text{)} \end{aligned}$$

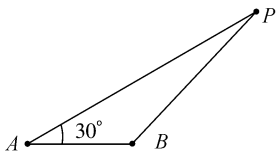
(2) 两相邻同相波面间距为一个波长  $\lambda$ , 其间体积为

$$\begin{aligned} V &= S\lambda = \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 \frac{u}{v} = 3.14 \times \left( \frac{0.1}{2} \right)^2 \frac{340}{300} \\ &= 8.9 \times 10^{-3} \text{ (m}^3\text{)} \end{aligned}$$

在此体积内的能量

$$W = \overline{w} V = 5.3 \times 10^{-5} \times 8.9 \times 10^{-3} = 4.7 \times 10^{-7} \text{ (J)}$$

**13.23** A 和 B 是两个相位相同的波源, 相距  $d = 0.10 \text{ m}$ , 同时以 30 Hz 的频率发出波动, 波速为 0.50 m/s. P 点位于与 AB 成  $30^\circ$  角, 与 A 相距为 4 m 处, 如图 13.23 所示, 求两波通过 P 点的相位差.



**解** 波长

$$\lambda = \frac{u}{v} = \frac{0.50}{30} = \frac{1}{60} \text{ (m)}$$

图 13.23

设  $A$ 、 $B$  两波源的相位分别为  $\varphi_A(t)$ 、 $\varphi_B(t)$ 。 $A$  波在  $P$  点的相位落后于  $A$  点,相差为

$$\Delta\varphi_{PA} = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{PA}$$

因而此波在  $P$  点的相位为

$$\varphi_P(t) = \varphi_A(t) - \Delta\varphi_{PA} = \varphi_A(t) - \frac{2\pi}{\lambda} \overline{PA}$$

同理, $B$  波在  $P$  点的相位为

$$\varphi'_P(t) = \varphi_B(t) - \frac{2\pi}{\lambda} \overline{PB}$$

两波在  $P$  点相位差

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi'_P(t) - \varphi_P(t) \\ &= \left( \varphi_B(t) - \frac{2\pi}{\lambda} \overline{PB} \right) - \left( \varphi_A(t) - \frac{2\pi}{\lambda} \overline{PA} \right) \\ &= \varphi_B(t) - \varphi_A(t) - \frac{2\pi}{\lambda} (\overline{PB} - \overline{PA}) \end{aligned}$$

两波源相位相同

$$\varphi_B(t) = \varphi_A(t)$$

则

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} (\overline{PB} - \overline{PA})$$

其中

$$\begin{aligned} \overline{PB} &= \sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \overline{PA} \cdot \overline{AB} \cos 30^\circ} \\ &= \sqrt{4^2 + 0.10^2 + 2 \times 4 \times 0.10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 3.914(\text{m}) \end{aligned}$$

所以

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\frac{1}{60}} (3.914 - 4) = 10.4\pi(\text{rad})$$

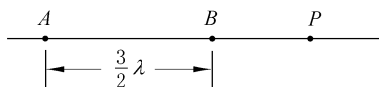


图 13.24

**13.24**  $A$ 、 $B$  为两个同振幅、同相位的相干波源,它们在同一介质中相距  $3\lambda/2$ ,  $P$  为  $A$ 、 $B$  连线延长线上的任意点,如图 13.24 所示.求:(1)自  $A$ 、 $B$  两波源发出的波在  $P$  点引起的两个振动的相位差;(2)  $P$  点的合振动的振幅.

**解** (1)把  $A$ 、 $B$  两波源的相位用  $\varphi(t)$  表示.波源  $A$  在  $P$  点引起振动,其相位

落后于  $A$  点, 相位差  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{PA}$ , 此振动的相位为

$$\varphi_P(t) = \varphi(t) - \frac{2\pi}{\lambda} \overline{PA}$$

同理, 波源  $B$  在  $P$  点引起振动, 其相位为

$$\varphi'_P(t) = \varphi(t) - \frac{2\pi}{\lambda} \overline{PB}$$

两振动的相位差为

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \varphi_P(t) - \varphi'_P(t) = \left( \varphi(t) - \frac{2\pi}{\lambda} \overline{PA} \right) - \left( \varphi(t) - \frac{2\pi}{\lambda} \overline{PB} \right) \\ &= -\frac{2\pi}{\lambda} \overline{AB} = -\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{3}{2} \lambda \\ &= -3\pi\end{aligned}$$

(2) 两振动反相, 所以  $P$  点合振动振幅等于 0.

**13.25** 图 13.25(a) 中  $S_1$  和  $S_2$  为两相干波源, 相距  $1/4$  波长,  $S_1$  的相位比  $S_2$  的相位超前  $\pi/2$ , 若两波在  $S_1$ 、 $S_2$  连线方向上的强度相同, 均为  $I_0$ , 且不随距离变化, 问  $S_1 S_2$  连线上在  $S_1$  外侧各点的合成波的强度如何? 又在  $S_2$  外侧各点的合成波的强度如何?

**解** 把  $S_1$ 、 $S_2$  的相位分别用  $\varphi_1(t)$ 、 $\varphi_2(t)$  表示. 以  $S_1$  为原点, 建立  $x$  轴, 如图 13.25(b) 所示, 在轴上任取一点  $P$ , 坐标为  $x$ .

$S_1$  发出的波在  $P$  点的相位落后于  $S_1$ , 它们间的相位差

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{S_1 P} = \frac{2\pi}{\lambda} x$$

此波在  $P$  点的相位

$$\varphi_{1P}(t) = \varphi_1(t) - \frac{2\pi}{\lambda} x$$

同理,  $S_2$  发出的波在  $P$  点的相位

$$\varphi_{2P}(t) = \varphi_2(t) - \frac{2\pi}{\lambda} \overline{S_2 P} = \varphi_2(t) - \frac{2\pi}{\lambda} \left( x + \frac{\lambda}{4} \right)$$

两波在  $P$  的相位差

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \varphi_{1P}(t) - \varphi_{2P}(t) \\ &= \left( \varphi_1(t) - \frac{2\pi}{\lambda} x \right) - \left[ \varphi_2(t) - \frac{2\pi}{\lambda} \left( x + \frac{\lambda}{4} \right) \right] \\ &= (\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

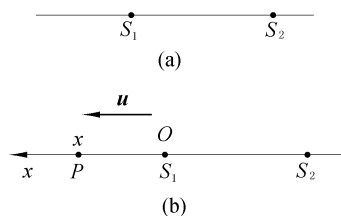


图 13.25

由已知条件,有

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \frac{\pi}{2}$$

则

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$\Delta\varphi$  值与  $x$  无关,所以在  $S_1$  外侧的整个区域内,两波始终反相,合成波的强度为 0.同理,在  $S_2$  外侧的任意一点处,两波的相位差为

$$\Delta\varphi' = 0$$

合成波强度为

$$\begin{aligned} I &= I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0}\sqrt{I_0}\cos\Delta\varphi' \\ &= 2I_0(1 + \cos 0) = 4I_0 \end{aligned}$$

**13.26** 如图 13.26 所示,  $A$ 、 $B$  两点为同一介质中的两相干波源,其振幅皆为 0.05m,频率为 100Hz,但当  $A$  点为波峰时,  $B$  适为波谷,设在介质中的波速为 10m/s,试写出由  $A$ 、 $B$  发出的两列波传到  $P$  点时干涉的结果.

**解** 设  $A$ 、 $B$  两波源至  $P$  点的距离分别为  $r_1$  和  $r_2$ ,如图 13.26 所示.

$$r_1 = 15 \text{ m}$$

$$r_2 = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ (m)}$$

则两波在  $P$  点激起的两振动的相位差为

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \\ &= -\pi - 2\pi \frac{25 - 15}{10/100} = -201\pi \end{aligned}$$

所以两波在  $P$  点干涉相消.

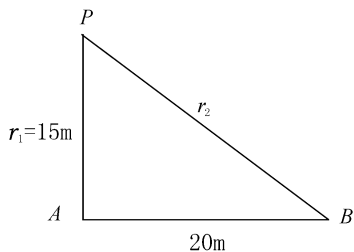


图 13.26

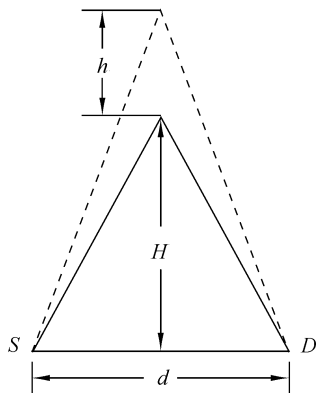


图 13.27

**13.27** 如图 13.27 所示,地面上一波源  $S$ ,与一高频率波探测器  $D$  之间的距离为  $d$ ,从  $S$  直接发出的波与从  $S$  发出经高度为  $H$  的水平层反射后的波,在  $D$  处加强.当水平层逐渐升高  $h$  距离时,在  $D$  处未测到讯号,如不考虑大气对波能量的吸收,试求波源  $S$  发出波的波长  $\lambda$ .

**解** 自  $S$  发出的波,经高度为  $H$  的水平层反射后至  $D$ ,全程设为  $d_1$ ,经高度为  $(H+h)$  的水平层至  $D$ ,全程设为  $d_2$ .直达波与经高度为  $H$  的水平层反射的波在  $D$  处同相,则

$$d_1 + \frac{\lambda}{2} - d = k\lambda \quad (1)$$

直达波与经高度为  $(H+h)$  水平层反射的波在  $D$  处反相,则

$$d_2 + \frac{\lambda}{2} - d = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (2)$$

由式(1)、(2)得

$$\lambda = 2(d_2 - d_1) \quad (3)$$

由图 13.27 可知

$$\frac{d_2}{2} = \sqrt{(H+h)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad (4)$$

$$\frac{d_1}{2} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad (5)$$

由式(4)、(5)解出  $d_2, d_1$ ,代入式(3)得

$$\lambda = 4 \left[ \sqrt{(H+h)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \right]$$

**13.28** 如图 13.28 所示,两列平面简谐干涉横波,在两种不同的介质中传播,在分界面的  $P$  点相遇.频率为  $\nu=100$  Hz,振幅  $A_1=A_2=1.00 \times 10^{-3}$  m,  $S_1$  的相位比  $S_2$  的相位超前  $\pi/2$ ,在介质 1 中波速  $u_1=400$  m/s,在介质 2 中波速  $u_2=500$  m/s,  $S_1P=r_1=4.00$  m,  $S_2P=r_2=3.75$  m,求  $P$  点的合振幅.

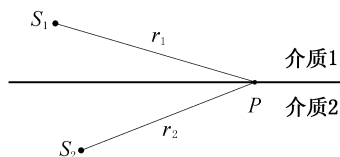


图 13.28

**解** 在介质 1 中,波长

$$\lambda_1 = \frac{u_1}{\nu} = \frac{400}{100} = 4(\text{m})$$

在介质 2 中,波长

$$\lambda_2 = \frac{u_2}{\nu} = \frac{500}{100} = 5(\text{m})$$

把  $S_1, S_2$  的相位分别用  $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$  表示.  $S_1$  发出的波在  $P$  点的相位为

$$\varphi_{1P}(t) = \varphi_1(t) - \frac{2\pi}{\lambda_1} r_1$$

$S_2$  发出的波在  $P$  点的相位为

$$\varphi_{2P}(t) = \varphi_2(t) - \frac{2\pi}{\lambda_2} r_2$$

则两波在  $P$  点相差为

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \varphi_{1P}(t) - \varphi_{2P}(t) \\ &= \left( \varphi_1(t) - \frac{2\pi}{\lambda_1} r_1 \right) - \left( \varphi_2(t) - \frac{2\pi}{\lambda_2} r_2 \right) \\ &= [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] - 2\pi \left( \frac{r_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - 2\pi \left( \frac{4}{4} - \frac{3.75}{5} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

$P$  点的合振幅为

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos 0^\circ} \\ &= A_1 + A_2 \\ &= 2.00 \times 10^{-3} (\text{m})\end{aligned}$$

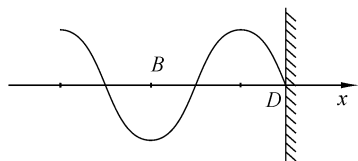


图 13.29

**13.29** 一平面简谐波某时刻的波形如图 13.29 所示,此波以波速  $u$  沿  $x$  轴正方向传播,振幅为  $A$ ,频率为  $\nu$ .

(1)若以图 13.29 中  $B$  点为  $x$  轴的坐标原点,并以此时刻为  $t=0$  时刻,写出此波的波函数;

(2)图 13.29 中  $D$  点为反射点,且为一节点,若以  $D$  为  $x$  轴的坐标原点,并以此时刻为  $t=0$  时刻,写出此入射波波函数和反射波的波函数;

(3)写出合成波的波函数,并定出波腹和波节的位置坐标.

**解** (1)由图可知  $t=0$  时刻,  $B$  点达到负的最大位移,所以其初相为  $\pi$ ,振动方程为

$$y_B = A \cos(2\pi\nu t + \pi)$$

波函数为

$$y = A \cos 2\pi\nu t + \pi - \frac{2\pi}{\lambda} x$$

$$= A \cos \left[ 2\pi \left( \nu t - \frac{\nu}{u} x \right) + \pi \right]$$

(2) 根据  $t=0$  时刻入射波波形图,  $D$  点位移为 0, 且向正方向运动, 所以振动的初相为  $-\frac{\pi}{2}$ . 入射波在  $D$  点的振动方程为

$$y_{\lambda D} = A \cos \left( 2\pi \nu t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$D$  是节点, 反射波、入射波在  $D$  点反相, 所以反射波在  $D$  引起振动的方程为

$$y_{\text{反}D} = A \cos \left( 2\pi \nu t - \frac{\pi}{2} + \pi \right) = A \cos \left( 2\pi \nu t + \frac{\pi}{2} \right)$$

反射波沿  $x$  负向传播, 其波函数为

$$y_{\text{反}} = A \cos \left[ 2\pi \nu \left( t + \frac{x}{u} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

由入射波在  $D$  点的振动方程可写出入射波波函数, 为

$$y_{\lambda} = A \cos \left[ 2\pi \nu \left( t - \frac{x}{u} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

(3) 合成波的波函数

$$y = y_{\lambda} + y_{\text{反}} = 2A \cos \left( 2\pi \frac{\nu}{u} x + \frac{\pi}{2} \right) \cos 2\pi \nu t$$

波节: 由  $2\pi \frac{\nu}{u} x + \frac{\pi}{2} = \left( k + \frac{1}{2} \right) \pi$  得

$$x = \frac{k}{2} \cdot \frac{u}{\nu} \quad (k = 0, -1, -2, \dots)$$

波腹: 由  $2\pi \frac{\nu}{u} x + \frac{\pi}{2} = k\pi$  得

$$x = \left( \frac{k}{2} - \frac{1}{4} \right) \frac{u}{\nu} \quad (k = 0, -1, -2, \dots)$$

**13.30** 设入射波的波函数为  $y_1 = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$ , 在  $x=0$  处发生反射, 反射点为一自由端. (1) 写出反射波的波函数; (2) 写出驻波的波函数; (3) 说明哪些点是波腹? 哪些点是波节?

**解** 反射点为一自由端, 是波腹, 则在反射点无半波损失.

(1) 反射波的波函数

$$y_2 = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

(2) 驻波的波函数

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

(3) 当  $\left| \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right| = 1$  亦即  $\frac{2\pi}{\lambda} x = k\pi$  时, 可得波腹位置坐标为

$$x = k \frac{\lambda}{2} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

当  $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 0$  亦即  $\frac{2\pi}{\lambda} x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$  时, 可得波节位置为

$$x = (2k+1) \frac{\lambda}{4} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

**13.31** 一弦线的振动方程为  $y = 2.0 \cos 0.16x \cdot \cos 750t$ , 式中长度以厘米计, 时间以秒计. 试问(1)组成此振动的两列波的振幅及波速各为多大? (2)相邻两节点间的距离为多长? (3)  $t = 2.0 \times 10^{-3}$  s 时刻, 位于  $x = 5.0$  cm 处的质点的振动速度是多大?

**解** (1)把此振动方程与驻波波函数的标准形式

$$y = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

相比较, 有

$$\frac{2\pi}{\lambda} = 0.16, \quad \frac{2\pi}{T} = 750, \quad 2.0 = 2A$$

得

$$\lambda = 12.5\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{750}$$

$$u = \lambda/T = \frac{12.5\pi}{\frac{2\pi}{750}} = 4.7 \times 10^3 \text{ (cm/s)}$$

$$A = 1.0 \text{ (cm)}$$

(2)相邻波节间距离

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} = \frac{12.5\pi}{2} = 19.6 \text{ (cm)}$$

(3)  $x$  处质点在  $t$  时刻的振动速度

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -1500 \cos 0.16x \cdot \sin 750t$$

把  $x = 5.0$  cm,  $t = 2.0 \times 10^{-3}$  s 代入上式

$$\begin{aligned} v &= -1500 \cos(0.16 \times 5.0) \cdot \sin(750 \times 2.0 \times 10^{-3}) \\ &= -1.04 \times 10^3 \text{ (cm/s)} \end{aligned}$$

**13.32** 有一提琴弦长 50 cm, 两端固定, 当不按手指演奏时发的声音是 A 调 (440 Hz), 试问要奏出 C 调 (528 Hz), 手指应按在什么位置?

**解** 琴弦两端是驻波的两个波节. 驻波波长  $\lambda$  满足关系式

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \text{其中, } n \text{ 是正整数, } L \text{ 是弦长}$$

对于基波,  $n=1$ , A 调的波长为

$$\lambda_A = 2L = 2 \times 50 = 100(\text{cm})$$

波在琴弦上传播的速度为

$$u = v_A \lambda_A = 440 \times 100 = 4.4 \times 10^4 (\text{cm/s})$$

B 调的波长为

$$\lambda_B = \frac{u}{v_B} = \frac{4.4 \times 10^4}{528} = 83.3 (\text{cm})$$

对于 B 调, 振动的弦长为

$$L_B = \frac{\lambda_B}{2} = \frac{83.3}{2} = 41.7(\text{cm})$$

所以, 手指要按在距上端 41.7 cm 处.

**13.33** 一汽笛发出频率为 1000 Hz 的声波, 汽笛以 10 m/s 的速率离开你而向着一悬崖运动, 试问:

(1) 你听到的直接从汽笛传来的声波的频率为多大?

(2) 你听到的从悬崖反射回来的声波的频率为多大? 设空气中的声速为 330 m/s.

**解** 观测者不动, 波源速度  $v_s = 10$  m/s, 频率  $\nu = 1000$  Hz, 波速  $u = 330$  m/s

(1) 波源远离观测者, 观测者所测频率

$$\nu_1 = \frac{u}{(u + v_s)} \nu = \frac{330}{330 + 10} \times 1000 = 971 (\text{Hz})$$

(2) 相当于波源向观测者接近, 接收到波的频率

$$\nu_2 = \frac{u}{(u - v_s)} \nu = \frac{330}{330 - 10} \times 1000 = 1031 (\text{Hz})$$

**13.34** 一观察者站在铁路旁, 听到迎面开来的火车汽笛声的频率为 440 Hz, 当火车驰过他身旁之后, 他听到汽笛声的频率为 392 Hz, 问火车行驶的速度为多大? 已知空气中声速为 330 m/s.

**解** 设车速为  $v_s$ ,  $\nu_1 = 440$  Hz,  $\nu_2 = 392$  Hz,  $u = 330$  m/s, 当火车靠近观察者时, 测到频率为

$$\nu_1 = \frac{u}{u - v_s} \nu$$

当火车远离观察者时, 测到频率为

$$\nu_2 = \frac{u}{u + v_s} \nu$$

则

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{u + v_s}{u - v_s}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{440}{392}$$

由上两式得

$$v_s = \frac{48u}{832} = \frac{48 \times 330}{832} = 19.0(\text{m/s}) = 68.4 \text{ km/h}$$

**13.35** 火车 A 行驶的速率为  $72.0 \text{ km/h}$ . 汽笛发出声波频率为  $800 \text{ Hz}$ , 相向而来的另一列火车 B, 行驶速率为  $90.0 \text{ km/h}$ . 问火车 B 的司机听到火车 A 汽笛声的频率是多少? 设空气中的声速为  $340 \text{ m/s}$ .

**解** 由题设知

$$v_A = 72.0 \text{ km/h} = 20.0 \text{ m/s}$$

$$v_B = 90.0 \text{ km/h} = 25.0 \text{ m/s}$$

B 车司机听到的 A 车汽笛声的频率

$$\nu' = \frac{u + v_B}{u - v_A} \nu = \frac{340 + 25}{340 - 20} \times 800 = 912.1(\text{Hz})$$

**13.36** 两潜艇在静海水中演习, 相向而行. 甲艇速率为  $50.0 \text{ km/h}$ , 乙艇速率为  $70.0 \text{ km/h}$ . 甲艇向乙艇发出声呐信号(水中声波), 频率为  $1000 \text{ Hz}$ , 波速为  $5480 \text{ km/h}$ . 问: (a) 乙艇收到声呐信号的频率是多少? (b) 甲艇收到乙艇反射回来声呐信号的频率是多少?

**解** (a) 甲乙相向运动, 乙收到信号的频率

$$\begin{aligned} \nu' &= \frac{u + v_{\text{乙}}}{u - v_{\text{甲}}} \nu = \frac{5480 + 70}{5480 - 50} \times 1000 \\ &= 1022.1(\text{Hz}) \end{aligned}$$

(b) 甲是接收者; 乙相当于一个频率为  $\nu'$  波源, 则甲收到信号的频率

$$\begin{aligned} \nu'' &= \frac{u + v_{\text{甲}}}{u - v_{\text{乙}}} \nu' = \frac{5480 + 50}{5480 - 70} \times 1022.1 \\ &= 1044.8(\text{Hz}) \end{aligned}$$

**13.37** 在  $5000 \text{ m}$  高空, 一架喷气飞机以  $1.5$  马赫(即声速的  $1.5$  倍)的速率飞过地面上某人头顶上空. 试求:

(1) 冲击波(圆锥面)与喷气式飞机的飞行路线所成之角;

(2) 喷气式飞机飞过此人头顶上空之后, 要经过多长时间冲击波才到达他所在之处? 设声速为  $330 \text{ m/s}$ ?

**解** (1) 飞机速度  $v = 1.5 \times 330 = 495 \text{ m/s}$ . 波速为  $330 \text{ m/s}$ , 飞机经过  $\Delta t$  时间由 A 飞行到 B 点, 走过的路程

$$\overline{AB} = v \Delta t$$

飞机在 A 点发出的波面, 经过  $\Delta t$  时间, 到达半径为  $r = u \Delta t$  的球面处. 设冲击波

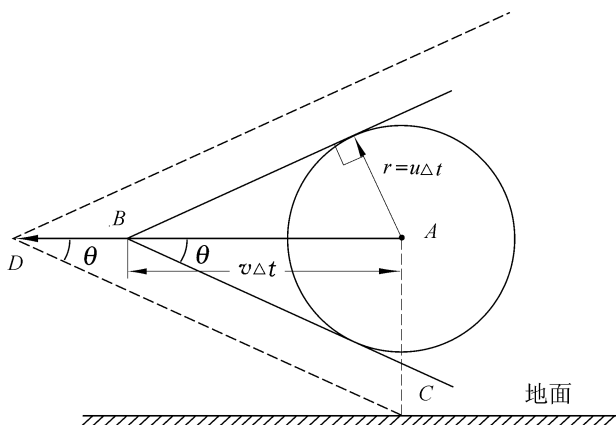


图 13.37

与飞行路线夹角为  $\theta$ , 则

$$\sin \theta = \frac{r}{AB}$$

$$\theta = \arcsin \frac{r}{AB} = \arcsin \frac{u\Delta t}{v\Delta t} = \arcsin \frac{u}{v}$$

$$= \arcsin \frac{1}{1.5} = 41.8^\circ$$

(2) 人在 A 点正下方的 C 处, 当冲击波到达如图 13.37 虚线所示位置时经过的时间为

$$\Delta t = \frac{\overline{AD}}{v} = \frac{\overline{AC} \cot \theta}{495} = \frac{5000 \times \cot 41.8^\circ}{495} = 11.3(\text{s})$$

# 第 14 章 波动光学

## 一、基本内容和主要公式

### 1. 光波的叠加

#### (1) 相干叠加

两相干光在空间一点  $P$  相遇,  $P$  点的光强为

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \cos \Delta \varphi$$

其中,  $I_1$ 、 $I_2$  分别为两光单独存在时  $P$  点的光强,  $\Delta \varphi$  是两光在  $P$  点的相位差.

① 当  $\Delta \varphi = 2k\pi$  时, 光强最大, 为

$$I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

② 当  $\Delta \varphi = (2k+1)\pi$  时, 光强最小, 为

$$I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$$

#### (2) 非相干叠加

两非相干光在空间一点  $P$  相遇,  $P$  点的光强为

$$I = I_1 + I_2$$

其中,  $I_1$ 、 $I_2$  分别为两光单独存在时  $P$  点的光强.

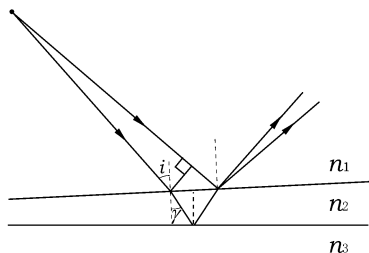


图 14.1

### 2. 杨氏双缝干涉实验

是一种用分波面法获得相干光的典型实验, 其干涉条纹是等间距的明暗相间直条纹, 相邻条纹间的距离为

$$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$$

其中,  $D$  是双缝到屏的距离,  $d$  是双缝间距.

### 3. 薄膜干涉

利用分振幅法获得相干光产生干涉, 如图 14.1 所示. 两束相干光的光程差为

$$\delta = \begin{cases} 2n_2 d \cos \gamma + \frac{\lambda}{2} & n_2 > n_1, n_3 \quad \text{或} \quad n_2 < n_1, n_3 \\ 2n_2 d \cos \gamma & n_1 > n_2 > n_3 \quad \text{或} \quad n_1 < n_2 < n_3 \end{cases}$$

当  $\delta = k\lambda$  时, 干涉加强;

当  $\delta = \left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda$  时,干涉相消.

#### 4.惠更斯-菲涅耳原理

波面上的各点都可看作是相干的次波波源,它们发出的次波在空间各点相遇时,其强度分布是次波相干叠加的结果.

#### 5.单缝的夫琅禾费衍射

(1)暗纹位置由下式决定

$$a \sin \theta = \pm k \lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

其中  $a$  为狭缝宽度,  $\theta$  为衍射角.

(2)单缝夫琅禾费衍射的光强分布为

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)}{\left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)^2}$$

#### 6.光学仪器的最小分辨角

$$\delta_{\varphi} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

其中  $D$  是仪器的通光孔径.

#### 7.光栅衍射

光栅方程:

$$(a + b) \sin \varphi = \pm k \lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

其中  $a + b$  为光栅常数,  $\varphi$  为衍射角.

暗纹条件:

$$N(a + b) \sin \varphi = \pm m \lambda \quad (m = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots)$$

其中  $N$  为光栅的狭缝数目.

缺级公式:

$$k = \frac{a \pm b}{a} k' \quad (k, k' \text{ 均为整数})$$

其中,  $k$  是缺级主极大的级数,  $k'$  是单缝衍射暗纹的级数.

#### 8.马吕斯定律

光强为  $I_0$  的线偏振光经过一个偏振片后,光强变为

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

其中,  $\alpha$  是线偏振光的光矢量与偏振片偏振化方向的夹角.

#### 9.布儒斯特定律

$$\tan i_b = \frac{n_2}{n_1}$$

## 10. 波片

光轴平行于晶面的单轴晶片称作波片. 当一束单色线偏振光垂直入射波片时, 通过波片的  $o$  光和  $e$  光的光程差为

$$\delta = (n_o - n_e)d$$

其中  $d$  是波片的厚度.

## 二、典型例题

**14-1** 波长为  $\lambda$  的单色光以  $\varphi$  角入射到间距为  $d$  的双缝上, 若双缝到屏的距离为  $D (\gg d)$ , 如图 14-1 所示, 试求:

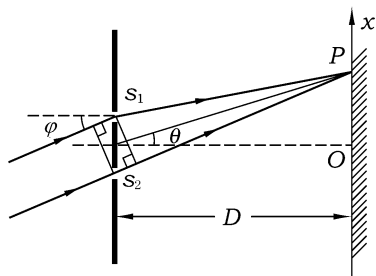


图 14-1

(1) 各级明纹位置;

(2) 条纹的间距;

(3) 若零级明纹移至屏幕  $O$  点处, 则应在  $S_2$  缝处放置一厚度为多少的折射率为  $n$  的透明介质薄片.

**解** (1) 如图 14-1, 通过双缝到达  $P$  处的两光的光程差为

$$\delta = d(\sin \theta - \sin \varphi) \quad (1)$$

对于第  $k$  级明纹, 有

$$\delta = k\lambda \quad (2)$$

由式(1)、(2)得

$$\sin \theta = \frac{k\lambda}{d} + \sin \varphi$$

第  $k$  级明纹的位置为

$$x_k = D \tan \theta \approx D \sin \theta = D \left( \frac{k\lambda}{d} + \sin \varphi \right)$$

(2) 条纹间距为

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_{k+1} - x_k \\ &\approx D \left[ \frac{(k+1)\lambda}{d} + \sin \varphi \right] - D \left( \frac{k\lambda}{d} + \sin \varphi \right) \\ &= \frac{D\lambda}{d} \end{aligned}$$

(3) 在  $S_2$  缝处放置厚度为  $t$ 、折射率为  $n$  的介质薄片, 那么到达  $P$  点的两束光的光程差为

$$\delta' = d(\sin \theta - \sin \varphi) + (n-1)t$$

若使零级明纹回到屏上的  $O$  点, 则  $\delta' = 0$ ,  $\theta = 0$ , 故有

$$-d\sin\varphi + (n-1)t = 0$$

介质薄片厚度为

$$t = \frac{d\sin\varphi}{n-1}$$

**说明** 1. 在斜入射的情况下,  $S_1$  和  $S_2$  作为次波源, 它们的相位不同, 这与垂直入射的情况不同. 2. 在一般的杨氏干涉实验中, 屏上干涉条纹形成区域远小于双缝到屏的距离, 即  $x_k \ll D$ , 故有  $\tan\theta \approx \sin\theta$ .

**14-2** 波长为  $\lambda$  的两束平行相干单色光分别以入射角  $\theta$  和  $\varphi$  入射到屏上, 如图所示. 试求干涉条纹的间距.

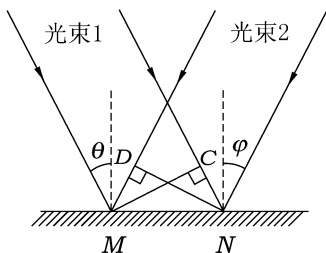


图 14-2

**解** 设屏上的  $M$ 、 $N$  两点分别是第  $k+1$  级、第  $k$  级明纹的位置, 其间距为  $d$ .  $\varphi_{1M}$ 、 $\varphi_{1N}$  是光束 1 在  $M$ 、 $N$  两点处的相位,  $\varphi_{2M}$ 、 $\varphi_{2N}$  是光束 2 在  $M$ 、 $N$  两点的相位.

光束 1 在  $M$ 、 $N$  两点处的相位差为

$$\varphi_{1M} - \varphi_{1N} = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{CN} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta \quad (1)$$

光束 2 在  $M$ 、 $N$  两点处的相位差为

$$\varphi_{2N} - \varphi_{2M} = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{DM} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\varphi \quad (2)$$

$M$  点是第  $k+1$  级明纹位置, 所以两光在  $M$  点的相位差

$$\varphi_{1M} - \varphi_{2M} = (2k+1)\pi \quad (3)$$

$N$  点是第  $k$  级明纹位置, 所以两光在  $N$  点处的相位差为

$$\varphi_{1N} - \varphi_{2N} = 2k\pi \quad (4)$$

(3)-(4)得

$$\varphi_{1M} - \varphi_{1N} + \varphi_{2N} - \varphi_{2M} = 2\pi \quad (5)$$

由(1)、(2)、(5)得

$$d = \lambda / (\sin\theta + \sin\varphi)$$

**说明** 干涉条纹的间距由两束光的入射角决定.这种方法可用于制作光栅.

**14-3** 实验装置如图 14-3 所示.一油滴处在平板玻璃上,当油滴展开成油膜时,在单色光(波长  $\lambda=5760\times 10^{-10}$  m)垂直入射的情况下,从反射光中观察油膜所形成的干涉条纹.已知油的折射率  $n_1=1.60$ ,玻璃折射率  $n_2=1.50$ .

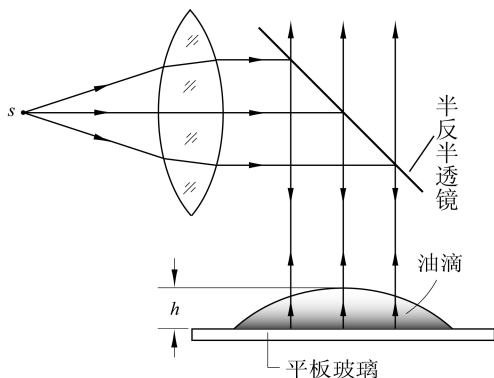


图 14-3

(1)当油膜最高点与玻璃上表面相距  $h=8640\times 10^{-10}$  m 时,可看到几条明纹?明纹所在处油膜的厚度分别等于多少?油膜最高处明暗程度如何?

(2)在油膜扩展的过程中,所看到的干涉条纹如何变化?

**解** (1)设第  $k$  级明纹所对应的油膜厚度为  $d_k$ ,有

$$2n_1d_k + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (k=1,2,\dots)$$

则

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda}{2n_1} = \frac{(2k-1)\times 5760\times 10^{-10}}{2\times 2\times 1.6} \\ &= (2k-1)900\times 10^{-10} \text{ (m)} \\ &= 90\times (2k-1) \text{ (nm)} \end{aligned}$$

$$k=1, d_1=90 \text{ nm}; k=2, d_2=270 \text{ nm}$$

$$k=3, d_3=450 \text{ nm}; k=4, d_4=630 \text{ nm}$$

$$k=5, d_5=810 \text{ nm}; k=6, d_6=990 \text{ nm}$$

因为  $d_5 < h < d_6$ ,所以只能看到前 5 条明纹,且油膜最高处光的强度介于明暗之间.

(2)在油膜扩展过程中,条纹间距变大,干涉条纹减少.

**说明** 1. 对于薄膜干涉,要注意半波损失问题.2. 本题属于等厚干涉问题,条纹的

疏密主要取决于薄膜厚度(在垂直干涉条纹和薄膜厚度的方向上)变化的快慢.

**14-4** 用波长为  $\lambda$  的单色光照射狭缝,得到单缝的夫琅禾费衍射图样,第三级暗纹位于屏上的  $P$  处,问:

(1) 若将狭缝宽度缩小一半,那么  $P$  处是明纹还是暗纹?

(2) 若用波长为  $1.5\lambda$  的单色光照射狭缝,  $P$  处是明纹还是暗纹?

**解** 根据已知条件,在屏上  $P$  处出现第三级暗纹,所以对于  $P$  位置,狭缝处的波面可划分为 6 个半波带.

(1) 缝宽减小到一半,对于  $P$  位置,狭缝处波面可分为 3 个半波带,则在  $P$  处出现第一级明纹.

(2) 改用波长为  $1.5\lambda$  的单色光照射,则狭缝处波面可划分的半波带数变为原来的一点五分之一,对于  $P$  位置,半波带数变为 4 个,所以在  $P$  处出现第二级暗纹.

**说明** 与暗纹对应的半波带数为偶数  $2n$  ( $n=1, 2, \dots$ , 为暗纹级数);与明纹(中央明纹除外)对应的半波带数为奇数  $2n+1$  ( $n=1, 2, \dots$ , 是明纹级数).

**14-5** 每毫米均匀刻有 100 条线的光栅,宽度为  $D=10\text{ mm}$ ,当波长为  $500\text{ nm}$  的平行光垂直入射时,第四级主极大谱线刚好消失,第二级主极大的光强不为 0,试求:

(1) 光栅狭缝可能的宽度;

(2) 第二级主极大的半角宽度.

**解** (1) 光栅常数

$$a+b = \frac{1}{100} = 1 \times 10^{-2} (\text{mm})$$

第四级主极大缺级,故有

$$\frac{a+b}{a} = \frac{4}{k}$$

其中  $k$  是正整数,  $1 \leq k < 4$

$$\text{当 } k=1 \text{ 时, } a = \frac{a+b}{4} = \frac{1 \times 10^{-2}}{4} = 2.5 \times 10^{-3} (\text{mm})$$

当  $k=2$  时,第二级主极大也会发生缺级,不符题意,舍去.

$$\text{当 } k=3 \text{ 时, } a = \frac{a+b}{4} \times 3 = \frac{1 \times 10^{-2}}{4} \times 3 = 7.5 \times 10^{-3} (\text{mm})$$

符合题意的缝宽有两个,分别是  $2.5 \times 10^{-3}\text{ mm}$  和  $7.5 \times 10^{-3}\text{ mm}$ .

(2) 光栅总的狭缝数

$$N = \frac{D}{a+b} = \frac{10}{10^{-2}} = 10^3$$

设第二级主极大的衍射角为  $\theta_{2N}$ ,与该主极大相邻的暗纹(第  $2N+1$  级或第

$2N-1$ 级)衍射角为  $\theta_{2N+1}$ ,由光栅方程及暗纹公式有

$$(a+b)\sin\theta_{2N} = 2\lambda$$

$$N(a+b)\sin\theta_{2N+1} = (2N+1)\lambda$$

代入数据后,得

$$\theta_{2N} = 5.739^\circ \quad \theta_{2N+1} = 5.742^\circ$$

第二级主极大的半角宽度

$$\Delta\theta = \theta_{2N+1} - \theta_{2N} = 0.003(^\circ)$$

$$= 5 \times 10^{-5}(\text{rad})$$

**说明** 当主极大谱线位置与狭缝衍射的暗纹位置重合时,会出现缺级现象.

本题中当  $\frac{a+b}{a} = \frac{4}{1}$  时,会出现单缝衍射的第一级暗纹与光栅衍射的第四级主极大重合,第二级暗纹与第八级主极大重合…….当  $\frac{a+b}{a} = \frac{4}{3}$  时,会出现单缝衍射的第三级暗纹与光栅衍射的第四级主极大重合,第六级暗纹与第八级主极大重合,…….

**14-6** 在两个正交偏振片  $P_1$ 、 $P_2$  之间,放置一个以角速度  $\omega$  匀速转动的偏振片  $P_3$ ,如图 14-6 所示.光强为  $I_0$  的自然光垂直入射  $P_1$ , $t=0$  时, $P_3$  的偏振化方向与  $P_1$  的偏振化方向平行.试求当自然光通过该系统后,透射光强度如何?

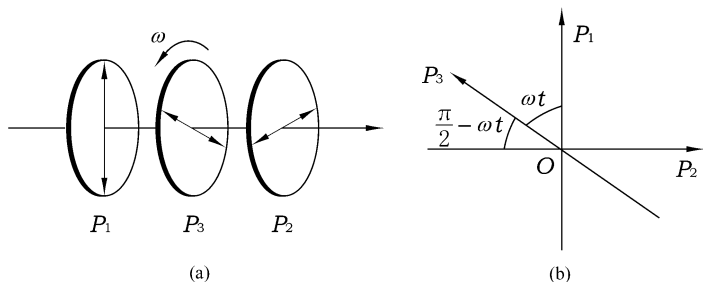


图 14-6

**解** 自然光通过  $P_1$ ,获得偏振光,其强度为

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0$$

$t$  时刻, $P_3$  偏振化方向与偏振光光矢量的夹角为  $\omega t$ ,根据马吕斯定律,透过  $P_3$  的偏振光光强为

$$I_2 = I_1 \cos^2 \omega t = \frac{I_0}{2} \cos^2 \omega t$$

同理,通过  $P_2$  光的强度为

$$\begin{aligned}
 I_3 &= I_2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \omega t \right) \\
 &= \frac{I_0}{2} \cos^2 \omega t \sin^2 \omega t \\
 &= \frac{I_0}{8} \sin^2 2\omega t = \frac{I_0}{16} (1 - \cos 4\omega t)
 \end{aligned}$$

透射光光强是时间  $t$  的函数. 随着  $P_3$  的旋转, 光强呈周期性变化.

**说明** 对于两个偏振化方向垂直的偏振片  $P_1$ 、 $P_2$  构成的系统, 自然光是无法通过该系统的, 但在二偏振片之间加入一旋转偏振片  $P_3$  之后, 光可以透过系统, 并且透射光  $I_3$  随着  $P_3$  的旋转作周期性的变化. 这个偏振系统可以在实际中调控透射光强.

### 三、习题详解

#### 14.1 选择题

(1) 在双缝干涉实验中, 屏幕  $E$  上的  $P$  点处是明条纹, 若将缝  $S_2$  盖住, 并在  $S_1$ 、 $S_2$  连线的垂直平分面处放一反射镜  $M$ , 如图 14.1 所示. 此时 (B)

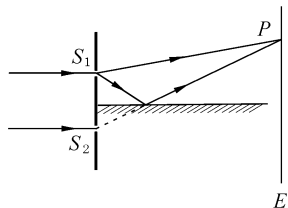


图 14.1

- (A)  $P$  点处仍为明条纹;
- (B)  $P$  点处为暗条纹;
- (C) 不能确定  $P$  点处是明条纹还是暗条纹;
- (D) 无干涉条纹.

(2) 根据惠更斯-菲涅耳原理, 若已知光在某时刻的波阵面为  $S$ , 则  $S$  的前方某点  $P$  的光强决定于波阵面上所有面元发出的子波各自传到  $P$  点的 (B)

- (A) 振动振幅之和
- (B) 相干叠加
- (C) 振动振幅之和的平方
- (D) 光强之和.

(3) 在真空中波长为  $\lambda$  的单色光, 在折射率为  $n$  的透明介质中从  $A$  沿某路径传到  $B$ , 若  $A$ 、 $B$  两点的相位差为  $3\pi$ , 则此路径  $AB$  的光程差为 (A)

- (A)  $1.5\lambda$
- (B)  $1.5n\lambda$
- (C)  $3\lambda$
- (D)  $1.5\lambda/n$

(4) 在双缝干涉实验中, 用单色自然光, 在屏上形成干涉条纹, 若在两缝后放一个偏振片, 则 (B)

- (A) 干涉条纹的间距不变, 但明纹的亮度加强
- (B) 干涉条纹的间距不变, 但明纹的亮度减弱
- (C) 干涉条纹的间距变窄, 且明纹的亮度减弱

(D)无干涉条纹

(5)在迈克耳孙干涉仪的一条光路中,放入一折射率为  $n$ ,厚度为  $d$  的透明薄片,放入后,这条光路的光程改变了(A)

(A)  $2(n-1)d$  (B)  $2nd$  (C)  $2(n-1)d + \frac{1}{2}\lambda$

(D)  $nd$  (E)  $(n-1)d$

(6)某元素的特征光谱中,含有波长分别为  $\lambda_1=450\text{ nm}$  和  $\lambda_2=750\text{ nm}$  ( $1\text{ nm}=10^{-9}\text{ m}$ ) 的光谱线,在光栅光谱中,这两种波长的谱线有重叠现象,重叠处  $\lambda_2$  的谱线级数将是(D)

(A) 2, 3, 4, 5, ... (B) 2, 5, 8, 11, ...

(C) 2, 4, 5, 8, ... (D) 3, 6, 9, 12, ...

(7)一束单色光垂直入射在光栅上,当光栅常数 ( $a+b$ ) 为下列哪种情况时 ( $a$  为缝宽),  $k=3, 6, 9$  等主极大缺级? (B)

(A)  $a+b=2a$  (B)  $a+b=3a$  (C)  $a+b=4a$  (D)  $a+b=6a$

(8)测量单色光的波长时,下列方法中哪一种最为准确? (D)

(A) 双缝干涉 (B) 牛顿环 (C) 单缝 (D) 光栅衍射

## 14.2 填空题

(1)光的干涉和衍射现象反映了光的波动性质.光的偏振现象说明光波是横波.

(2)波长为  $600\text{ nm}$  的单色平行光,垂直入射到缝宽为  $a=0.6\text{ mm}$  的单缝上,缝后有一焦距  $f=60\text{ cm}$  的透镜,在透镜焦平面上观察到衍射图样,则中央条纹的宽度为  $1.2\text{ mm}$ ,两个第三级暗纹之间的距离为  $3.6\text{ mm}$ .

(3)一束平行单色光垂直入射在一光栅上,若光栅的透明缝宽度  $a$  与不透明部分宽度  $b$  相等,则可能看到的衍射光谱的级次为  $0, \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots$ .

(4)若在迈克耳孙干涉仪的可动反射镜  $M$  移动  $0.620\text{ mm}$  的过程中,观察到干涉条纹移动了 2300 条,则所用光波的波长为  $539.1\text{ nm}$ .

(5)当自然光以  $60^\circ$  的入射角入射一透明介质表面时,反射光为线偏振光,则介质折射率为  $1.73$ ,折射光为部分偏振光,折射角为  $30^\circ$ .

(6)一束自然光以布儒斯特角入射到平板玻璃片上,就偏振状态来说,则反射光为完全偏振光,反射光  $E$  矢量的方向垂直入射面,透射光为部分偏振光.

(7)三个偏振片  $P_1$ 、 $P_2$  与  $P_3$  堆叠在一起,  $P_1$  与  $P_3$  的偏振化方向相互垂直,  $P_2$  与  $P_1$  偏振化方向的夹角为  $30^\circ$ ,强度为  $I_0$  的自然光垂直入射,依次透过  $P_1$ 、 $P_2$  与  $P_3$ ,若不考虑偏振片的吸收和反射,则通过三偏振片后的光强为  $\frac{3}{32}I_0$ .

14.3 设在真空中电磁波的能量密度  $S=100\text{ W/m}^2$ ,求:电磁波能量体密度

$w$ ; 电场强度  $E$  和磁感应强度  $B$  的大小.

$$\text{解 } w = \frac{S}{c} = \frac{100}{3 \times 10^8} = 3.33 \times 10^{-7} \text{ (J/m}^3\text{)}$$

由  $w = \epsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2$  得

$$E = \sqrt{\frac{w}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{3.33 \times 10^{-7}}{8.85 \times 10^{-12}}} = 194 \text{ (V/m)}$$

$$B = \mu_0 H = \sqrt{\mu_0 w} = \sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 3.33 \times 10^{-7}} \\ = 6.47 \times 10^{-7} \text{ (T)}$$

**14.4** 一广播电台的广播辐射功率是 10 kW, 假定辐射场均匀分布在以电台为中心的半球面上(如图 14.4).

(1) 求距电台为  $r = 100 \text{ km}$  处的平均能流密度;

(2) 若在上述距离处的电磁波可看作平面波, 求该处的电场强度和磁场强度的振幅.

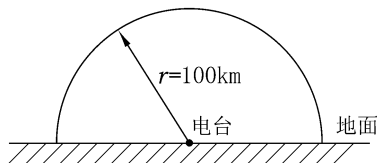


图 14.4

**解** (1) 在单位时间内通过半球面的能量为

$$W = P \times \Delta t = 10 \times 10^3 \times 1 = 1 \times 10^4 \text{ (J)}$$

半球面处的平均能流密度为

$$I = \frac{W}{\Delta t \cdot S_{\text{半球面}}} = \frac{1 \times 10^4}{1 \times \frac{4\pi r^2}{2}} = \frac{1 \times 10^4}{2\pi \times (100 \times 10^3)^2} \\ = 1.59 \times 10^{-7} \text{ (W/m}^2\text{)}$$

(2) 电场强度的振幅为

$$E_0 = (2I)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{4}} \\ = (2 \times 1.59 \times 10^{-7})^{\frac{1}{2}} \times \left( \frac{4\pi \times 10^{-7}}{8.85 \times 10^{-12}} \right)^{\frac{1}{4}} \\ = 1.09 \times 10^{-2} \text{ (V} \cdot \text{m}^{-1}\text{)}$$

磁场强度的振幅为

$$H_0 = (2I)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{\frac{1}{4}} = 2.91 \times 10^{-5} \text{ (A} \cdot \text{m}^{-1}\text{)}$$

**14.5** 一气体激光器发出的光的强度可达  $3 \times 10^{18} \text{ W/m}^2$ , 计算对应的电场强度和磁场强度振幅.

解 电场强度的振幅为

$$E_0 = (2I)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{4}} = (2 \times 3 \times 10^{18})^{\frac{1}{2}} \times \left( \frac{4\pi \times 10^{-7}}{8.85 \times 10^{-12}} \right)^{\frac{1}{4}} \\ = 4.75 \times 10^{10} (\text{V} \cdot \text{m}^{-1})$$

磁场强度的振幅为

$$H_0 = (2I)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{\frac{1}{4}} = 1.26 \times 10^8 (\text{A} \cdot \text{m}^{-1})$$

**14.6** 汞弧灯发出的光通过一绿色滤光片后射到相距 0.60 mm 的双缝上,在距双缝 2.5 m 处的屏幕上出现干涉条纹.测得两相邻明纹中心的距离为 2.27 mm,试计算入射光的波长.

解 由双缝干涉的条纹间距公式可得

$$\lambda = \frac{\Delta x d}{D} = \frac{2.27 \times 10^{-3} \times 0.60 \times 10^{-3}}{2.5} = 5.45 \times 10^{-7} (\text{m}) = 545 (\text{nm})$$

**14.7** 在杨氏双缝干涉实验中,测得  $d=1.0 \text{ mm}$ ,  $D=50 \text{ cm}$ ,相邻暗条纹间的距离为 0.3 mm,求入射光波的波长.

$$\text{解 } \lambda = \frac{\Delta x d}{D} = \frac{0.3 \times 10^{-3} \times 1.0 \times 10^{-3}}{50 \times 10^{-2}} = 6 \times 10^{-7} (\text{m}) = 600 (\text{nm})$$

**14.8** 图 14.8 为一双棱镜,顶角  $A$  很小,狭缝光源  $S_0$  发出的光通过双棱镜分成两束,好像直接来自于两个虚光源  $S_1$  和  $S_2$ ,它们的间距  $d=2a\alpha(n-1)$ ,  $n$  为棱镜的折射率.

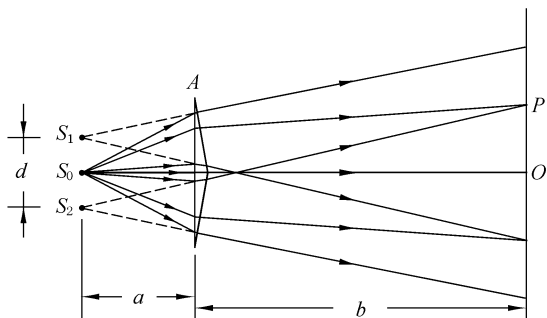


图 14.8

如果棱镜  $n=1.50$ ,  $\angle A=6'$ ,狭缝到双棱镜的距离  $a=20 \text{ cm}$ ,试求:

(1)两虚光源的间距;

(2)用波长 500 nm 的绿光照射狭缝,在距棱镜  $b=2 \text{ m}$  的屏幕上干涉条纹的间距是多少?

**解** 已知  $\angle A = 6' = 1.75 \times 10^{-3} \text{ rad}$

$$(1) d = 2aA(n-1)$$

$$= 2 \times 20 \times 10^{-2} \times 1.75 \times 10^{-3} \times (1.50 - 1)$$

$$= 3.5 \times 10^{-4} \text{ (m)}$$

(2) 这种干涉相当于杨氏双缝干涉, 双缝间距  $d = 3.5 \times 10^{-4} \text{ m}$ , 它们到屏幕的距离为  $a+b$ , 则条纹间距为

$$\Delta x = \frac{(a+b)\lambda}{d} = \frac{(0.2+2) \times 500 \times 10^{-9}}{3.5 \times 10^{-4}}$$

$$= 3.1 \times 10^{-3} \text{ (m)}$$

**14.9** 在洛埃镜装置中, 狭缝光源  $S_1$  和它的虚像  $S_2$  在离镜左边 20 cm 的平面内, 见图 14.9. 镜长 30 cm, 在镜的右面边缘放一毛玻璃屏. 如  $S_1$  到镜面的垂直距离为 2.0 mm, 使用波长为  $7.2 \times 10^{-7} \text{ m}$  的红光, 试计算镜面右边边缘到第一条明条纹的距离.

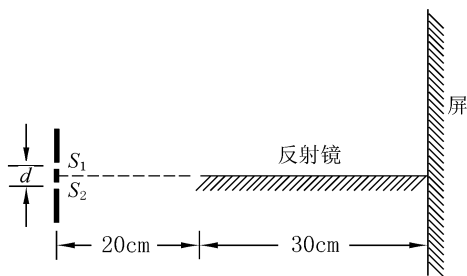


图 14.9

**解**  $S_1 S_2$  间距离为

$$d = 2 \times 2.0 = 4.0 \text{ (mm)}$$

双缝到屏的距离为

$$D = 20 \text{ cm} + 30 \text{ cm} = 50 \text{ cm} = 500 \text{ mm}$$

镜的右边缘处为暗纹(由于半波损失), 它到第一条明纹的距离为半个条纹间距

$$\Delta x = \frac{1}{2} \left( \frac{D\lambda}{d} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{500 \times 7.2 \times 10^{-4}}{4.0} = 4.5 \times 10^{-2} \text{ (mm)}$$

**14.10** 用折射率  $n=1.58$  的很薄的云母片覆盖在双缝实验中的一条缝上, 这时屏上的第七级亮条纹移到原来的零级亮条纹的位置上. 如果入射光波长为 550 nm, 试问此云母片的厚度是多少?

**解** 设云母片厚度为  $d$ . 无云母片时, 零级亮纹在屏上  $P$  点, 则到达  $P$  点的两

束光的光程差为零.加上云母片后,到达  $P$  点的两光束的光程差为

$$\delta = (n-1)d \quad (1)$$

当  $P$  点为第七级明纹位置时,有

$$\delta = 7\lambda \quad (2)$$

由式(1)、(2)得

$$d = \frac{7\lambda}{n-1} = \frac{7 \times 550 \times 10^{-6}}{1.58-1} = 6.6 \times 10^{-3} (\text{mm})$$

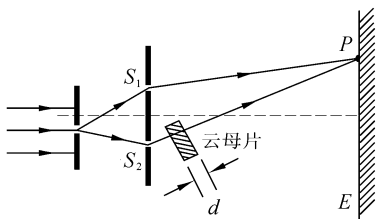


图 14.10

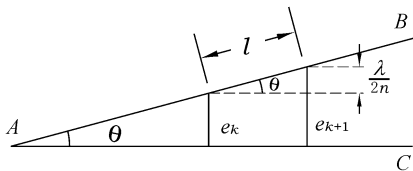


图 14.11

**14.11** 利用等厚干涉可以测量微小的角度.如图 14.11 所示,折射率  $n=1.4$  的劈尖状板,在某单色光的垂直照射下,量出两相邻明条纹间距  $l=0.25 \text{ cm}$ ,已知单色光在空气中的波长  $\lambda=700 \text{ nm}$ ,求劈尖顶角  $\theta$ .

**解** 形成第  $k$  级明纹的两束光的光程差为

$$2ne_k + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (1)$$

形成第  $k+1$  级明纹的两束光的光程差为

$$2ne_{k+1} + \frac{\lambda}{2} = (k+1)\lambda \quad (2)$$

式(2)一式(1)得

$$e_{k+1} - e_k = \frac{\lambda}{2n}$$

故

$$\theta \approx \frac{e_{k+1} - e_k}{l} = \frac{\lambda}{2nl} = \frac{700 \times 10^{-9}}{2 \times 1.4 \times 2.5 \times 10^{-3}} = 1.0 \times 10^{-4} (\text{rad})$$

**14.12** 氦氖激光器发出波长为  $632.8 \text{ nm}$  的单色光,垂直照射在两块平面玻璃片上,两玻璃片一边互相接触,另一边夹着一云母片,形成一空气劈尖.测得 50 条暗条纹间距离为  $6.351 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,劈尖边到云母片的距离为  $30.313 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,求云母片的厚度.

**解** 两相邻暗纹间距离  $l = 6.351 \times 10^{-3} / (50-1) = 1.3 \times 10^{-4} (\text{m})$

设劈尖夹角为  $\theta$ ,劈尖折射率  $n=1$ ,应用上题结果有

$$\theta = \frac{\lambda}{2nl} = \frac{632.8 \times 10^{-9}}{2 \times 1 \times 1.3 \times 10^{-4}} = 2.4 \times 10^{-3}$$

云母片厚度为

$$\begin{aligned} d &= 30.313 \times 10^{-3} \cdot \theta = 30.313 \times 10^{-3} \times 2.4 \times 10^{-3} \\ &= 7.3 \times 10^{-5} (\text{m}) \end{aligned}$$

**14.13** 如图 14.18 所示,用紫色光观察牛顿环时,测得第  $k$  级暗环的半径  $r_k = 4 \text{ mm}$ ,第  $k+5$  级暗环的半径  $r_{k+5} = 6 \text{ mm}$ ,所用平凸透镜的曲率半径  $R = 10 \text{ m}$ ,求紫光的波长和级数  $k$ .

**解** 牛顿环暗环半径为

$$r_k = \sqrt{k\lambda R} \quad (1)$$

$$r_{k+5} = \sqrt{(k+5)\lambda R} \quad (2)$$

由式(1)、(2)得

$$\lambda = \frac{r_{k+5}^2 - r_k^2}{5R} = \frac{(6^2 - 4^2) \times 10^{-6}}{5 \times 10} = 4 \times 10^{-7} (\text{m})$$

$$k = \frac{5r_k^2}{r_{k+5}^2 - r_k^2} = \frac{5 \times 4^2}{6^2 - 4^2} = 4$$

**14.14** 利用牛顿环的干涉条纹,可以测定凹曲面的曲率半径,方法是:将已知半径的平凸透镜放置在待测的凹面上(如图 14.14),在两曲面之间形成气层,可以观察到环状的干涉条纹.测得第  $k=4$  级暗环的半径  $r_4 = 2.250 \text{ cm}$ ,已知入射光波长  $\lambda = 589.3 \text{ nm}$ ,平凸透镜凸面半径为  $R_1 = 102.3 \text{ cm}$ ,求待测凹面的曲率半径  $R_2$ .

**解** 在半径为  $r_4$  的环形条纹处空气层的厚度为

$$d = d_1 - d_2 = \frac{r_4^2}{2R_1} - \frac{r_4^2}{2R_2}$$

$$d = \frac{r_4^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1)$$

暗条纹满足的条件为

$$2d + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

由式(1)和(2)解得

$$R_2 = \frac{r_4^2 R_1}{r_4^2 - k\lambda R_1} = \frac{(2.250)^2 \times 102.3}{(2.250)^2 - 4 \times 589.3 \times 10^{-7} \times 102.3} = 102.8 (\text{cm})$$

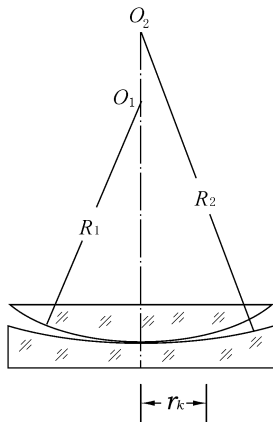


图 14.14

**14.15** 一平面单色光波垂直照射在厚度均匀的薄油膜上,油膜覆盖在玻璃板上,所用光源波长可连续变化,观察到 500 nm 和 700 nm 这两个波长的光在反射中消失.油的折射率为 1.30,玻璃的折射率为 1.50,试求油膜的厚度.

**解** 由于在油膜的上下表面反射都有半波损失,暗纹的条件为

$$2nd = (2k+1) \frac{\lambda_1}{2} \quad (1)$$

$$2nd = [2(k+1)+1] \frac{\lambda_2}{2} \quad (2)$$

由式(1)和(2)解得

$$\begin{aligned} d &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2n(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{500 \times 700}{2 \times 1.30 \times (700 - 500)} = 6.73 \times 10^2 \text{ (nm)} \\ &= 6.73 \times 10^{-4} \text{ (mm)} \end{aligned}$$

**14.16** 白光垂直照射在空气中的厚度为  $0.40 \mu\text{m}$  的玻璃片上,玻璃片的折射率为 1.50.试问在可见光范围内( $\lambda = 400 \sim 700 \text{ nm}$ ),哪些波长的光在反射中加强? 哪些波长的光在透射中加强?

**解** 反射加强的条件为

$$2nd + \frac{\lambda}{2} = 2k \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

即

$$\lambda = \frac{4nd}{2k-1}$$

仅当  $k=3$  时,  $\lambda$  为可见光波长,因此求得

$$\lambda = \frac{4 \times 1.50 \times 0.40}{2 \times 3 - 1} = 0.48 (\mu\text{m})$$

透射加强的条件即反射减弱的条件,即

$$2nd + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

由此得

$$\lambda = \frac{4nd}{2k}$$

$$\text{当 } k=2 \text{ 时, } \lambda = \frac{4 \times 1.50 \times 0.40}{2 \times 2} = 0.60 (\mu\text{m})$$

$$\text{当 } k=3 \text{ 时, } \lambda = \frac{4 \times 1.50 \times 0.40}{2 \times 3} = 0.40 (\mu\text{m})$$

波长为  $0.48 \mu\text{m}$  的可见光在反射中加强,波长为  $0.60 \mu\text{m}$ 、 $0.40 \mu\text{m}$  的可见光在透射中加强.

**14.17** 用氦氖激光器( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ )作光源,迈克耳孙干涉仪中的  $M_1$  反射

镜移动一段距离,这时数得干涉条纹移动了 792 条,试求  $M_1$  移动的距离。

**解** 设  $M_1$  反射镜的移动距离为  $l$ 。 $M_1$  镜移动后,两束光的光程差发生变化,变化量为

$$\Delta\delta = 2l \quad (1)$$

干涉条纹移动了 792 条,则光程差的变化为

$$\Delta\delta = 792\lambda \quad (2)$$

由式(1)、(2)得

$$l = 792 \times \frac{\lambda}{2} = 792 \times \frac{632.8 \times 10^{-6}}{2} = 0.2506 \text{ (mm)}$$

**14.18** 在迈克耳孙干涉仪的一臂中引入 100.0 mm 长的玻璃管,并充以一个大气压的空气,用波长  $\lambda = 585 \text{ nm}$  的光照射,如将玻璃管逐渐抽成真空,发现有 100.0 条干涉条纹移动。求空气的折射率。

**解** 玻璃管长度  $l = 100.0 \text{ mm}$ , 波长  $\lambda = 585 \times 10^{-6} \text{ mm}$ , 玻璃管抽空后,两束光光程差的变化为

$$\Delta\delta = 2(n-1)l \quad (1)$$

干涉条纹移动 100.0 条,则光程差的变化等于

$$\Delta\delta = 100.0\lambda \quad (2)$$

由式(1)、(2)得

$$\begin{aligned} n &= \frac{100.0\lambda}{2l} + 1 = \frac{100.0 \times 585 \times 10^{-6}}{2 \times 100.0} + 1 \\ &= 1.0002925 \end{aligned}$$

**14.19** 常用雅敏干涉仪来测定气体在各种温度和压力下的折射率。干涉仪光路如图 14.19 所示,  $S$  为光源,  $L$  为聚光透镜,  $G_1$ 、 $G_2$  为两块等厚而且互相平行的玻璃板,  $T_1$ 、 $T_2$  为等长的两个玻璃管, 长度为  $l$ 。进行测量时, 先将  $T_1$ 、 $T_2$  抽空, 然后将待测气体徐徐导入某一管中, 在  $E$  处观察干涉条纹的移动数, 即可求得待测

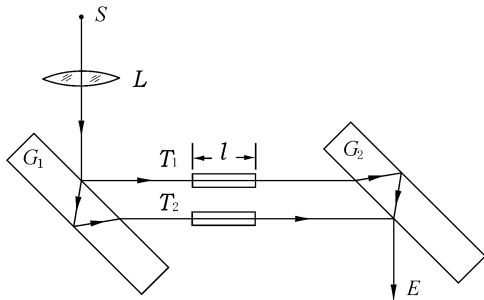


图 14.19

气体的折射率.设在测量某气体折射率时,将气体慢慢放入  $T_2$  管中,当气体逐渐达到标准状态时,在  $E$  处共看到有 98 条干涉条纹移动过去,所用的钠光波长  $\lambda = 589.3 \text{ nm}$  (真空中),  $l = 20 \text{ cm}$ ,求该气体在标准状态中的折射率.

**解** 设气体在标准状态下的折射率为  $n$ .在向  $T_2$  管充入气体后,通过  $T_2$  的光束的光程变化了  $(n-1)l$ ,则两束光光程差的变化量为

$$\Delta\delta = (n-1)l \quad (1)$$

干涉条纹移动了 98 条,两束光光程差的变化为

$$\Delta\delta = 98\lambda \quad (2)$$

由式(1)、(2)得

$$n = \frac{98\lambda}{l} + 1 = \frac{98 \times 589.3 \times 10^{-7}}{20} + 1 = 1.00029$$

**14.20** 在迈克尔孙干涉仪中,采用波长为  $\lambda$  的平行光光源,且两反射镜垂直.试写出观察到的光强与可动反射镜位置的函数关系式.设反射镜的位置由  $d_1 = d_2$  的那一点开始移动.

**解** 设每一束光的光强都等于  $I_0$ .当可动反射镜移动的距离为  $x$  时,两束光的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \times 2x = \frac{4\pi x}{\lambda}$$

两束光相干叠加,光强为

$$I = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0}\sqrt{I_0}\cos\Delta\varphi = 2I_0\left[1 + \cos\frac{4\pi x}{\lambda}\right]$$

**14.21** 在杨氏干涉实验中,用波长为  $\lambda$  的单色光作为光源.现将一厚度为  $d$ ,折射率为  $n$  的薄玻璃片放在狭缝  $S_2$  处,如图 14.21 所示.若玻璃片的厚度  $d$  可变,则在  $S_1$ 、 $S_2$  两缝对称的屏中心  $O$  处,干涉条纹强度将是  $d$  的函数,若  $d=0$  时, $O$  处的光强为  $I_0$ ,试求:

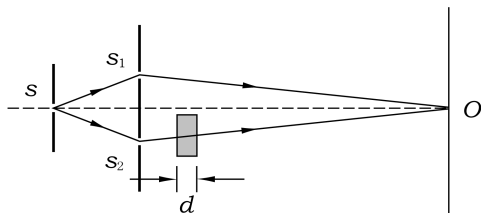


图 14.21

(1)  $O$  处光强  $I$  与  $d$  的函数关系?

(2)  $d$  满足什么条件时  $O$  处的光强最小.

解 (1)  $O$  点处的光强为

$$I = I' + I' + 2\sqrt{I'}\sqrt{I'}\cos\Delta\varphi = 2I'(1 + \cos\Delta\varphi) \quad (1)$$

其中,  $I'$  为通过狭缝的任意一束光在  $O$  点处的光强,  $\Delta\varphi$  为两束光在  $O$  点的相差.

当  $d=0$  时,  $\Delta\varphi=0$ ,  $I=I_0$ , 代入式(1)得  $O$  处的光强为

$$I_0 = 2I'(1 + \cos 0) = 4I'$$

则

$$I' = \frac{I_0}{4} \quad (2)$$

到达  $O$  点的两束光的光程差  $\delta = (n-1)d$ , 则相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d \quad (3)$$

把式(2)、(3)代入式(1)得

$$\begin{aligned} I &= 2 \times \frac{I_0}{4} \left[ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d \right] \\ &= \frac{I_0}{2} \left[ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d \right] \end{aligned}$$

(2)要使  $O$  点处光强最小, 即  $I=0$ , 则必须满足

$$1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d = 0$$

则

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d &= (2k+1)\pi \\ d &= \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda}{(n-1)} \quad \text{其中, } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

**14.22** 波长  $\lambda=500 \text{ nm}$  的平行光, 垂直地入射到一宽度为  $a=1.0 \text{ mm}$  的单缝上, 若在缝的后面有一焦距为  $f=100 \text{ cm}$  的凸透镜, 使光线聚焦于屏上, 试问从衍射图样的中心到下列各点的距离如何? (1)第一级极小, (2)第一级亮条纹的极大处, (3)第三级极小.

解 (1)由单缝衍射暗纹公式

$$a\sin\varphi_1 = \lambda$$

得

$$\sin\varphi_1 = \frac{\lambda}{a} = \frac{500 \times 10^{-9}}{1 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^{-4}$$

从中心到第一级极小处的距离

$$(x_1)_{\text{暗}} = f \tan\varphi_1 \approx f \sin\varphi_1$$

$$=100 \times 5 \times 10^{-4} = 5 \times 10^{-2} (\text{cm})$$

(2)由亮纹公式  $a \sin \varphi_k = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$  得

$$a \sin \varphi_1 = (2 \times 1 + 1) \frac{\lambda}{2}$$

所以

$$\sin \varphi_1 = \frac{3\lambda}{2a} = \frac{3 \times 500 \times 10^{-9}}{2 \times 1.0 \times 10^{-3}} = 7.5 \times 10^{-4}$$

从中心到第一级极大处的距离为

$$\begin{aligned} (x_1)_{\text{明}} &= f \tan \varphi_1 \approx f \sin \varphi_1 \\ &= 100 \times 7.5 \times 10^{-4} = 7.5 \times 10^{-2} (\text{cm}) \end{aligned}$$

(3)同理

$$\sin \varphi_3 = \frac{3\lambda}{a} = 1.5 \times 10^{-3}$$

所以从中心到第三级极小处的距离为

$$\begin{aligned} (x_3)_{\text{暗}} &= f \tan \varphi_3 \approx f \sin \varphi_3 \\ &= 100 \times 1.5 \times 10^{-3} = 0.15 (\text{cm}) \end{aligned}$$

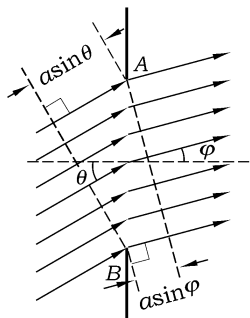
**14.23** 试求对于缝宽分别为(1)1个波长,(2)5个波长,(3)10个波长的狭缝来说,其夫琅禾费衍射中央明纹的半角宽度有多大?

**解** 由中央明纹的半角宽度公式  $\theta = \arcsin \frac{\lambda}{a}$  可得

$$(1) \theta = \arcsin \frac{\lambda}{\lambda} = 90^\circ \quad (2) \theta = \arcsin \frac{\lambda}{5\lambda} = 11.5^\circ$$

$$(3) \theta = \arcsin \frac{\lambda}{10\lambda} = 5.7^\circ$$

**14.24** 如图 14.24 所示,设有一波长为  $\lambda$  的单色平面波沿着与缝平面的法线成  $\theta$  角的方向入射到宽为  $a$  的单缝  $AB$  上,试写出各级暗条纹对应的衍射角  $\varphi$



所满足的条件.

**解** 在狭缝两个边缘处,衍射角为  $\varphi$  的两光的光程差为

$$\delta = a(\sin \varphi - \sin \theta)$$

对于暗纹有

$$\delta = \pm k\lambda$$

则

$$a(\sin \varphi - \sin \theta) = \pm k\lambda$$

$$\sin \varphi = \pm \frac{k\lambda}{a} + \sin \theta \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

图 14.24

**14.25** 有一单缝,宽  $a=0.1\text{ mm}$ ,在缝后放一焦距为  $50\text{ cm}$  的凸透镜,用波长  $\lambda=546\text{ nm}$  的平行绿光垂直照射单缝,求位于透镜焦面处的屏上的中央亮条纹的宽度.如果把此装置浸入水中,中央亮条纹宽度如何变化?

**解** 中央明纹的宽度由相邻中央明纹两侧的暗纹( $k=\pm 1$ )位置决定.根据公式  $a\sin\varphi_1=\lambda$  有

$$\sin\varphi_1 = \frac{\lambda}{a} = \frac{546 \times 10^{-9}}{0.1 \times 10^{-3}} = 5.46 \times 10^{-3}$$

中央明纹的宽度为

$$x_0 \approx 2f\sin\varphi_1 = 2 \times 50 \times 5.46 \times 10^{-3} = 0.564(\text{cm})$$

在水中,光的波长  $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$ ,所以装置浸在水中( $n=1.33$ )时,有

$$\begin{aligned}\sin\varphi'_1 &= \frac{\lambda'}{a} = \frac{\lambda}{na} \\ &= \frac{546 \times 10^{-9}}{1.33 \times 0.1 \times 10^{-3}} = 4.11 \times 10^{-3}\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}(x_0)_\text{水} &\approx 2f\sin\varphi'_1 = 2 \times 50 \times 4.11 \times 10^{-3} \\ &= 0.411(\text{cm})\end{aligned}$$

**14.26** 在单缝夫琅禾费衍射实验中,波长为  $\lambda$  的单色光的第三级亮条纹与  $\lambda'=630\text{ nm}$  的单色光的第二级亮条纹恰好重合,试计算  $\lambda$  的数值.

**解** 根据题意有

$$\begin{cases} a\sin\varphi_3 = (2 \times 3 + 1) \frac{\lambda}{2} \\ a\sin\varphi_2 = (2 \times 2 + 1) \frac{\lambda'}{2} \\ \sin\varphi_2 = \sin\varphi_3 \end{cases}$$

联立解得

$$\lambda = \frac{5}{7} \lambda' = \frac{5 \times 630}{7} = 450(\text{nm})$$

**14.27** 在迎面驶来的汽车上,两盏前灯相距  $120\text{ cm}$ ,试问人在离汽车多远的地方,眼睛恰能分辨这两盏灯? 设夜间人眼瞳孔直径为  $5.0\text{ mm}$ ,入射光波  $\lambda=550\text{ nm}$ .

**解** 眼睛的最小分辨角为

$$\delta\varphi = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

设人到汽车的最远距离为  $S$ ,  $d=120\text{ cm}=1.2\text{ m}$ ,由  $d \approx S \cdot \delta\varphi$  得

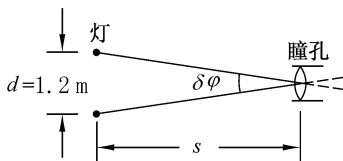


图 14.27

$$S \approx \frac{d}{\delta\varphi} = \frac{Dd}{1.22\lambda} = \frac{5.0 \times 10^{-3} \times 1.20}{1.22 \times 550 \times 10^{-9}} = 8.94 \times 10^3 (\text{m})$$

**14.28** 月球距地面约  $3.86 \times 10^5 \text{ km}$ , 设月光波长可按  $\lambda = 550 \text{ nm}$  计算, 问: 月球表面距离为多远的两点才能被地面上直径  $D = 500 \text{ cm}$  的天文望远镜所分辨?

**解** 望远镜的最小分辨角为

$$\delta\varphi = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

设月球上可分辨两点的最小距离为  $d$ , 月球地面间距离为  $s = 3.86 \times 10^8 \text{ m}$ , 所以

$$\begin{aligned} d &\approx s \cdot \delta\varphi = s \times 1.22 \frac{\lambda}{D} = 3.86 \times 10^8 \times 1.22 \times \frac{550 \times 10^{-9}}{5.00} \\ &= 51.8 (\text{m}) \end{aligned}$$

**14.29** 波长为  $500 \text{ nm}$  及  $520 \text{ nm}$  的平面单色光同时垂直照射在光栅常数为  $0.002 \text{ cm}$  的衍射光栅上, 在光栅后面用焦距为  $2 \text{ m}$  的透镜把光线聚在屏上, 求这两种单色光的第一级光谱线间的距离.

**解** 根据光栅方程, 得

$$\begin{cases} \sin \varphi_1 = \frac{\lambda}{a+b} \\ \sin \varphi'_1 = \frac{\lambda'}{a+b} \end{cases}$$

因为  $\sin \varphi_1 \ll 1, \sin \varphi'_1 \ll 1$ , 因此有

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= f(\tan \varphi'_1 - \tan \varphi_1) \approx f(\sin \varphi'_1 - \sin \varphi_1) \\ &= \frac{f}{a+b}(\lambda' - \lambda) \\ &= \frac{2 \times 10^2 \times (520 - 500) \times 10^{-7}}{0.002} = 0.2 (\text{cm}) \end{aligned}$$

**14.30** 为了测定一光栅的光栅常数, 用波长为  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$  的氦氖激光器的激光垂直照射光栅, 做光栅的衍射光谱实验, 已知第一级亮条纹出现在  $30^\circ$  的方向上, 问这光栅的光栅常数是多大? 这光栅的  $1 \text{ 厘米}$  内有多少条缝? 第二级亮条

纹是否可能出现? 为什么?

解 光栅常数为

$$a+b = \frac{\lambda}{\sin \varphi_1} = \frac{632.8 \times 10^{-7}}{\sin 30^\circ} = 1.266 \times 10^{-4} (\text{cm})$$

每厘米内的缝数为

$$N = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{1.266 \times 10^{-4}} = 7.9 \times 10^3 (\text{条})$$

当  $k=2$  时,有

$$\sin \varphi_2 = \frac{2\lambda}{a+b} = 2\sin \varphi_1 = 2 \times \sin 30^\circ = 1$$

所以第二级亮条纹出现在无穷远处.

**14.31** 波长  $\lambda=600 \text{ nm}$  的单色光垂直入射在一光栅上,第 2 级、第 3 级光谱线分别出现在衍射角  $\varphi_2$ 、 $\varphi_3$  满足下式的方向上,即  $\sin \varphi_2=0.20$ ,  $\sin \varphi_3=0.30$ ,第 4 级缺级,试问:(1)光栅常数等于多少?(2)光栅上狭缝宽度有多大?(3)在屏上可能出现的全部光谱线的级数.

解 (1)根据光栅方程有

$$a+b = \frac{2\lambda}{\sin \varphi_2} = \frac{2 \times 600 \times 10^{-9}}{0.20} = 6.0 \times 10^{-6} (\text{m}) = 6.0 (\mu\text{m})$$

(2)根据缺级公式  $\frac{a+b}{a} = \frac{k}{k'}$ ,当第四级谱线缺级时,  $k=4$ ,则  $1 \leq k' < 4$ ,所以有

当  $k'=1$  时,第四级缺级,符合题意.把  $k=4$ ,  $k'=1$  代入缺级有公式,得  $a=1.5 \mu\text{m}$ .

当  $k'=2$  时,所缺谱线级数为 2、4,根据已知,第二级不缺级,不符合题意.故舍去.

当  $k'=3$  时,第四级缺级,符合题意.把  $k=4$ ,  $k'=3$  代入缺级公式,得  $a=4.5 \mu\text{m}$ .

所以,满足题目条件的狭缝宽度有两个:  $a=1.5 \mu\text{m}$  或  $a=4.5 \mu\text{m}$ .

(3)根据光栅方程有

$$k = \frac{(a+b)\sin \varphi}{\lambda} \leq \frac{a+b}{\lambda} = \frac{6.0}{600 \times 10^{-3}} = 10$$

所以,在屏上出现谱线的最大级数为 10.

光谱缺级级数为 4, 8, 12, ... 则屏上出现全部谱线的级数为

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 9, \pm 10$$

**14.32** 当两偏振片的偏振化方向成  $30^\circ$  角时,透射光的光强为  $I_1$ ,若入射光的光强不变,而使两偏振片的偏振化方向成  $45^\circ$  角,则透射光的光强如何?

解 由马吕斯定律

$$\begin{cases} I_1 = I_0 \cos^2 \alpha_1 \\ I_2 = I_0 \cos^2 \alpha_2 \end{cases}$$

得

$$I_2 = \frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_1} I_1 = \frac{\cos^2 45^\circ}{\cos^2 30^\circ} I_1 = \frac{2}{3} I_1$$

**14.33** 当两偏振片的偏振化方向成  $30^\circ$  角时看一光源, 成  $60^\circ$  角时又看同一位置的另一个光源, 两次观察所得的光强相等, 求两光源的光强之比.

解 设两光源光强分别为  $I_1$ 、 $I_2$ . 经过两个偏振片后的光强分别为

$$I'_1 = I_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos^2 30^\circ = \frac{3}{8} I_1$$

$$I'_2 = I_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos^2 60^\circ = \frac{1}{8} I_2$$

根据已知,  $I'_1 = I'_2$ , 则有

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{3}$$

**14.34** 一束自然光和线偏振光的混合光, 当它通过一偏振片时, 发现光强取决于偏振片的取向, 光强最大可以变化 5 倍. 求入射光束中两种光的光强各占总入射光强的几分之几?

解 设自然光、偏振光的光强分别为  $I_{\text{自}}$ 、 $I_{\text{偏}}$ . 总入射光光强  $I_{\text{总}} = I_{\text{自}} + I_{\text{偏}}$ , 当偏振片的偏振化方向与偏振光的光振动方向平行时, 可得到最大光强的透射光.

$$I_{\text{max}} = \frac{1}{2} I_{\text{自}} + I_{\text{偏}}$$

当偏振片的偏振化方向与偏振光光振动方向垂直时, 可得到最小光强的透射光

$$I_{\text{min}} = \frac{1}{2} I_{\text{自}}$$

根据题意有

$$\frac{I_{\text{max}}}{I_{\text{min}}} = 5$$

由上面四个关系可得

$$\frac{I_{\text{偏}}}{I_{\text{总}}} = \frac{2}{3} \quad \frac{I_{\text{自}}}{I_{\text{总}}} = \frac{1}{3}$$

**14.35** 平行放置两偏振片, 使它们的偏振化方向成  $60^\circ$  夹角. (1) 如果两偏振片对光振动平行于其偏振化方向的光线均无吸收, 则让自然光垂直入射后, 其透射光的光强与入射光的光强之比是多大? (2) 如果两偏振片对光振动平行于其偏振化方向的光线分别吸收了 10% 的能量, 则透射光的光强与入射光的光强之比是多

大? (3)今在这两偏振片之间再平行地插入另一偏振片,使它的偏振化方向与前两个偏振片均成  $30^\circ$  角.此时,透射光的光强与入射光的光强之比又是多大? 先按各偏振片均无吸收计算,再按各偏振片均吸收  $10\%$  的能量计算.

**解** (1)无吸收时,有

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0$$

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 60^\circ$$

$$\frac{I_2}{I_0} = \frac{1}{2} \cos^2 60^\circ = \frac{1}{8} = 0.125$$

(2)有吸收时,有

$$\frac{I_2}{I_0} = \frac{1}{8} \times (1 - 10\%)^2 \approx \frac{1}{10} = 0.10$$

(3)无吸收时,有

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0$$

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = \cos 30^\circ$$

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha_1$$

$$I_3 = I_2 \cos^2 \alpha_2 = \frac{1}{2} I_0 \cos^4 30^\circ$$

$$\frac{I_3}{I_0} = \frac{1}{2} \cos^4 30^\circ = \frac{9}{32} = 0.28$$

有吸收

$$\frac{I_3}{I_0} = 0.28 \times (1 - 10\%)^3 = 0.20$$

**14.36** 利用布儒斯特定律,可以测定不透明电介质的折射率,今测到某一电介质的起偏角为  $57^\circ$ ,试求这一电介质的折射率.

**解**  $n = \tan i_b = \tan 57^\circ = 1.54$

**14.37** 一束太阳光,以某一入射角入射到平面玻璃上,这时反射光为完全偏振光.若透射光的折射角为  $32^\circ$ ,试问(1)太阳光的入射角是多大?(2)此种玻璃的折射率是多少?

**解** (1)  $i_b = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$

(2)  $n = \tan i_b = \tan 58^\circ = 1.60$

**14.38** 已知某一物质的全反射临界角是  $45^\circ$ ,它的起偏角是多大?

**解** 全反射时有

$$n_2 \sin i_2 = n_1 \sin 90^\circ$$

即

$$\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2}$$

由布儒斯特定律

$$\tan i_b = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{\sin i_2} = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$$

$$i_b = 54^\circ 42'$$

**14.39** 如图 14.39(a)所示,一束自然光入射到一方解石晶体上,其光轴垂直于纸面,已知方解石对 o 光的折射率为  $n_o = 1.658$ ,对 e 光的主折射率为  $n_e = 1.486$ .

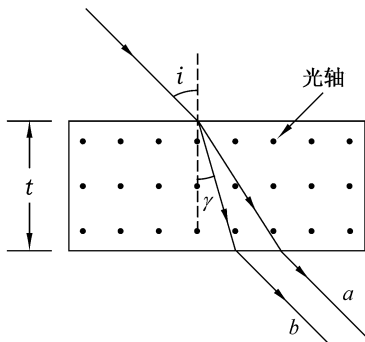


图 14.39(a)

(1)如果方解石晶体的厚度  $t = 1.0\text{cm}$ ,自然光入射角  $i = 45^\circ$ ,求  $a, b$  两透射光之间的垂直距离;(2)两透射光中的光振动方向如何? 哪一束光在晶体中是 o 光? 哪一束光在晶体中是 e 光?

**解** (1)由折射定律有

$$\sin \gamma_o = \frac{1}{n_o} \sin i = \frac{\sin 45^\circ}{1.658} = 0.4265$$

$$\sin \gamma_e = \frac{1}{n_e} \sin i = \frac{\sin 45^\circ}{1.486} = 0.4758$$

由三角公式可求得

$$\tan \gamma_o = 0.4715, \tan \gamma_e = 0.5410$$

$$l_o = t \cdot \tan \gamma_o, l_e = t \cdot \tan \gamma_e$$

$$d = (l_e - l_o) \sin 45^\circ = t \cdot \sin 45^\circ (\tan \gamma_e - \tan \gamma_o)$$

$$=1.0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} (0.5410 - 0.4715)$$

$$=4.9 \times 10^{-2} (\text{cm})$$

(2)  $a$  为  $e$  光,  $b$  为  $o$  光. 它们的光振动方向如图 14.39(b) 所示.

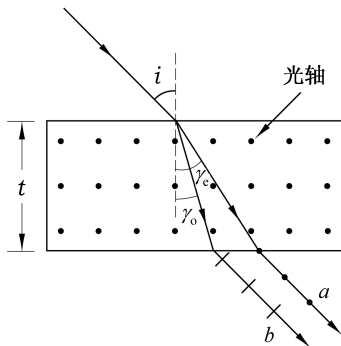


图 14.39(b)

**14.40** 一方解石晶体的表面与其光轴平行, 放在偏振化方向相互正交的偏振片之间, 晶片的光轴与偏振片的偏振化方向成  $45^\circ$  角. 试求:

(1) 要使  $\lambda = 500 \text{ nm}$  的光不能透过检偏器, 则晶片的厚度至少多大?

(2) 若两偏振片的偏振化方向平行, 要使  $\lambda = 500 \text{ nm}$  的光不能透过检偏器, 晶片的厚度又为多少? 已知晶片的  $n_o = 1.658$ ,  $n_e = 1.486$ .

**解** 入射光经过起偏器后, 变为线偏振光, 当投射到晶片上时, 偏振光可分解为  $o$  光、 $e$  光, 两光在晶片中的传播速度不同, 从而导致一定的相位差

$$\Delta\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$$

(1) 在检偏器的偏振化方向上,  $o$  光、 $e$  光光矢量的投影方向相反, 如图 14.40(a) 所示, 由此导致的相位差为

$$\Delta\varphi_2 = \pi$$

从检偏器出来的两光的相位差为

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d + \pi \quad (1)$$

要使光不能透过检偏器, 则两光反相, 即

$$\Delta\varphi = (2k+1)\pi \quad (2)$$

由式(1)、(2)得

$$d = \frac{k\lambda}{n_o - n_e}$$

当  $k=1$  时,  $d$  最小, 有

$$d = \frac{\lambda}{n_o - n_e} = \frac{5 \times 10^{-5}}{1.658 - 1.486} = 2.9 \times 10^{-4} (\text{cm})$$

(2) 在检偏器的偏振化方向上, o 光、e 光光矢量的投影方向一致, 如图 14.40 (b) 所示, 由此导致的相位差为

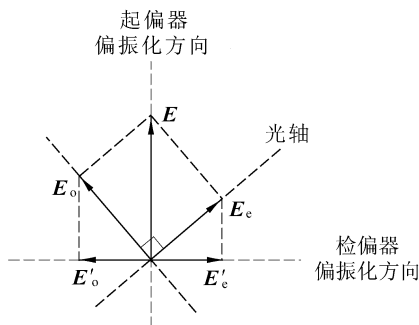


图 14.40 (a)

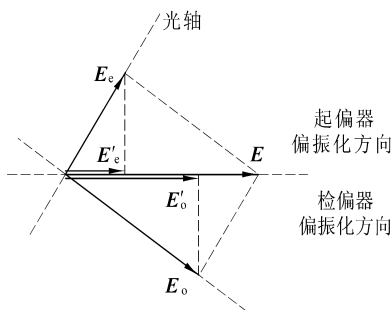


图 14.40 (b)

$$\Delta \varphi'_2 = 0$$

从检偏器出来的两束光的相位差为

$$\Delta \varphi' = \Delta \varphi_1 + \Delta \varphi'_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d \quad (3)$$

要使光不能通过检偏器, 则两光干涉相消, 即

$$\Delta \varphi' = (2k + 1)\pi \quad (4)$$

由式(3)、(4)得

$$d = \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda}{n_o - n_e}$$

当  $k=0$  时,  $d$  最小, 为

$$d = \frac{\lambda}{2(n_o - n_e)} = \frac{5 \times 10^{-5}}{2(1.658 - 1.486)} = 1.45 \times 10^{-4} (\text{cm})$$

**14.41** 线偏振光垂直入射到一块光轴平行于表面的方解石晶片上, 光的振动方向与晶片光轴方向的夹角为  $30^\circ$  角, 问: (1) 透过晶片的 o 光和 e 光的相对强度各是多少? (2) 用  $\lambda=589 \text{ nm}$  的光入射时, 如要产生  $90^\circ$  的相位差, 晶片厚度应为多少? 方解石的  $n_o=1.66$ ,  $n_e=1.48$ .

**解** (1) 设线偏振光光强为  $I$ , o 光、e 光光强分别为

$$I_o = I \cos^2(90^\circ - 30^\circ) = \frac{1}{4} I \quad (1)$$

$$I_e = I \cos^2 30^\circ = \frac{3}{4} I \quad (2)$$

(2) o 光、e 光的相位差为

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d \quad (3)$$

根据题设有

$$\Delta \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

由式(3)、(4)得

$$d = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)} = \frac{589 \times 10^{-9}}{4 \times (1.66 - 1.48)} = 8.2 \times 10^{-7} (\text{m})$$

# 第五篇 近代物理基础

## 第 15 章 狭义相对论力学基础

### 一、基本内容和主要公式

#### 1. 经典力学时空观

长度和时间测量是绝对的,与参照系无关.

伽利略坐标变换

$S'$ 系相对于  $S$  系以速度  $u$  沿  $x$  轴方向作匀速直线运动,同一事件在  $S$  和  $S'$  系中的坐标分别为  $(x, y, z, t), (x', y', z', t')$ , 则两坐标的伽利略变换和速度变换分别为

$$\begin{aligned}x' &= x - ut & v'_x &= v_x - u \\y' &= y & v'_y &= v_y \\z' &= z & v'_z &= v_z \\t' &= t\end{aligned}$$

#### 2. 狭义相对论基本假设

爱因斯坦相对性原理:在所有惯性系中,一切物理学定律都相同,即具有相同的数学表达式.

光速不变原理:真空中光速  $c=3.0\times 10^8$  m/s.

在所有惯性系中,真空中光沿各个方向传播的速率都等于同一个恒量  $c$ ,与光源和观察者的运动状态无关.

#### 3. 洛伦兹坐标及速度变换公式

在满足狭义相对论的两个基本假设条件下,得到事件  $P$  的时空坐标的洛伦兹变换关系:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{array} \right. \quad \text{逆变换} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{array} \right.$$

速度变换公式及逆变换公式

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x u/c^2} \\ v'_y = \sqrt{1 - \beta^2} \frac{v_y}{1 - v_x u/c^2} \\ v'_z = \sqrt{1 - \beta^2} \frac{v_z}{1 - v_x u/c^2} \end{array} \right. \quad \text{逆变换} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} \\ v_y = \sqrt{1 - \beta^2} \frac{v'_y}{1 + uv'_x/c^2} \\ v_z = \sqrt{1 - \beta^2} \frac{v'_z}{1 + uv'_x/c^2} \end{array} \right.$$

其中  $\beta = \frac{u}{c}$  .

#### 4. 时空的相对性

长度收缩

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

时间膨胀

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

式中  $l_0$  为固有长度,  $\tau_0$  为固有时间 .

#### 5. 相对论质量、动量

质量

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

动量

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \mathbf{v}$$

式中  $m$  为物体运动质量,  $m_0$  为物体的静止质量,  $v$  为物体相对于参考系的运动速率 .

#### 6. 相对论能量

$$E = mc^2$$

动能

$$E_K = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2$$

动量能量关系

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

## 二、典型例题

**15-1** 两惯性系  $S(Oxyz)$  和  $S'(O'-x'y'z')$ ,  $S'$  系相对  $S$  以  $0.8c$  的速度沿  $x$  轴负方向运动,如图 15-1 所示.在  $S$  系和  $S'$  系坐标原点重合时,两惯性系同时开始计时,即  $t = t' = 0$ .一闪光灯在  $S$  系中的位置为  $x = 1 \times 10^5 \text{ m}$ ,  $y = 1 \times 10^4 \text{ m}$ ,  $z = 1 \times 10^3 \text{ m}$ ,当  $t = 5 \times 10^{-4} \text{ s}$  时闪光灯产生一闪光,问  $S'$  系中的观测者测得的这一事件的时空坐标  $(x', y', z', t')$  是多少?

**解** 由题意有:事件在  $S$  系中的坐标为  $(x, y, z, t)$ .  $S'$  系相对于  $S$  系运动速度  $u = -0.8c$ ,由洛伦兹坐标变换可以求出该事件在  $S'$  系中的坐标  $P(x', y', z', t')$ :

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1 \times 10^5 + 0.8 \times 3 \times 10^8 \times 5 \times 10^{-4}}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = 3.67 \times 10^5 \text{ m}$$

$$y' = y = 1 \times 10^4 \text{ m}$$

$$z' = z = 1 \times 10^3 \text{ m}$$

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{5 \times 10^{-4} + \frac{0.8}{3 \times 10^8} \times 10^5}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = 1.28 \times 10^{-3} \text{ (s)}$$

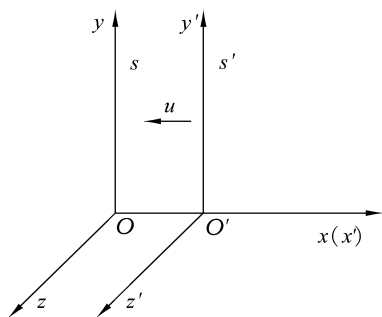


图 15-1

即  $S'$  系中测得此事件发生在  $x' = 3.67 \times 10^5 \text{ m}$ ,  $y' = 1 \times 10^4 \text{ m}$ ,  $z' = 1 \times 10^3 \text{ m}$  处  $t' = 1.28 \times 10^{-3} \text{ s}$  时刻.

**说明** 同一事件在相对运动的两惯性系中测得的时空位置有所不同,它们满足洛伦兹坐标变换.已知事件在某个惯性系中的时空坐标  $P(x, y, z, t)$  可以由洛伦兹

坐标变换求出该事件在另一惯性系的时空坐标  $P(x', y', z', t')$ . 注意用洛伦兹坐标变换时, 两惯性系时钟零点校准位置和相对运动速度  $u$  的正、负号.

**15-2** 飞船  $A$  和飞船  $B$  相对于地面以  $0.6c$  和  $0.8c$  的速度相向而行.

问: (1) 飞船  $A$  上测得地球的速度是多少?

(2) 飞船  $A$  上测得飞船  $B$  的速度是多少?

(3) 地面上测得飞船  $A$  和飞船  $B$  的相对速度是多少?

**解** (1) 根据运动的相对性, 飞船  $A$  上测得地球的速度为  $0.6c$

(2) 令飞船  $A$  为  $S$  系, 地面参考系为  $S'$  系,  $S'$  系相对  $S$  系速度为  $u=0.6c$

依题飞船  $B$  在  $S'$  系中的速度  $v=-0.8c$ , 由洛伦兹速度逆变换,  $S$  系测得飞船  $B$  的速度  $v$  为

$$v = \frac{v' + u}{1 + v'u/c^2} = \frac{0.8c + 0.6c}{1 + 0.8 \times 0.6/c^2} = 0.94c$$

(3) 地面上测得飞船  $A$  和飞船  $B$  的相对速度为  $0.6c + 0.8c = 1.4c$

**说明** 在相对论中, 物体的运动速度不会超过真空光速  $c$ , 是指某观察者看到的所有物体相对于它的速度不会超过  $c$ . (1)、(2) 问中的速度不超过  $c$  满足此速度极限观念. 在地面上观测飞船  $A$  和飞船  $B$  的相对速度是地面看到的其它两物体的相对速度, 它不是某一物体对地球的速度, 因此不受极限速度的限制.

**15-3** 已知  $S'$  系相对于  $S$  系沿  $x$  轴以  $0.6c$  的速度运动, 若质点在  $S'$  系中的运动学方程为

$$x' = \frac{c}{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} \right) t', \quad y' = \frac{c}{2} \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) t'$$

求  $S$  系中该质点的运动速度  $v'$

**解法一** 由洛伦兹逆坐标变换有

$$\begin{cases} x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y = y' \\ t = \frac{t' + \frac{u}{c^2} x'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ u = 0.6c \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} x = 1.06ct' \\ y = \frac{c}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} t' \\ t = 1.43t' \end{cases}$$

消去  $t'$  有

$$\begin{cases} x = 0.74ct \\ y = 0.30ct \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = 0.74c \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = 0.30c \end{aligned}$$

所以

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(0.74c)^2 + (0.30c)^2} = 0.80c$$

解法二  $S'$  系中的速度为  $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$   $v'_y = \frac{dy'}{dt'}$  即

$$v'_x = \frac{c}{2} \cos \frac{\pi}{3}$$

$$v'_y = \frac{c}{2} \sin \frac{\pi}{3}$$

再由速度变换公式

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + v'_x u / c^2} = \frac{\frac{c}{2} \cos \frac{\pi}{3} + 0.6c}{1 + \frac{c}{4} 0.6c / c^2} = 0.74c$$

$$v_y = \sqrt{1 - u^2 / c^2} \frac{v'_y}{1 + v'_x u / c^2} = \sqrt{1 - 0.6^2} \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} c}{1 + \frac{c}{4} 0.6c / c^2} = 0.30c$$

说明 已知一个惯性系  $S$  中物体的运动方程, 可以通过洛伦兹坐标变换求出另一惯性系  $S'$  中该物体的运动方程, 方法是将  $S$  系中时空坐标通过洛伦兹坐标变换转变为  $S'$  系中的时空坐标, 而后可由运动方程求其它参量.

**15-4** 北京和上海相距 1000 km, 在某一时刻从两地同时各开出一列火车, 现有一艘飞船沿从北京到上海的方向在高空掠过, 速率恒为  $u = 0.6c$ . 求宇航员参考系测得的两列火车开出时间的间隔, 哪一列先开?

解 取地面为  $S$  系, 北京至上海方向为  $x$  轴正方向, 坐标原点在 北京, 取和飞船一起运动的参考系为  $S'$  系, 依题意有

$$\Delta x = 1000 \times 10^3 \text{ m}, \quad \Delta t = 0 \text{ s}, \quad u = 0.6c$$

由洛伦兹坐标变换

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} = 0 - \frac{\frac{1000 \times 10^3 \times 0.6}{3 \times 10^8}}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = -0.25 \times 10^{-2} \text{ (s)}$$

$\Delta t' < 0$  说明上海火车先开  $0.25 \times 10^{-2} \text{ s}$ ,  $\Delta t'$  为宇航员测得的两列火车开出时刻的间隔.

说明 在一个惯性系中的同时异地事件, 在另一惯性系中为不同时事件, 同时性具有相对性.

**15-5** 在太阳参考系中观测, 一束星光垂直射向地面, 速率为  $c$ , 而地球以速率  $u$  垂直于光线运动, 求在地面上测量, 这束光速度大小和方向各如何? 已知地球公转的速率  $u = 3 \times 10^4 \text{ m/s}$ .

解 取太阳参考系为  $S$  系, 光线沿  $S$  系中  $y$  坐标的负方向射向地面, 因此有

$$v_y = -c, v_x = 0, v_z = 0$$

地球沿  $x$  轴正向运动,取地面参考系为  $S'$  系,由速度变换公式

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} = -u$$

$$v'_y = \sqrt{1 - u^2/c^2} \frac{v_y}{1 - uv_x/c^2} = \sqrt{1 - u^2/c^2} v_y = -\sqrt{1 - u^2/c^2} c$$

$$v'_z = \sqrt{1 - u^2/c^2} \frac{v_z}{1 - uv_x/c^2} = 0$$

地面测得光的速度  $v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z} = c$

方向用光线和负  $y'$  轴夹角  $\alpha$  来表示,有

$$\tan \alpha = \frac{v'_x}{v'_y} = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} c = \frac{3 \times 10^4}{\sqrt{1 - (10^{-4})^2} \times 3 \times 10^8} = 10^{-4}$$

**说明** 应用洛伦兹速度变换公式时,由于速度是个矢量,且在相对运动方向和非相对运动方向上相对论效应不同,因此需要将速度进行分解,以得到不同分量上的变换关系.

**15-6** 一宇宙飞船以速度  $u$  远离地球沿  $x$  轴方向飞行,发现飞船前方有一棒形不明飞行物,平行于  $x$  轴.飞船上测得此物长为  $l'$ ,速度大小为  $v'$ ,方向沿  $x$  轴正向.问地面参考系上观测者测得此物长度为多少?

**解** 令地球参照系为  $S$  系,飞船为  $S'$  系,不明飞行物为  $S''$  系,在  $S''$  系中测不明飞行物的长度为原长  $l_0$ ,飞船上测此物的长度为运动长度  $l'$ ,由长度收缩公式有

$$l' = l_0 \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}$$

原长  $l_0$  为

$$l_0 = \frac{l'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} \quad (1)$$

在  $S$  系中此飞行物的相对速度  $v$  可以由洛伦兹速度变换公式得到

$$v = \frac{v' + u}{1 + v'u/c^2} \quad (2)$$

地面参考系  $S$  上测得不明飞行物长度也为运动长度  $l$ ,有

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (3)$$

把式(1)、(2)代入式(3)式得

$$l = \frac{l' \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1' + v'u/c^2}$$

**说明** 本题在使用长度收缩公式  $l = l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$  时, 应注意到,  $l_0$  不是在  $S'$  系中的长度, 而是飞行物的本征长度(静止长度), 而  $v$  亦不是  $S'$  系相对于  $S$  的速度, 而是不明飞行物相对  $S$  系的速度

**15-7** 在实验室中测得氢发射的光谱中有一条波长  $\lambda' = 121.6 \text{ nm}$  的谱线, 若测得一星体发出的氢光谱中和此波长相对应的  $\lambda = 430.4 \text{ nm}$ , 则发射此光的星体相对地球的运动速率为何? 它是靠近还是远离地球?

**解** 地面测得的该星体发射的氢光谱的视频

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{430.4 \times 10^{-9}} = 6.97 \times 10^{14} \text{ (Hz)}$$

和星体一起运动的参考系测得氢光谱中的此光线频率  $f'$  为

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{3 \times 10^8}{121.6 \times 10^{-9}} = 2.47 \times 10^{15} \text{ (Hz)}$$

因  $f < f'$  此星体离地球远去, 且根据光的多普勒效应

$$f = \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} f'$$

即

$$\sqrt{\frac{c-u}{c+u}} = \frac{f}{f'} = \frac{6.97 \times 10^{14}}{2.47 \times 10^{15}} = 0.282$$

解得

$$u = 0.853c = 2.56 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$u$  即为此星远离地球的速度。

**说明** (光源)相对于观测者有相对运动时, 观察者测到的光源光波频率会出现多普勒效应. 当光源相对于观察者远去时, 出现多普勒红移; 当光源相对于观察者趋近时, 出现多普勒紫移。

**15-8** 宇宙飞船以  $0.8c$  速度远离地球(退行速度  $u = 0.8c$ ), 过程中飞船向地球发出两光信号, 间隔为  $\Delta t_e$ , 问地球上接收到它发出的两个光信号间隔  $\Delta t_r$  为多少?

**解** 令宇宙飞船为  $S'$  系, 地面为  $S$  系, 光信号由  $S'$  系的同一处发出, 两事件间隔为原时,  $S$  系中此两事件发出间隔为运动时间,  $\Delta t_{\text{发射}}$  有

$$\Delta t_{\text{发射}} = \frac{\Delta t_e}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\Delta t_e}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$S$  系中接收此两光信号时间间隔等于  $S$  系中测得此两信号的发射时间间隔  $\Delta t_{\text{发射}}$  加上两信号由于传播路程差引起的时间差, 即

$$\Delta t_{\text{接收}} = \Delta t_r = \Delta t_{\text{发射}} + \frac{\Delta t_{\text{发射}} u}{c}$$

$$=\Delta t_{\text{发射}}\left(1+\frac{u}{c}\right)=\Delta t_{\text{e}}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

**说明** 由于信号源(宇宙飞船)和接收器(地面接收器)的相对运动,信号源发射信号的间隔和接收器接收到的信号时间间隔会不同,信号源相对接收器是退行远去时,接收信号间隔会大于发射信号间隔,若是趋近运动时,接收信号间隔会小于发射信号间隔,这实际上是光波的多普勒效应问题.

**15-9** 在实验室中测得电子的速度是  $0.8c$ ,假设一观察者相对于实验室以  $0.6c$  的速度运动,其方向与电子的运动方向相同,试求观察者测得的电子的总能量,动能和动量.

**解** 观察者测得的电子运动的速度  $v'_x$  可由洛伦兹速度变换公式求得

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x u / c^2} = \frac{0.8c - 0.6c}{1 - 0.8c \times 0.6c / c^2} = 0.385c$$

观测者测得的电子的总能量

$$\begin{aligned} E = mc^2 &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v'_x/c)^2}} c^2 = \frac{9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2}{\sqrt{1 - (0.385)^2}} \\ &= 8.88 \times 10^{-14} \text{ (J)} \end{aligned}$$

观察者测得的电子动能

$$\begin{aligned} E_k &= mc^2 - m_0 c^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (v'_x/c)^2}} - 1 \right) m_0 c^2 \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (0.385)^2}} - 1 \right) \times 9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2 \\ &= 6.84 \times 10^{-15} \text{ (J)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{动量 } p &= mv'_x = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v'_x/c)^2}} v'_x \\ &= \frac{9.11 \times 10^{-31} \times 0.385 \times 3 \times 10^8}{\sqrt{1 - (0.385)^2}} \\ &= 1.14 \times 10^{-22} \text{ (kg} \cdot \text{m/s)} \end{aligned}$$

**说明** 相对论中质点的总能量、动能、动量是与所选的惯性参考系有关的.

**15-10** 两个静质量都为  $m_0$  的粒子,其中一个静止,另一个以  $v_0 = 0.8c$  运动,它们对心碰撞以后粘在一起,求碰撞后合成粒子的静止质量.

**解** 取两粒子作为一个系统,碰撞前后动量守恒,设碰后合成粒子的静质量为  $M_0$ ,运动质量为  $M$ ,运动速度为  $V$ ,则动量守恒,可写为

$$mv_0 + 0 = MV \quad (1)$$

系统碰撞前后能量守恒有

$$mc^2 + m_0 c^2 = Mc^2 \quad (2)$$

粒子的质速关系有

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \quad (3)$$

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (4)$$

联立式(1)(2)(3)(4)解得

$$M_0 = M \sqrt{1 - V^2/c^2} = \frac{8}{3} m_0 \sqrt{1 - 0.5} = 2.31 m_0$$

**说明** 考虑相对论效应时,系统的动量和能量守恒表达式中,动量和能量都要用相对论形式。

### 三、习题详解

#### 15.1 选择题

(1)一宇航员要到离地球 5 光年的星球去旅行.如果宇航员希望把这路程缩短为 3 光年,则他所乘的火箭相对于地球的速度  $v$  应为(C)

- (A)  $0.5c$       (B)  $0.6c$       (C)  $0.8c$       (D)  $0.9c$

( $c$  表示真空中的光速)

(2)某宇宙飞船以  $0.8c$  的速度离开地球,若地球上接收到它发出的两个信号之间的时间间隔为 10 s,则宇航员测出的相应的时间间隔为(C)

- (A) 6 s      (B) 8 s      (C) 3.33 s      (D) 16.7 s

(3)一个电子的运动速度为  $v = 0.99c$ ,则该电子的动能  $E_k$  等于(电子的静止能量为 0.51 MeV)(C)

- (A) 3.5 MeV      (B) 4.0 MeV      (C) 3.1 MeV      (D) 2.5 MeV

#### 15.2 填空题

(1)惯性系  $S$  和  $S'$  的关系如正文中所述,  $S'$  相对  $S$  的速率为  $0.6c$ . 在  $S$  系中观测,一事件发生在  $t = 2 \times 10^{-4} \text{ s}$ ,  $x = 5 \times 10^3 \text{ m}$  处,则在  $S'$  系中观测,该事件发生在  $t' = 2.38 \times 10^{-4} \text{ s}$ ,  $x' = -3.88 \times 10^4 \text{ m}$  处.

(2)  $S'$  系相对  $S$  的速率为  $0.8c$ , 在  $S'$  系中观测,一事件发生在  $t'_1 = 0$ ,  $x'_1 = 0$  处,第二个事件发生在  $t'_2 = 5 \times 10^{-7} \text{ s}$ ,  $x'_2 = -120 \text{ m}$  处,则在  $S$  系中测得两事件的时空坐标为  $t_1 = 0 \text{ s}$ ,  $x_1 = 0 \text{ m}$ ;  $t_2 = 3 \times 10^{-7} \text{ s}$ ,  $x_2 = 0 \text{ m}$ .

(3)设有两个静止质量均为  $m_0$  的粒子,以大小相等、方向相反的速度相撞,合成一个复合粒子,则该复合粒子的静止质量  $M_0 = 2m_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$  运动速度  $v = 0$ .

**15.3** 地面上  $A, B$  两点相距 100 m,一短跑选手由  $A$  跑到  $B$  历时 10 s,试问

在与运动员同方向运动,飞行速度为  $0.6c$  的飞船系  $S'$  中观测,这选手由  $A$  到  $B$  跑了多少距离? 经历多长时间? 速度的大小和方向如何?

**解** 设地面参考系为  $S$  系,选手经  $A$  点为事件“1”,经  $B$  点为事件“2”,依题意有

$$\Delta x = 100 \text{ m} \quad \Delta t = 10 \text{ s} \quad u = 0.6c$$

则在飞船系  $S'$  中

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{100 - 0.6 \times 3 \times 10^8 \times 10}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = -2.25 \times 10^9 \text{ m}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{10 - \frac{0.6}{3 \times 10^8} \times 100}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = 12.5 \text{ s}$$

$$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{-2.25 \times 10^9}{12.5} = -0.6c$$

选手由  $A$  到  $B$  的距离  $\Delta s = |\Delta x'| = 2.25 \times 10^9 \text{ m}$ , 经历时间为  $12.5 \text{ s}$ , 速度大小为  $0.6c$ , 方向沿  $x$  轴负向.

**15.4** 地球-月球系中测得地-月距离为  $3.844 \times 10^8 \text{ m}$ , 一火箭以  $0.8c$  的速率沿着从地球到月球的方向飞行, 先经过地球(事件1), 之后又经过月球(事件2). 试问在地球-月球系和火箭系中观测, 火箭由地球飞向月球各需要多少时间? (要求用洛伦兹变换求解)

**解** 取固定在地球-月球上的坐标系为  $S$  系, 地-月距离  $\Delta x = 3.844 \times 10^8 \text{ m}$ , 固定在火箭上的坐标系为  $S'$  系, 其相对  $S$  系速度  $u = 0.8c$ , 则在  $S$  系中火箭由地球飞向月球的时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{u} = \frac{3.844 \times 10^8}{0.8 \times 3 \times 10^8} = 1.6 \text{ (s)}$$

在火箭  $S'$  系中, 两事件时间间隔为  $\Delta t'$ , 由洛伦兹变换有

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1.6 - \frac{0.8}{3 \times 10^8} \times 3.844 \times 10^8}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = 0.96 \text{ (s)}$$

**15.5** 在惯性系  $S$  中, 两个事件发生在同一时刻, 沿  $x$  轴相距  $1 \text{ km}$ , 若在以恒速沿  $x$  轴运动的惯性系  $S'$  中, 测得此两事件沿  $x'$  轴相距  $2 \text{ km}$ , 试问在  $S'$  系中测得它们的时间差是多少?

**解** 已知  $S$  系中, 两事件记为  $(x_1, t_1), (x_2, t_2)$ ,  $\Delta x = x_2 - x_1 = 1 \text{ km}$ ,  $\Delta t = t_2 - t_1$ , 设  $S'$  相对于  $S$  系以速度  $u$  沿  $x$  轴运动, 由洛伦兹变换有

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ 得 } \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\Delta x'} = \frac{1 \times 10^3 - u \times 0}{2 \times 10^3} = 0.5$$

$$\beta = \frac{u}{c} = \sqrt{1-0.5^2}, \quad u = 0.866c$$

在  $S'$  系中测得事件时间差为

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{0 - \frac{0.866}{3 \times 10^8} \times 1 \times 10^3}{0.5} = -5.77 \times 10^{-6} \text{ (s)}$$

**15.6** 一静止长度为  $l_0$  的火箭,以速率  $u$  对地飞行,现自其尾端发射一个光信号.试根据洛伦兹变换计算,在地面系中观测,光信号自火箭尾端到前端所经历的位移、时间和速度.

**解** 取固定在地面上的坐标系为  $S$  系,固定在火箭上的坐标系为  $S'$  系,自火箭尾端发出光信号为事件“1”,到达火箭端为事件“2”,则有

$S$  系中:事件 1( $x_1, t_1$ ),事件 2( $x_2, t_2$ ),  $\Delta x = x_2 - x_1$   $\Delta t = t_2 - t_1$

$S'$  系中:事件 1( $x'_1, t'_1$ )事件 2( $x'_2, t'_2$ )  $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = l_0$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{\Delta x'}{c} = \frac{l_0}{c}$$

$S'$  系相对  $S$  系运动速度为  $u$ ,由洛伦兹逆变换可得

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + u \Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l_0 + u \frac{l_0}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = l_0 \sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{u}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\frac{l_0}{c} + u \frac{l_0}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{l_0}{c} \sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = c$$

$\Delta x, \Delta t, v$  分别为地面系中观测光信号自火箭尾端到前端所经历的位移,时间和速度.

**15.7** 一根米尺静止在系  $S'$  中,与  $O'x'$  轴成  $30^\circ$  角.如果在  $S$  系中测得该米尺与  $Ox$  轴成  $45^\circ$  角,试求  $S'$  系的速率  $u$ ,又在  $S$  系中测得米尺的长度是多少?

**解** 米尺在  $S'$  系中,沿  $x'$  和  $y'$  轴的投影为

$$l_{ox'} = l_0 \cos 30^\circ$$

$$l_{oy'} = l_0 \sin 30^\circ \quad (\text{其中 } l_0 = 1\text{m})$$

米尺在  $S$  系中,沿  $x$  和  $y$  轴的投影为

$$l_{ox} = l \cos 45^\circ, \quad l_{oy} = l \sin 45^\circ$$

其中,  $l$  为米尺在  $S$  系中测得的长度.

$S'$  和  $S$  相对运动在  $x$  轴方向,  $y$  轴方向长度不发生变化, 因而有

$$l_{oy} = l_{oy'}$$

即

$$l_0 \sin 30^\circ = l \sin 45^\circ, \quad l = \frac{\sqrt{2}}{2} l_0 = 0.707 \text{ m}$$

$S'$  系中尺子长度为原长, 有

$$l_{ox} = l_{ox'} \sqrt{1 - \beta^2}$$

即

$$l_0 \cos 30^\circ \sqrt{1 - \beta^2} = l \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} l \cos 45^\circ$$

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \beta = \frac{u}{c} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$u = \frac{\sqrt{6}}{3} c$$

所以  $S'$  相对于  $S$  系运动速率为  $u$ .

**15.8** 在  $S$  系中测量, 一根静止直杆的长度为  $l_0$ , 与  $x$  轴的夹角为  $\theta$ , 已知  $S'$  系沿  $x$  正向相对  $S$  系运动的速率为  $u$ , 试求出  $S'$  系中测量, 此直杆的长度和它与  $x'$  轴的夹角.

**解** 设  $S'$  系中杆与  $x'$  轴夹角为  $\theta'$ , 杆长为  $l$ , 杆在  $x'$  轴,  $y'$  轴上投影为

$$l_{x'} = l \cos \theta', \quad l_{y'} = l \sin \theta' \quad (1)$$

$S$  系中杆在  $x, y$  轴的投影分别为  $l_{ox}, l_{oy}$ , 有

$$l_{ox} = l_0 \cos \theta, \quad l_{oy} = l_0 \sin \theta \quad (2)$$

$S'$  相对于  $S$  系, 杆在  $y$  方向长度不变,  $x$  轴方向长度收缩, 有

$$l_{y'} = l_{oy}, \quad l_{x'} = l_{ox} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (3)$$

$$\beta = \frac{u}{c}$$

联立式(1)、(2)、(3)可得

$$\theta' = \arctan \left( \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 - \left( \frac{u}{c} \right)^2}} \right)$$

$$l' = \sqrt{l_{x'}^2 + l_{y'}^2} = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2} \cos^2 \theta}$$

**15.9** (1)用长度收缩公式重新求解习题 15.4;

(2)用时间膨胀公式重新求解习题 15.4.

解 在  $S$  系中:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{u} = \frac{3.844 \times 10^8}{0.8 \times 3 \times 10^8} = 1.6 \text{ (s)}$$

在  $S'$  系中,地球和月球都以速度  $u$  运动,事件“1”是地球经过火箭,事件“2”是月球经过火箭,其时间差用长度收缩和时间膨胀计算如下:

(1) 长度收缩公式

$S'$  系中,测地球和月球距离为  $l'$ ,是运动长度,根据长度收缩公式有

$$l' = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$\Delta t' = \frac{l'}{u} = \frac{l_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{u} = \frac{3.844 \times 10^8 \times \sqrt{1 - 0.8^2}}{0.8 \times 3 \times 10^8} = 0.96 \text{ (s)}$$

(2) 时间膨胀公式

$S'$  系中,两个事件发生在同地,  $\Delta t'$  为固有时间,  $S$  系中两事件时间间隔为运动时间,由时间膨胀公式

$$\Delta t' = \frac{l'}{u} = \frac{l_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{u} = \frac{3.844 \times 10^8 \times \sqrt{1 - 0.8^2}}{0.8 \times 3 \times 10^8} = 0.96 \text{ (s)}$$

**15.10** 在一惯性系中,两个事件发生在同一地点而时间相隔 4 s,若在另一惯性系中测得此两事件时间间隔为 6 s,试问它们的空间间隔是多少?

解 设一惯性系为  $S$  系,发生同地两事件时间间隔为原时

$$\Delta t = \tau_0, \tau_0 = 4 \text{ s}$$

空间间隔  $\Delta x = 0$

另一惯性系为  $S'$  系,相对  $S$  系运动速度为  $u$ ,两事件间隔为

$$\tau = \Delta t'$$

空间间隔为  $\Delta x'$

由时间膨胀公式有

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1 - \beta^2}$$

即

$$4 = 6 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = 0.745$$

又

$$\beta = \frac{u}{c}$$

$$u = c\beta = 0.745c, \quad u \text{ 为 } S' \text{ 系相对 } S \text{ 系运动速率.}$$

再由洛伦兹坐标变换公式

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{0 - 0.745 \times 3 \times 10^8 \times 4}{2/3} = 1.34 \times 10^9 \text{ (m)}$$

**15.11** 如图 15.11 所示,一静止长度为  $l_0$  的棒  $AB$ ,固定于  $S'$  系中,沿  $x'$  轴放置,随  $S'$  系以速度  $u$  相对  $S$  系运动. $S$  系观察者测量此运动棒长度的另一方法是:在固定点  $p$  记录棒的两个端点  $B$  和  $A$  通过该点时所经历的时间  $\Delta t$ ,则这棒沿其运动方向的长度就是  $l = u\Delta t$ . 试由此出发,根据洛伦兹变换式推出长度收缩公式和时间膨胀公式.

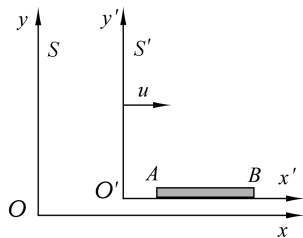


图 15.11

**解** 设棒的  $B$  端经过  $p$  点为事件“1”, $A$  端经过  $p$  点为事件“2”,两事件在  $S$  和  $S'$  系中的时间和空间间隔分别为  $S$  系中:

$$\Delta t = t_2 - t_1, \quad \Delta x = x_2 - x_1 = 0$$

$S'$  系中:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1, \quad \Delta x' = x'_2 - x'_1 = -l_0, \quad \Delta t' = \frac{l_0}{u}$$

由洛伦兹坐标变换有

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{u}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\frac{l_0}{u} + \frac{u}{c^2} (-l_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{l_0}{u} \sqrt{1 - \beta^2} = \Delta t' \sqrt{1 - \beta^2}$$

$\Delta t$  为原时,即  $\Delta t = \tau_0$ ,  $\Delta t'$  为运动时间  $\tau$ .

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \text{此即为时间膨胀公式}$$

在  $S$  系中观测棒长

$$l = u\Delta t, l \text{ 为运动长度.}$$

$$l = u\Delta t = u\Delta t' \sqrt{1 - \beta^2} = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \text{此即为长度收缩公式.}$$

**15.12** 作为一个静止的自由粒子,中子的平均寿命为  $15 \text{ min } 30 \text{ s}$ ,它能自发地转变为一个电子、一个质子和一个中微子.试问:一个中子必须以多大的平均最小速度离开太阳,才能在转变之前到达地球? 已知地球到太阳的平均距离为  $1.496 \times 10^{11} \text{ m}$ .

**解** 设中子离开太阳的平均速度为  $u$ ,太阳-地球为  $S$  系,中子为  $S'$  系,在  $S'$  系中中子寿命为本征寿命,记为  $\tau_0$ , $S$  系中寿命为  $\tau$ ,由时间膨胀公式有

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \quad (1)$$

中子复变前能够通过  $S$  系中距离为

$$l = u\tau = u \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \quad (2)$$

由分析可知,速度  $u$  越大,通过的距离  $l$  越长,能够在转变以前到达地面的最小平均速度是(2)式中的  $l$  取地球到太阳的平均距离  $l = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$ ,将式(2)两边平方并整理得:

$$\begin{aligned} u &= \frac{l}{\sqrt{\tau_0^2 + \left(\frac{l}{c}\right)^2}} = \frac{1.496 \times 10^{11}}{\sqrt{930^2 + \left(\frac{1.496 \times 10^{11}}{3 \times 10^8}\right)^2}} \\ &= 1.418 \times 10^8 \text{ (m/s)} = 0.473 c \end{aligned}$$

**15.13** 设火箭的静止质量为  $100 \text{ t}$ ,当它以第二宇宙速度飞行时,它的质量增加了多少?

**解** 火箭的第二宇宙速度

$$v = 11.2 \times 10^3 \text{ m/s}, \quad v \ll c$$

所以火箭的动能

$$\begin{aligned} E_k &= mc^2 - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 \\ \Delta m &= m - m_0 = \frac{E_k}{c^2} = \frac{\frac{1}{2} m_0 v^2}{c^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times 1000 \times 10^3 \times (11.2 \times 10^3)^2}{9 \times 10^{16}} = 0.7 \times 10^{-3} \text{ (kg)} \end{aligned}$$

即火箭质量可近似为不变.

**15.14** 当一静止体积  $V_0$ ,静止质量为  $m_0$  的立方体沿其一棱以速率  $v$  运动时,计算其体积、质量和密度.

**解** 当物体以速度  $v$  沿其一棱运动时,其体积、质量和密度分别为

$$V = V_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

其中  $V_0, m_0$  是原立方体的体积和质量.

密度

$$\sigma = \frac{m}{V} = \frac{m_0}{V_0 (1 - v^2/c^2)} = \frac{\sigma_0}{(1 - v^2/c^2)}$$

$\sigma_0$  为原立方体的密度.

**15.15** 要使电子的速率从  $1.2 \times 10^8 \text{ m/s}$  增加到  $2.4 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,必须做多少功?

**解** 做功等于电子动能的增量  $\Delta E_k$

$$\begin{aligned}\Delta E_k &= (m_2 c^2 - m_0 c^2) - (m_1 c^2 - m_0 c^2) \\&= (m_2 - m_1) c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \right) \\&= 9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2 \times \left( \frac{1}{\sqrt{1 - 0.8^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 0.4^2}} \right) \\&= 4.7 \times 10^{-14} \text{ (J)}\end{aligned}$$

**15.16** 求一个质子和一个中子结合成一个氘核时放出的能量(用焦耳和电子伏特表示).已知它们的静止质量分别为  
质子

$$m_p = 1.67262 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

中子

$$m_n = 1.67493 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

氘核

$$m_D = 3.34359 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

**解** 静止的能量亏损,即为该反应中放出的能量  
能量亏损为

$$\begin{aligned}\Delta E &= (m_p + m_n - m_D) c^2 \\&= (1.67262 + 1.67493 - 3.34359) \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 \\&= 0.356 \times 10^{-12} \text{ (J)} = 2.23 \times 10^6 \text{ eV}\end{aligned}$$

**15.17** 太阳的辐射能来自其内部的核聚变反应.太阳每秒钟向周围空间辐射出的能量约为  $5 \times 10^{26} \text{ J/s}$ ,由于这个原因,太阳每秒钟减少多少质量?把这个质量同太阳目前的质量  $2 \times 10^{30} \text{ kg}$  作比较.

**解** 太阳每秒钟减少的质量为

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{5 \times 10^{26}}{9 \times 10^{16}} = 5.6 \times 10^9 \text{ kg}$$

它与太阳目前质量  $m = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$  之比为

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{5.6 \times 10^9}{2 \times 10^{30}} = 0.36 \times 10^{-21}$$

**15.18** 氢弹利用了聚变反应,在该反应中,各氢原子核的中子聚变成质量较大的核,每用  $1 \text{ g}$  氢约损失  $0.006 \text{ g}$  静止质量.求在这种反应中释放出来的能量与同量的氢燃烧成水时释放出来的能量的比值.已知氢被燃烧时,  $1 \text{ g}$  氢释放出  $1.3 \times 10^5 \text{ J}$  的能量.

**解** 每用  $1 \text{ g}$  氢释放出的能量为

$$\Delta E_1 = \Delta mc^2 = 0.006 \times 10^{-3} \times (3 \times 10^8)^2 = 5.4 \times 10^{-11} \text{ J}$$

每 1 g 氢燃烧成水释放能量

$$\Delta E_2 = 1.3 \times 10^5 \text{ J}$$

两者之比

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta E_2} = \frac{5.4 \times 10^{11}}{1.3 \times 10^5} = 4.1 \times 10^6$$

**15.19** 粒子的静止质量为  $m_0$ , 当其动能等于其静能时, 其质量和动量各等于多少?

**解** 动能

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2$$

当

$$E_k = m_0 c^2 \text{ 时 } m = 2 m_0 \quad (1)$$

由质速度关系有

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (2)$$

动量

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (3)$$

由(1)和(2)式得

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

$$p = \sqrt{3} m_0 c$$

**15.20** 一质子(静止质量为  $1840 m_e$ )以  $c/20$  的速率运动. 问一电子(静止质量为  $m_e$ )在多大速率时才具有与该质子同样多的动能?

**解** 用  $m_p$  表示质子速度  $v_p = \frac{c}{20}$  时的质量,  $m_{p0}$  表示静止质子质量, 质子动能  $E_{kp}$ , 有

$$E_{kp} = (m_p - m_{p0}) c^2 \quad (1)$$

$$m_p = \frac{m_{p0}}{\sqrt{1 - (v_p/c)^2}}, \quad m_{p0} = 1840 m_e \quad (2)$$

由式(1)、(2)得  $E_{kp} = 2.3 m_e c^2$

电子速度为  $v$  时的动能

$$E_{ke} = mc^2 - m_e c^2$$

当  $E_{kp} = E_{ke}$  时,有

$$mc^2 = 3.30 m_e c^2$$

则由质速关系可得

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_e}{m}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3.30}\right)^2} = 0.953$$

所以

$$v = 0.953c = 2.86 \times 10^8 \text{ m/s}$$

**15.21** (1)如果要把一个粒子的动能写作  $\frac{m_0 v^2}{2}$ ,而误差不大于 1%,试问这个粒子的最大速率等于多少?

(2)以这个速率运动的电子动能是多少?

(3)以这个速率运动的质子动能是多少?

(能量均以电子伏为单位)

**解** (1)依题意有

$$\frac{E_k - \frac{1}{2} m_0 v^2}{E_k} = 1 - \frac{\frac{1}{2} m_0 v^2}{\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2} \leq 1\%$$

令  $x = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ ,  $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - x^2$ , 上式可写为

$$1 - \frac{\frac{1}{2} \frac{1 - x^2}{1 - x}}{x} = 1 - \frac{x}{2}(1 + x) \leq 0.01$$

即

$$x^2 + x - 1.98 \geq 0$$

$x$  取正值有

$$x = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \geq 0.993$$

$$v \leq 0.116c$$

满足条件的最大速率为  $0.116c$

(2)以速率  $v = 0.116c$  运动的电子动能  $E_k$  为

$$E_k = (mc^2 - m_e c^2) = m_e c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$$

$$= 9.11 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16} \times \frac{1}{\sqrt{1 - 0.1162}} - 1$$

$$= 0.559 \times 10^{-15} \text{ (J)}$$

$$= 3.49 \times 10^3 \text{ eV}$$

(3) 以这个速率运动的质子动能是它的 1840 倍, 即  $6.42 \times 10^6 \text{ eV}$ .

**15.22**  $S'$  系相对  $S$  系的速率  $u = 0.9990c$ ,  $S'$  系观测者测得电子沿  $x'$  轴的速度  $v'_x = 0.9999c$ , 试求  $S$  系观测者测得的电子沿  $x$  轴的速度?

**解** 由洛伦兹速度变换公式

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} = \frac{0.9999c + 0.9990c}{1 + 0.9999c \times 0.9990/c^2} = 1.000c$$

**15.23**  $S'$  系相对  $S$  系的速率  $u = 0.62c$ , 在  $S'$  系测得一粒子沿  $x'$  轴正方向运动的速率  $v'_x = 0.47c$ .

(1) 试求这一粒子相对  $S$  系的速率;

(2) 如果此粒子以相同速率沿  $x'$  轴负方向运动, 再求这粒子相对于  $S$  系的速度, 试将这两个结果与用伽利略变换结果进行比较.

**解** (1) 由洛伦兹速度变换公式有

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} = \frac{0.47c + 0.62c}{1 + 0.62c \times 0.47c/c^2} = 0.84c$$

若按伽利略变换

$$v_x = v'_x + u = 0.47c + 0.62c = 1.1c$$

(2) 把  $v'_x = -0.47c$ , 重新按(1)中计算

$$v_x = \frac{0.62c - 0.47c}{1 - 0.62c \times 0.47c/c^2} = 0.21c$$

若按伽利略变换有

$$v_x = -0.47c + 0.62c = 0.15c$$

**15.24** 试利用洛伦兹速度变换证明: 若  $0 < v'_x < c$ ,  $0 < u < c$ , 则  $0 < v_x < c$ , 即若某物体的速率对一个观察者小于  $c$ , 则对另一个观察者, 该物体的速率一定也小于  $c$ .

**证明** 由题意有

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + v'_x u / c^2} \quad \text{令 } v'_x = ac \quad u = bc \quad (c \text{ 为光速})$$

且  $0 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$ , 则

$$v_x = c \frac{a+b}{1+ab}$$

由于

$$1 + ab - (a + b) = (1 - a)(1 - b) > 0$$

即

$$1 + ab > a + b > 0$$

所以

$$\frac{a+b}{1+ab} < 1$$

即

$$v_x < c$$

**15.25** 星系  $A$  离开我们星系  $C$  的退行速率为  $0.35c$ , 相对于星系  $C$  星系  $B$  正好处于星系  $A$  的相反方向, 并以相同的速率  $0.35c$  离开我们星系退行, 试问相对星系  $A$

(1) 我们星系  $C$  的退行速率多大?

(2) 星系  $B$  的退行速率多大?

**解** 取星系  $A$  为参考系  $S'$  系, 星系  $C$  为  $S$  系,  $u = 0.35c$

(1) 星系  $C$  相对于  $S$  系,  $v_x = 0$ , 相对于  $S'$  系速度为  $v'_x$ , 由洛伦兹速度变换公式

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x u / c^2} = -u = -0.35c$$

星系  $C$  相对星系  $A$  的退行速率为  $0.35c$ .

(2) 星系  $B$  相对星系  $C$  的速度为  $v_x = -0.35c$ , 相对  $S'$  速度为  $v'_x$  有

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x u / c^2} = \frac{-0.35c - 0.35c}{1 + 0.35c \times 0.35c} = -0.62c$$

星系  $B$  相对星系  $C$  的退行速率为  $0.62c$ .

**15.26** 飞船以  $0.900c$  速率飞离地球, 它以飞船上  $100\text{ MHz}$  频率向地球发回信号, 试问地面上的接收机频率调谐到多少才能接收此信号?

**解** 飞船离地球退行, 产生多普勒红移, 设飞船上频率为  $\nu_0$ , 地面接收频率为  $\nu_e$ ,  $u = 0.900c$ ,  $\beta = \frac{u}{c} = 0.900$ , 由多普勒频率公式:

$$\nu_e = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \nu_0 = \sqrt{\frac{1-0.900}{1+0.900}} \times 100 = 30.1\text{ (MHz)}$$

**15.27** 一光源以速率  $v = 0.100c$  沿圆周运动, 并辐射  $\text{Na}$  的  $D_2$  线 ( $\lambda_0 = 589.00\text{ nm}$ ). 试问对处于圆心的观察者接收到的此线是否有多普勒频移? 如果有,  $\Delta\lambda$  ( $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ ) 等于多少?

**解** 由于光源和接收器的相对运动垂直于两者连线有

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta} \lambda, \quad \beta = \frac{v}{c} = 0.100$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

所以

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{589.00}{\sqrt{1-0.100^2}} = 591.97 \text{ (nm)}$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 591.97 - 589.00 = 2.97 \text{ (nm)}$$

**15.28** 飞船相对地球的退行速度为  $0.20c$ , 在飞船尾部发射一束光, 对飞船观察者, 此光呈蓝色, 问地面监测者收到此光呈何颜色?

**解** 由于飞船相对地球退行, 发生多普勒红移效应, 地面接收到的光比蓝色光的波长偏长, 波长的关系为

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda_0, \quad \beta = \frac{0.20c}{c} = 0.20$$

$\lambda_0$  为飞船观察者观察蓝色的波长

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+0.2}{1-0.2}} \lambda_0 = 1.22 \lambda_0$$

因此地面观测者收到此光呈青蓝色。

**15.29**  $S'$  系相对  $S$  系以恒定速度  $u_1$  运动,  $S''$  系相对  $S'$  系以恒定速度  $u_2$  运动, 连续两次进行洛伦兹速度变换, 使我们能先从  $(x, y, z, t)$  过渡到  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$ , 然后再从  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  变换到  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$ . 倘若我们取  $S''$  系相对  $S$  系的速度为

$$u = \frac{u_1 + u_2}{1 + u_1 u_2 / c^2}$$

试证明上述相继变换的结果和直接从  $(x, y, z, t)$  变换到  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$  的单独一次洛伦兹变换给出的结果是相同的。

**证明** 由  $(x, y, z, t)$  过渡到  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  的有

$$x_1 = \frac{x - u_1 t}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}$$

$$y_1 = y \quad z_1 = z$$

$$t_1 = \frac{t - \frac{u_1}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}$$

由  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  变换到  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$  时有

$$x_2 = \frac{x_1 - u_2 t_1}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}}$$

$$y_2 = y_1 = y$$

$$z_2 = z_1 = z$$

$$t_2 = \frac{t_1 - \frac{u_2}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}}$$

把  $x_1$  和  $t_1$  的表达式代入  $x_2$  和  $t_2$  的表达式得

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{\frac{x - u_1 t}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}} - u_2 \frac{t - \frac{u_1}{c^2} x}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}}}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}} = \frac{\left(1 + \frac{u_1 u_2}{c^2}\right) x - (u_1 + u_2) t}{\sqrt{(1 - u_1^2/c^2)(1 - u_2^2/c^2)}} \\ &= \frac{x - \frac{u_1 + u_2}{1 + u_1 u_2/c^2} t}{\sqrt{\frac{(1 - u_1^2/c^2)(1 - u_2^2/c^2)}{(1 + u_1 u_2/c^2)^2}}} = \frac{x - \frac{u_1 + u_2}{1 + u_1 u_2/c^2} t}{\sqrt{1 - \left(\frac{u_1 + u_2}{1 + u_1 u_2/c^2} / c\right)^2}} \\ &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ t_2 &= \frac{\frac{t - \frac{u_1}{c^2} x}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}} - \frac{u_2}{c^2} \frac{x - u_1 t}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}}}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}} = \frac{t - \frac{u_1}{c^2} x - \frac{u_2}{c^2} x + \frac{u_1 u_2}{c^2} t}{\sqrt{(1 - u_1^2/c^2)(1 - u_2^2/c^2)}} \\ &= \frac{t \left(1 + \frac{u_1 u_2}{c^2}\right) - \frac{u_1 + u_2}{c^2} x}{\sqrt{(1 - u_1^2/c^2)(1 - u_2^2/c^2)}} = \frac{t - \left(\frac{u_1 + u_2}{1 + u_1 u_2/c^2} / c\right) x}{\sqrt{\left(\frac{(1 - u_1^2/c^2)(1 - u_2^2/c^2)}{(1 + u_1 u_2/c^2)^2}\right)}} \\ &= \frac{t - \frac{u}{c^2} x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{aligned}$$

和直接由  $S''$  变换到  $S$  的结果相同，直接按相对速度  $u$  由  $S''$  变换到  $S$  的结果为

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y_2 &= y \\ z_2 &= z \\ t_2 &= \frac{t - \frac{u}{c^2} x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{aligned}$$

## 第 16 章 量子物理基础

### 一、基本内容和主要公式

#### 1. 黑体辐射

斯特藩-玻耳兹曼定律

$$M_B(T) = \sigma T^4, \quad \text{其中 } \sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{K}^{-4}$$

维恩位移定律

$$T\lambda_m = b$$

其中  $b = 2.897 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

#### 2. 普朗克量子假设和辐射公式

能量子

$$\epsilon = h\nu$$

其中  $h$  为普朗克常数, 其值为  $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}$ .

辐射公式

$$M_{B\lambda}(T) = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

#### 3. 光电效应

遏止电压  $U_a$  和光电子的最大初动能关系为

$$\frac{1}{2} m v_m^2 = eU_a$$

光电效应方程

$$h\nu = A + \frac{1}{2} m v_m^2$$

红限频率

$$\nu_0 = A/h$$

#### 4. 光的波粒二象性(爱因斯坦光子理论)

$$\epsilon = mc^2 = h\nu$$

$$p = mc = \frac{h}{\lambda}$$

$$m_0 = 0$$

其中  $m_0$  为光子的静止质量,  $m$  为光子的动质量.

## 5. 康普顿效应

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

其中  $\theta$  为散射角,  $m_0$  为粒子的静止质量.

## 6. 氢光谱和玻尔的基本假设

$$\nu = \frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n > m)$$

$$L = mvr = n \frac{h}{2\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\nu = \frac{|E_k - E_n|}{h}$$

## 7. 波粒二象性, 不确定关系

德布罗意波

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

不确定关系

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 \quad \Delta E \Delta t \geq \hbar/2$$

## 8. 波函数和薛定谔方程

波函数  $\psi$  应满足的三个条件: 单值、有限、连续.

定态薛定谔方程

$$\Delta^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0$$

## 9. 电子自旋和四个量子数

电子自旋

$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar, \quad s = \frac{1}{2}$$

$$S_z = m_s \hbar, \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

原子核外电子可用四个量子数描述

主量子数:  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

副量子数(角量子数)  $l$ :  $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$

磁量子数:  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$

自旋磁量子数:  $m_s = \pm \frac{1}{2}$

## 二、典型例题

**16-1** 太阳辐射到地球大气层外表面单位面积的辐射能量  $I_0$ , 称为太阳常

量,实际测得其值为  $I_0 = 1.35 \text{ kW/m}^2$ , 太阳平均半径  $R = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$ , 日地距离为  $r = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$ , 把太阳近似当作黑体, 试由太阳常量估计太阳表面的温度。

**解** 把太阳当作黑体, 由斯特藩-玻耳兹曼定律可以求出太阳的总辐射功率  $\sigma T^4 \cdot 4\pi R^2$ , 其中  $R = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$ 。

由于地球大气层外表面上的面积元  $\Delta S$  接收到的是在立体角  $\Delta S/r^2$  之内的太阳辐射, 它就等于太阳常量乘以  $\Delta S$ , 因此有

$$\sigma T^4 4\pi R^2 \frac{\Delta S/r^2}{4\pi} = I_0 \Delta S$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{I_0 r^2}{\sigma R^2}} = \sqrt[4]{\frac{1.35 \times 10^3 \times (1.50 \times 10^{11})^2}{5.67 \times 10^{-8} \times (6.96 \times 10^8)^2}} = 5.77 \times 10^3 \text{ (K)}$$

**说明** 本题是斯特藩-玻耳兹曼定律的应用题, 人们可以通过测量太阳辐照到地球表面的辐射能量来估算太阳的温度, 用这种方法可以估算许多高温物体的温度。常用的辐射高温计, 就是根据此原理制成的。

**16-2** 在加热黑体的过程中, 其单色辐射强度最大值所对应的波长由  $0.69 \mu\text{m}$  变化到  $0.50 \mu\text{m}$ , 总辐射强度增加了几倍。

**解** 由维恩位移定律:  $T\lambda_m = b$  可得到两黑体的温度之比

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}}$$

又根据斯特藩-玻耳兹曼定律  $E_0(T) = \sigma T^4$  可知

$$\frac{E_0(T_2)}{E_0(T_1)} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \left(\frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}}\right)^4 = \left(\frac{0.69}{0.50}\right)^4 = 3.63 \text{ (倍)}$$

**说明** 维恩位移定律指出: 绝对黑体的峰值波长  $\lambda_m$  和黑体绝对温度  $T$  的乘积是个常数。因此可以通过测量黑体的峰值波长变化来求黑体的温度变化, 再根据斯特藩-玻耳兹曼定律估算黑体的辐射能量。

**16-3** 试证在光电效应过程中必须有第三者原子核参加。(若把光电效应过程假设为只有光子与静止的自由电子参加, 没有第三者原子核参加, 光子与电子作用后消失, 产生光电子。则此假设过程中, 能量守恒和动量守恒两者不可能同时满足)

**证明** 若光电效应过程只有光子和电子相互作用, 作用前后能量守恒, 有

$$h\nu = (m - m_0)c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1\right) m_0 c^2$$

其中  $h\nu$  为光子能量,  $m_0$  为光电子的静质量

则光子和光电子的动量分别为

$$p_\gamma = \frac{h\nu}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \quad m_0 c$$

$$p_e = mu = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} m_0 u$$

比较两式有

$$\begin{aligned} p_\gamma &= \left(1 - \sqrt{1 - u^2/c^2}\right) \frac{c}{u} p_e = \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} - \dots\right) \frac{c}{u} p_e \\ &= \frac{1}{2} \frac{u}{c} p_e < p_e \end{aligned}$$

即若能量守恒,动量就不守恒,能量守恒和动量守恒不能同时满足,说明实际的光电效应过程中,必有第三者原子核参加。

**说明** 在微观粒子的相互作用过程,能量守恒和动量守恒必须同时成立,可以以此为必要条件去推测相互作用的过程,本题就是一例。

**16-4** 光子的康普顿散射中,散射角  $\varphi=90^\circ$ ,试求下列辐射光子能量变化的百分数;

(a)在微波范围内,取  $\lambda=3.0 \text{ cm}$

(b)可见光范围内,取  $\lambda=5000 \text{ \AA}$

(c)在  $x$  线范围内,取  $\lambda=1.00 \text{ \AA}$

(d) $\gamma$  线范围内, $\gamma$  光子能量取  $1.0 \text{ Mev}$

**解** 光子能量的损失等于电子获得的动能

$$\Delta E = h\nu - h\nu' = h \frac{c}{\lambda} - h \frac{c}{\lambda + \Delta\lambda} = h \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} = E \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}$$

所以

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}$$

而

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\varphi) = 2.43 \times 10^{-12} (\text{m})$$

$$(a) \lambda = 3.0 \text{ cm 时}, \frac{\Delta E}{E} = \frac{2.43 \times 10^{-12}}{3.00 \times 10^{-2} + 2.43 \times 10^{-12}} = 8.1 \times 10^{-9} \%$$

$$(b) \lambda = 5000 \text{ \AA 时}, \frac{\Delta E}{E} = \frac{2.43 \times 10^{-12}}{5000 \times 10^{-10} + 2.43 \times 10^{-12}} = 4.9 \times 10^{-4} \%$$

$$(c) \lambda = 1.00 \text{ \AA 时}, \frac{\Delta E}{E} = 2.4 \%$$

$$(d) \lambda = \frac{hc}{E_0} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1.0 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}} = 1.24 \times 10^{-12} (\text{m})$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2.43 \times 10^{-12}}{1.24 \times 10^{-12} + 2.43 \times 10^{-12}} = 66 \%$$

**说明** 在微波及可见光范围内,康普顿效应不明显,只有在 X 射线,低能  $\gamma$  射线范

国内,康普顿效应才明显。

**16-5** 试想以万有引力结合在一起的电子和质子形成一个“原子”,利用玻尔原子模型计算这样一个原子中电子的基态轨道半径,在此模型中万有引力代替了库仑静电引力。

**解** 这类原子的电子运动方程为

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}, \quad v^2 = G \frac{M}{r}$$

动能为

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} G \frac{mM}{r}$$

势能为

$$U = -G \frac{Mm}{r}$$

总能量为

$$E = E_k + U = -\frac{1}{2} G \frac{Mm}{r}$$

角动量为

$$L = mvr = m \sqrt{G \frac{M}{r}} r = m \sqrt{GM} r$$

令

$$L = n \frac{h}{2\pi}, \quad \text{则} \quad m \sqrt{GM} r = n \frac{h}{2\pi}$$

可解得

$$r = n^2 \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{m^2 GM}$$

取  $n=1$  可计算得

$$\begin{aligned} r &= \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{m^2 GM} \\ &= \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{4 \times 3.14^2 \times (9.11 \times 10^{-31})^2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 1.67 \times 10^{-27}} \\ &= 1.2 \times 10^{29} \text{ (m)} \end{aligned}$$

**说明** 本题的求解过程是半经典量子理论分析问题的一般方法:按经典力学求粒子的能量和角动量,给角动量加以量子化条件,从而得到轨道和能量的量子化形式,这种半经典方法在实际中经常用到.本题的结论说明引力不是质子和电子的主要相互作用力。

**16-6** 已知原子核的线度  $d=1.4 \times 10^{-14} \text{ m}$ ,假设原子核中存在电子,估算核内电子的最小容许能量,并和质子和中子结合在核内的几兆电子伏的能量相比较,

据此判别在核内有无电子?

**解** 由势阱中粒子能级公式  $E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$ , 当  $n=1$  时相应于最小允许能量值, 可求得原子核中电子的最小能量

$$E_1 = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{8 \times 9.11 \times 10^{-31} \times (1.4 \times 10^{-14})^2} = 3.1 \times 10^{-10} (\text{J})$$
$$= 1.9 \times 10^9 \text{ eV} = 1.9 \times 10^3 \text{ MeV}$$

因此原子核中若有电子, 则其能量比原子核结合能高得多, 所以电子在原子核内不可能存在。

**说明** 求解一维无限深势阱问题是应用定态薛定谔方程的典型问题, 本题直接把电子在原子核中看作电子在一维无限深势阱模型处理, 直接利用此模型的能级公式, 估算原子核中电子的最低能量和实验得到的原子核结合能相比较, 从而判别原子核中电子能否存在。这种将复杂情况简化为一定理想模型是理论分析的一种重要方法。

**16-7** 一维运动的粒子处在下列波函数描述状态

$$\psi(x) = A x e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

$$\psi(x) = 0 \quad (x \leq 0)$$

其中  $\lambda > 0$ , 试求:

(1) 归一化因子  $A$

(2) 粒子按坐标的概率分布

(3) 在何处找到粒子的概率最大

**解** (1) 由波函数的归一化条件, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \cdot dx = \int_0^{+\infty} A^2 x^2 e^{-2\lambda x} \cdot dx = \frac{A^2}{4\lambda^3} = 1$$

得

$$A = 2\sqrt{\lambda^3}$$

即为波函数的归一化因子, 归一化波函数为

$$\psi(x) = 2\sqrt{\lambda^3} x e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

$$\psi(x) = 0 \quad (x \leq 0)$$

(2) 粒子按坐标的概率分布为

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2 = 4\lambda^3 x^2 e^{-2\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

$$\rho(x) = 0 \quad (x \leq 0)$$

(3) 由在  $x \geq 0$  范围内的极值条件  $d\rho(x)/dx = 0$  可得

$$4\lambda^3 [2xe^{-2\lambda x} + x^2(-2\lambda)e^{-2\lambda x}] = 0$$

即  $x(1 - \lambda x) = 0$ ,  $x = 0$  或  $x = \frac{1}{\lambda}$

在  $x=0$  处,  $\rho(x)=0$  概率最小; 在  $x=\frac{1}{\lambda}$  处, 找到粒子的概率最大  $\rho\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 4\lambda e^{-2}$ .

**说明** 由于波函数一定满足归一化条件, 因此, 由归一化条件可以确定波函数中的待定常数, 再由归一化波函数求概率分布及概率最大位置处.

**16-8** 若钠黄光谱线( $\lambda=589\text{ nm}$ )的自然宽度为  $\Delta\nu/\nu=1.6\times 10^{-8}$ , 试问钠原子相应的激发态的平均寿命约为多少?

**解** 由不确定关系可得, 该激发态的平均寿命为

$$\begin{aligned}\Delta t &\approx \frac{\hbar}{2\Delta E} = \frac{\hbar}{2h\Delta\nu} = \frac{\lambda}{4\pi(\Delta\nu/\nu)c} \\ &= \frac{589 \times 10^{-9}}{4 \times 3.14 \times 1.6 \times 10^{-8} \times 3 \times 10^8} = 9.8 \times 10^{-9} (\text{s})\end{aligned}$$

**说明** 由光波的频率宽度或波长自然宽度可以知道能量的不确定范围, 根据不确定关系就可知发光原子激发态的平均寿命.

### 三、习题详解

#### 16.1 选择题

(1) 半径为 250 mm 的球, 表面涂有黑油烟, 在表面温度  $T=1500\text{ K}$  时, 其辐射功率为(C)

(A) 150 kW (B) 200 kW (C) 245 kW (D) 310 kW

(2) 普朗克恒量的量纲是(A)

(A)  $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$  (B)  $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$  (C)  $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  (D)  $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$

(3) 已知单色光照射在钠表面上, 测得光子的最大动能是 1.2 eV, 而钠的波长红限为 540 nm, 则入射光的波长应为(D)

(A) 535 nm (B) 500 nm (C) 435 nm (D) 355 nm

(4) 关于光电效应和康普顿效应中电子与光子的相互作用过程, 下列哪些说法是正确的(AC)

(A) 两种效应中电子和光子的相互作用都服从动量守恒定律和能量守恒定律

(B) 两种效应中电子和光子相互作用都是弹性碰撞过程

(C) 光电效应中电子吸收光子能量, 康普顿效应中光子与电子发生弹性碰撞

(5) 一个光子和一个电子具有相同的波长, 则(C)

(A) 光子具有较大的动量

(B) 电子具有较大的动量

(C) 电子与光子的动量相等

(D) 电子和光子的动量不确定

(6) 由氢原子理论可知, 当氢原子处于  $n=3$  的激发态时, 可发射(C)

- (A)一种波长的光 (B)两种波长的光  
(C)三种波长的光 (D)各种波长的光

(7)卢瑟福  $\alpha$  粒子实验证实了(E);斯特恩-盖拉赫实验证实了(F);康普顿效应证实了(A);戴维逊-革末实验证实了(D)

- (A)光的量子性 (B)玻尔的能级量子化假设  
(C)X射线的存在 (D)电子的波动性  
(E)原子的有核模型 (F)原子的自旋磁矩取向量子化

(8)粒子在一维无限深方势阱中运动, 图示为粒子在某一能态上的波函数  $\psi(x)$  的曲线, 概率密度最大的位置是(C)

- (A)  $\frac{a}{2}$   
(B)  $\frac{1}{6}a, \frac{5}{6}a$   
(C)  $\frac{1}{6}a, \frac{1}{2}a, \frac{5}{6}a$   
(D)  $0, \frac{1}{3}a, \frac{3}{2}a, a$

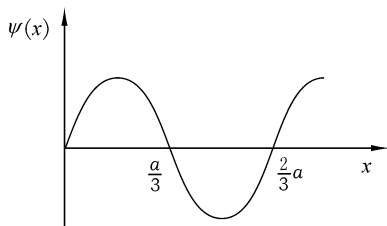


图 16.1(8)

## 16.2 填空题

(1)如图所示,直线段  $PM$  表示光电子的动能  $\frac{1}{2}mv^2$  与入射光频率  $\nu$  的变化关系,则图中  $MN/QN$  段的比值可确定普朗克常数; $OQ$  段的值可以表示红限.

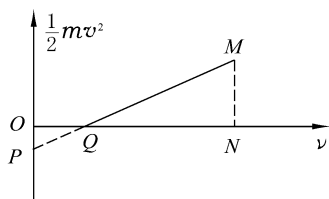


图 16.2(1)

(2)在康普顿效应中,波长为  $\lambda_0$  的入射光子与静止的自由电子碰撞后反向弹回,而散射光子的波长为  $\lambda$ ,反冲电子获得的动能为  $hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right)$ .

(3)为了获得德布罗意波长为  $0.1 \text{ nm}$  的电子,按非相对论效应计算,需要  $1.51 \times 10^2 \text{ V}$  的加速电压.

(4)普朗克恒量用  $\text{eV} \cdot \text{fs}$  为单位表示,应为  $4.14 \text{ eV} \cdot \text{fs}$ .

(5)光子能量  $E$  用  $\text{eV}$  为单位,波长  $\lambda$  用  $\text{nm}$  为单位,则光子能量与波长之间关系为  $E = 1240/\lambda$

(6)一个离开质子相当远的电子以  $2 \text{ eV}$  的动能向质子运动,并被质子束缚形成一个基态氢原子,在该过程中发出的光波的波长为  $79.7 \text{ nm}$ .

(7)描述粒子运动的波函数为  $\psi(r, t)$ ,则  $\psi^*$  表示  $t$  时刻粒子在  $r(x, y, z)$  处

出现的概率密度,  $\psi(r, t)$  需要满足的条件为单值、有限、连续; 其归一化条件是

$$\iiint_V |\psi|^2 dx dy dz = 1.$$

(8) 按量子力学理论, 若氢原子中电子的主量子数  $n=3$ , 那么它的轨道角动量可能有 3 个取值; 若电子的角量子数  $l=2$ , 则电子的轨道角动量在磁场方向的分量可能取的各个值为  $0, \pm \hbar, \pm 2\hbar$ .

**16.3** 半径为  $R=280 \text{ mm}$  的薄壁空心球的表面上有一半半径为  $r=2.8 \text{ mm}$  的小圆孔, 球的温度为  $T=1100 \text{ K}$ , 试求:

(1) 小圆孔在 1 h 内辐射的能量.

(2) 多大的一个可认为黑体的球表面, 在相同温度, 一小时内能辐射相同的能量.

**解** (1) 空腔器壁上开一小孔的辐射可以看作黑体辐射, 辐出度  $M_B(T) = \sigma T^4$ , 小孔的面积近似为圆孔面积

$$s = \pi r^2 = 3.14 \times (2.8 \times 10^{-3})^2 = 2.46 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

单位时间内小孔辐射的能量

$$\rho = M_B(T)s = 5.67 \times 10^{-8} \times (1100)^4 \times 2.46 \times 10^{-5} = 2.04 \text{ (W)}$$

一小时内辐射能量

$$E = \rho \times 3600 = 7.34 \times 10^3 \text{ J}$$

(2) 要使黑体球表面辐射的能量和空腔小孔辐射能量相同, 由于时间和温度条件相同, 因此只要辐射面积相同就行, 即

$$S = 4\pi r_1^2 = \pi r^2$$

$$r_1 = \frac{r}{2} = 1.4 \text{ mm}$$

$r_1$  即为黑体球面的半径.

**16.4** 从钨中移出一个电子需要  $4.2 \text{ eV}$  的能量. 用波长为  $200 \text{ nm}$  的紫外光投射到钨的表面上, 求:

(1) 光电子的最大初动能;

(2) 遏止电压;

(3) 钨的红限波长.

**解** 入射光子的能量

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{200 \times 10^{-9}} = 9.95 \times 10^{-19} \text{ J} = 6.2 \text{ eV}$$

(1) 光子的最大初动能为

$$\frac{1}{2} m v_m^2 = h\nu - A = 6.2 - 4.2 = 2.0 \text{ eV} = 3.2 \times 10^{-19} \text{ J}$$

(2)遏止电压

$$U_a = \frac{1}{e} \left( \frac{1}{2} m v_m^2 \right) = 2.0 \text{ V}$$

(3)钨的红限频率  $\nu_0 = \frac{A}{h}$ , 红限波长  $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{hc}{A}$

$$\lambda_0 = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{4.2 \times 1.6 \times 10^{-19}} = 2.96 \times 10^{-7} \text{ m} = 296 \text{ nm}$$

**16.5** 锂的光电效应红限波长  $\lambda_0 = 0.50 \mu\text{m}$ , 求:

(1) 锂的电子逸出功;

(2) 用波长  $\lambda = 0.33 \mu\text{m}$  的紫外光照射时的遏止电压.

**解** (1) 锂的逸出功

$$A = h\nu_0 = h \frac{c}{\lambda_0} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{0.5 \times 10^{-6}} = 3.98 \times 10^{-19} \text{ (J)} = 2.49 \text{ eV}$$

(2) 波长为  $0.33 \mu\text{m}$  的光子能量

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{0.33 \times 10^{-6}} = 6.03 \times 10^{-19} \text{ (J)} = 3.77 \text{ eV}$$

遏止电压

$$U_a = \frac{1}{e} \left( \frac{1}{2} m v_m^2 \right) = \frac{1}{e} (h\nu - A) = \frac{1}{e} (3.77 \text{ eV} - 2.49 \text{ eV}) = 1.28 \text{ V}$$

**16.6** 测得投射在某种金属上的光波波长  $\lambda$  和相应遏止电压  $U_a$  的数据如下:

|                     |       |       |       |       |       |       |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\lambda/\text{nm}$ | 253.6 | 283.0 | 303.9 | 330.2 | 366.3 | 435.8 |
| $U_a/\text{V}$      | 2.60  | 2.11  | 1.81  | 1.47  | 1.10  | 0.57  |

(1) 在坐标纸上作出  $U_a - \nu$  图线;

(2) 利用图线求出该金属的光电效应红限频率和波长;

(3) 利用图线求出普朗克常数.

**解** 由  $\nu = \frac{c}{\lambda}$  求出和  $U_a$  的对应关系

|                          |       |       |       |       |       |       |
|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\lambda/\text{nm}$      | 253.6 | 283.0 | 303.9 | 330.2 | 366.3 | 435.8 |
| $\nu/10^{14} \text{ Hz}$ | 11.8  | 10.6  | 9.87  | 9.09  | 8.19  | 6.88  |
| $U_a(\text{V})$          | 2.60  | 2.11  | 1.81  | 1.47  | 1.10  | 0.57  |

(1)  $U_a - \nu$  图线如图所示

(2) 由  $U_a - \nu$  图线可知截止频率

$$\nu_0 = 5.53 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

故红限波长为

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{3 \times 10^8}{5.53 \times 10^{14}} = 0.542 \times 10^{-6} = 0.542 \mu\text{m}$$

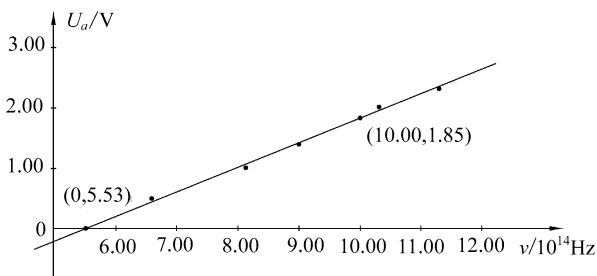


图 16.6

$$(3) \quad U_a = \frac{1}{e} (h\nu - h\nu_0) = \frac{h}{e} \nu - \frac{h}{e} \nu_0$$

$$\Delta U_a = \frac{h}{e} \Delta \nu, \quad h = \frac{\Delta U_a}{\Delta \nu} e$$

其中  $\frac{\Delta U_a}{\Delta \nu}$  为  $U_a - \nu$  图线的斜率  $k$ ,

$$k = \frac{\Delta U_a}{\Delta \nu} = \frac{1.85 - 0}{(10 - 5.53) \times 10^{14}} = 4.13 \times 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s}$$

$$h = e \cdot k = 1.6 \times 10^{-19} \times 4.13 \times 10^{-15} = 6.61 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

**16.7** 一光子的能量等于电子静能, 计算其频率、波长和动量. 在电磁波谱中, 它属于哪种射线?

**解** 电子静能

$$E_0 = m_0 c^2 = 9.11 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16} = 8.20 \times 10^{-14} \text{ (J)}$$

则光子

$$\nu = \frac{E_0}{h} = \frac{8.20 \times 10^{-14}}{6.63 \times 10^{-34}} = 1.24 \times 10^{20} \text{ (Hz)}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E_0} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{8.20 \times 10^{-14}} = 2.42 \times 10^{-12} \text{ (m)}$$

它属于  $\gamma$  射线

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{E_0}{c} = \frac{8.20 \times 10^{-14}}{3 \times 10^8} = 2.73 \times 10^{-22} \text{ (kg} \cdot \text{m/s)}$$

**16.8** 求下列各种射线光子的能量、动量和质量:

(1)  $\lambda = 0.70 \mu\text{m}$  的红光;

(2)  $\lambda = 0.025 \text{ nm}$  的 X 射线;

(3)  $\lambda = 1.24 \times 10^{-3} \text{ nm}$  的  $\gamma$  射线.

**解** 光子的能量

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

动量

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

质量

$$m_{\varphi} = \frac{p}{c} = \frac{h}{\lambda c}$$

(1)对  $\lambda=0.70 \mu\text{m}$  的红光光子:

$$E = 2.84 \times 10^{-19} \text{ J} = 1.78 \text{ eV}$$

$$p = 9.47 \times 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$m_{\varphi} = 3.16 \times 10^{-36} \text{ kg}$$

(2)对  $\lambda=0.025 \text{ nm}$  的 X 射线光子:

$$E = 7.96 \times 10^{-15} \text{ J} = 4.98 \times 10^4 \text{ eV}$$

$$p = 2.65 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$m_{\varphi} = 8.84 \times 10^{-32} \text{ kg}$$

(3) $\lambda=1.24 \times 10^{-3} \text{ nm}$  的  $\gamma$  射线光子:

$$E = 1.60 \times 10^{-13} \text{ J} = 10^6 \text{ eV}$$

$$p = 5.53 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$m_{\varphi} = 1.78 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

**16.9** 在天体物理中,一条重要辐射线的波长为  $21 \text{ cm}$ ,问这条辐射线相应的光子能量等于多少?

**解** 光子能量

$$\begin{aligned} E = h\nu &= h \frac{c}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{21 \times 10^{-2}} = 0.95 \times 10^{-24} (\text{J}) \\ &= 0.59 \times 10^{-5} \text{ eV} \end{aligned}$$

即辐射线相应的光子能量为  $0.59 \times 10^{-5} \text{ eV}$ .

**16.10** 问太阳辐射光子的速率为多大? 为简单计,假设太阳发射的是  $\lambda=550 \text{ nm}$  的单色光,单位时间辐射能量为  $9 \times 10^{26} \text{ J}$ .

**解** 设太阳辐射光子的速率为  $n$ ,每个光子的能量

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

单位时间内辐射的能量

$$W = nE, \quad n = \frac{W}{E} = \frac{W\lambda}{hc}$$

$$n = \frac{9 \times 10^{26} \times 550 \times 10^{-9}}{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = 2.49 \times 10^{45} (\text{个} / \text{s})$$

**16.11** 1960 年第 11 届国际计量大会曾决定, 1 m 等于  $^{86}\text{Kr}$  的  $2p_{10}$  和  $5d_5$  能级间跃迁辐射在真空中的 1,650,763.73 个波长, 这条辐射线相应的光子能量等于多少?

**解** 辐射线的波长

$$\lambda = \frac{1}{1650763.73} = 6.0578021 \times 10^{-7} (\text{m})$$

辐射线的能量

$$\begin{aligned} E = h\nu &= h \frac{c}{\lambda} = 6.63 \times 10^{-34} \times \frac{3 \times 10^8}{6.058 \times 10^{-7}} \\ &= 3.28 \times 10^{-19} (\text{J}) = 2.05 \text{ eV} \end{aligned}$$

**16.12** 一波长  $\lambda_1 = 200 \text{ nm}$  的紫外光源和一波长  $\lambda_2 = 700 \text{ nm}$  的红外光源, 两者的功率都是 400 W, 问: (1) 哪一个光源单位时间内产生的光子多? (2) 单位时间内产生的光子数等于多少?

**解** (1) 光子的能量

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

设光源单位时间内产生的光子数为  $n$

则光源的功率

$$w = nE = \frac{nhc}{\lambda}, \quad n = \frac{w\lambda}{hc}$$

$w$  相同时,  $\lambda$  越大,  $n$  越大, 而  $\lambda_2 > \lambda_1$ , 所以红外光源产生的光子多.

(2) 红外光源

$$n_2 = \frac{w\lambda}{hc} = \frac{400 \times 700 \times 10^{-9}}{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = 1.408 \times 10^{21} (\text{个} / \text{s})$$

对紫外光

$$n_1 = \frac{400 \times 200 \times 10^{-9}}{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = 0.402 \times 10^{21} (\text{个} / \text{s})$$

**16.13** 波长  $\lambda = 0.0708 \text{ nm}$  的 X 射线在石蜡上受到康普顿散射, 求在  $\frac{\pi}{2}$  和  $\pi$  方向上散射 X 射线的波长.

**解** 康普顿波长偏移公式

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ 时}$$

$$\Delta\lambda = \frac{2 \times 6.63 \times 10^{-34}}{9.11 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8} \sin^2 \frac{\pi}{4} = 0.0024 \text{ (nm)}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = 0.0708 + 0.0024 = 0.0732 \text{ (nm)}$$

$\theta = \pi$  时

$$\Delta\lambda = \frac{2 \times 6.63 \times 10^{-34}}{9.11 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8} \times \sin^2 \frac{\pi}{2} = 0.0048 \text{ (nm)}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = 0.0756 \text{ nm}$$

**16.14** 一光子与自由电子碰撞,电子可能获得的最大的能量为 6 keV,求入射光子的波长和能量(用 J 和 eV).

**解** 光子反向弹回时( $\theta = \pi$ ),电子将获得最大的能量

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2 \times 6.63 \times 10^{-34}}{9.11 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8} \sin^2 \frac{\theta}{2} = 0.0048 \text{ (nm)}$$

电子获得的能量

$$E_k = h\nu - h\nu' = hc \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_0 + \Delta\lambda} \right) = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)}$$

整理后得

$$\lambda_0^2 + \lambda_0\Delta\lambda - \frac{hc\Delta\lambda}{E_k} = 0$$

解得入射光波长

$$\lambda_0 = -\frac{\Delta\lambda}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2 + \frac{hc\Delta\lambda}{E_k}}$$

其中

$$E_k = 6 \text{ keV}, \quad \Delta\lambda = 0.0048 \text{ nm}$$

得

$$\lambda_0 = 0.00786 \text{ nm}$$

入射光子能量

$$E = \frac{hc}{\lambda_0} = 2.53 \times 10^{-14} \text{ J} = 158 \text{ keV}$$

**16.15** 已知 X 光光子能量为 0.60 MeV,在康普顿散射后波长改变了 20%,求反冲电子获得的能量和动量大小.

**解** 由题意

$$h\nu_0 = 0.60 \text{ MeV}, \quad \lambda = 1.2\lambda_0$$

故反冲电子获得的能量为

$$E_k = hc \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{hc}{\lambda_0} \left( 1 - \frac{1}{1.2} \right) = \frac{1}{6} \frac{hc}{\lambda_0} = 0.10 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-14} \text{ J}$$

由相对论能量和动量关系有

$$p^2 c^2 = E^2 - m_0^2 c^4 = E^2 - E_0^2$$

$$p = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c}$$

且  $E = E_0 + E_k$

$$E_0 = m_0 c^2 = 9.11 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16} = 8.2 \times 10^{-14} \text{ (J)}$$

所以

$$p = \frac{\sqrt{E_k(E_k + 2E_0)}}{c} = \frac{\sqrt{1.6 \times (1.6 + 2 \times 8.2) \times 10^{-14}}}{3 \times 10^8} \\ = 1.79 \times 10^{-22} \text{ (kg} \cdot \text{m/s)}$$

**16.16** 用相对论力学方法,通过分析光子与自由电子碰撞,证明光子不可能将其能量全部转移给电子.

**证明** 设自由电子静止质量为  $m_0$ ,它与光子碰撞后吸收光子,然后以速度  $v_2$  运动,电子碰前速度为  $v_1$ ,碰前电子和光子的夹角为  $\theta_1$ ,碰后为  $\theta_2$ ,如图 16.16 所示

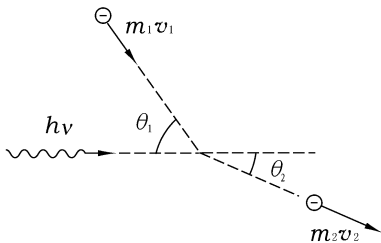


图 16.16

由碰撞时动量守恒得

$$\frac{h\nu}{c} + m_1 v_1 \cos \theta_1 = \frac{m_0 v_2}{\sqrt{1 - (v_2/c)^2}} \cos \theta_2 \quad (1)$$

$$m_1 v_1 \sin \theta_1 = \frac{m_0 v_2}{\sqrt{1 - (v_2/c)^2}} \sin \theta_2 \quad (2)$$

由式(1)和(2)消去  $\theta_2$ ,解出

$$v_2 = c \frac{h^2 \nu^2 + m_1^2 v_1^2 c^2 + 2 h \nu m_1 v_1 \cos \theta_1}{m_0^2 c^4 + h^2 \nu^2 + m_1^2 v_1^2 c^2 + 2 h \nu m_1 v_1 \cos \theta_1}$$

又由能量守恒有

$$h\nu + m_1 c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v_2/c)^2}} \cdot c^2$$

$$v_2 = \frac{c \sqrt{h^2 v^2 + (m_1^2 - m_0^2) c^4 + 2 h \nu m_1 c^2}}{h\nu + m_1 c^2}$$

可见由此两条件得到的电子碰后速度不相等,这说明光子不可能把自己的能量全部转移给电子.

**16.17** 子弹质量  $m=40 \text{ g}$ , 速率  $v=100 \text{ m/s}$ , 试问:

(1) 与子弹相联系的物质波长等于多少?

(2) 为什么子弹的物质波性不能通过衍射效应显示出来?

**解** (1) 子弹的动量

$$p = mv = 40 \times 10^{-3} \times 100 = 4 \text{ (kg} \cdot \text{m/s)}$$

与子弹相联系的德布罗意波长

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4} = 1.66 \times 10^{-34} \text{ (m)}$$

(2) 由于子弹的物质波的波长的数量级为  $10^{-34} \text{ m}$ , 比原子核的大小(约  $10^{-14} \text{ m}$ ) 还小得多, 因此不能通过衍射效应显示出来.

**16.18** 解释下列概念: 定态、基态、激发态、量子化条件、发射、吸收.

**定态:** 原子处于一系列具有不连续能量的稳定状态, 处于这些状态的原子中的电子不辐射能量.

**基态:** 原子处于能量的最低状态, 即能量量子数  $n=1$  的稳定态叫基态.

**激发态:** 原子能量量子数  $n=2, 3, \dots$  的各定态.

**量子化条件:** 指物理量的离散化条件, 即某物理量(如角动量)是某一基本单元的整数倍条件(决定原子系统可能存在的各种定态的条件).

**发射:** 原子由高能态向低能态跃迁时, 放出光子的过程.

**吸收:** 原子由低能态获得能量跃迁到高能态的过程.

**16.19** 在气体放电管中, 用动能为  $12.2 \text{ eV}$  电子轰击处于基态的氢原子, 试求氢原子被激发后所能发射的光谱线波长.

**解** 氢原子能量量子化条件是:

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$E_0 = 13.6 \text{ eV} \quad E_1 = -13.6 \text{ eV}$$

$$E_2 = -3.4 \text{ eV} \quad E_3 = -1.5 \text{ eV}$$

$$E_4 = -0.85 \text{ eV} \quad E_4 - E_1 = 12.75 \text{ eV}$$

$$E_3 - E_1 = 12.10 \text{ eV}$$

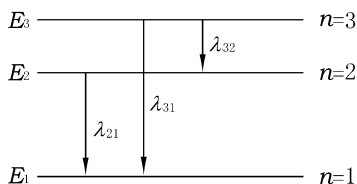


图 16.19

因此,当用动能为 12.2 eV 的电子轰击基态氢原子,最多可把氢原子激发到  $n=3$  的受激态,则可能发射的光谱线如图所示,波长计算如下:

$$\lambda_{nm} = \left[ R_H \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \right]^{-1} = \frac{1}{R_H} \frac{m^2 n^2}{n^2 - m^2} \quad (n > m)$$

$$\lambda_{31} = \frac{1}{1.097 \times 10^7} \times \frac{1^2 \times 3^2}{3^2 - 1^2} = 102.5 \text{ nm}$$

$$\lambda_{32} = \frac{1}{1.097 \times 10^7} \times \frac{2^2 \times 3^2}{3^2 - 2^2} = 656.4 \text{ nm}$$

$$\lambda_{21} = \frac{1}{1.097 \times 10^7} \times \frac{1^2 \times 2^2}{2^2 - 1^2} = 121.5 \text{ nm}$$

**16.20** 根据玻尔理论计算当氢原子处于基态时,电子的速率  $v$  和绕行频率  $\nu$ ,并求出  $v/c$ ,将  $\nu$  和可见光谱频率相比较.

**解** 按玻尔理论,当氢原子处于量子数为  $n$  的定态时,电子速率  $v$  和绕行频率  $\nu$  可由下式决定:

$$mv_n r_n = n \hbar \quad \nu = \frac{v}{2\pi r_n} = \frac{n \hbar}{2\pi m r_n^2}$$

氢原子处于量子数为  $n=1$ ,  $r=0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$  的轨道可求得

$$v_1 = \frac{\hbar}{m r_1} = \frac{1 \times 1.05 \times 10^{-34}}{9.11 \times 10^{-31} \times 0.53 \times 10^{-10}} = 2.2 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$\nu_1 = \frac{\hbar}{2\pi m r_1^2} = \frac{1 \times 1.05 \times 10^{-34}}{2 \times 3.14 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 0.53^2 \times 10^{-20}} = 6.5 \times 10^{13} \text{ Hz}$$

$$\frac{v_1}{c} = \frac{2.2 \times 10^6}{3 \times 10^8} = 7.3 \times 10^{-3}$$

可见光频率为  $10^{14} \text{ Hz}$  数量级,  $\nu_1$  为  $10^{13} \text{ Hz}$  数量级.

**16.21** 计算初速很小的电子经过 100 V, 1000 V 电压加速后的德布罗意波长.

**解** 在加速电压  $U \leq 10^4 \text{ V}$  时,可不计相对论效应,电压加速使电子的动能增加有

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 = eU$$

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}, \quad \lambda = \frac{h}{m_0 v} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 e}} \frac{1}{\sqrt{U}}$$

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}, \quad m_0 = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}, \quad e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \text{ 代入得}$$

$$\lambda = \frac{1.255}{\sqrt{U}} \text{ nm}$$

$$U = 100 \text{ V 时}, \quad \lambda = \frac{1.225}{\sqrt{100}} = 0.123 \text{ nm}$$

$$U = 1000 \text{ V 时}, \quad \lambda = \frac{1.225}{\sqrt{1000}} = 0.039 \text{ nm}$$

**16.22** 当电子的德布罗意波长等于其康普顿波长时,求:

(1) 电子动量;

(2) 电子速率与光速的比值.

**解** 由题意得电子的德布罗意波长等于其康普顿波长,即  $\frac{h}{mv} = \frac{h}{m_0 c}$

(1) 电子动量

$$p = mv = m_0 c = 9.11 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8 = 2.73 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$(2) \frac{v}{c} = \frac{p/m}{c} = \frac{m_0 c/m}{c} = \frac{m_0}{m} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

得

$$\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2} c$$

**16.23** 常温下的中子称为热中子.试计算  $T=300 \text{ K}$  时,热中子的平均动能,由此估算其德布罗意波长.

**解** 热中子的平均动能等于其平均平动动能

$$\epsilon_k = \frac{3}{2} kT$$

$$\epsilon_k = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-38} \times 300 = 6.21 \times 10^{-23} \text{ (J)}$$

热中子动量与动能关系

$$\epsilon_k = \frac{p^2}{2m}, \quad p = \sqrt{2m\epsilon_k}$$

$$p = \sqrt{2 \times 1.67 \times 10^{-27} \times 6.21 \times 10^{-23}} = 4.5 \times 10^{-25} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

故

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4.5 \times 10^{-25}} = 1.45 \times 10^{-9} \text{ m}$$

此即为热中子的德布罗意波长.

**16.24** 若一个电子的动能等于它的静能,试求:该电子的动量、速度、德布罗意波长.

**解** 由题意知,电子

$$E_k = m_0 c^2 = E_0, \quad E = E_k + m_0 c^2 = 2E_0$$

由相对论能量和动量关系可知

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

$$p = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c} = \frac{\sqrt{3} E_0}{c} = \sqrt{3} \times 9.11 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8$$

$$= 4.73 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$mv = p, \quad v = \frac{p}{m}$$

$$\text{因 } E = mc^2 = 2m_0 c^2$$

所以

$$v = \frac{p}{2m_0} = \frac{\sqrt{3} E_0}{2m_0 c} = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 0.866 c$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4.73 \times 10^{-22}} = 1.40 \times 10^{-12} = 0.0014 \text{ nm}$$

**16.25** 光子与电子的波长都是  $0.2 \text{ nm}$ , 它们的动量和总能量各为多少? 电子动能为多少?

**解** 光子和电子的波长相等, 动量相等

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{0.2 \times 10^{-9}} = 3.31 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

光子和电子的能量不相同.

光子能量

$$\epsilon = h\nu = h \frac{c}{\lambda} = pc = 3.31 \times 10^{-24} \times 3 \times 10^8 = 9.96 \times 10^{-16} \text{ J} = 6.2 \text{ keV}$$

电子能量

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = \sqrt{(6.2 \times 10^3)^2 + (0.51 \times 10^6)^2} \approx 0.51 \text{ MeV}$$

其中  $0.51 \times 10^6 \text{ eV}$  为电子静止时的能量  $m_0 c^2$ .

电子动能

$$\begin{aligned} E_k &= E - E_0 = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m_0} \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2 \times 9.11 \times 10^{-31}} \times \left( \frac{6.63 \times 10^{-34}}{0.2 \times 10^{-9}} \right)^2 \\ &= 6.03 \times 10^{-18} \text{ (J)} = 37.7 \text{ eV} \end{aligned}$$

**16.26** 试证明玻尔圆轨道的周长恰好等于电子的德布罗意波长的整数倍, 即定态轨道满足形成驻波的条件.

**解** 由玻尔理论的角动量量子化条件

$$mvr = n\hbar = n \frac{h}{2\pi}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{nh/2\pi r} = \frac{2\pi r}{n}$$

即  $2\pi r = n\lambda$  定态轨道满足形成驻波的条件。

**16.27** 一粒子被禁闭在长度为  $a$  的一维箱中运动,其定态为驻波.试根据德布罗意关系式和驻波条件证明:该粒子定态动能是量子化的,求出量子化能级和最小动能公式(不考虑相对论效应).顺便指出,这些公式与严格求解量子力学方程所得结果恰好完全相同。

**解** 粒子在长度为  $a$  的一维箱中,形成驻波条件为

$$a = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{即} \quad \lambda = \frac{2a}{n}$$

由德布罗意关系式

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{nh}{2a}$$

在非相对论条件下,粒子动能和动量关系为

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

$$E_k = \frac{1}{2m} \left( \frac{nh}{2a} \right)^2 = \frac{n^2 h^2}{8ma^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

可见粒子的动能是量子化的,最小动能为  $n=1$  时动能取值

$$E_{k1} = \frac{h^2}{8ma^2}$$

**16.28** 作一维运动的电子,其动量不确定量是  $\Delta p_x = 10^{-25} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ,能将这个电子约束在内的最小容器的大概尺寸是多少?

**解** 由不确定关系,这个电子的位置不确定量  $\Delta x$  为

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{1.05 \times 10^{-34}}{2 \times 10^{-25}} = 0.53 \times 10^{-9} (\text{m})$$

即能将该电子容纳在内的容器最小尺寸为  $0.53 \times 10^{-9} \text{ m}$ 。

**16.29** 利用 16.27 题结果,计算下列电子和质子的最小动能

(1)对于电子,假设  $a = 10^{-10} \text{ m}$  (相当于原子线度);

(2)对于质子,假设  $a = 10^{-14} \text{ m}$  (相当于原子核线度);

**解** 由题 16.27 结果知,对于长为  $a$  的一维箱中的粒子,最小动能为

$$E_1 = \frac{h^2}{8ma^2}$$

(1)对电子,有  $a = 10^{-10} \text{ m}$

$$E_1 = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{8 \times 9.11 \times 10^{-31} \times (10^{-10})^2} = 6.0 \times 10^{-18} (\text{J}) = 38 \text{ eV}$$

(2)对于质子,有  $a = 10^{-14} \text{ m}$

$$E_1 = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{8 \times 1.67 \times 10^{-27} \times (10^{-14})^2} = 3.3 \times 10^{-13} \text{ (J)} = 2.1 \times 10^6 \text{ eV}$$

**16.30** (1) 如果一个电子处于某能态的时间为  $10^{-8} \text{ s}$ , 这个能态的能量的最小不确定量为多少?

(2) 设电子从该能态跃迁到基态, 辐射能量为  $3.4 \text{ eV}$  的光子, 求这个光子的波长及这个波长的最小不确定量.

**解** (1) 电子处于能态时间  $\Delta t = 10^{-8} \text{ s}$ , 由不确定关系, 其能量的不确定量为  $\Delta E$ , 有

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{1.05 \times 10^{-34}}{2 \times 10^{-8}} = 0.53 \times 10^{-26} \text{ (J)}$$

(2) 电子跃迁到基态辐射光子能量为  $3.4 \text{ eV}$ , 光子的波长为  $\lambda$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{3.4 \times 1.6 \times 10^{-19}} = 3.66 \times 10^{-7} \text{ (m)} = 366 \text{ nm}$$

光子的波长不确定量由跃迁时, 激发态的能量不确定引起

由  $\lambda = \frac{hc}{E}$  求微分得  $\Delta \lambda = \frac{hc}{E^2} \Delta E$

$$\Delta \lambda = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{(3.4 \times 1.6 \times 10^{-19})^2} = 3.56 \times 10^{-15} \text{ (m)} = 3.56 \times 10^{-6} \text{ nm}$$

**16.31** 一个电子的速率为  $3 \times 10^6 \text{ m/s}$ , 如果测定速率的不准确度为  $1\%$ , 同时测定电子位置的不准确量是多少? 如果这是原子中的电子, 可以认为它作轨道运动吗?

**解** 电子速率的不确定量

$$\Delta v_x = v \times 1\% = 3 \times 10^6 \times 1\% = 3 \times 10^4 \text{ (m/s)}$$

由不确定关系知, 位置的不确定量  $\Delta x$ , 有

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2m\Delta v_x} = \frac{1.05 \times 10^{-34}}{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^4} = 1.92 \times 10^{-9} \text{ (m)}$$

如果这个电子是在原子中, 则由于电子位置的不确定量与玻尔轨道半径(数量级  $10^{-10} \text{ m}$ ) 相同, 因此不能认为电子作轨道运动.

**16.32** 氦氖激光器所发红光波长为  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ , 谱线宽度  $\Delta \lambda = 10^{-9} \text{ nm}$ . 试求该光子沿运动方向的位置不确定量(即为波列长度).

**解** 光子动量

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

动量不确定量和波长不确定量关系为

$$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda^2} \Delta \lambda$$

由不确定关系有

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda} = \frac{(6.328 \times 10^{-7})^2}{4 \times 3.14 \times 10^{-18}} = 3.2 \times 10^4 (\text{m}) = 32 \text{ km}$$

**16.33** 根据不确定关系,估算被禁闭在长度为  $a$  的一维箱中运动的粒子的最小动能(零点能),并与 16.27 题的结果相比较.

**解** 粒子动能  $E_k = \frac{p^2}{2m}$ , 估算最小动能时, 可以认为  $p^2 = (\Delta p)^2$

而由不确定关系

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}, \quad \Delta p_{\min} = \frac{\hbar}{2\Delta x}$$
$$E_{k\min} = \frac{(\Delta p_{\min})^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{2\Delta x} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{8ma^2} = \frac{h^2}{32\pi^2 ma^2}$$

和 16.27 题结果  $\frac{h^2}{8ma^2}$  相比, 仅有系数差异.

**16.34** 一维无限深势阱中粒子的定态波函数为  $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$ . 试

求, 粒子在  $x=0$  到  $x=\frac{a}{3}$  之间被找到的概率, 当

(1) 粒子处于基态时;

(2) 粒子处于  $n=2$  的状态时.

**解** (1) 当粒子处于基态时,  $\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}$ , 粒子在  $x=0$  到  $x=\frac{a}{3}$  之间被找到概率为

$$W = \int_0^{\frac{a}{3}} |\psi_1(x)|^2 \cdot dx = \frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{3}} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cdot dx = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0.19$$

(2) 粒子处于  $n=2$  的激发态时,  $\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}$

$$W = \int_0^{\frac{a}{3}} |\psi_2(x)|^2 \cdot dx = \frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{3}} \sin^2 \frac{2\pi x}{a} \cdot dx = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi} = 0.40$$

**16.35** 求出能够占据一个  $d$  支壳层的最多电子数, 并写出这些电子的  $m_l$  和  $m_s$  值.

**解**  $d$  支壳层就是  $l=2$  的支壳层, 最多能容纳的电子数为  $Z_e$ .

$$Z_e = 2(2l+1) = 2(2 \times 2 + 1) = 10 \text{ 个}$$

磁量子数  $m_l$  值可为

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2$$

自旋量子数  $m_s$  值可为

$$m_s = \pm \frac{1}{2}$$

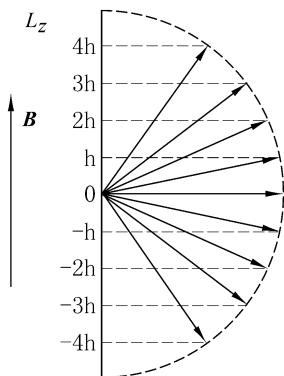


图 16.36

**16.36** 试描绘,原子中  $l=4$  时的电子的轨道角动量  $L$  在磁场中空间量子化的示意图,写出  $L$  在磁场方向投影  $L_z$  的各种可能值.

**解** 副量子数为  $l=4$  时,轨道角动量大小

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar = 4.47 \hbar$$

磁量子数  $m_l$  取值可为  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$

$L_z = m_l \hbar$ , 可取  $0, \pm \hbar, \pm 2 \hbar, \pm 3 \hbar, \pm 4 \hbar$ , 共 9 种值. 因此轨道角动量  $L$  在外磁场  $B$  中的 9 种不同空间取向如图所示.

**16.37** 试写出  $n=4, l=3$  壳层所属各态的量子数

**解** 当  $n=4, l=3$  时,磁量子数  $m_l$  可能值为  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ , 共 7 种. 自旋量子数  $m_s$  的量子数可能值为  $\pm \frac{1}{2}$ .

**16.38** 已知一原子具有最大  $m_l = \pm 4$ , 你能对其它量子数作何说明?

**解** 由  $m_l$  最大值  $\pm 4$ , 可知原子角量子  $l$  值应为 4, 即  $l=4$ , 又由主量子数  $n$  和角动量数  $l$  的关系知, 主量子数  $n \geq 5$ , 而原子所处的自旋量子数可能有两种状态, 即

$$m_s = \pm \frac{1}{2}$$

**16.39**  $n=5$  壳层中电子可能的状态有哪些?

**解**  $n=5$  壳层中电子可能的状态为  $(5, l, m_l, m_s)$ , 其中  $l$  可取  $0, 1, 2, 3, 4$ ,  $m_l$  可取  $0, \pm 1, \dots, \pm l$ ,  $m_s$  可取  $\pm \frac{1}{2}$ , 共  $\sum_{l=0}^4 2(2l+2) = 50$  种.

## 第 17 章 原子核基本知识简介

### 一、基本内容和主要公式

#### 1. 原子核的基本性质

(1) 原子质量单位: 一个处于基态的中性 $^{12}_6\text{C}$  原子质量的  $1/12$  定义为原子质量单位.

$$1\text{ u} = 1.660\,540\,2 \times 10^{-27}\text{ kg}$$

(2) 原子核的半径: 原子核半径  $R$  可近似地表示为

$$R = r_0 A^{1/3}$$

式中  $r_0 = 1.20\text{ fm}$  是对所有核都适合的一个常量,  $A$  为核质量数.

(3) 原子核的角动量(核自旋)和磁矩

核自旋:

$$P_I = I(I+1)\hbar$$

式中  $I$  称为核自旋量子数. 核自旋  $P_I$  在给定方向的投影为  $m_I\hbar$ ,  $m_I$  称为原子核的磁量子数.

原子核的磁矩:

$$\mu_I = g_I I(I+1)\mu_N$$

式中  $\mu_N = e\hbar/2m_p c = 5.050\,787 \times 10^{-27}\text{ J/T}$ , 称为核磁子, 是原子核磁矩的单位; 式中  $g_I$  称为原子核的  $g$  因子, 是一个纯数.

原子核磁矩在给定方向的投影可能取值为  $g_I m_I \mu_N$ , 投影的最大可能值为

$$\mu'_I = g_I I \mu_N$$

(4) 原子核的结合能: 原子核的质量亏损记为  $\Delta m(Z, A)$ , 通常可用中性原子的质量表示为

$$\Delta m(Z, A) = ZM(^1\text{H}) + (A - Z)m_n - M(Z, A)$$

原子核的结合能  $B$  为

$$B(Z, A) = \Delta m(Z, A)c^2 = [ZM(^1\text{H}) + (A - Z)m_n - M(Z, A)]c^2$$

#### 2. 核力和核结构

(1) 核力的主要性质: 核力是短程强作用力; 核力与核子的电荷无关; 核力是具有饱和性的交换力; 核力与自旋有关; 核力中除了有心力外, 还包含有微弱的非有心力成分.

(2) 核结构模型: 核结构模型主要有液滴模型、壳层模型和集体模型等.

### 3. 放射性衰变的基本规律

(1) 指数衰变律:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

(2) 半衰期:放射性原子核数衰变到原来数目的一半所需的时间

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

平均寿命:每个放射性原子核衰变前存在时间的平均值

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2}$$

(3) 放射性活度:一个放射源在单位时间内发生衰变的原子核数目

$$I = \lambda N = I_0 e^{-\lambda t}$$

式中  $I_0 = \lambda N_0$  为  $t=0$  时放射源的活度.

### 4. 核反应的能量

(1) 反应能  $Q$ :

$$Q = (E_b + E_B) - (E_a + E_A) = (M_a + M_A - M_b - M_B)c^2$$

反应能  $Q > 0$ , 称为放能反应;  $Q < 0$ , 称为吸能反应.

(2) 核反应的  $Q$  方程:

$$Q = \left( \frac{M_b}{M_B} + 1 \right) E_b + \left( \frac{M_a}{M_B} - 1 \right) E_a - \frac{2 \sqrt{M_a M_b E_a E_b}}{M_B} \cos \theta$$

(3) 阈能  $E_t$ :对于吸热核反应,能引起核反应的入射粒子(核)的最低动能

$$E_t = \frac{M_A + M_a}{M_A} |Q|$$

**5. 核裂变与核聚变** 核能是由原子核结合能发生变化而产生的.重核的裂变和轻核的聚变是取得核能两条重要的途径.依靠裂变,人们不仅制造了原子弹,而且建造了原子核反应堆,前者是不可控制的过程,后者是可控制地获取能量.依靠聚变取得能量的例子有:太阳能(引力约束聚变),氢弹(惯性约束聚变)等.人们可控地获取聚变能尚有一定的距离,其必需解决一个关键性问题,即将处于高温的等离子体约束在一定范围内,惯性约束和磁约束是目前研究约束高温等离子体的两种最有希望的方法.

**6. 核磁共振(NMR)** 在恒定磁场中,磁矩不为零的原子核受射频场(3 kHz ~ 3000 GHz)的激励,发生磁能级间共振跃迁(或吸收)的现象.

共振跃迁(或吸收)条件:  $h\nu = g_I \mu_N B$

**7. 穆斯堡尔效应** 一种原子核无反冲的  $\gamma$  射线共振散射或吸收现象.

反冲能量:

$$E_R = \frac{E^2}{2mc^2}$$

能级宽度:

$$\Gamma \approx \hbar/\tau$$

发射的  $\gamma$  射线相对线宽:

$$\frac{\Gamma_A}{E_\gamma} = \frac{2\Gamma}{E}$$

## 二、典型例题

**17-1** 已知 ${}^7_3\text{Li}$ 原子的质量  $M_{\text{Li}}=7.016\,004\text{u}$ ,试计算 ${}^7_3\text{Li}$ 核的结合能和比结合能分别为多少?

解  ${}^1_1\text{H}$  原子的质量为  $M_{\text{H}}=1.007\,825\text{u}$

中子的质量为  $m_{\text{n}}=1.008\,665\text{u}$

${}^7_3\text{Li}$  原子的质量为  $M_{\text{Li}}=7.016\,004\text{u}$

因此,质量亏损  $\Delta m$  为

$$\Delta m = (3 \times 1.007\,825 + 4 \times 1.008\,665)\text{u} - 7.016\,004\text{u} = 0.042\,131\text{u}$$

结合能  $B$  为

$$B = 0.042\,131 \times 931.49 = 39.24\text{ (MeV)}$$

比结合能为

$$\frac{B}{A} = \frac{39.24}{7} = 5.61\text{ (MeV)}$$

**说明** 计算原子核的结合能时,首先要获得该原子核对应的原子质量、氢原子的质量和中子的质量,然后计算出其质量亏损  $\Delta m$ .再由  $B=\Delta mc^2$  可得到结合能.通常,质量亏损以  $\text{u}$  为单位,只要乘以  $931.49(1\text{u}$  的质量所相当的能量)就得到以  $\text{MeV}$  为单位的结合能.

**17-2**  ${}^{60}_{27}\text{Co}$  是重要医用放射性同位素,它的半衰期为  $5.27$  年.试计算

(1) 衰变常量和平均寿命;

(2)  $1$  年衰变的份额;

(3)  $1\text{g } {}^{60}_{27}\text{Co}$  的放射性活度和  $100\text{ mCi}$  的钴源中所含有 ${}^{60}_{27}\text{Co}$  的质量.

解 (1) 由  $T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2$  得 ${}^{60}_{27}\text{Co}$  的衰变常量为

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0.693}{5.27 \times 365 \times 24 \times 3\,600} = 4.17 \times 10^{-9} (\text{s}^{-1})$$

平均寿命为

$$\tau = \frac{T}{\ln 2} = \frac{5.27}{0.693} = 7.60(\text{年}) = 2.40 \times 10^8 \text{ s}$$

(2) 由  $N = N_0 e^{-\lambda t}$  有

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{t}{\tau} \ln 2} = 2^{-t/T}$$

因此,1年中衰变的份额为

$$1 - \frac{N}{N_0} = 1 - 2^{-1/5.27} = 12.3\%$$

(3) 由  $m = \frac{MN}{N_A}$  得,  $1\text{g } ^{60}\text{Co}$  中所含的原子数目为

$$N_1 = \frac{m_1 N_A}{M} = \frac{1 \times 6.022 \times 10^{23}}{60} = 1.0 \times 10^{22} (\text{个})$$

因此,  $1\text{g } ^{60}\text{Co}$  的放射性活度  $I_1$  为

$$I_1 = \lambda N_1 = 4.17 \times 10^{-9} \times 1.0 \times 10^{22} = 4.17 \times 10^{13} (\text{Bq})$$

而  $100 \text{ mCi}$  钴源中含  $^{60}\text{Co}$  的数目为

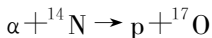
$$N_2 = \frac{I_2}{\lambda} = \frac{100 \times 10^{-3} \times 3.7 \times 10^{10}}{4.17 \times 10^{-9}} = 8.87 \times 10^{17} (\text{个})$$

故,  $100 \text{ mCi}$  钴源所含  $^{60}\text{Co}$  的质量为

$$m_2 = \frac{MN_2}{N_A} = \frac{60 \times 8.87 \times 10^{17}}{6.022 \times 10^{23}} = 8.84 \times 10^{-5} (\text{g})$$

**说明** 半衰期、衰变常量和平均寿命是一个核的标志,三者之间的关系为  $T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2$ , 此式在放射性问题计算中经常使用. 衰变规律  $N = N_0 e^{-\lambda t}$  是又一个在关于放射性问题计算中经常使用的公式,其又可表示成为  $N = N_0 2^{-t/T}$ .

**17-3** 1919年,卢瑟福利用  $^{212}\text{Po}$  放射出的能量为  $7.67 \text{ MeV}$  的  $\alpha$  粒子去轰击氮气,发生了反应



这是人类历史上第一次人工实现使一个元素变成了另一个元素. 已知  ${}^{14}\text{N}$  的质量  $M_A = 14.003\,074 \text{ u}$  和  ${}^{17}\text{O}$  的质量  $M_B = 16.999\,133 \text{ u}$ , 试计算该反应的反应能  $Q$  和阈能  $E_t$ .

**解** 由已知有,  $M_A = 14.003\,07 \text{ u}$ ,  $M_a = 4.002\,603 \text{ u}$ ,  $M_b = 1.007\,825 \text{ u}$ ,  $M_B = 16.999\,133 \text{ u}$ . 因此,由  $Q = (M_a + M_A - M_b - M_B)c^2$  可得,反应  ${}^{14}\text{N}(\alpha, \text{p}){}^{17}\text{O}$  的反应能为

$$Q = (4.002\,603 + 14.003\,074 - 1.007\,825 - 16.999\,133) \times 931.49 \\ = -1.19 (\text{MeV})$$

阈能为

$$E_t = \frac{M_A + M_a}{M_A} |Q| = \frac{14.003\,074 + 4.002\,603}{14.003\,074} \times 1.19 \\ = 1.53 (\text{MeV})$$

**说明** 反应能  $Q$  既可根据反应物与产物的质量亏损来计算,如本例题解法;也可根据其结合能的差值来计算.

### 三、习题详解

#### 17.1 选择题

(1) 由质量亏损可求得 $^{16}_8\text{O}$ 的结合能和比结合能分别为多少 MeV (C)

(A) 122.88, 7.68 (B) 122.88, 15.36

(C) 127.62, 7.98 (D) 127.62, 15.96

(2) 已知 $^{210}_{84}\text{Po}$ 的半衰期为 138.4 天, 则  $1\text{ }\mu\text{g}$  的 $^{210}_{84}\text{Po}$ 放射性活度为 (A)

(A)  $1.66 \times 10^8\text{ Bq}$  (B)  $2.76 \times 10^{-15}\text{ Bq}$

(C)  $1.44 \times 10^{16}\text{ Bq}$  (D)  $3.97 \times 10^{20}\text{ Bq}$

#### 17.2 填空题

(1)  $^{238}_{92}\text{Sr}$  核中有 92 个质子, 146 个中子; 质量约为  $3.95 \times 10^{-25}\text{ kg}$ , 半径约为 7.44 fm, 自旋量子数为 0.

(2) 由质量亏损可求得 $^{208}_{82}\text{Pb}$ 的结合能  $B = 1\,636.45\text{ MeV}$ , 比结合能  $B/A = 7.87\text{ MeV}$ .

(3) 一个放射性核素的平均寿命为 10 天, 则经过 5 天发生衰变的核素数目是原来的百分之 39.3; 在第五天中发生衰变的核素数目是原来的百分之 6.4.

(4) 用能量为 1.51 MeV 的氘引起反应 $^{11}_5\text{B}(\text{d}, \alpha)^8_4\text{Be}$ 中, 在  $\theta = 90^\circ$  方向上测得  $\alpha$  粒子能量为 6.37 MeV, 则反应能  $Q = 8.03\text{ MeV}$ .

**17.3** 假设原子核是球形的, 其体积与核子数成正比, 试由此估算核物质的平均密度  $\bar{\rho}$ .

**解** 设质量数为  $A$  的原子核的质量为  $m$ , 显然  $m \approx A m_p$ , 其中  $m_p$  为质子质量, 则核物质的平均密度约为

$$\bar{\rho} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \approx \frac{A m_p}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = \frac{3 m_p}{4\pi r_0^3}$$

代入数据  $m_p = 1.67 \times 10^{-27}\text{ kg}$  和  $r_0 = 1.20\text{ fm}$ , 可得

$$\bar{\rho} \approx 2.3 \times 10^{17}\text{ kg/m}^3$$

**17.4** 试计算 1 u 的质量所相当的能量为多少?

**解**  $1\text{ u} = 1.660\,540\,2 \times 10^{-27}\text{ kg}$

由相对论质能关系式  $E = mc^2$ , 1 u 的质量所相当的能量为

$$\begin{aligned} E &= 1.660\,540\,2 \times 10^{-27} \times (299\,792\,458)^2 \\ &= 1.492\,419\,104 \times 10^{-10}\text{ J} = 931.49\text{ MeV} \end{aligned}$$

**17.5** 对于高速飞行的粒子, 它们在实验室系的速度接近光速时, 一般地观测到的寿命将与数据表中所给出的值有较大差别, 这时要考虑相对论效应. 比如  $\pi^+$  介子, 一般数据表中给出的寿命  $\tau_0 = 2.6 \times 10^{-8}\text{ s}$ , 若当  $\pi^+$  介子以速度  $0.99\text{ }c$  飞

行时,试求在实验室系中观察到的寿命为多少?

**解** 由相对论时间膨胀效应,在实验室系中观察到  $\pi^+$  介子的寿命

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2.6 \times 10^{-8}}{\sqrt{1 - 0.99^2}} = 1.84 \times 10^{-7} \text{ s}$$

**17.6 最后一个核子的结合能** 原子核最后一个核子的结合能,是一个自由核子与核的其余部分组成原子核时,所释放的能量,其反映了该原子核相对邻近的那些原子核的稳定程度.有时也讨论从原子核中分离出一个核子所要给予的能量,称为原子核的一个核子分离能.这二者在数值上是相等的.原子核最后一个中子的结合能可表示为  $S_n(Z, A) = [M(Z, A-1) + m_n - M(Z, A)]c^2$ ;也可以由两个同位素  ${}^A_ZX$  与  ${}^{A-1}_ZX$  的结合能之差表示为:  $S_n(Z, A) = B(Z, A) - B(Z, A-1)$ . 原子核最后一个质子的结合能可表示为  $S_p(Z, A) = [M(Z-1, A-1) + M({}^1_1\text{H}) - M(Z, A)]c^2$ ;同理,也可以表示为  $S_p(Z, A) = B(Z, A) - B(Z-1, A-1)$ .

试由上述讨论计算,从  ${}^{13}\text{C}$  中取出一个中子和一个质子各需多少能量?

**解** 查表 17.3 得  ${}^{13}\text{C}$ ,  ${}^{12}\text{C}$  和  ${}^{12}\text{B}$  的结合能分别为: 97.11 MeV, 92.16 MeV 和 79.58 MeV. 因此,从  ${}^{13}\text{C}$  中取出一个中子所需的能量为

$$S_n = B(6, 13) - B(6, 12) = 97.11 - 92.16 = 4.95 \text{ MeV}$$

取出一个质子所需的能量为

$$S_p = B(6, 13) - B(5, 12) = 97.11 - 79.58 = 17.53 \text{ MeV}$$

显然,从  ${}^{13}\text{C}$  中取出一个质子所需的能量要比取出一个中子所需的能量多得多.

**17.7** 已知  ${}^{224}\text{Ra}$  的半衰期为 3.66 天,试求 1 天和 10 天中分别衰变了多少份额? 若开始有  $1 \mu\text{g}$ , 则 1 天和 10 天中分别衰变掉多少原子?

**解** 由  $N = N_0 e^{-\lambda t}$  有

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{t}{T} \ln 2} = 2^{-t/T}$$

1 天中衰变的份额为

$$1 - \frac{N_1}{N_0} = 1 - 2^{-1/3.66} = 17.25\%$$

10 天中衰变的份额为

$$1 - \frac{N_2}{N_0} = 1 - 2^{-10/3.66} = 84.95\%$$

$1 \mu\text{g}$   ${}^{224}\text{Ra}$  中的原子数目为

$$\frac{m}{M} N_A = \frac{1 \times 10^{-6}}{224} \times 6.022 \times 10^{23} = 2.688 \times 10^{15} \text{ (个)}$$

因此, 1 天中衰变掉的原子数目为

$$2.688 \times 10^{15} \times 17.25\% = 4.64 \times 10^{14} \text{ (个)}$$

10 天中衰变掉的原子数目为

$$2.688 \times 10^{15} \times 84.95\% = 2.28 \times 10^{15} (\text{个})$$

**17.8** 已知 $^{222}\text{Rn}$ 的半衰期为 3.824 天,试求  $1\mu\text{Ci}$  和  $10^3\text{Bq}$  的 $^{222}\text{Rn}$  的质量分别是多少?

**解** 由放射性活度  $I = \lambda N$ , 得

$$N = I/\lambda = IT/\ln 2$$

因此,  $1\mu\text{Ci}$  的 $^{222}\text{Rn}$  含原子数目为

$$N_1 = \frac{I_1 T}{\ln 2} = \frac{3.7 \times 10^{10} \times 10^{-6} \times 3.824 \times 24 \times 3600}{0.693} = 1.764 \times 10^{10} (\text{个})$$

$10^3\text{Bq}$  的 $^{222}\text{Rn}$  含原子数目为

$$N_2 = \frac{I_2 T}{\ln 2} = \frac{10^3 \times 3.824 \times 24 \times 3600}{0.693} = 4.768 \times 10^8 (\text{个})$$

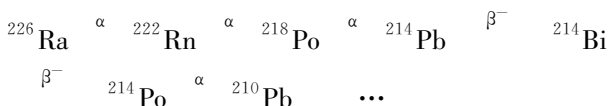
由  $m = \frac{MN}{N_A}$  得,  $1\mu\text{Ci}$  的 $^{222}\text{Rn}$  的质量为

$$m_1 = \frac{MN_1}{N_A} = \frac{222 \times 1.764 \times 10^{10}}{6.022 \times 10^{23}} = 6.50 \times 10^{-12} \text{g}$$

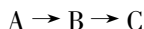
$10^3\text{Bq}$  的 $^{222}\text{Rn}$  的质量为

$$m_2 = \frac{MN_2}{N_A} = \frac{222 \times 4.768 \times 10^8}{6.022 \times 10^{23}} = 1.76 \times 10^{-13} \text{g}$$

**17.9 连续放射性衰变规律** 在 17.3 节中,我们只讨论了一种放射性核素单独存在时所遵从的衰变规律.实际上往往有很多放射性核素会一个接一个地连续发生衰变,如:



这样就形成了一个放射性衰变系列,这种一个接一个的衰变称为连续放射性衰变,也称级联或递次衰变.四个放射系中发生的衰变就是级联衰变.在级联衰变中,一种放射性核素是另一种放射性核素的衰变产物,我们分别称其为母核和子核,在子核与母核分离时式(17.8)将不能表示子核随时间变化的规律.这是因为子核除了因它本身衰变而减少外,还会因母核的衰变而增多.我们考虑最简单的级联衰变即



只有两代衰变.若设  $t=0$  时刻的母核数目为  $N_0$ ,母核和子核的衰变常量分别为  $\lambda_A$  和  $\lambda_B$ ,试求级联衰变公式,即任意时刻的子核数目  $N_B$ .

**解** 设  $t$  时刻的母核数目和子核数目分别为  $N_A$  和  $N_B$ ,则子核 B 的数目的变化率为

$$\begin{aligned}\frac{dN_B}{dt} &= (\text{子核的生长率,即母核的衰减率}) - (\text{子核的衰减率}) \\ &= \lambda_A N_A - \lambda_B N_B\end{aligned}\quad (1)$$

母核 A 的衰变规律服从指数规律,即  $N_A = N_0 e^{-\lambda_A t}$ ,代入上式得

$$\frac{dN_B}{dt} + \lambda_B N_B = \lambda_A N_0 e^{-\lambda_A t} \quad (2)$$

利用初始条件  $t=0$  时  $N_B=0$ ,积分得

$$N_B = \frac{\lambda_A N_0}{\lambda_B - \lambda_A} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t})$$

这就是级联衰变公式,它不同于简单的指数规律,子核数目随时间的变化规律不仅与它本身的衰变常量  $\lambda_B$  有关,而且还与其母核的衰变常量  $\lambda_A$  有关.

对于多代级联衰变情况,我们可以按同样的方法,得到一系列类似式(2)的微分方程,解这些方程,就可得到各代子核的衰变规律.

**17.10** 用氦轰击  $^{55}\text{Mn}$  可生成  $^{56}\text{Mn}$ ,  $^{56}\text{Mn}$  的产生率为  $5 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$ . 已知  $^{56}\text{Mn}$  的半衰期为 2.579 小时,试求轰击 10 小时后  $^{56}\text{Mn}$  的放射性活度?

**解** 设产生率为  $P$ ,则  $P$  即为题 17.9 式(1)中的  $\lambda_A N_A$ ,故

$$\frac{dN}{dt} = P - \lambda N$$

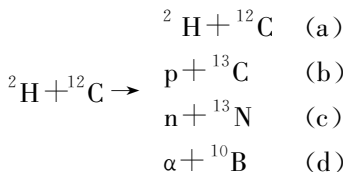
$N$  为  $t$  时刻  $^{56}\text{Mn}$  的数目. $t=0$  时  $N=0$ ,积分上式得

$$N = \frac{P}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$$

因此,轰击 10 小时  $^{56}\text{Mn}$  的放射性活度为

$$\begin{aligned}I = \lambda N &= P(1 - e^{-\lambda t}) = P(1 - 2^{-t/T}) = 5 \times 10^8 \times (1 - 2^{-10/2.579}) \\ &= 4.66 \times 10^8 \text{ Bq}\end{aligned}$$

**17.11** 一个入射粒子打到靶核上,可发生的反应方式一般不止一种.例如,当动能为几兆电子伏特的氘核撞击  $^{12}\text{C}$  时,便可观察到下列反应方式



假定这四个反应中,反应后的核处于其基态,试分别计算其  $Q$  值,并说明其是放能反应还是吸能反应?

**解**  $^2\text{H}$  原子的质量为  $M_{^2\text{H}} = 2.014\,102\text{u}$

$^{12}\text{C}$  原子的质量为  $M_{^{12}\text{C}} = 12.000\,000\text{u}$

二者质量之和为:  $14.014\,102\text{u}$

(a) 质量亏损为  $\Delta m_1 = 0$ , 反应能为  $Q_1 = 0$ ;

(b)  $^1\text{H}$  原子的质量为  $M_{\text{H}} = 1.007\ 825\text{u}$

$^{13}\text{C}$  原子的质量为  $M_{^{13}\text{C}} = 13.003\ 35\text{u}$

质量亏损为

$$\Delta m_2 = 14.014\ 102\text{u} - (1.007\ 825 + 13.003\ 35)\text{u} = 0.002\ 927\text{u}$$

反应能为

$$Q_2 = 0.002\ 927 \times 931.49 = 2.73\ (\text{MeV})$$

$Q_2 > 0$ , 该反应为放能反应;

(c)  $^{13}\text{N}$  原子的质量为  $M_{^{13}\text{N}} = 13.005\ 74\text{u}$

中子的质量为  $m_{\text{n}} = 1.008\ 665\text{u}$

质量亏损为

$$\Delta m_3 = 14.014\ 102\text{u} - (1.008\ 665 + 13.005\ 74)\text{u} = -0.000\ 303\text{u}$$

反应能为

$$Q_3 = -0.000\ 303 \times 931.49 = -0.28\text{MeV}$$

$Q_3 < 0$ , 该反应为吸能反应;

(d)  $^4_2\text{He}$  原子的质量为  $M_{\text{He}} = 4.002\ 603\text{u}$

$^{10}\text{B}$  原子的质量为  $M_{^{10}\text{B}} = 10.012\ 938\text{u}$

质量亏损为

$$\Delta m_4 = 14.014\ 102\text{u} - (4.002\ 603 + 10.012\ 938)\text{u} = -0.001\ 439\text{u}$$

反应能为

$$Q_4 = -0.001\ 439 \times 931.49 = -1.34\ (\text{MeV})$$

$Q_4 < 0$ , 该反应为吸能反应.

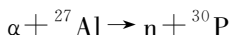
**17.12** 1930 年德国物理学家博思等人利用钋发出的  $\alpha$  粒子轰击铍等轻核素, 实现了后来导致中子发现的核反应  $^9\text{Be}(\alpha, \text{n})^{12}\text{C}$ , 试计算此反应的反应能  $Q$ .

**解** 查表 17.1 得,  $M_A = 9.012\ 183\text{u}$ ,  $M_a = 4.002\ 603\text{u}$ ,  $M_B = 12.000\ 000\text{u}$ ,  $M_b = 1.008\ 665\text{u}$ .

由式  $Q = (M_a + M_A - M_b - M_B)c^2$ , 得

$$\begin{aligned} Q &= (4.002\ 603 + 9.012\ 183 - 1.008\ 665 - 12.000\ 000) \times 931.49 \\ &= 5.70\ \text{MeV} \end{aligned}$$

**17.13** 1934 年约里奥·居里夫妇用核反应



产生了第一个人工放射性核素  $^{30}\text{P}$ , 它是  $\beta$  放射性核素, 半衰期为 2.5 分钟. 试求放射性核素  $^{30}\text{P}$  的平均寿命及该核反应的反应能  $Q$  和阈能  $E_t$ .

**解** 放射性核素 $^{30}\text{P}$ 的平均寿命为

$$\tau = \frac{T}{\ln 2} = \frac{2.5 \times 60}{0.693} = 216.5 \text{ (s)}$$

查表 17.1 得:  $M_A = 26.981\,54\text{u}$ ,  $M_a = 4.002\,603\text{u}$ ,  $M_B = 29.978\,31\text{u}$ ,  $M_b = 1.008\,665\text{u}$ . 因此, 反应 $^{27}\text{Al}(\alpha, n)^{30}\text{P}$ 的反应能为

$$\begin{aligned} Q &= (M_a + M_A - M_b - M_B)c^2 \\ &= (4.002\,603 + 26.981\,54 - 1.008\,665 - 29.978\,31) \times 931.49 \\ &= -2.64 \text{ (MeV)} \end{aligned}$$

阈能为

$$\begin{aligned} E_t = \frac{M_A + M_a}{M_A} |Q| &= \frac{26.981\,54 + 4.002\,603}{26.981\,54} \times 2.64 \\ &= 3.03 \text{ MeV} \end{aligned}$$

**17.14** 试利用能量守恒定律和动量守恒定律推导式(17.14), 即核反应的  $Q$  方程.

**解** 在核反应实验中, 通常靶核是静止不动的, 即  $E_A = 0$ , 因此有

$$Q = E_b + E_B - E_a \quad (1)$$

根据反应前后的动量守恒, 有

$$\mathbf{P}_a = \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_B \quad (2)$$

式中  $\mathbf{P}$  代表相应粒子的动量. 反应前后式(2)所表示的几何关系如图 17.14 所示. 利用余弦定律以及动量与动能的关系式  $P^2 = 2ME$ , 式(2)可写成

$$E_B = \frac{M_b}{M_B} E_b + \frac{M_a}{M_B} E_a - \frac{2\sqrt{M_a M_b E_a E_b}}{M_B} \cos \theta$$

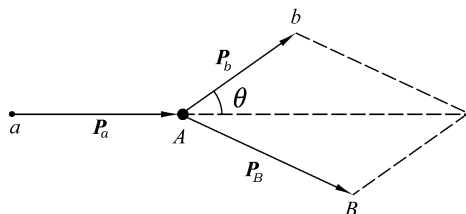


图 17.14

代入式(1), 得

$$Q = \left( \frac{M_b}{M_B} + 1 \right) E_b + \left( \frac{M_a}{M_B} - 1 \right) E_a - \frac{2\sqrt{M_a M_b E_a E_b}}{M_B} \cos \theta$$

这就是核反应的  $Q$  方程.

**17.15** 在用核磁共振法研究原子核 $^{25}_{12}\text{Mg}$ 在基态 $\left(I^\pi = \frac{5}{2}^+\right)$ 的磁特性实验中,当恒定磁场的强度为0.54 T以及高频磁场的频率为1.40 MHz时,发现了能量的共振吸收.试求 $g_I$ 因子和核磁矩.

**解** 由共振吸收条件: $h\nu = g_I \mu_N B$ 得, $g_I$ 因子为

$$g_I = \frac{h\nu}{\mu_N B} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 1.40 \times 10^6}{5.05 \times 10^{-27} \times 0.54} = 0.34$$

核磁矩为

$$\mu_I = g_I I \mu_N = 0.34 \times \frac{5}{2} \times \mu_N = 0.85 \mu_N = 4.29 \times 10^{-27} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$$

**17.16** 试计算 $^{191}\text{Ir}$ 核发射 $\gamma$ 射线时,核的反冲能量及能级宽度和发射的 $\gamma$ 射线相对线宽.已知 $^{191}\text{Ir}$ 的原子质量 $M = 2.107\,33 \times 10^{-25} \text{ kg}$ , $E = 57.60 \text{ keV}$ , $\tau = 2.7 \text{ ns}$ .

**解** 由 $E_R = \frac{E^2}{2Mc^2}$ 得,反冲能量 $E_R$ 为

$$E_R = \frac{(57.60 \times 10^3)^2 \times 1.6 \times 10^{-19}}{2 \times 2.107\,33 \times 10^{-25} \times (3 \times 10^8)^2} \approx 1.40 \times 10^{-2} \text{ (eV)}$$

能级宽度 $\Gamma$ 为

$$\Gamma \approx \frac{\hbar}{\tau} = \frac{1.055 \times 10^{-34}}{2.7 \times 10^{-9} \times 1.6 \times 10^{-19}} \approx 2.44 \times 10^{-7} \text{ (eV)}$$

发射的 $\gamma$ 射线相对线宽为

$$\frac{\Gamma_A}{E_\gamma} = \frac{2\Gamma}{E} = \frac{2 \times 2.44 \times 10^{-7}}{57.60 \times 10^3} = 8.47 \times 10^{-12}$$

# 第 18 章 粒子物理简介

## 一、基本内容和主要公式

### 1.粒子的基本属性

粒子属性可用以下物理量描述

质量、寿命、电荷、自旋、同位旋、轻子数、重子数、奇异数、超荷、内禀宇称.

### 2.共振态粒子和反粒子

共振态粒子:寿命特短(约  $10^{-23}$  s)的粒子.

反粒子:描述反粒子和正粒子的物理量的绝对值相同,但某个或某些物理量的符号相反.

### 3.粒子的分类

按粒子自旋分为二类:玻色子和费米子.

按粒子质量分为三类:轻子、介子和重子.

按粒子间相互作用分四类:引力子、光子、轻子和强子.

### 4.守恒定律和相互作用

三种相互作用和守恒定律的关系见表 18.1,表中“—”表示不守恒,“+”表示守恒.

表 18.1

| 守恒量    | 能量 | 动量 | 角动量 | 电荷 | 轻子数 | 重子数 | 同位旋 | 同位旋<br>分量 | 奇异数 | 宇称 |
|--------|----|----|-----|----|-----|-----|-----|-----------|-----|----|
| 强相互作用  | +  | +  | +   | +  | +   | +   | +   | +         | +   | +  |
| 弱相互作用  | +  | +  | +   | +  | +   | +   | —   | —         | —   | —  |
| 电磁相互作用 | +  | +  | +   | +  | +   | +   | —   | +         | +   | +  |

### 5.强子结构的夸克模型

每一个介子由一个夸克和一个反夸克组成,每一个重子由三个夸克组成.

## 二、典型例题

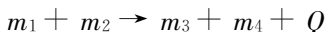
**18-1** 设有两个粒子,其轨道角动量量子数分别为  $l_1=2$  和  $l_2=3$ ,求合成角

动量可能取值.

**解** 两粒子轨道角动量  $L_1$  和  $L_2$  的合成角动量  $L = L_1 + L_2$ , 共有  $2l_1 + 1 = 5$  个可能的取值, 合成角动量量子数分别为  $l = 5, 4, 3, 2, 1$ , 故总角动量  $L$  的可能值为  $\sqrt{30}\hbar, \sqrt{20}\hbar, \sqrt{12}\hbar, \sqrt{6}\hbar, \sqrt{2}\hbar$ .

**说明** 量子力学中已证明, 若  $L_1$  的量子数为  $l_1$ ,  $L_2$  的量子数为  $l_2$ , 则由  $L_1$  和  $L_2$  合成的总角动量  $L = L_1 + L_2$  的量子数  $l$  可取从  $|l_1 + l_2|$  到  $|l_1 - l_2|$ , 彼此相差为 1 的所有分立值, 若以  $l_{\min}$  表示  $l_1$  和  $l_2$  中较小的一个, 则  $l$  可取  $(2l_{\min} + 1)$  个分立值. 这种角动量相加法则, 对于两个自旋角动量的合成 ( $S_1 + S_2$ ), 自旋和轨道角动量的合成 ( $L + S$ ) 等同样适用.

**18-2** 讨论下列两体反应的反应能  $Q$  和阈能  $E_{\text{th}}$ .



其中  $m_2$  代表实验室中的静止靶粒子,  $m_1$  代表高速入射粒子,  $m_3$  和  $m_4$  表示靶粒子受入射粒子轰击后产生的另两种粒子.

**解** 设粒子在没有激发能时的总能量可以表示为

$$E_i = T_i + m_i c^2$$

其中  $T_i$  为第  $i$  个粒子的动能,  $m_i c^2$  为第  $i$  个粒子的静止能量, 反应过程中能量守恒有

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4$$

反应过程释放的能量  $Q$  等于反应前后粒子的动能之差

$$Q = (T_3 + T_4) - (T_1 + T_2) = [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)]c^2$$

当  $Q > 0$  时, 反应为放热反应, 这种反应能否发生与入射粒子的能量无关.

当  $Q < 0$  时, 反应为吸热反应, 这种反应只有入射粒子的能量大于某一值即阈值  $E_{\text{th}}$  时, 才有可能发生.

由洛伦兹动量-能量不变式, 有

$$(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 c^2 = (E_3^* + E_4^*)^2 - (\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^*)^2 c^2$$

其中等式右边为质心系中粒子系动量-能量.

等式左边为实验室参考系中粒子系动量-能量.

当入射粒子能量为  $E_{\text{th}}$  时,  $\mathbf{p}_1^* = \mathbf{p}_2^* = 0$

$m_2$  在实验室参考系中静止,  $\mathbf{p}_2 = 0$ , 故有

$$(E_{\text{th}} + E_2)^2 - p_1^2 c^2 = (E_3^* + E_4^*)^2$$

即

$$(E_{\text{th}} + m_2 c^2)^2 - p_1^2 c^2 = (m_3 c^2 + m_4 c^2)^2$$

又根据动量能量的相对论关系有

$$E_{\text{th}}^2 = p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4$$

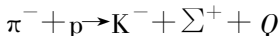
代入上式得

$$E_{\text{th}} = \frac{(m_3 + m_4)^2 - (m_1^2 + m_2^2)}{2m_2} c^2$$

**说明** 对于放热反应,只有当入射粒子的能量大于阈值能量  $E_{\text{th}}$  时,反应才有可能发生,此时在质心参考系中,反应后生成的粒子相对静止,在实验室参考系中,反应后生成的粒子以相同速率运动.

### 三、习题详解

#### 18.1 泡室中的质子被高能 $\pi^-$ 介子轰击发生下列反应



试计算此反应过程中释放的能量  $Q$ , 讨论此反应发生的条件.

**解** 设  $\pi^-$ 、 $p$ 、 $K^-$ 、 $\Sigma^+$  静质量分别为  $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$ 、 $m_4$ , 查表 18.3 得

$$m_1 = 139.6 \text{ MeV}/c^2 \quad m_2 = 938.3 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_3 = 493.7 \text{ MeV}/c^2 \quad m_4 = 1189.9 \text{ MeV}/c^2$$

没有粒子激发能时

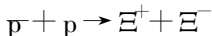
$$\begin{aligned} Q &= [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)]c^2 \\ &= (139.6 + 938.3) - (493.7 + 1189.9) = -605.7 \text{ (MeV)} \end{aligned}$$

$Q < 0$  说明反应为吸热反应,只有当入射粒子的能量大于或等于阈值能量  $E_{\text{th}}$  时,反应才有可能发生.

$$\begin{aligned} E_{\text{th}} &= \frac{(m_3 + m_4)^2 - (m_1^2 + m_2^2)}{2m_2} c^2 \\ &= \frac{(1189.9 + 493.7)^2 - (139.6^2 + 938.3^2)}{2 \times 938.3} = 1031 \text{ (MeV)} \end{aligned}$$

即只有当  $\pi^-$  介子的能量大于 1031 MeV 时,上述反应才有可能发生.

#### 18.2 反质子 $\bar{p}$ 与静止的质子 $p$ 碰撞,发生下列反应



试计算这一反应的阈值能量.

**解** 令反应的阈值能量为  $E_{\text{th}}$ , 则

$$E_{\text{th}} = \frac{(m_{\Xi^+} + m_{\Xi^-})^2 - (m_{\bar{p}}^2 + m_p^2)}{2m_{\bar{p}}} c^2$$

$$m_{\Xi^+} = m_{\Xi^-} = 1321.3 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_{\bar{p}} = m_p = 938.3 \text{ MeV}/c^2$$

$$E_{\text{th}} = \frac{(1321.3 + 1321.3)^2 - (938.3^2 + 938.3^2)}{2 \times 938.3} = 2783 \text{ MeV}$$

### 18.3 已知 $\Xi^-$ 的衰变过程为

$$\Xi^- \rightarrow \pi^- + \Lambda^0$$

已知  $\Xi^-$  的总能量为  $E_{\Xi^-}$ ,  $\pi^-$  介子的发射方向与  $\Xi^-$  超子入射方向成  $90^\circ$  角, 试求  $\Lambda^0$  和  $\pi^-$  的能量和动量.

**解** 设  $\pi^-$  和  $\Lambda^0$  的能量分别为  $E_{\pi^-}$  和  $E_{\Lambda^0}$ , 动量分别为  $p_{\pi^-}$  和  $p_{\Lambda^0}$ ,  $\Xi^-$  的动量为  $p_{\Xi^-}$ , 根据题意有如图 18.3 所示碰撞过程示意图, 由能量守恒和动量守恒得

$$E_{\Xi^-} = E_{\pi^-} + E_{\Lambda^0} \quad (1)$$

$$p_{\Xi^-} = p_{\pi^-} + p_{\Lambda^0} \quad (2)$$

相对论能量和动量关系为

$$E_{\Xi^-}^2 = p_{\Xi^-}^2 c^2 + m_{\Xi^-}^2 c^4 \quad (3)$$

$$E_{\pi^-}^2 = p_{\pi^-}^2 c^2 + m_{\pi^-}^2 c^4 \quad (4)$$

$$E_{\Lambda^0}^2 = p_{\Lambda^0}^2 c^2 + m_{\Lambda^0}^2 c^4 \quad (5)$$

式(2)在题意下为

$$p_{\Lambda^0}^2 = p_{\pi^-}^2 + p_{\Xi^-}^2 \quad (6)$$

将式(3)、(4)、(5)和(1)分别代入式(6)求出  $E_{\pi^-}$  得

$$E_{\pi^-} = \frac{m_{\Xi^-}^2 c^4 + m_{\pi^-}^2 c^4 - m_{\Lambda^0}^2 c^4}{2 E_{\Xi^-}}$$

$$E_{\Lambda^0} = \frac{2 E_{\Xi^-}^2 - m_{\Xi^-}^2 c^4 - m_{\pi^-}^2 c^4 + m_{\Lambda^0}^2 c^4}{2 E_{\Xi^-}}$$

$$p_{\pi^-} = \sqrt{E_{\pi^-}^2 - m_{\pi^-}^2 c^4} / c$$

$$p_{\Lambda^0} = \sqrt{E_{\Lambda^0}^2 - m_{\Lambda^0}^2 c^4} / c$$

其中  $m_{\Lambda^0}$ 、 $m_{\Xi^-}$  和  $m_{\pi^-}$  分别表示  $\Lambda^0$ 、 $\Xi^-$  和  $\pi^-$  的静止质量.

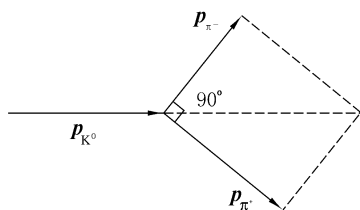


图 18.4

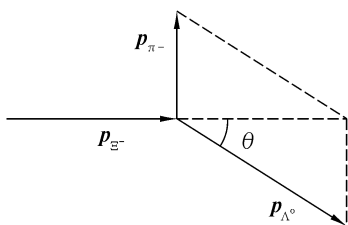


图 18.3

**18.4**  $K^0$  介子衰变成一对  $\pi^+$ 、 $\pi^-$  介子, 已知两  $\pi$  介子射出方向彼此垂直, 它们在  $B=0.85 \text{ T}$  的磁场中偏转半径分别为  $0.8 \text{ m}$  和  $1.6 \text{ m}$ , 求  $K^0$  介子的静质量及动能.

**解**  $K^0$  衰减过程为

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

动量为  $p$ , 电荷  $q = z \cdot e$ , 质量为  $m$  的

带电粒子在均匀磁场中,粒子受洛伦兹力作用,在垂直于磁场的平面内作半径为  $R$  的圆周运动,有

$$f = qvB = \frac{mv^2}{R}$$

则

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB}$$

$$p = qBR$$

或

$$p = RzBe = 0.3zBR(\text{GeV}/c)$$

$\pi^+$  和  $\pi^-$  介子的动量记为  $p_{\pi^+}$ 、 $p_{\pi^-}$ , 得

$$p_{\pi^+} = 0.3 \times 1 \times 0.85 \times 0.8 = 0.204(\text{GeV}/c) = 204(\text{MeV}/c)$$

$$p_{\pi^-} = 0.3 \times 1 \times 0.85 \times 1.6 = 0.408(\text{GeV}/c) = 408(\text{MeV}/c)$$

过程如图所示,由能量和动量守恒有

$$E_{K^0} = E_{\pi^+} + E_{\pi^-} \quad (1)$$

$$p_{K^0}^2 = p_{\pi^+}^2 + p_{\pi^-}^2 \quad (2)$$

由动量和能量关系

$$E_{\pi^+}^2 = p_{\pi^+}^2 c^2 + m_{\pi^+}^2 c^4 \quad (3)$$

$$E_{\pi^-}^2 = p_{\pi^-}^2 c^2 + m_{\pi^-}^2 c^4 \quad (4)$$

由式(2)得

$$p_{K^0}^2 = 208080(\text{MeV}/c^2)$$

$$m_{\pi^+} = m_{\pi^-} = 139.6(\text{MeV}/c^2)$$

由式(2)、(3)得

$$E_{\pi^+} = 247.2 \text{ MeV}, \quad E_{\pi^-} = 431.2 \text{ MeV}$$

代入式(1)得

$$E_{K^0} = 678.4 \text{ MeV}$$

由  $E_{K^0}^2 = p_{K^0}^2 c^2 + m_{K^0}^2 c^4$  得

$$m_{K^0} = \sqrt{E_{K^0}^2 - p_{K^0}^2 c^2} / c^2 = \sqrt{678.4^2 - 208080} / c^2 = 502(\text{MeV}/c^2)$$

$K^0$  介子的动能  $T_{K^0}$  有

$$E_{K^0} = T_{K^0} + m_{K^0} c^2$$

则

$$T_{K^0} = 678.4 - 502 = 176(\text{MeV})$$

即  $K^0$  介子的动能和静质量分别为 176 MeV 和  $502 \text{ MeV}/c^2$ .

### 18.5 分析下列反应是否可能发生

$$p + \pi^- \rightarrow n + \pi^0$$

| 解         | p             | $\pi^-$ | n              | $\pi^0$ |                |
|-----------|---------------|---------|----------------|---------|----------------|
| 轻子数 $L$   | 0             | 0       | 0              | 0       | $\Delta L=0$   |
| 重子数 $B$   | 1             | 0       | 1              | 0       | $\Delta B=0$   |
| 电荷数 $Q$   | 1             | -1      | 0              | 0       | $\Delta Q=0$   |
| 奇异数 $S$   | 0             | 0       | 0              | 0       | $\Delta S=0$   |
| 同位旋 $I_z$ | $\frac{1}{2}$ | -1      | $-\frac{1}{2}$ | 0       | $\Delta I_z=0$ |
| 同位旋 $I$   | $\frac{1}{2}$ | 1       | $\frac{1}{2}$  | 1       | $\Delta I=0$   |

即反应前后,轻子数、重子数、电荷数、奇异数、同位旋  $I_z$  及同位旋  $I$  都守恒,因此反应可能发生.

**18.6** 实验室中已观察到下列过程

$$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$$

试分析其同位旋、奇异数的守恒情况,并说明这一过程是什么相互作用.

**解**  $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$

|         | $\Xi^-$       | $\Lambda^0$ | $\pi^-$ |                        |
|---------|---------------|-------------|---------|------------------------|
| 奇异数 $S$ | -2            | -1          | 0       | $\Delta S=1$           |
| 同位旋 $I$ | $\frac{1}{2}$ | 0           | 1       | $\Delta I=\frac{1}{2}$ |

因此过程的同位旋和奇异数都不守恒,而轻子数、重子数都守恒,此过程为弱相互作用过程.

**18.7** 已知质子和中子分别由 uud 和 udd 组成,试问反质子和反中子的夸克组成是怎样的.

**解** 已知

|             |                    |                   |                   |         |                      |                   |
|-------------|--------------------|-------------------|-------------------|---------|----------------------|-------------------|
| u:          | $Q = \frac{2}{3}e$ | $J = \frac{1}{2}$ | $B = \frac{1}{3}$ | $S = 0$ | $I_z = -\frac{1}{2}$ | $I = \frac{1}{2}$ |
| d:          | $Q = \frac{1}{3}e$ | $J = \frac{1}{2}$ | $B = \frac{1}{3}$ | $S = 0$ | $I_z = \frac{1}{2}$  | $I = \frac{1}{2}$ |
| $\bar{u}$ : | $Q = -e$           | $J = \frac{1}{2}$ | $B = -1$          | $S = 0$ | $I_z = -\frac{1}{2}$ | $I = \frac{1}{2}$ |
| $\bar{d}$ : | $Q = 0$            | $J = \frac{1}{2}$ | $B = -1$          | $S = 0$ | $I_z = \frac{1}{2}$  | $I = \frac{1}{2}$ |

$$\overline{u}u\bar{d}: \quad Q=-e \quad J=\frac{1}{2} \quad B=-1 \quad S=0 \quad I_z=-\frac{1}{2} \quad I=\frac{1}{2}$$

$$u\bar{d}d: \quad Q=-0 \quad J=\frac{1}{2} \quad B=-1 \quad S=0 \quad I_z=\frac{1}{2} \quad I=\frac{1}{2}$$

$\overline{u}u\bar{d}$  组成的各量子数和  $\bar{p}$  的相同,  $u\bar{d}d$  组成的各量子数和  $\pi^0$  的量子数完全一致. 因此  $\bar{p}$  由  $\overline{u}u\bar{d}$  三个夸克组成,  $\pi^0$  由  $u\bar{d}d$  组成.

**18.8** 试确定  $K^0$  及  $\eta^0$  介子和超子  $\Lambda^0$  及  $\Omega^-$  的夸克组成.

**解** 按上题方法可知  $K^0$  的各量子数和  $\bar{d}s$  夸克组成的各量子数相同,  $\Omega^-$  的各量子数和  $sss$  夸克组成的各量子数一致. 因此  $K^0$  和  $\Omega^-$  的夸克组成为  $\bar{d}s$  和  $sss$ .

对于  $\Lambda^0$  由夸克  $uds$  组成,  $\eta^0$  由  $\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$  夸克组成, 说明如下:

|                                   | $Q$             | $J$           | $B$            | $S$ | $I_z$          | $I$           |
|-----------------------------------|-----------------|---------------|----------------|-----|----------------|---------------|
| $u$                               | $\frac{2}{3}e$  | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$  | 0   | $\frac{1}{2}$  | $\frac{1}{2}$ |
| $\bar{u}$                         | $-\frac{2}{3}e$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | 0   | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $d$                               | $-\frac{1}{3}e$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$  | 0   | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\bar{d}$                         | $\frac{1}{3}e$  | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | 0   | $\frac{1}{2}$  | $\frac{1}{2}$ |
| $s$                               | $-\frac{1}{3}e$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$  | -1  | 0              | 0             |
| $\bar{s}$                         | $\frac{1}{3}e$  | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | 1   | 0              | 0             |
| $\Lambda^0$                       | 0               | $\frac{1}{2}$ | 1              | -1  | 0              | 0             |
| $\eta^0$                          | 0               | 0             | 0              | 0   | 0              | 0             |
| $uds$                             | 0               | $\frac{1}{2}$ | 1              | -1  | 0              | 0             |
| $u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}$ | 0               | 0             | 0              | 0   | 0              | 0             |

其中  $ud$  的  $J$  的可能值为 0、1, 而  $uds$  的  $J$  的可能值为  $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{3}{2}$ , 能够得到  $J$  为  $\frac{1}{2}$ . 同理  $uds$  的  $I$  可以得到 0 的可能值. 因此,  $\Lambda^0$  的夸克组成为  $uds$ . 同理可得  $\eta^0$  的夸克组成为  $\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$ .

**18.9** 设重子的  $Q=+1, S=+1$  和  $Q=+2, S=0$ , 试用夸克  $u, d, s$  和相应的反夸克考察是否能组成上述设定的重子.

$$\text{解 } d: \quad Q=+\frac{1}{3}, \quad S=0$$

$$s^-: \quad Q=+\frac{1}{3}, \quad S=1$$

$$\overline{dd}s^-: \quad Q=+1, \quad S=1$$

$$u: \quad Q=+\frac{2}{3}, \quad S=0$$

$$uuu: \quad Q=2, \quad S=0$$

因此可以用  $\overline{dd}s^-$  夸克组成  $Q=+1, S=+1$  的重子, 用  $uuu$  夸克组成  $Q=+2, S=0$  的重子.

## 第 19 章 固体物理基础简介 \* 超导 激光

### 一、基本内容和主要公式

#### 1. 晶体结构的最基本特征

组成晶体的离子、原子或分子按照一定的方式不断作周期性重复排列,构成长程有序。

#### 2. 晶体的类型

晶体按结合力的类型分为离子晶体、共价晶体、分子晶体和金属晶体四类。

#### 3. 固体能带结构

$N$  个相同原子组成晶体时,晶体中每个原子原有的每一能级都分裂为  $N$  个密集能级,形成能带。

能带与能带之间既可能以禁带相隔,也可能相接或重叠。

填满电子的能带叫满带,满带电子不参与导电;部分填充电子的能带叫导带,没有电子的能带叫空带;由价电子能级分裂而形成的能带称为价带,价带可以是满带或导带。

#### 4. 绝缘体、导体和半导体

绝缘体的满带和空带之间有较宽的禁带。

导体的价带不满或价带和空带重叠或相接。

半导体的满带和空带之间的禁带宽度较小(约 1 eV 或更小)。

#### 5. 杂质半导体

n 型半导体:参与导电的载流子主要是从施主能级跃迁到导带中去的电子。

p 型半导体:参与导电的载流子主要是满带中产生的空穴。

#### 6. 超导体基本电磁特性有零电阻特性和完全抗磁性。

#### 7. 实现激光的两个必要条件 介质内部实现粒子数反转和阈值条件。

#### 8. 激光的纵模数

$$N = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_k}$$

其中  $\Delta\nu_k$  为相邻两纵模间隔, $\Delta\nu$  为激光谱线宽度。

#### 9. 激光特性

激光的三个主要特性为:高定向性、高单色性、高亮度。

## 二、典型例题

**19-1** 已知 CdS、KCl 的价带上方禁带宽度分别等于 2.42 eV 和 7.60 eV, 试确定这些晶体可以吸收的电磁波频率的最小值.

**解** 当电磁波的能量  $h\nu$  大于或等于禁带宽度  $\Delta E_g$  时, 才能被晶体吸收, 即

$$h\nu \geq \Delta E_g \quad \nu \geq \frac{\Delta E_g}{h}$$

$$\nu_{\min} = \frac{\Delta E_g}{h} = \frac{1.6 \times 10^{-19}}{6.63 \times 10^{-34}} \Delta E_g = 2.4 \times 10^{14} \Delta E_g$$

对于 CdS,  $\Delta E_g = 2.42$  eV, 能被吸收的电磁波的最小频率  $\nu_{\min}$  有

$$\nu_{\min} = 2.4 \times 2.42 \times 10^{14} = 5.8 \times 10^{14} \text{ (Hz)}$$

同样对于 KCl,  $\Delta E_g = 7.60$  eV

$$\nu_{\min} = 7.60 \times 2.4 \times 10^{14} = 1.8 \times 10^{15} \text{ (Hz)}$$

**说明** 如果用适当频率的光照射半导体, 那么电子在吸收了光子后将由满带跃迁到导带, 而在满带上留下空穴, 这种现象称为光吸收. 要发生光吸收必须满足能量守恒定律, 也就是被吸收的光子能量要大于禁带宽度  $\Delta E_g$ ; 若光子能量小于禁带宽度, 则光子不能被吸收而透射过晶体, 此时晶体是透明的.

**19-2** 已知 Ne 原子的某一激发态和基态的能量差  $E_2 - E_1 = 16.7$  eV, 试计算  $T = 300$  K 时在热平衡条件下, 处于两能级上的原子数之比.

**解** 设  $N_1$  和  $N_2$  分别对应处于基态  $E_1$  和激发态  $E_2$  的原子数, 在热平衡条件下满足玻耳兹曼分布, 因此有

$$\begin{aligned} \frac{N_2}{N_1} &= e^{-(E_2 - E_1)/kT} = e^{-\frac{1.6 \times 10^{-19}}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} \Delta E} \\ &= e^{-38.6 \Delta E} = e^{-38.6 \times 16.7} = e^{-645} \end{aligned}$$

结果表明  $N_2$  相对  $N_1$  微乎其微.

**说明** 一般情况下, 温度为  $T$  的平衡态体系, 各能级的原子数分布由玻耳兹曼分布律确定, 即  $\frac{N_2}{N_1} = e^{-(E_2 - E_1)/kT}$ . 这就是说, 处于最低能级的原子数最多, 能级越高, 处在该能级的原子数就越少. 从本题看出, 处于激发态的原子数微乎其微, 原子几乎处于基态. 要实现激光必须破坏原子在热平衡下的玻耳兹曼分布, 造成粒子数反转.

## 三、习题详解

### 19.1 选择题

(1) 如果 1) 锗用铈掺杂; 2) 硅用铝掺杂, 则分别获得的半导体属于下述类型: (C)

因而,

定价: 30.00 元

(A) 1), 2) 均为 n 型半导体

(B) 1) 为 p 型半导体, 2) 为 n 型半导体

(C) 1) 为 n 型半导体, 2) 为 p 型半导体

(D) 1), 2) 均为 p 型半导体

(2) 与绝缘体相比较, 半导体能带结构的特点是 (D)

(A) 导带也是空带

(B) 满带与导带重合

(C) 满带中总是有空穴, 导带中总是有电子

(D) 禁带宽度较窄

(3) 下述说法中, 正确的是 (C)

(A) 本征半导体是电子与空穴两种载流子同时参与导电, 而杂质半导体 (n 型或 p 型) 只有一种载流子 (电子或空穴) 参与导电, 所以本征半导体电性能比杂质半导体好.

(B) n 型半导体的导电性能优于 p 型半导体, 因为 n 型半导体是负电子导电, p 型半导体是正离子导电.

(C) n 型半导体中杂质原子所形成的能级靠近导带的底部, 使能级中多余的电子容易被激发跃迁到导带中去, 大大提高了半导体导电性能.

(D) p 型半导体的导电机构完全决定于满带中空穴的运动.

## 19.2 填空题

(1) 纯净半导体能级的禁带是较宽的, 在常温下有少量价电子由满带激发到导带中, 从而形成由满带中空穴和导带中电子参与导电的本征导电性.

(2) 若锗用铟掺杂, 则成为 p 型半导体, 请在图 19.2 (a) 中定性地画出施主能级或受主能级.

若硅用锑掺杂, 则成为 n 型半导体, 请在图 19.2 (b) 中定性地画出施主能级或受主能级.

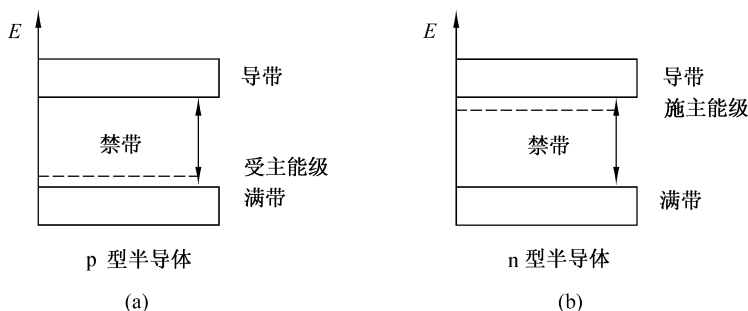


图 19.2

(3)产生激光的必要条件是实现工作物质的粒子数反转和满足阈值条件,激光的三个主要特性是高定向性、高单色性、高亮度性。

**19.3** 当 Na 原子结合成晶体时,其 3 S 能带和 3 P 能带出现交叠,(a)Na 是导体还是绝缘体?(b)如果能带不交迭答案是否相同。

**解** (a)Na 是导体,因为其 3 S 能带不满,是导带,参与导电的是那些未填满能带中的电子。

(b)如果能带不交迭,仍然是导体。

**19.4** 金属中的电阻温度系数是正值,而半导体的电阻温度系数是负值,试说明其原因。

**解** 金属的电阻温度系数为正值表示金属中的电阻随温度的升高而增加,其原因是:金属的载流子是导带中的电子,随着温度的升高,电子无规则热运动加剧,电子和金属离子,电子和电子的碰撞增加,阻碍电子的定向运动,使电阻增加;而半导体的载流子是满带中的空穴和空带中的电子,且禁带宽度较小,由于温度的升高,电子能量增加,有更多的电子由满带中激发到空带中去,形成更多的电子-空穴对,使半导体导电性增强,即半导体随温度的升高,电阻降低。

**19.5** 硅与金刚石的能带结构相似,只是禁带宽度不同,已知硅的禁带宽度为 1.14 eV,金刚石的禁带宽度为 5.33 eV,试根据它们的禁带宽度求它们能吸收辐射的最大波长各是多少?

**解** 当辐射波的能量  $h\nu$  大于或等于禁带宽度  $\Delta E_g$  时才能被晶体吸收,发生能级跃迁,即有

$$h\nu \geq \Delta E_g, \quad h \frac{c}{\lambda} \geq \Delta E_g, \quad \lambda \leq \frac{hc}{\Delta E_g}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{\Delta E_g} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1.6 \times 10^{-19} \Delta E_g}$$

$$= \frac{12.4 \times 10^{-7}}{\Delta E_g (\text{eV})}$$

对于硅

$$\Delta E_g = 1.14 \text{ eV}, \quad \lambda_{\max} = \frac{12.4 \times 10^{-7}}{1.14} = 10.9 \times 10^{-7} (\text{m})$$

对于金刚石

$$\Delta E_g = 5.33 \text{ eV}, \quad \lambda_{\max} = \frac{12.4 \times 10^{-7}}{5.33} = 2.33 \times 10^{-7} (\text{m})$$

**19.6** 锗的禁带宽度为 0.7 eV 的半导体掺入杂质后,测得相对价带顶杂质 Al 的能级为 0.01 eV,杂质 P 的能级为 0.69 eV,问哪种杂质是施主,哪种是受主?

**解** 杂质 Al 是受主,杂质 P 是施主,其能级关系如图 19.6 所示。

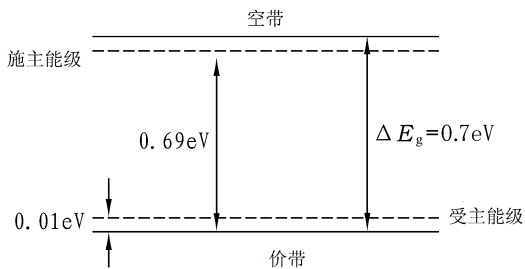


图 19.6

**19.7** 硫化铝的禁带宽度  $\Delta E_g = 0.3 \text{ eV}$ , 若用它作光敏电阻材料, 对所用光波波长有何限制?

**解** 只有当光子能量  $h\nu$  大于等于禁带宽度时, 光敏材料才可能吸收光子, 产生导电载流子, 即

$$h \frac{c}{\lambda} \geq \Delta E_g, \quad \lambda \leq \frac{hc}{\Delta E_g} = \frac{12.4 \times 10^{-7}}{0.3} = 41.4 \times 10^{-7} (\text{m})$$

要求波长  $\lambda \leq 41.4 \times 10^{-7} \text{ m}$ .

**19.8** n 型半导体 Si 中有 P 原子杂质, 在计算施主能级时, 作为近似, 可以看作一个电子绕  $P^+$  离子运动, 形成类氢原子, 沉浸在无限大的 Si 电介质中, 已知 Si 的相对介电常数  $\epsilon_r = 11.5$ , 求半导体的施主能级  $E_n$  和电离能.

**解** 电子绕  $P^+$  离子运动时有

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{e^2}{r^2} \quad (1)$$

由角动量子化条件

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

联合式(1)、(2)得

$$r = n^2 \left( \frac{\epsilon_0 \epsilon_r h^2}{\pi m e^2} \right) \quad (3)$$

电子的能量

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + E_p$$

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{e^2}{r}$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{e^2}{r}$$

因此

$$E = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{e^2}{r}$$

将式(3)代入得

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{me^4}{8\pi\epsilon_0^2\epsilon_r h^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{n^2} \frac{1}{\epsilon_r^2} \left( \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \right) \\
 &= -\frac{13.6}{\epsilon_r^2} \frac{1}{n^2} \\
 &= -\frac{13.6}{11.5^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{0.10}{n^2} \text{ (eV)}
 \end{aligned}$$

即为半导体的施主能级  $E_n$  .

电离能  $E_i = E_\infty - E_1 = 0.10 \text{ eV}$  .

**19.9** pn 结是怎样形成的? pn 结附近能带是怎样的? 试用能带理论解释晶体二极管的整流作用.

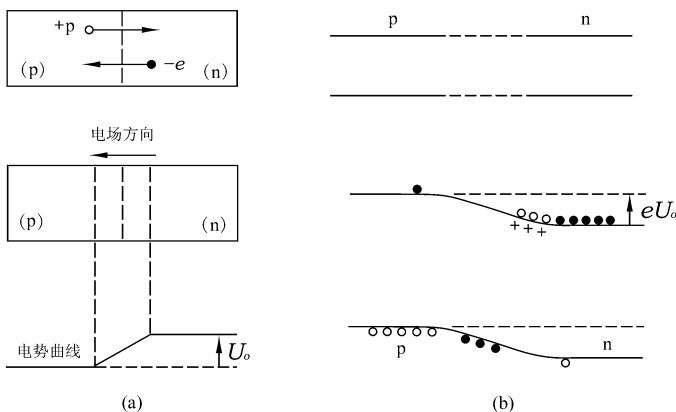


图 19.9

**解** 由于 p 型半导体中空穴浓度较大, n 型半导体中电子浓度较大, 两种半导体接触面附近, 空穴从 p 型区向 n 型区扩散, 电子从 n 型区向 p 型区扩散, 使界面两侧形成一层电偶极层, 电偶极层的电场阻止空穴和电子的扩散, 促使电子和空穴向相反方向漂移, 当扩散和漂移达到平衡后, 电偶层内电荷分布稳定, 在界面两侧形成一定的接触电势差  $U_0$ , 这个电偶极层就是 pn 结. 其电场如图 19.9(a) 所示.

由于接触电势差  $U_0$  的存在, 使电子在 pn 结两侧的静电能不等, 在电势高处电势能低, 在电势低处电势能高, 这种附加的静电能使 pn 结附近能带发生弯曲, 如图 19.9(b) 所示. 能带高度有一相对平移, 其差值为电子势能的变化值  $|eU_0|$  形成势垒区, 势垒阻止 n 型中的电子进入 p 型, 也阻止 p 型中的空穴进入 n 型.

在有外电场加到 pn 结上时, 势垒的高度就会发生变化, 当电压正向时, 势垒降低, 载流子的扩散运动大于漂移运动, 形成正向电流. 随着正向电压的增加, pn 结电场的减弱也越显著, 载流子的扩散运动越明显, 电流迅速增大.

当加反向电压时,势垒增加,阻挡层变厚,多数载流子的扩散难以通过阻挡层,只有少数载流子的漂移运动形成反向的小电流,且随反向电压增加,反向电流增加也很慢,起到整流作用。

**19.10** 结厚度可忽略的 pn 结整流二极管,其电流和电压关系为  $I = I_0(e^{eU/kT} - 1)$  其中  $I_0$  只与材料有关,为反向电流.当正向加电压时,  $U$  取正值,否则取负值.(a)试画出伏安特性曲线,取电压范围  $-0.12\text{ V}$  到  $+0.12\text{ V}$ ,已知  $T = 300\text{ K}$ ,  $I_0 = 5.0\text{ nA}$ .

(b)在同样温度下,计算在正向电压  $0.5\text{ V}$  和反向电压  $0.5\text{ V}$  时电流的比值。

**解** (a)  $I = I_0(e^{eU/kT} - 1)$ ,  $T = 300\text{ K}$ ,  $I_0 = 5.0\text{ nA}$

$$\frac{e}{kT} = \frac{1.6 \times 10^{-19}}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} = 38.6$$

所以

$$I = 5.0 \times (e^{38.6 U} - 1) \times 10^{-9} \text{ A}$$

$$u = 0.12\text{ V 时}, I = 508.5 \times 10^{-9} \text{ A} = 0.51 \times 10^{-6} \text{ A} = 0.51 \mu\text{A}$$

$$u = -0.12\text{ 时}, I \approx 0 \mu\text{A}$$

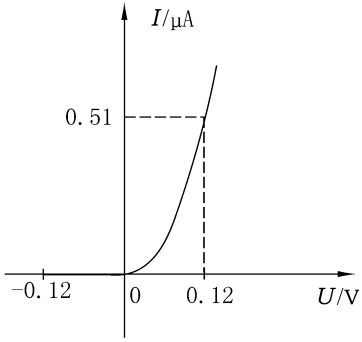


图 19.10

电压范围取  $-0.12\text{ V}$  到  $0.12\text{ V}$  的伏-安特性曲线如图 19.10.

$$(b) \frac{I_{0.50}}{I_{-0.50}} = \frac{e^{38.6 \times 0.5} - 1}{e^{-38.6 \times 0.5} - 1} = -e^{38.6 \times 0.5} = -2.41 \times 10^8$$

**19.11** 什么叫超导体? 它有哪些基本性质?

**解** 某些物质在一定温度以下会出现电阻为零和完全抗磁性现象,能够产生这种现象的物质叫超导体,超导体在超导态下具有以下基本特性:

- (1)零电阻;
- (2)完全抗磁性(迈斯纳效应).

**19.12** 某 He-Ne 气体激光器所发出的波长为 632.8 nm 的激光的谱线宽度  $\Delta\lambda < 10^{-8}$  nm, 试计算其相干长度.

解 相干长度

$$L = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{632.8^2 \times 10^{-18}}{10^{-17}} = 4.00 \times 10^4 (\text{m}) = 40 \text{ km}$$