华东交通大学考试专用答题纸(适用于匿名改卷)

课程：6.3 定积分的分部积分法

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅读人											

考生注意：答题时应注明题号，并按题号顺序答题。

教学班级：_____ 教学小班序号：_____ 学号：_____ 姓名：_____

题号	答题内容 P120 廖国勇
1	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,d(-\cos x) = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$
	$= 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$
2	$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx = \int_0^{\ln 2} x\,d(-e^{-x}) = -xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x}\,dx$
	$= -\frac{1}{2}\ln 2 - e^{-x}\Big|_0^{\ln 2} = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} + 1$
	$= \frac{1}{2}(1-\ln 2)$
3	$\int_1^e \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx$
	$= e - x\Big|_1^e = 1$
4	$\int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x\,dx = x\arccos x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$
	$= \frac{\pi}{6} - \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}$
	$= \frac{\pi}{6} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$
	$= \frac{\pi}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

题号	答题内容 廖国勇
二 1	P_{120} 求定积分 $\int_0^1 x^2e^x dx$
	解 $\int_0^1 x^2e^x dx = \int_0^1 x^2 de^x = x^2e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x 2x dx$
	$= e - \int_0^1 2x de^x$
	$= e - 2xe^x\Big|_0^1 + \int_0^1 e^x \cdot 2 dx$
	$= e - 2e + 2e^x\Big|_0^1$
	$= e - 2$
2	求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x dx$
	解 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\sec^2 x - 1) dx$
	$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d\tan x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx$
	$= x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$
	$= \frac{\pi}{4} + \ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi^2}{32}$
	$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$
3	P_{121} 求定积分 $\int_1^e x^2 \ln x dx$
	解 $\int_1^e x^2 \ln x dx = \int_1^e \ln x d(\frac{x^3}{3}) = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\frac{1}{x} dx$
	$= \frac{e^3}{3} - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx$
	$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}x^3\Big|_1^e$
	$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9}$
	$= \frac{1}{9}(2e^3 + 1)$

题号		P121 答题内容 庞国勇
二	4	求定积分 $\int_0^1 x\arctan x\,dx$
		解 $\int_0^1 x\arctan x\,dx$
		$=\int_0^1 \arctan x\, d(\frac{x^2}{2})$
		$=\frac{x^2}{2}\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$
		$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$
		$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(x-\arctan x)\Big|_0^1$
		$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(1-\frac{\pi}{4})$
		$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}$
		$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$
	5	求定积分 $\int_0^1 e^{-x}\cos x\,dx$
		解 $\int_0^1 e^{-x}\cos x\,dx$
		$=\int_0^1 e^{-x}\,d\sin x$
		$=e^{-x}\sin x\Big|_0^1-\int_0^1 \sin x\cdot(-e^{-x})\,dx$
		$=e^{-1}\sin 1-\int_0^1 e^{-x}\,d\cos x$
		$=e^{-1}\sin 1-\cos x e^{-x}\Big|_0^1-\int_0^1 \cos x e^{-x}\,dx$
		$=e^{-1}\sin 1-\cos 1\cdot e^{-1}+1-\int_0^1 e^{-x}\cos x\,dx$
		$\Rightarrow 2\int_0^1 e^{-x}\cos x\,dx=e^{-1}(\sin 1-\cos 1)+1$
		$\Rightarrow \int_0^1 e^{-x}\cos x\,dx=\frac{e^{-1}}{2}(\sin 1-\cos 1)+1$
		$=\frac{1}{2e}(\sin 1-\cos 1)+1$

6. 求定积分 $\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$

$$= 0 - 2\left(-x\cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx\right)$$

$$= 2x\cos x \Big|_0^{\pi} - 2\sin x \Big|_0^{\pi}$$

$$= -2\pi.$$

7. 求定积分 $\int_0^1 x \ln(1+x) \, dx$

$$\int_0^1 x \ln(1+x) \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2-1+1}{1+x} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1) + \frac{1}{1+x} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)\right]\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{4}.$$

P122

二 8 设 $f(x)=\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}dt$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}xf(x)dx$

解：$f(\frac{\pi}{2})=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}dt=0$ $f'(x)=-\frac{\sin x}{x}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}xf(x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)d(\frac{x^2}{2})\\ &= f(x)\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{2}\cdot f'(x)dx\\ &= 0-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{2}\cdot(-\frac{\sin x}{x})dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,d(-\cos x)\\ &= -\frac{1}{2}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\\ &= 0+\frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

P123

9 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n}{n}})$

$$\begin{aligned}&= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx\\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

10 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2})$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}]$

$$\begin{aligned}&= \int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\\ &= \arctan x\Big|_0^1\\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

P123

二 13 已知 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$，求 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值。

解 $f'(x)=(2-x^2)e^{-x^2}\cdot 2x$

令 $f'(x)=0 \Rightarrow x=0,\ x=\sqrt{2},\ x=-\sqrt{2}$（舍去）

$f(0)=\int_0^{0^2}(2-t)e^{-t}dt=0$

$f(\sqrt{2})=\int_0^{2}(2-t)e^{-t}dt$

$=\int_0^{2}(2-t)\,d(-e^{-t})$

$=(2-t)(-e^{-t})\Big|_0^2-\int_0^2(-e^{-t})(-dt)$

$=2+e^{-t}\Big|_0^2$

$=1+e^{-2}$

$f(2)=\int_0^{4}(2-t)e^{-t}dt$

$=\int_0^{4}(2-t)\,d(-e^{-t})$

$=-e^{-t}(2-t)\Big|_0^4+\int_0^4-e^{-t}dt$

$=2e^{-4}+2+e^{-4}-1$

$=1+e^{-4}+2e^{-4}=1+3e^{-4}$

$\max\{f(0),f(\sqrt{2}),f(2)\}=f(\sqrt{2})=1+e^{-2}$

所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值 $f(\sqrt{2})=1+e^{-2}$

另一思路

$x=\sqrt{2}$ 为驻点，$0<x<\sqrt{2}$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增

$\sqrt{2}<x<2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减

所以 $f(\sqrt{2})$ 为极大值点，由于是唯一的极大值点，该极大值就是函数在 $[0,2]$ 上的最大值。