

首届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案

(非数学类, 2010)

1) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} (1 + \frac{k}{n}) \sin \frac{k\pi}{n^2}$.

2) 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (z+a)^2 dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 其中 Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - y^2 - x^2}$ 的上侧, a 为大于 0 的

常数.

3) 现要设计一个容积为 V 的一个圆柱体的容器. 已知上下两底的材料费为单位面积 a 元, 而侧面的材料费为单位面积 b 元. 试给出最节省的设计方案: 即高与上下底的直径之比为何值时所需费用最少?

4) 已知 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ 内满足 $f'(x) = \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x}$, 求 $f(x)$.

解 1) 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (1 + \frac{k}{n}) \sin \frac{k\pi}{n^2}$, 则

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(\frac{k\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

$$= \frac{\pi}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k + \frac{\pi}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

2) 将 Σ (或分片后) 投影到相应坐标平面上化为二重积分逐块计算。

$$I_1 = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} axdydz = -2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{a^2 - (y^2 + z^2)} dydz$$

其中 D_{yz} 为 $yozy$ 平面上的半圆 $y^2 + z^2 \leq a^2, z \leq 0$ 。利用极坐标, 得

$$I_1 = -2 \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr = -\frac{2}{3} \pi a^3$$

$$I_2 = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} (z+a)^2 dxdy = \frac{1}{a} \iint_{D_{xy}} [a - \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}]^2 dxdy,$$

其中 D_{xy} 为 xoy 平面上的圆域 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 。利用极坐标, 得

$$I_2 = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - r^2} - r^2) r dr = \frac{\pi}{6} a^3.$$

因此, $I = I_1 + I_2 = -\frac{\pi}{2}a^3$ 。

3) 设圆柱容器的高为 h , 上下底的径为 r , 则有

$$\pi r^2 h = V, \text{ 或 } h = \frac{V}{\pi r^2}。$$

$$\text{所需费用为 } F(r) = 2a\pi r^2 + 2b\pi rh = 2a\pi r^2 + \frac{2bV}{r}$$

$$\text{显然, } F'(r) = 4a\pi r - \frac{2bV}{r^2}。$$

$$\text{那么, 费用最少意味着 } F'(r) = 0, \text{ 也即 } r^3 = \frac{bV}{2a\pi}$$

$$\text{这时高与底的直径之比为 } \frac{h}{2r} = \frac{V}{2\pi r^3} = \frac{a}{b}。$$

$$4) \text{ 由 } \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)[1 + 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)] \text{ 得}$$

$$I = \sqrt{2} \int \frac{dx}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)[1 + 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)]}, \text{ 令 } u = \frac{\pi}{4} - x, \text{ 得}$$

$$I = -\sqrt{2} \int \frac{du}{\cos u(1 + 2\sin^2 u)} = -\sqrt{2} \int \frac{d \sin u}{\cos^2 u(1 + 2\sin^2 u)}$$

$$\underline{\underline{\text{令 } t = \sin u}} \quad -\sqrt{2} \int \frac{dt}{(1-t^2)(1+2t^2)} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \left[\int \frac{dt}{1-t^2} + \int \frac{2dt}{1+2t^2} \right]$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{3} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \sqrt{2} \arctan \sqrt{2}t \right] + C$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{6} \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \right| - \frac{2}{3} \arctan(\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)) + C。$$

二、求下列极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right]; (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{3} \right)^n, \text{ 其中 } a > 0, b > 0, c > 0。$$

解 (1) 我们有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e = e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - e = e \left[e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \right] = e \left[\left\{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right\} - 1 \right] = e \left[-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} n[(1 + \frac{1}{n})^n - e] = -\frac{e}{2}$ 。

(2) 由泰劳公式有

$$a^{1/n} = e^{\ln a / n} = 1 + \frac{1}{n} \ln a + o(\frac{1}{n}) \quad (n \rightarrow +\infty),$$

$$b^{1/n} = e^{\ln b / n} = 1 + \frac{1}{n} \ln b + o(\frac{1}{n}) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

$$c^{1/n} = e^{\ln c / n} = 1 + \frac{1}{n} \ln c + o(\frac{1}{n}) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

因此,

$$\frac{1}{3} (a^{1/n} + b^{1/n} + c^{1/n}) = 1 + \frac{1}{n} \ln \sqrt[3]{abc} + o(\frac{1}{n}) \quad (n \rightarrow +\infty),$$

$$\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n} + c^{1/n}}{3} \right)^n = \left[1 + \frac{1}{n} \ln \sqrt[3]{abc} + o(\frac{1}{n}) \right]^n.$$

令 $\alpha_n = \frac{1}{n} \ln \sqrt[3]{abc} + o(\frac{1}{n})$, 上式可改写成

$$\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n} + c^{1/n}}{3} \right)^n = \left[(1 + \alpha_n)^{1/\alpha_n} \right]^{n\alpha_n}$$

显然, $(1 + \alpha_n)^{1/\alpha_n} \rightarrow e \quad (n \rightarrow +\infty), \quad n\alpha_n \rightarrow \ln \sqrt[3]{abc} \quad (n \rightarrow +\infty)$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n} + c^{1/n}}{3} \right)^n = \sqrt[3]{abc}.$$

三、设 $f(x)$ 在 $x=1$ 点附近有定义, 且在 $x=1$ 点可导, 并已知 $f(1)=0, f'(1)=2$. 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{x^2 + x \tan x}.$$

解 由题设可知:

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y) - f(1)}{y - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y)}{y - 1} = f'(1) = 2.$$

令 $y = \sin^2 x + \cos x$, 那么当 $x \rightarrow 0$ 时, $y = \sin^2 x + \cos x \rightarrow 1$,

故由上式有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{\sin^2 x + \cos x - 1} = 2$$

可见,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{x^2 + x \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{\sin^2 x + \cos x - 1} \times \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2 + x \tan x} \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2 + x \tan x} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

最后一步的极限可用常规的办法---洛比达法则或泰劳展开---求出。

四、设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 并且无穷积分 $\int_0^{\infty} f(x)dx$ 收敛. 求 $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \int_0^y xf(x)dx$.

解 设 $\int_0^{+\infty} f(x)dx = l$, 并令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 。

这时, $F'(x) = f(x)$, 并有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = l$ 。

对于任意的 $y > 0$, 我们有

$$\frac{1}{y} \int_0^y xf(x)dx = \frac{1}{y} \int_0^y x dF(x) = \frac{1}{y} xF(x) \Big|_{x=0}^{x=y} - \frac{1}{y} \int_0^y F(x)dx = F(y) - \frac{1}{y} \int_0^y F(x)dx$$

根据洛比达法则和变上限积分的求导公式, 不难看出

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \int_0^y F(x)dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = l$$

因此, $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \int_0^y xf(x)dx = l - l = 0$ 。

五、设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可微, 且 $f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = 1$. 证明: (1) 存在一个 $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$ 使得 $f(\xi) = \xi$; (2) 存在一个 $\eta \in (0, \xi)$ 使得 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$.

证明 (1) 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且有

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0, F(1) = -1 < 0$$

所以, 存在一个 $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$ 。

(2) 令 $G(x) = e^{-x}[f(x) - x]$, 那么 $G(0) = G(\xi) = 0$ 。

这样, 存在一个 $\eta \in (0, \xi)$, 使得 $G'(\eta) = 0$, 即

$$G'(\eta) = e^{-\eta}[f'(\eta) - 1] - e^{-\eta}[f(\eta) - \eta] = 0.$$

也即 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$. 证毕。

六、设 $n > 1$ 为整数,

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) dt.$$

证明: 方程 $F(x) = \frac{n}{2}$ 在 $(\frac{n}{2}, n)$ 内至少有一个根.

证明: 因为

$$e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) < 1, \quad \forall t > 0,$$

故有

$$F\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^{\frac{n}{2}} e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) dt < \frac{n}{2}$$

下面只需证明 $F(n) > \frac{n}{2}$ 即可。 我们有

$$\begin{aligned} F(n) &= \int_0^n e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) dt = - \int_0^n \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) de^{-t} \\ &= 1 - e^{-n} \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \right) + \int_0^n e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right) dt \end{aligned}$$

由此推出

$$\begin{aligned} F(n) &= \int_0^n e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) dt \\ &= 1 - e^{-n} \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \right) \\ &\quad + 1 - e^{-n} \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \right) \\ &\quad + \dots + 1 - e^{-n} \left(1 + \frac{n}{1!} \right) + 1 - e^{-n} \end{aligned}$$

记 $a_i = \frac{n^i}{i!}$, 那么 $a_0 = 1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。我们观察下面的方阵

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_0 & 2a_1 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & 2a_n \end{pmatrix}$$

整个矩阵的所有元素之和为

$$(n+2)(1+a_1+a_2+\cdots+a_n) = (n+2)\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)$$

基于上述观察, 由 (*) 式我们便得到

$$F(n) > n+1 - \frac{(2+n)}{2} e^{-n} \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!}\right)$$

$$> n+1 - \frac{n+2}{2} = \frac{n}{2}, \text{证毕.}$$

七、是否存在 $\mathbb{R}^1$ 中的可微函数 $f(x)$ 使得

$$f(f(x)) = 1 + x^2 + x^4 - x^3 - x^5?$$

若存在, 请给出一个例子; 若不存在, 请给出证明.

解 不存在。

假设存在 $\mathbb{R}^1$ 中的可微函数 $f(x)$ 使得

$$f(f(x)) = 1 + x^2 + x^4 - x^3 - x^5。$$

考虑方程 $f(f(x)) = x$,

$$\text{即 } 1 + x^2 + x^4 - x^3 - x^5 = x,$$

$$\text{或 } (x-1)(x^4 + x^2 + 1) = 0。$$

此方程有惟一实数根 $x=1$, 即 $f(f(x))$ 有惟一不动点 $x=1$ 。

下面说明 $x=1$ 也是 $f(x)$ 的不动点。

事实上, 令 $f(1)=t$, 则 $f(t) = f(f(1)) = 1$, $f(f(t)) = f(1) = t$, 因此 $t=1$ 。如所需。

记 $g(x) = f(f(x))$, 则一方面, $[g(x)]' = [f(f(x))]' \Rightarrow g'(1) = (f'(1))^2 \geq 0$;

另一方面, $g'(x) = (1 + x^2 + x^4 - x^3 - x^5)' = 2x + 4x^3 - 3x^2 - 5x^4$, 从而 $g'(1) = -2$ 。矛盾。

所以, 不存在 $\mathbb{R}^1$ 中的可微函数 $f(x)$ 使得 $f(f(x)) = 1 + x^2 + x^4 - x^3 - x^5$ 。证毕。

解法二: 满足条件的函数不存在。

理由如下

首先, 不存在 $x_k \rightarrow +\infty$, 使 $f(x_k)$ 有界, 否则 $f(f(x_k)) = 1 + x_k^2 + x_k^4 - x_k^3 - x_k^5$ 有界, 矛盾。

因此

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$. 从而由连续函数的介值性有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ 。

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = -\infty$, 矛盾。

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = +\infty$, 矛盾。

因此, 无论哪种情况都不可能。

八、设 $f(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上一致连续, 且对于固定的 $x \in [0, \infty)$, 当自然数 $n \rightarrow \infty$ 时 $f(x+n) \rightarrow 0$. 证

明函数序列 $\{f(x+n): n=1, 2, \dots\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 0

证: 由于 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 故对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$ 使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ 只要 } |x_1 - x_2| < \delta \quad (x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$

取一个充分大的自然数 m , 使得 $m > \delta^{-1}$, 并在 $[0, 1]$ 中取 m 个点:

$$x_1 = 0 < x_2 < \dots < x_m = 1,$$

其中 $x_j = \frac{j}{m}$ ($j=1, 2, \dots, m$)。这样, 对于每一个 j ,

$$|x_{j+1} - x_j| = \frac{1}{m} < \delta。$$

又由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0$, 故对于每一个 x_j , 存在一个 N_j 使得

$$|f(x_j + n)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ 只要 } n > N_j,$$

这里的 ε 是前面给定的。

令 $N = \max\{N_1, \dots, N_m\}$, 那么

$$|f(x_j + n)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ 只要 } n > N,$$

其中 $j=1,2,\dots,m$ 。设 $x\in[0,1]$ 是任意一点，这时总有一个 x_j 使得 $x\in[x_j,x_{j+1}]$ 。

由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续性及 $|x-x_j|<\delta$ 可知，

$$|f(x_j+n)-f(x+n)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n=1,2,\dots)$$

另一方面，我们已经知道

$$|f(x_j+n)|<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ 只要 } n>N$$

这样，由后面证得的两个式子就得到

$$|f(x+n)|<\varepsilon, \text{ 只要 } n>N, x\in[0,1]$$

注意到这里的 N 的选取与点 x 无关，这就证实了函数序列 $\{f(x+n):n=1,2,\dots\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0。

