

第二届全国大学生数学竞赛 决赛试题解答

(非数学类)

第二届全国大学生数学竞赛（非数学类）决赛试题解答

吴 洁

得 分	
评阅人	

一、（本题共 3 小题，每小题各 5 分，共 15 分）计算下列各题（要求写出重要步骤）。



$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right);$$

(3) 已知 $\begin{cases} x = \ln(1 + e^{2t}) \\ y = t - \arctan e^t \end{cases}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

解: (1) 原式 $= \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x} \left[\frac{\sin x}{x} - 1 \right] = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x} \cdot \frac{\sin x - x}{x}$

$$= \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{2}x^3} = e^{-\frac{1}{3}} \quad (x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3)$$

(2) 因为 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} \right] \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} \frac{1}{n}$, 取 $\xi_i = \frac{i}{n}$, 则得被积函

数为 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ，积分区间 $[0,1]$ ，于是 $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2$ 。

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{e^t}{1+e^{2t}}}{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}} = \frac{1+e^{2t}-e^t}{2e^{2t}} = \frac{1}{2} [e^{-2t} + 1 - e^{-t}],$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{\frac{1}{2} [-2e^{-2t} + e^{-t}]}{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}} = \frac{1}{4} [-2e^{-4t} + e^{-3t} - 2e^{-2t} + e^{-t}].$$

得 分	
评阅人	

二、(本题 10 分) 求方程

$(2x + y - 4)dx + (x + y - 1)dy = 0$ 的通解.

解: 所给方程改写为



$$(2xdx + ydy) + (ydx + xdy) - (4dx + dy) = 0$$

即

$$d(x^2 + \frac{1}{2}y^2) + d(xy) - d(4x + y) = 0$$

故所求通解为

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy - (4x + y) = C .$$

得 分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数, 且 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ 均不为零. 证明: 存在唯一一组实数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k_1 f(h) + k_2 f(2h) + k_3 f(3h) - f(0)}{h^2} = 0.$$

解 由条件 $0 = \lim_{h \rightarrow 0} [k_1 f(h) + k_2 f(2h) + k_3 f(3h) - f(0)] = (k_1 + k_2 + k_3 - 1)f(0)$,

因 $f(0) \neq 0$, 所以 $k_1 + k_2 + k_3 - 1 = 0$;

$$\begin{aligned} \text{又 } 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k_1 f(h) + k_2 f(2h) + k_3 f(3h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [k_1 f'(h) + 2k_2 f'(2h) + 3k_3 f'(3h)] \\ &= (k_1 + 2k_2 + 3k_3)f'(0), \end{aligned}$$

因 $f'(0) \neq 0$ ，所以 $k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0$ ；

$$\begin{aligned}\text{再由 } 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k_1 f(h) + k_2 f(2h) + k_3 f(3h) - f(0)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k_1 f'(h) + 2k_2 f'(2h) + 3k_3 f'(3h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} [k_1 f''(h) + 4k_2 f''(2h) + 9k_3 f''(3h)] = \frac{1}{2} [k_1 + 4k_2 + 9k_3] f''(0),\end{aligned}$$

因 $f''(0) \neq 0$ ，所以 $k_1 + 4k_2 + 9k_3 = 0$ 。因此 k_1 ， k_2 ， k_3 应满足线性方程组

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 - 1 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0, \\ k_1 + 4k_2 + 9k_3 = 0 \end{cases}$$

因其系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ ，所以存在唯一一组实数 k_1, k_2, k_3 ，使得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k_1 f(h) + k_2 f(2h) + k_3 f(3h) - f(0)}{h^2} = 0。$$

得 分	
评阅人	

四、(本题 17 分) 设 $\Sigma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ，其中 $a > b > c > 0$ ，

$\Sigma_2: z^2 = x^2 + y^2$ ， Γ 为 Σ_1 和 Σ_2 的交线。求椭球面 Σ_1 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值。

解： 椭球面 Σ_1 上任意一点 $P(x, y, z)$ 处的切平面方程是

$$\frac{x}{a^2}(X-x) + \frac{y}{b^2}(Y-y) + \frac{z}{c^2}(Z-z) = 0$$

或
$$\frac{x}{a^2}X + \frac{y}{b^2}Y + \frac{z}{c^2}Z = 1 \quad (\text{由 } P(x, y, z) \in \Sigma_1),$$

于是它到原点的距离

$$d(x, y, z) = 1 / \sqrt{(x^2/a^4) + (y^2/b^4) + (z^2/c^4)}.$$

作拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) + \mu (x^2 + y^2 - z^2),$$

令

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = 2(\frac{1}{a^4} + \frac{\lambda}{a^2} + \mu) x = 0 \\ F_y = 2(\frac{1}{b^4} + \frac{\lambda}{b^2} + \mu) y = 0 \\ F_z = 2(\frac{1}{c^4} + \frac{\lambda}{c^2} - \mu) z = 0 \\ F_\lambda = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ F_\mu = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{array} \right.$$

由第一个方程得 $x=0$ ，代入后两个方程得 $y=\pm z=\pm\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$ ；同理，由第一个方程得

$y=0$ ，代入后两个方程得 $x=\pm z=\pm\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$ ，且

$$\left.\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right|_{(0,\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}},\pm\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}})}=\frac{b^4+c^4}{b^2c^2(b^2+c^2)},$$



$$\left.\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right|_{(\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}},0,\pm\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}})}=\frac{a^4+c^4}{a^2c^2(a^2+c^2)}.$$

为比较以上两值的大小，设 $f(x) = \frac{x^4 + c^4}{x^2 c^2 (x^2 + c^2)}$ ($0 < b < x < a$)，则

$$f'(x) = \frac{2x(x^4 - 2c^2 x^2 - c^4)}{x^4(x^2 + c^2)^2} = \frac{2x(x^2 - c^2)^2 - 2c^4}{x^4(x^2 + c^2)^2} = \frac{2x(x^2 - c^2 + \sqrt{2}c^2)(x^2 - c^2 - \sqrt{2}c^2)}{x^4(x^2 + c^2)^2}$$

如果要 $f'(x) > 0$ ，须将原条件 $a > b > c > 0$ 加强为 $a > b > \sqrt{1 + \sqrt{2}}c$ 。

从而得到 $f(x)$ 在 $[b, a]$ 单调增，从而 $f(a) > f(b)$ ，从而原问题的最大值为 $bc\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{b^4 + c^4}}$ ，

最小值为 $ac\sqrt{\frac{a^2 + c^2}{a^4 + c^4}}$ 。

注：是不是还该讨论 $f'(x) < 0$ 的情形，请自己思考。

得 分	
评阅人	

五、(本题 16 分) 已知 S 是空间曲线 $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转

形成的椭球面的上半部分 ($z \geq 0$) (取上侧), Π 是 S 在 $P(x, y, z)$ 点处的切平面,

$\rho(x, y, z)$ 是原点到切平面 Π 的距离, λ, μ, ν 表示 S 的正法向的方向余弦.

计算: (1) $\iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS$; (2) $\iint_S z(\lambda x + 3\mu y + \nu z) dS$.

解 (1) 由题设, S 的方程为

$$x^2 + 3y^2 + z^2 = 1 (z \geq 0)。$$

设 (X, Y, Z) 为切平面 π 上任意一点, 则 π 的方程为 $xX + 3yY + zZ = 1$, 从而由

点到平面的距离公式以及 $P(x, y, z) \in S$ 得

$$\rho(x, y, z) = (x^2 + 9y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + 6y^2)^{\frac{1}{2}},$$

由 S 为上半椭球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - 3y^2}$ 知 :

$$z_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - 3y^2}}, \quad z_y = -\frac{3y}{\sqrt{1 - x^2 - 3y^2}}$$

✎ 于是

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{\sqrt{1 + 6y^2}}{\sqrt{1 - x^2 - 3y^2}},$$

又 S 在 xoy 平面上的投影为 $D_{xy} : x^2 + 3y^2 \leq 1$, 故

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - 3y^2} \cdot \frac{1}{(1 + 6y^2)^{-\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{1 + 6y^2}}{\sqrt{1 - x^2 - 3y^2}} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (1 + 6y^2) dx dy = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi. \end{aligned}$$

其中, $\iint_{D_{xy}} dx dy = \pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}};$

$$\text{令} \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} r \sin \theta \end{cases} \quad (\text{广义极坐标}), \text{ 则}$$

$$\iint_{D_{xy}} 6y^2 dx dy = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^1 \frac{1}{3} r^3 dr = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \quad .$$

(2) 由于 S 取上侧, 故正法向量

$$\vec{n} = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + (3y)^2 + z^2}}, \frac{3y}{\sqrt{x^2 + (3y)^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + (3y)^2 + z^2}} \right\},$$



所以 $\lambda = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (3y)^2 + z^2}}, \quad \mu = \frac{3y}{\sqrt{x^2 + (3y)^2 + z^2}}, \quad \nu = \frac{z}{\sqrt{x^2 + (3y)^2 + z^2}},$

$$\iint_S z(\lambda x + 3\mu y + \nu z) dS = \iint_S z \cdot \frac{x^2 + 9y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + 9y^2 + z^2}} dS = \iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi .$$

得 分	
评阅人	

六、(本题 12 分) 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 内的可微函数, 且

$|f'(x)| < mf(x)$, 其中 $0 < m < 1$. 任取实数 a_0 , 定义

$a_n = \ln f(a_{n-1}), n = 1, 2, \dots$. 证明: $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛.

证： 因 $|a_n - a_{n-1}| = |\ln f(a_{n-1}) - \ln f(a_{n-2})| = \left| \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} (a_n - a_{n-1}) \right|$ (ξ 介于 a_n, a_{n-1} 之间)

$$\leq m |a_{n-1} - a_{n-2}| \leq m^2 |a_{n-2} - a_{n-3}| \leq \cdots \leq m^{n-1} |a_1 - a_0|$$

而 $0 < m < 1$ ，从而 $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛。

得 分	
评阅人	

七、(本题 15 分) 是否存在区间 $[0, 2]$ 上的连续可微函数

$f(x)$ ，满足 $f(0) = f(2) = 1$ ， $|f'(x)| \leq 1$ ， $\left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq 1$ ？请

说明理由。

解：不存在满足题设条件的函数。

以下用反证法证明。

假设在 $[0, 2]$ 上连续、可微，且满足 $f(0) = f(2) = 1$ ， $|f'(x)| \leq 1$ ， $\left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq 1$ ，则对

$f(x)$ ，当 $x \in (0, 1]$ 时，用拉格朗日中值定理，得

$$f(x) - f(0) = f'(\xi_1)x, \quad 0 < \xi_1 < x,$$

即

$$f(x) = 1 + f'(\xi_1)x \quad (x \in (0, 1]),$$

利用 $|f'(x)| \leq 1$ ，得

$$f(x) \geq 1 - x \quad (x \in (0, 1]),$$

由 $f(0)=1$ 知, $f(x) \geq 1-x$ 在 $[0,1]$ 上成立;

同理 $x \in [1,2)$ 时, 有

$$f(2)-f(x)=f'(\xi_2)(2-x), \quad x < \xi_2 < 2,$$

即
$$f(x)=1+f'(\xi_2)(x-2) \quad (x \in [1,2)),$$

利用 $|f'(x)| \leq 1$, 得

$$f(x) \geq 1+(x-2)=x-1 \quad (x \in [1,2)),$$

由 $f(2)=1$ 知, $f(x) \geq 1-x$ 在 $[1,2]$ 上成立。所以

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx > \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx$$

$$= -\frac{1}{2}(1-x)^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 \Big|_1^2 = 1$$

矛盾（取严格不等号的理由见教材上册 P195）。