

第五届全国大学生数学竞赛决赛评分细则

(非数学类, 2014)

一、解答下列各题 (本题共 28 分, 每小题 7 分)

1. 计算积分 $\int_0^{2\pi} x \int_x^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt dx$.

解 1 原式 $= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \int_0^t x dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt$ (4 分)

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad (3 \text{ 分})$$

解 2 令 $f(x) = \int_x^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$, 则 $f'(x) = -\frac{\sin^2 x}{x^2}$ 且 $f(2\pi) = 0$. (2 分)

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} x f(x) dx = \frac{1}{2} x^2 f(x) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x^2 f'(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x^2 \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \quad (3 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}. \quad (2 \text{ 分})$$

2 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数, 且满足 $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 求一个这样的函数 $f(x)$ 使得积分

$I = \int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx$ 取得最小值.

解 $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$$\leq \left(\int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right)^{1/2} \quad (3 \text{ 分})$$

$$= \left(\int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{1/2} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx \geq \frac{4}{\pi}. \text{ 取 } f(x) = \frac{4}{\pi(1+x^2)} \text{ 即可.} \quad (2 \text{ 分})$$

3. 设 $F(x, y, z)$ 和 $G(x, y, z)$ 有连续偏导数, $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} \neq 0$, 曲线 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 过点

$P_0(x_0, y_0, z_0)$. 记 Γ 在 xoy 平面上的投影曲线为 S . 求 S 上过点 (x_0, y_0) 的切线方程.

解. 由两方程定义的曲面在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切面分别为

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0,$$

$$G_x(P_0)(x-x_0)+G_y(P_0)(y-y_0)+G_z(P_0)(z-z_0)=0. \quad (3 \text{ 分})$$

上述两切面的交线就是 Γ 在 P_0 点的切线, 该切线在 xoy 面上的投影就是 S 过 (x_0, y_0) 的切线.

消去 $z-z_0$, 我们得到

$$(F_x G_z - G_x F_z)_{P_0} (x-x_0) + (F_y G_z - G_y F_z)_{P_0} (y-y_0) = 0, \quad (3 \text{ 分})$$

这里 $x-x_0$ 的系数是 $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} \neq 0$, 故上式是一条直线的方程, 就是所要求的切线. (1 分)

4 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & a \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 其中 a 为常数, 矩阵 B 满足关系式 $AB = A - B + E$, 其中 E 是单

位矩阵且 $B \neq E$. 若秩 $\text{rank}(A+B)=3$, 试求常数 a 的值.

解. 由关系式 $AB = A - B + E$, 得 $\Rightarrow (A+E)(B-E) = 0$

$$\Rightarrow \text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A+E) + \text{rank}(B-E) \leq 3 \quad (3 \text{ 分})$$

因为 $\text{rank}(A+B)=3$, 所以 $\text{rank}(A+E) + \text{rank}(B-E) = 3$

又 $\text{rank}(A+E) \geq 2$, 考虑到 B 非单位, 所以 $\text{rank}(B-E) \geq 1$, 只有 $\text{rank}(A+E) = 2$ (2 分)

$$A+E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & a-9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 13-2a \\ 0 & -1 & a-9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ 从而 } a = \frac{13}{2}. \quad (2 \text{ 分})$$

二、(12 分) 设 $f \in C^4(-\infty, +\infty)$, $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$, 其中 θ 是与 x, h 无关的常数, 证明 f 是不超过三次的多项式.

证 由泰勒公式

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\eta)h^4 \quad (1) \quad (2 \text{ 分})$$

$$f''(x+\theta h) = f''(x) + f'''(x)\theta h + \frac{1}{2}f^{(4)}(\eta)\theta^2 h^2 \quad (2) \quad (2 \text{ 分})$$

其中 ξ 介于 x 与 $x+h$ 之间, η 介于 x 与 $x+\theta h$ 之间, 由 (1), (2) 式与已知条件

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$$

可得

$$4(1-3\theta)f'''(x) = [6f^{(4)}(\eta)\theta^2 - f^{(4)}(\xi)]h \quad (3 \text{ 分})$$

当 $\theta \neq \frac{1}{3}$ 时, 令 $h \rightarrow 0$ 得 $f'''(x) = 0$, 此时 f 是不超过二次的多项式; (2 分)

当 $\theta = \frac{1}{3}$ 时, 有 $\frac{2}{3} f^{(4)}(\eta) = f^{(4)}(\xi)$

令 $h \rightarrow 0$, 注意到 $\xi \rightarrow x, \eta \rightarrow x$, 有 $f^{(4)}(x) = 0$, 从而 f 是不超过三次的多项式. (3 分)

三、(12 分) 设当 $x > -1$ 时, 可微函数 $f(x)$ 满足条件 $f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt = 0$, 且 $f(0) = 1$, 试证: 当 $x \geq 0$ 时, 有 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$ 成立.

证 设由题设知 $f'(0) = -1$, 则所给方程可变形为

$$(x+1)f'(x) + (x+1)f(x) - \int_0^x f(t) dt = 0. \quad (3 \text{ 分})$$

两端对 x 求导并整理得

$$(x+1)f''(x) + (x+2)f'(x) = 0, \quad (2 \text{ 分})$$

这是一个可降阶的二阶微分方程, 可用分离变量法求得 $f'(x) = \frac{Ce^{-x}}{1+x}$. (2 分)

由 $f'(0) = -1$ 得 $C = -1$, $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{1+x} < 0$, 可见 $f(x)$ 单减.

而 $f(0) = 1$, 所以当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq 1$. (2 分)

对 $f'(t) = -\frac{e^{-t}}{1+t} < 0$ 在 $[0, x]$ 上进行积分得

$$f(x) = f(0) - \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t} dt \geq 1 - \int_0^x e^{-t} dt = e^{-x} \quad (3 \text{ 分})$$

四、(10 分) 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $I = \iint_D f(x, y) dx dy$, 其中函数

$f(x, y)$ 在 D 上有连续二阶偏导数. 若对任何 x, y 有 $f(0, y) = f(x, 0) = 0$ 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \leq A$. 证

明 $I \leq \frac{A}{4}$.

证. $I = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = - \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) d(1-x)$. 对固定 y , $(1-x)f(x, y)|_{x=0}^{x=1} = 0$, 由分

部积分法和可得 $\int_0^1 f(x, y) d(1-x) = -\int_0^1 (1-x) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx$. (3 分)

调换积分次序后可得 $I = \int_0^1 (1-x) dx \int_0^1 \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$. (2 分)

因为 $f(x, 0) = 0$ 所以 $\frac{\partial f(x, 0)}{\partial x} = 0$, 从而 $(1-y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{y=0}^{y=1} = 0$. 再由分部积分法得

$$\int_0^1 \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy = -\int_0^1 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} d(1-y) = \int_0^1 (1-y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy. \quad (2 \text{ 分})$$

$$I = \int_0^1 (1-x) dx \int_0^1 (1-y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy = \iint_D (1-x)(1-y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy. \quad (2 \text{ 分})$$

因为 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \leq A$, 且 $(1-x)(1-y)$ 在 D 上非负, 故 $I \leq A \iint_D (1-x)(1-y) dx dy = \frac{A}{4}$. (3 分)

五、(12 分) 设函数 $f(x)$ 连续可导, $P=Q=R=f((x^2+y^2)z)$, 有向曲面 Σ_t 是圆柱体

$x^2+y^2 \leq t^2, 0 \leq z \leq 1$ 的表面, 方向朝外. 记第二型的曲面积分

$$I_t = \iint_{\Sigma_t} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

求极限 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I_t}{t^4}$.

解. 由高斯公式

$$\begin{aligned} I_t &= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iiint_V (2xz + 2yz + x^2 + y^2) f'((x^2 + y^2)z) dx dy dz \end{aligned} \quad (3 \text{ 分})$$

由对称性 $\iiint_V (2xz + 2yz) f'((x^2 + y^2)z) dx dy dz = 0$ (2 分)

$$\begin{aligned} \text{从而 } I_t &= \iiint_V (x^2 + y^2) f'((x^2 + y^2)z) dx dy dz = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f'(r^2 z) r^3 dr \right] dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[\int_0^t f'(r^2 z) r^3 dr \right] dz \end{aligned} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I_t}{t^4} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\pi \int_0^1 \left[\int_0^t f'(r^2 z) r^3 dr \right] dz}{t^4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\pi \int_0^1 f'(t^2 z) t^3 dz}{4t^3} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2} \int_0^1 f'(t^2 z) dz = \frac{\pi}{2} f'(0)\end{aligned}\quad (4 \text{ 分})$$

六、(12 分) 设 A, B 为二个 n 阶正定矩阵, 求证 AB 正定的充要条件是 $AB = BA$.

证必要性 设 AB 为二个 n 阶正定矩阵, 从而为对称矩阵, 即 $(AB)^T = AB$. 又 $A^T = A, B^T = B$, 所以 $(AB)^T = B^T A^T = BA$, 所以 $AB = BA$. (3 分)

充分性 因为 $AB = BA$, 则 $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$, 所以 AB 为实对称矩阵. (2 分).

因为 A, B 为正定矩阵, 存在可逆阵 P, Q , 使

$$A = P^T P, B = Q^T Q \text{ 于是 } AB = P^T P Q^T Q. \quad (2 \text{ 分})$$

所以 $(P^T)^{-1} A B P^T = P Q^T Q P^T = (Q P^T)^T (Q P^T)$, 即 $(P^T)^{-1} A B P^T$ 是正定矩阵. (2 分)

所以矩阵 $(P^T)^{-1} A B P^T$ 的特征值全为正实数, 而 AB 相似于 $(P^T)^{-1} A B P^T$, 所以 AB 的特征值全为正实数. 所以 AB 为正定矩阵. (3 分)

七、(12 分) 假设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$. 证明: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

收敛且 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$.

证 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n k |a_k|}{n} = 0$, 故对于任意 $\varepsilon > 0$ 存在 N_1 使得当 $n > N_1$ 时, 有

$$0 \leq \frac{\sum_{k=0}^n k |a_k|}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n |a_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2 \text{ 分})$$

又因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$, 所以存在 $\delta > 0$, 当 $1 - \delta < x < 1$ 时, $\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}$. (1 分)

取 N_2 , 当 $n > N_2$ 时, $\frac{1}{n} < \delta$, 从而 $1 - \delta < 1 - \frac{1}{n}$, 取 $x = 1 - \frac{1}{n}$, 则

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2 \text{ 分})$$

取 $N = \{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^n a_k - A \right| &= \left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^n a_k x^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - A \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=0}^n a_k (1-x^k) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| + \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - A \right|
\end{aligned} \quad (3 \text{ 分})$$

取 $x = 1 - \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^n a_k (1-x^k) \right| &= \left| \sum_{k=0}^n a_k (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^n |a_k| (1-x)k = \frac{\sum_{k=0}^n k |a_k|}{n} < \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} k |a_k| x^k < \frac{\varepsilon}{3n} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \leq \frac{\varepsilon}{3n} \frac{1}{1-x} = \frac{\varepsilon}{3n \cdot \frac{1}{n}} = \frac{\varepsilon}{3};$$

又因为 $\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}$, 则 $\left| \sum_{k=0}^n a_k - A \right| < 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. 证毕

(2 分)