

华东交通大学 2015 年大学数学竞赛试卷

座位号:

专业:

姓名:

年级:

班级:

得分:

请仔细阅读注意事项。

1、本竞赛试卷分正反两页，请详细填写姓名、专业、年级、班级及座位号(报名时所给的座位号)。

2、本次竞赛为学校的双基竞赛之一，按照学校有关规定可获得第二课堂学分。我们将在竞赛之后把参赛名单及获奖名单发给各学院学工办，如同学需要该学分请直接到本学院的学工办登记学分。

3、我校每年都会选派同学参加 9 月中旬的全国大学生数学建模竞赛(要求大二以上年级学生)，如果有兴趣可选修每学年第二学期的数学建模课程，到时可以跟任课教师报名。

4、我校每年都会选派同学参加 10 月底的全国大学生大学数学竞赛(最好大三准备考研的学生)，而且近年取得了较好成绩。如果同学有兴趣想并参加此项赛事或数学建模竞赛可咨询理学院办公室(电话: 87046324)或理学院数学系(电话: 87046334)。

5、考试自己独立完成，若发现雷同试卷一律取消双方的获奖资格，并上报学校，到时按照学校有关规定进行处理。

一、填空题(每题 4 分、共 28 分)

1、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}) = \frac{1}{2}$

2、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = e^{-\frac{1}{2}}$

3、曲线 $\begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$ 在对应 $t = \frac{\pi}{4}$ 点处的法线斜率 $k = \sqrt{2} + 1$

4、设方程 $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 确定 $y = y(x)$ ，则 $dy = \frac{x+y}{x-y} dx$

5、曲线 $y = \frac{x^2}{x+1}$ 的斜渐近线为 $y = x - 1$

6、设 $f'(e^x) = xe^{-x}$ ，且 $f(e) = 1$ ，则 $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{1}{2}$

7、设 $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2} \int_0^1 f(x) dx$ ，则 $\int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{4-2}$

二、解答题或证明题 (每题 12 分、共 72 分)

1. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 等价, 求 a, b

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1-bx)} = 1$ 又 $x - \sin ax = (1-a)x + \frac{a^3 x^3}{3!} + o(x^3)$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{-bx^3} = 1$ $x^2 \ln(1-bx) = x^2(-bx - \frac{1}{2}b^2 x^2 + o(x^2)) = -bx^3 - \frac{1}{2}b^2 x^4 + o(x^4)$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2} = 1$ $\therefore a=1, b=-\frac{1}{6}$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \sin ax}{-6bx} = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^3}{-6b} \cdot \frac{\sin ax}{ax} = 1$

$\Rightarrow a^3 = -6b$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - e^{-x}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $g(x)$ 有二阶连续导数且 $g(0) = 1, g'(0) = -1$,

(1) 求 $f'(x)$; (2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续性

解: (1) ① $x \neq 0$. $f'(x) = \frac{(g'(x) + e^{-x})x - (g(x) - e^{-x})}{x^2}$

② $x = 0$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+0) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - e^{-x}}{x^2}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g''(x) - e^{-x}}{2}$

$= \frac{g''(0) - 1}{2} = f'(0).$

(2) ① $x \neq 0$. $f'(x)$ 连续.

② $x = 0$ 时. $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g'(x) + e^{-x})x - (g(x) - e^{-x})}{x^2}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + e^{-x} + x(g''(x) - e^{-x}) - (g'(x) + e^{-x})}{2x}$

$= \frac{1}{2}(g''(0) - 1) = f'(0)$

3. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1 - \xi$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta_1, \eta_2 \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta_1) \cdot f'(\eta_2) = 1$

证: (1) 构造函数 $g(x) = f(x) + x - 1$.

$$g(0) = f(0) - 1 = -1 < 0, \quad g(1) = f(1) = 1 > 0.$$

由零点定理 $\Rightarrow \exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $g(\xi) = 0$ 即 $f(\xi) = 1 - \xi$.

(2). $(0, \xi), (\xi, 1)$ 上分别对 $g(x) = f(x) + x - 1$ 利用

Lagrange 中值定理, $\exists \eta_1 \in (0, \xi), \eta_2 \in (\xi, 1)$, s.t.

$$g'(\eta_1) = \frac{g(\xi) - g(0)}{\xi - 0} = \frac{1}{\xi} = f'(\eta_1) + 1 \Rightarrow f'(\eta_1) = \frac{1}{\xi} - 1$$

$$g'(\eta_2) = \frac{g(1) - g(\xi)}{1 - \xi} = \frac{1}{1 - \xi} = f'(\eta_2) + 1 \Rightarrow f'(\eta_2) = \frac{\xi}{1 - \xi}$$

$$\Rightarrow f'(\eta_1) \cdot f'(\eta_2) = 1.$$

4. 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} x \left(\frac{t-x}{t+x} \right)^t$, 求函数 $f(x)$ 的极值与曲线 $y = f(x)$ 的拐点

$$\text{解: } ① f(x) = x \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2x}{t+x} \right)^t$$

$$= x \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2x}{t+x} \right)^{\frac{t+x}{-2x} \cdot \underbrace{\left(\frac{-2x}{t+x} \right)}_{\rightarrow 0}}$$

$$= x e^{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2xt}{t+x}} = x \cdot e^{-2x}.$$

$$② f'(x) = e^{-2x} + (-2x)e^{-2x} = (1-2x)e^{-2x}.$$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2}, & f'(x) < 0. \end{cases} \quad \text{极大值为 } x = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2}, & f'(x) > 0. \end{cases} \quad \text{且 } f'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{-1} < 0.$$

$$f''(x) = -2e^{-2x} - 2e^{-2x} + 4x \cdot e^{-2x} \quad \downarrow \text{极大点}$$

$$= (4x - 4)e^{-2x}$$

$$\text{令 } f''(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1} \quad \text{于是 } x < 1, f''(x) > 0; 1 < x < 1, f''(x) < 0; x > 1, f''(x) > 0.$$

5. 求 $I = \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$

$$\Rightarrow I = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\arctan x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^{\arctan x} - I$$

$$I = \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} e^{\arctan x}$$

$$\Rightarrow I = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\arctan x} + C$$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} d e^{\arctan x}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\arctan x} - \int e^{\arctan x} d \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\arctan x} - \int e^{\arctan x} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$II = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d e^{\arctan x}$$

$$= \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int e^{\arctan x} \cdot \frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

6. 设 $f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt$, 求 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x) dx$

$$= \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} + I$$

$$\text{解: } ① f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt$$

$$= - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} d \cos t$$

$$= - \frac{1}{t} \cos t \Big|_x^{\frac{\pi}{2}} + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt$$

$$= \frac{1}{x} \cos x + \sin t \Big|_x^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{x} \cos x + 1 - \sin x$$

$$② I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x + x - x \sin x dx$$

$$= 1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \cos x$$

$$= 1 + \frac{\pi^2}{8} + x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= 1 + \frac{\pi^2}{8} - \pi - \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - \pi$$

线