

华东交通大学 2016 年大学数学竞赛试卷

座位号:

专业:

姓名:

年级:

班级:

得分:

请仔细阅读注意事项。

1、本竞赛试卷分正反两页, 请详细填写姓名、专业、年级、班级及座位号(报名时所给的座位号)。

2、本次竞赛为学校的双基竞赛之一, 本项竞赛是学校双基竞赛活动之一。按照学校第二课堂学分制度管理办法, 参加并完成竞赛的同学可以获得一定的第二课堂活动学分(2013 级与 2014 级)或素质拓展学分(2015 级与 2016 级)。我们将在竞赛之后把参赛名单及获奖名单发给各学院学工办, 如同学需要该学分请直接到本学院的学工办登记学分。

3、我校每年都会选派同学参加全国大学生数学建模竞赛(要求大二以上年级学生)及全国大学生大学数学竞赛(最好大三准备考研学生), 而且近年取得了较好成绩。如果同学有兴趣想并参加此两项赛事可咨询理学院办公室(电话: 87046324)或理学院数学系(电话: 87046334)。

4、考试自己独立完成, 若发现雷同试卷一律取消双方的获奖资格, 并上报学校, 到时按照学校有关规定进行处理。

一、填空题(每题 4 分、共 32 分)

1、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(1 + \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{4^2}) \cdots (1 + \frac{1}{4^{2^n}})] = \frac{4}{3}$

2、设当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 ax^n 是等价无穷小, 则 $a = 4, n = 3$

3、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} [2 - \frac{\ln(1+x)}{x}]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{2}}$

4、曲线 $\tan(x + y + \frac{\pi}{4}) = e^y$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $y = -2x$

5、设 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 则 $y'''|_{x=\sqrt{3}} = \frac{5}{32}$

6、曲线 $y = x^2 \ln x$ 的拐点为 $(e^{-\frac{2}{3}}, -\frac{2}{3}e^{-3})$

7、设 $f'(e^x) = xe^{-x}$, 且 $f(e) = 1$, 则 $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{1}{2}$

8、设 $\int_0^a xe^{2x} dx = \frac{1}{4}$, 则 $a = \frac{1}{2}$

二、解答题或证明题 (68 分)

1、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2})$ (10分)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \quad 2' \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^4} \quad 3' \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + \sin x \cos x}{x} \cdot \frac{x - \sin x \cos x}{x^3} \right) \quad 5' \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} \quad 7' \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{6x} \quad 8' \\
 &= \frac{4}{3} \quad 10'
 \end{aligned}$$

2、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = \frac{1}{2}$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta_1, \eta_2 \in (0, 1)$, 使得 $\frac{1}{f'(\eta_1)} + \frac{1}{f'(\eta_2)} = 2$ (10分)

(1) 令 $F(x) = f(x) - \frac{1}{2}$
 $\because F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, ~~且 $F(0) = -\frac{1}{2}, F(1) = \frac{1}{2}$~~ 且 $F(0) = -\frac{1}{2}, F(1) = \frac{1}{2}$
 故存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $F(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = \frac{1}{2}$ $4'$

(2) $\because f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 和 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上连续, 在 $(0, \frac{1}{2})$ 和 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内可导

$\therefore$ 存在 $\eta_1 \in (0, \frac{1}{2}) \subset (0, 1)$, $\eta_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使

$$f'(\eta_1) = \frac{f(\frac{1}{2}) - f(0)}{\frac{1}{2} - 0} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \quad 6'$$

$$f'(\eta_2) = \frac{f(1) - f(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2(1 - \frac{1}{2})} \quad 8'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f'(\eta_1)} + \frac{1}{f'(\eta_2)} = 2 + 2(1 - \frac{1}{2}) = 2 \quad 10'$$

3、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - e^{-x}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $g(x)$ 有二阶连续导数且 $g(0) = 1, g'(0) = -1$,

(1) 求 $f'(x)$; (2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续性 (12分)

(1) 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \frac{(g'(x) + e^{-x})x - (g(x) - e^{-x})}{x^2}$ 2'

当 $x = 0$ 时, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x) - e^{-x}}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - e^{-x}}{x^2}$ 3'

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g''(x) - e^{-x}}{2} = \frac{g''(0) - 1}{2}$ 6'

$\therefore f'(x) = \begin{cases} \frac{(g'(x) + e^{-x})x - (g(x) - e^{-x})}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{g''(0) - 1}{2}, & x = 0 \end{cases}$ 7'

(2) 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x)$ 连续

又 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{g'(x) + e^{-x}}{2} - \frac{g(x) - e^{-x}}{x^2} \right)$ 8'

$= \frac{g''(0) - 1}{2} - \frac{g''(0) - 1}{2} = \frac{g''(0) - 1}{2} = f'(0)$ 11'

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续

12'

4、设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^3 + 3x^2y - 2y^3 = 2$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值 (12分)

对 x 求导得 $3x^2 + 6xy + 3x^2y' - 6y^2y' = 0$ (1) 2'

令 $y' = 0$ 得 $3x^2 + 6xy = 0 \Rightarrow x = 0$ 或 $x = -2y$ 4'

将 $x = 0$ 代入原方程得 $y = -1$ 5'

将 $x = -2y$ 代入原方程得 $y = 1 \Rightarrow x = -2$ 6'

将 (1) 式两边对 x 求导得 $6x + 6y + 6xy' + 6xy' + 3x^2y'' - 12yy'y'' - 6y^2y'' = 0$ 8'

将 $x = 0, y = -1$ 代入得 $y'' = -1 < 0$ 9'

$x = -2, y = 1, y' = 0$ 代入得 $y'' = 1 > 0$ 10'

故极大值为 $y(0) = -1$ 11'

极小值为 $y(-2) = 1$ 12'

0 $\rightarrow$ -1 大

-2 $\rightarrow$ 1 小

5、求 $I = \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$ (12分)

$$\begin{aligned}
 I &= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) \arctan x dx \quad 2' \\
 &= -\int \arctan x d\frac{1}{x} - \int \arctan x d\arctan x \quad 4' \\
 &= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x} d\arctan x - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 \quad 6' \\
 &= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx \quad 7' \\
 &= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx \quad 9' \\
 &= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C \quad 12'
 \end{aligned}$$

6、求 $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx$ (12分)

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi} \left(\frac{x \sin x \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} + \frac{-x \sin(-x) \arctan e^{-x}}{1 + \cos^2(-x)} \right) dx \quad 4' \\
 &= \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \cdot \frac{\pi}{2} dx \quad 7' \\
 &= \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad 9' \\
 &= -\frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} d\cos x \quad 10' \\
 &= -\frac{\pi^2}{4} \arctan \cos x \Big|_0^{\pi} \quad 11' \\
 &= \frac{\pi^3}{8} \quad 12'
 \end{aligned}$$