

华东交通大学 2017 年大学数学竞赛试卷

座位号:

学院:

姓名:

专业:

班级:

得分:

一、注意事项

1、本竞赛试卷分正反两页，请详细填写姓名、学院、专业、班级及座位号(报名时所给的座位号)。

2、考试自己独立完成，若发现雷同试卷一律取消双方的获奖资格，并上报学校，到时按照学校有关规定进行处理。

3、本次竞赛为学校的双基竞赛之一，本项竞赛是学校双基竞赛活动之一。按照学校第二课堂学分或素质拓展学分制度管理办法，参加并完成竞赛的同学可以获得一定的第二课堂活动学分(2014 级)或素质拓展学分(2015 级、2016 级、2017 级)。我们将在竞赛之后把参赛名单及获奖名单发给各学院学工办，如果同学需要该学分请直接到本学院的学工办登记学分。

二、重要提示

1、我校每年 9 月份都会选派同学参加全国大学生数学建模竞赛。

2、我校每年 10 月份选派同学参加全国大学生大学数学竞赛。

3、如果参赛同学有兴趣并想参加上述两项赛事可咨询理学院办公室(电话：87046324)或理学院数学系(电话：87046334)，也可发邮件到刘老师的邮箱：1127998928@qq.com。

一、填空题(每题 4 分、共 28 分)

1、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}) = \frac{1}{2}$ 超超例。

2、设当 $x \rightarrow 0$ 时，函数 $f(x) = (1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $g(x) = \cos x - 1$ 是等价无穷小，则 $a = \frac{3}{2}$

3、设曲线 $f(x) = x^{2n}$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线交 x 轴于点 $(x_n, 0)$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = e^{-1}$

4、设 $y = (1 + \sin x)^x$ ，则 $dy|_{x=\pi} = -2dx$

5、曲线 $y = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线为 $y = 2x + 1$

6、不定积分 $\int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} + C$

7、设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + x^2 \int_0^1 f(x) dx$ ，则 $\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{8}\pi$

记 $\int_0^1 f(x) dx = I \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 x^2 \cdot I dx$

$\Rightarrow I = \arctan x|_0^1 + \frac{1}{3}I \Rightarrow I = \frac{3}{8}\pi$

二、解答题或证明题 (每题 12 分、共 72 分)

1、极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} (1 + \frac{1}{x})^{x^2}$

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln e^{-x} (1 + \frac{1}{x})^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(\ln e^{-x} + \ln (1 + \frac{1}{x})^{x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x + \ln (1 + \frac{1}{x})^{x^2}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} -x + x^2 \ln (1 + \frac{1}{x})} \end{aligned}$$

$$\alpha \quad \lim_{x \rightarrow \infty} -x + x^2 \ln (1 + \frac{1}{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[-\frac{1}{1+t}]}{\frac{1}{2t}}$$

$$\xrightarrow{t=\frac{1}{x}} \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \ln (1+t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+t}}{\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(1+t) \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \quad \therefore \text{原式} = e^{\frac{1}{2}}$$

2、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - e^{-x}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $g(x)$ 有二阶连续导数且 $g(0) = 1$, $g'(0) = -1$.

(1) 求 $f'(x)$; (2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续性 (2015, 2016)

3. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导且 $f(1) < 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} > 0$, 证明:

(1) 方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根;

(2) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 2f'(\xi)$

证明: (1) 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} > 0$, 知, $\exists \delta > 0$, $\forall 0 < x < \delta$ 有 $\frac{f(x)}{x} > 0$.

特别: 取 $0 < x = a < \delta$, 则 $\frac{f(a)}{a} > 0$ 即 $f(a) > 0$, $a \in (0, 1)$

又 $f(1) < 0$, 由介值定理, $\exists \eta \in (a, 1)$, s.t. $f(\eta) = 0$.

(2) 设 $F(x) = e^{-\frac{1}{2x}} f(x)$. 显然 $F(\eta) = e^{-\frac{1}{2\eta}} f(\eta) = 0$.

又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ 存在 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续知

$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \therefore F(0) = 0 = F(\eta)$.

又 $F(x)$ 在 $[0, \eta]$ 上连续, 在 $(0, \eta)$ 上可导, 由罗尔定理知,

$\exists \xi \in (0, \eta)$, s.t. $F'(\xi) = 0$ 即 $-\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2\xi}} f(\xi) + e^{-\frac{1}{2\xi}} f'(\xi) = 0$

由 $e^{-\frac{1}{2\xi}} \neq 0 \Rightarrow f(\xi) = 2f'(\xi)$.

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值

解: 方程两边同时对 x 求导得:

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3 + 3y' = 0 \quad (1)$$

令 $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$ 即 $x = 1$ 或 $x = -1$. (驻点)

将 $x = 1$ 代入原方程得: $y = 1$

将 $x = -1$ 代入原方程得: $y = 0$

将 (1) 式两边关于 x 求导得: $6x + 6y \cdot (y')^2 + 3y^2 \cdot y'' + 3y'' = 0 \quad (2)$

将 $x = 1, y = 1$ 代入得 $y''|_{x=1, y=1} = -1 < 0 \Rightarrow y_{\text{极大}} = y|_{x=1} = 1$.

将 $x = -1, y = 0$ 代入 (2) 得: $y''|_{x=-1, y=0} = 2 > 0 \Rightarrow y_{\text{极小}} = y|_{x=-1} = 0$.

5. 求 $I = \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$ (见 2015 年第 (15) 题)

6. 求 $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

解: 令 $t = \pi - x$, 则 $dx = -dt$

$$\therefore I = - \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin(\pi - t)}{1 + \cos^2(\pi - t)} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt$$

$$= \pi \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 t} d(\cos t)$$

$$= -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 t} d \cos t$$

$$\underline{u = \cos t} \quad \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{1}{1+u^2} du$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2} du$$

$$= \frac{\pi}{2} \times 2 \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du$$

$$= \pi \cdot \arctan u \Big|_0^1$$

$$= \pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$