

华东交通大学 2015 年大学数学竞赛试卷

座位号:

专业:

姓名:

年级:

班级:

得分:

请仔细阅读注意事项。

1、本竞赛试卷分正反两页,请详细填写姓名、专业、年级、班级及座位号(报名时所给的座位号)。

2、本次竞赛为学校的双基竞赛之一,按照学校有关规定可获得第二课堂学分。我们将在竞赛之后把参赛名单及获奖名单发给各学院学工办,如同学需要该学分请直接到本学院的学工办登记学分。

3、我校每年都会选派同学参加 9 月中旬的全国大学生数学建模竞赛(要求大二以上年级学生),如果有兴趣可选修每学年第二学期的数学建模课程,到时可以跟任课教师报名。

4、我校每年都会选派同学参加 10 月底的全国大学生大学数学竞赛(最好大三准备考研的学生),而且近年取得了较好成绩。如果同学有兴趣想并参加此项赛事或数学建模竞赛可咨询理学院办公室(电话: 87046324)或理学院数学系(电话: 87046334)。

5、考试自己独立完成,若发现雷同试卷一律取消双方的获奖资格,并上报学校,到时按照学校有关规定进行处理。

一、填空题(每题 4 分、共 28 分)

1、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right) =$ _____

2、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} =$ _____

3、曲线 $\begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$ 在对应 $t = \frac{\pi}{4}$ 点处的法线斜率 $k =$ _____

4、设方程 $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 确定 $y = y(x)$, 则 $dy =$ _____

5、曲线 $y = \frac{x^2}{x+1}$ 的斜渐近线为 _____

6、设 $f'(e^x) = xe^{-x}$, 且 $f(e) = 1$, 则 $f(x) =$ _____

7、设 $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2} \int_0^1 f(x) dx$, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____

二、解答题或证明题 (每题 12 分、共 72 分)

1、设当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 等价, 求 a, b

2、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - e^{-x}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $g(x)$ 有二阶连续导数且 $g(0) = 1, g'(0) = -1$,

(1) 求 $f'(x)$; (2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续性

3、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta_1, \eta_2 \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta_1) \cdot f'(\eta_2) = 1$

4、设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} x \left(\frac{t-x}{t+x} \right)^t$, 求函数 $f(x)$ 的极值与曲线 $y = f(x)$ 的拐点

5、求 $I = \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$

$I = \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$

6、设 $f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt$, 求 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x) dx$

装

订

线