

华东交通大学 2016 年大学数学竞赛试卷

座位号:

专业:

姓名:

年级:

班级:

得分:

请仔细阅读注意事项。

1、本竞赛试卷分正反两页,请详细填写姓名、专业、年级、班级及座位号(报名时所给的座位号)。

2、本次竞赛为学校的双基竞赛之一,本项竞赛是学校双基竞赛活动之一。按照学校第二课堂学分或素质拓展学分制度管理办法,参加并完成竞赛的同学可以获得一定的第二课堂活动学分(2013 级与 2014 级)或素质拓展学分(2015 级与 2016 级)。我们将在竞赛之后把参赛名单及获奖名单发给各学院学工办,如同学需要该学分请直接到本学院的学工办登记学分。

3、我校每年 9 月及 10 月都会选派同学参加全国大学生数学建模竞赛(要求大二以上年级学生)及全国大学生大学数学竞赛(最好大三准备考研学生),而且近几年取得了较好成绩。如果同学有兴趣想并参加此两项赛事可咨询理学院办公室(电话: 87046324)或理学院数学系(电话: 87046334),也可发邮件到 1127998928@qq.com 信箱。

4、考试自己独立完成,若发现雷同试卷一律取消双方的获奖资格,并上报学校,到时按照学校有关规定进行处理。

一、填空题(每题 4 分、共 32 分)

1、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(1 + \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{4^2}) \cdots (1 + \frac{1}{4^{2^n}})] =$ _____

2、设当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = 3 \sin x - \sin 3x$ 与 ax^n 是等价无穷小, 则 $a =$ _____, $n =$ _____

3、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} [2 - \frac{\ln(1+x)}{x}]^{\frac{1}{x}} =$ _____

4、曲线 $\tan(x + y + \frac{\pi}{4}) = e^y$ 在点(0,0)处的切线方程为 _____

5、设 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 则 $y'''|_{x=\sqrt{3}} =$ _____

6、曲线 $y = x^2 \ln x$ 的拐点为 _____

7、设 $f'(e^x) = xe^{-x}$, 且 $f(e) = 1$, 则 $f(x) =$ _____

8、设 $\int_0^a xe^{2x} dx = \frac{1}{4}$, 则 $a =$ _____

二、解答题或证明题 (68 分)

1、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2})$ (10分)

2、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = \frac{1}{2}$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta_1, \eta_2 \in (0, 1)$, 使得 $\frac{1}{f'(\eta_1)} + \frac{1}{f'(\eta_2)} = 2$ (10分)

3、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - e^{-x}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $g(x)$ 有二阶连续导数且 $g(0) = 1$, $g'(0) = -1$,

(1) 求 $f'(x)$; (2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续性 (12分)

4、设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^3 + 3x^2y - 2y^3 = 2$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值 (12分)

5、求 $I = \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$ (12分)

装

订

6、求 $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx$ (12分)

线