

华东交通大学 2017 年大学数学竞赛试卷

座位号:

学院:

姓名:

专业:

班级:

得分:

一、注意事项

1、本竞赛试卷分正反两页,请详细填写姓名、学院、专业、班级及座位号(报名时所给的座位号)。

2、考试自己独立完成,若发现雷同试卷一律取消双方的获奖资格,并上报学校,到时按照学校有关规定进行处理。

3、本次竞赛为学校的双基竞赛之一,本项竞赛是学校双基竞赛活动之一。按照学校第二课堂学分或素质拓展学分制度管理办法,参加并完成竞赛的同学可以获得一定的第二课堂活动学分(2014 级)或素质拓展学分(2015 级、2016 级、2017 级)。我们将在竞赛之后把参赛名单及获奖名单发给各学院学工办,如果同学需要该学分请直接到本学院的学工办登记学分。

二、重要提示

1、我校每年 9 月份都会选派同学参加全国大学生数学建模竞赛。

2、我校每年 10 月份选派同学参加全国大学生大学数学竞赛。

3、如果参赛同学有兴趣并想参加上述两项赛事可咨询理学院办公室(电话: 87046324)或理学院数学系(电话: 87046334),也可发邮件到刘老师的邮箱: 1127998928@qq.com。

一、填空题(每题 4 分、共 28 分)

1、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right) =$ _____。

2、设当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = (1 + ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $g(x) = \cos x - 1$ 是等价无穷小, 则 $a =$ _____。

3、设曲线 $f(x) = x^{2n}$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线交 x 轴于点 $(x_n, 0)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) =$ _____。

4、设 $y = (1 + \sin x)^x$, 则 $dy|_{x=\pi} =$ _____。

5、曲线 $y = (2x - 1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线为 _____。

6、不定积分 $\int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx =$ _____。

7、设 $f(x) = \frac{1}{1 + x^2} + x^2 \int_0^1 f(x) dx$, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____。

二、解答题或证明题 (每题 12 分、共 72 分)

1、极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} (1 + \frac{1}{x})^{x^2}$

2、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - e^{-x}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $g(x)$ 有二阶连续导数且 $g(0) = 1$, $g'(0) = -1$,

(1) 求 $f'(x)$; (2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续性

3. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导且 $f(1) < 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} > 0$, 证明:

(1) 方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根;

(2) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 2f'(\xi)$

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值

5、求 $I = \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$

装

订

6、求 $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

线