

2015 年第七届预赛（非数学类）参考答案

一、每小题 6 分，共计 30 分。

$$(1) \text{ 极限 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n^2+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n^2+2} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n^2+n} \right) = \underline{\frac{2}{\pi}}.$$

解：由于 $\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi \leq \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i}{n} \pi}{n + \frac{i}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi$, 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)\pi} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}.$$

所以所求极限是 $\frac{2}{\pi}$.

(2) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$ 所决定，其中 $F(u, v)$ 具有连续偏导

数，且 $xF_u + yF_v \neq 0$ 。则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{z - xy}$ 。（本小题结果要求不显含 F 及其

偏导数）

解：方程对 x 求导，得到 $\left(1 + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x}\right) F_u + \left(\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{x^2}\right) F_v = 0$

$$\text{即 } x \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(zF_v - x^2 F_u)}{xF_u + yF_v}.$$

同样，方程对 y 求导，得到 $y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(zF_u - y^2 F_v)}{xF_u + yF_v}$ 。

$$\text{于是 } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z(xF_u + yF_v) - xy(xF_u + yF_v)}{xF_u + yF_v} = z - xy$$

(3) 曲面 $z = x^2 + y^2 + 1$ 在点 $M(1, -1, 3)$ 的切平面与曲面 $z = x^2 + y^2$ 所围区域的体积为

$$\underline{\frac{\pi}{2}}.$$

解：曲面 $z = x^2 + y^2 + 1$ 在点 $M(1, -1, 3)$ 的切平面： $2(x-1) - 2(y+1) - (z-3) = 0$ ，

即 $z = 2x - 2y - 1$ 。联立 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2x - 2y - 1 \end{cases}$ ，

得到所围区域的投影 D 为： $(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1$ 。

所求体积 $V = \iint_D [(2x - 2y - 1) - (x^2 + y^2)] dx dy = \iint_D [1 - (x-1)^2 - (y+1)^2] dx dy$

令 $\begin{cases} x-1 = r \cos t \\ y+1 = r \sin t \end{cases}$ ， $V = \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 (1-r^2) r dr = \frac{\pi}{2}$ 。

(4) 函数 $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-5, 0) \\ 0, & x \in [0, 5] \end{cases}$ 在 $(-5, 5]$ 的傅立叶级数在 $x=0$ 收敛的值 3/2。

解：由傅里叶收敛定理，易知 $f(0)=3/2$ 。

(5) 设区间 $(0, +\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为 $u(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$ ，则 $u(x)$ 的初等函数表达式为

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}。$$

【解】 由于 $u^2(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt \int_0^{+\infty} e^{-xs^2} ds = \iint_{s \geq 0, t \geq 0} e^{-x(s^2+t^2)} ds dt$ ，故有

$$u^2(x) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-x\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{4x} \int_0^{+\infty} e^{-x\rho^2} d_\rho(x\rho^2) = -\frac{\pi}{4x} e^{-x\rho^2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=+\infty} = \frac{\pi}{4x}。$$

所以 $u(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ 。

二、(12 分) 设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程。

解：显然， $O(0,0,0)$ 为 M 的顶点， $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ 在 M 上。由 A, B, C 三点决定的平面 $x + y + z = 1$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的交线 L 是 M 的准线。-----4 分

设 $P(x,y,z)$ 是 M 上的点， (u,v,w) 是 M 的母线 OP 与 L 的交点，则 OP 的方程为 $\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w} = \frac{1}{t}$ ，

即 $u=xt, v=yt, w=zt$ 。-----8 分

代入准线方程，得 $\begin{cases} (x+y+z)t = 1 \\ (x^2+y^2+z^2)t^2 = 1 \end{cases}$ 。

消除 t ，得到圆锥面 M 的方程 $xy + yz + zx = 0$ 。-----12 分

三、(12 分) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导, 且存在常数 α, β , 使得对于 $\forall x \in (a,b)$

$$f'(x) = \alpha f(x) + \beta f''(x),$$

则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导。

证明 1. 若 $\beta = 0$ 。

对于 $\forall x \in (a,b)$, 有

$$f'(x) = \alpha f(x), \quad f''(x) = \alpha f'(x) = \alpha^2 f(x), \dots, \quad f^{(n)}(x) = \alpha^n f(x)。$$

从而 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导。-----4 分

2. 若 $\beta \neq 0$ 。对于 $\forall x \in (a,b)$, 有

$$f''(x) = \frac{f'(x) - \alpha f(x)}{\beta} = A_1 f'(x) + B_1 f(x), \quad (1)$$

其中 $A_1 = 1/\beta, B_1 = \alpha/\beta$ 。-----6 分

因为 (1) 右端可导, 从而

$$f'''(x) = A_1 f''(x) + B_1 f'(x)。-----8 分$$

$$\text{设 } f^{(n)}(x) = A_1 f^{(n-1)}(x) + B_1 f^{(n-2)}(x), n > 1, \text{ 则 } f^{(n+1)}(x) = A_1 f^{(n)}(x) + B_1 f^{(n-1)}(x)。$$

故 $f(x)$ 任意阶可导。-----12 分

四、(14 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{(n+1)!} (x-1)^n$ 的收敛域与和函数

$$\text{解: 因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + 2}{(n+2)(n^3 + 2)} = 0。$$

固收敛半径 $R = +\infty$, 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$ 。-----4 分

由

$$\frac{n^3 + 2}{(n+1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \geq 2)$$

及幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} (x-1)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (x-1)^n$ 的收敛域皆为 $(-\infty, +\infty)$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+2}{(n+1)!} (x-1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (x-1)^n。$$

-----7 分

用 $S_1(x)$, $S_2(x)$ 和 $S_3(x)$ 分别表示上式右端三个幂级数的和函数。依据 e^x 的展开式得到

$$S_1(x) = (x-1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n = (x-1)^2 e^{x-1}, \quad S_2(x) = e^{x-1}$$

再由

$$(x-1)S_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n = e^{x-1} - 1$$

得到, 当 $x \neq 1$ 时 $S_3(x) = \frac{1}{x-1} (e^{x-1} - 1)$ 。-----10 分

又 $S_3(1) = 1$ 。-----12 分

综合以上讨论, 最终得到所给幂级数的和函数

$$S(x) = \begin{cases} (x^2 - 2x + 2)e^{x-1} + \frac{1}{x-1} (e^{x-1} - 1), & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases} \quad \text{-----14 分}$$

五、(16 分) 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0, \int_0^1 xf(x)dx = 1$ 。试证:

$$(1) \exists x_0 \in [0,1] \text{ 使 } |f(x_0)| > 4$$

$$(2) \exists x_1 \in [0,1] \text{ 使 } |f(x_1)| = 4$$

证明: (1) 若 $\forall x \in [0,1], |f(x)| \leq 4$, 则

$$1 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f(x) dx \leq \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| |f(x)| dx \leq 4 \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| dx = 1 \quad \text{-----4 分}$$

$$\text{因此 } \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| |f(x)| dx = 1。 \text{ 而 } 4 \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| dx = 1,$$

$$\text{故 } \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| (4 - |f(x)|) dx = 0, \quad \text{-----8 分}$$

所以对于任意的 $x \in [0,1], |f(x)| = 4$, 由连续性知 $f(x) \equiv 4$ 或 $f(x) \equiv -4$ 。

这就与条件 $\int_0^1 f(x)dx = 0$ 矛盾。

$$\text{故 } \exists x_0 \in [0,1], \text{ 使 } |f(x_0)| > 4 \quad \text{-----10 分}$$

(2) 先证 $\exists x_2 \in [0,1]$, 使 $|f(x_2)| < 4$ 。若不然, 对任何 $x \in [0,1]$, $|f(x)| \geq 4$ 成立。则, $f(x) \geq 4$ 恒成立, 或者 $f(x) \leq -4$ 恒成立, 与 $\int_0^1 f(x)dx = 0$ 矛盾。再由 $f(x)$ 的连续性 & (1) 的结果, 利用介值定理 $\exists x_1 \in [0,1]$ 使 $|f(x_1)| = 4$ 。-----16 分

六、(16 分) 设 $f(x,y)$ 在 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上有连续的二阶偏导数, $f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 \leq M$ 。若 $f(0,0) = 0$, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, 证明

$$\left| \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x,y) dx dy \right| \leq \frac{\pi\sqrt{M}}{4}。$$

证明: 在点 $(0,0)$ 展开 $f(x,y)$ 得

$$f(x,y) = \frac{1}{2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(\theta x, \theta y) = \frac{1}{2} \left(x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(\theta x, \theta y),$$

其中 $\theta \in (0,1)$ 。-----6 分

记 $(u,v,w) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(\theta x, \theta y)$, 则

$$f(x,y) = \frac{1}{2} (ux^2 + 2vxy + wy^2)。$$

由于 $\|(u, \sqrt{2}v, w)\| = \sqrt{u^2 + 2v^2 + w^2} \leq \sqrt{M}$ 以及 $\|(x^2, \sqrt{2}xy, y^2)\| = x^2 + y^2$, 我们有

$$|(u, \sqrt{2}v, w) \cdot (x^2, \sqrt{2}xy, y^2)| \leq \sqrt{M} (x^2 + y^2),$$

即

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{M} (x^2 + y^2)。-----13 分$$

从而

$$\left| \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x,y) dx dy \right| \leq \frac{\sqrt{M}}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi\sqrt{M}}{4}。-----16 分$$