

一诺整理

高等数学

课后习题答案

(上海交大版)

<http://www.docin.com/wxfx365>

第一章 函数

1. 设 $f(x) = x^2 + 1$, 求 $f(x^2)$ 、 $[f(x)]^2$ 。

解答: $f(x^2) = (x^2)^2 + 1 = x^4 + 1$, $[f(x)]^2 = [x^2 + 1]^2 = x^4 + 2x^2 + 1$ 。

所属章节: 第一章第一节

难度: 一级

2. 设 $f(x) = \frac{ae^x + be^{-x}}{a+b}$, 求 $f(x) + f(-x)$ 。

解答: $f(x) = \frac{ae^x + be^{-x}}{a+b}$, $f(-x) = \frac{ae^{-x} + be^{-(-x)}}{a+b} = \frac{ae^{-x} + be^x}{a+b}$,

$$f(x) + f(-x) = \frac{ae^x + be^{-x}}{a+b} + \frac{ae^{-x} + be^{-(-x)}}{a+b} = e^x + e^{-x}。$$

所属章节: 第一章第一节

难度: 一级

3. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} 2^x & -1 < x \leq 0, \\ 2 & 0 < x \leq 1, \\ x-1 & 1 < x \leq 3, \end{cases}$ 求 $\varphi(3), \varphi(2), \varphi(0), \varphi(-\frac{1}{2})$ 。

解答: $\varphi(3) = 2, \varphi(2) = 1, \varphi(0) = 1, \varphi(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

所属章节: 第一章第一节

难度: 一级

4. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2};$$

$$(2) y = \frac{1}{2} \log_a \frac{1+x}{1-x}, \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$(3) y = \sqrt{2+x} + \frac{1}{\lg(1-x)};$$

$$(4) y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5}.$$

解答: (1) 由 $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ 解得定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$;

(2) 由 $1-x \neq 0, \frac{1+x}{1-x} > 0$ 解得定义域为 $(-1, 1)$;

(3) 由 $2+x \geq 0, 1-x > 0, 1-x \neq 1$ 解得定义域为 $[-2, 0) \cup (0, 1)$;

(4) 由 $3-x \geq 0, \left| \frac{3-2x}{5} \right| \leq 1$ 解得定义域为 $[-1, 3]$ 。

所属章节：第一章第一节

难度：一级

5. 下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？

(1) $f(x) = \lg x^2, \quad g(x) = 2 \lg x;$

(2) $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x^2};$

(3) $f(x) = e^{\ln x}, \quad g(x) = x.$

解答：(1) $f(x)$ 中的 x 可为一切实数， $g(x)$ 中的 x 要求大于零，即定义域不同，故函数不同；

(2) $f(x)$ 将负数对应负数，而 $g(x)$ 把负数对应正数，对应法则不同，故函数不同；

(3) $f(x)$ 中的 x 要求大于零， $g(x)$ 中的 x 可为一切实数，即定义域不同，故函数不同。

所属章节：第一章第一节

难度：一级

6. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些是非奇非偶函数？

(1) $y = x^2(1-x^2);$

(2) $y = 3x^2 - x^3;$

(3) $y = \log_a \frac{1-x}{1+x} (a > 0, a \neq 1);$

(4) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$

(5) $y = x^2 \cos x + 1;$

(6) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$

解答：(1) 偶； (2) 非奇非偶； (3) 奇； (4) 偶； (5) 偶； (6) 奇

所属章节：第一章第一节

难度：一级

7. 下列函数中哪些是周期函数？对于周期函数指出其周期 T ：

(1) $y = 1 + \tan x;$

(2) $y = \cos(3x+1);$

(3) $y = x \sin x;$

(4) $y = \sin^2 x.$

解答：(1) 周期，且 $T = \pi$ ； (2) 周期， $T = \frac{2}{3}\pi$ ； (3) 非周期； (4) 利用等式

$y = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$ 知为周期函数, 周期 $T = \pi$

所属章节: 第一章第一节

难度: 一级

8. 求下列函数的反函数:

$$(1) y = x^2 - 2x; \quad (2) y = \sqrt[3]{x^2 + 1};$$

$$(3) y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}); \quad (4) y = \frac{2^x}{2^x + 1}.$$

解答: (1) 由 $y = x^2 - 2x$, 得 $y = (x-1)^2 - 1$, 解得 $x = 1 \pm \sqrt{y+1}$ 。

所以当 $y \geq -1$ 时, 反函数 $y = 1 + \sqrt{x+1}$, 当 $y < -1$ 时, 反函数 $y = 1 - \sqrt{x+1}$;

$$(2) \text{ 当 } y \geq 1 \text{ 时, } y = \sqrt{x^3 - 1}, \text{ 当 } y < 1 \text{ 时, } y = -\sqrt{x^3 - 1};$$

$$(3) \text{ 由 } y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \text{ 得 } e^y = x + \sqrt{1 + x^2}, \text{ 故 } (e^y - x)^2 = 1 + x^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y} = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \text{ 所以反函数为 } y = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$(4) \text{ 由 } y = \frac{2^x}{2^x + 1} \text{ 解得 } 2^x = \frac{y}{1-y}, \text{ 即 } x = \log_2 \frac{y}{1-y}, \text{ 所以反函数为 } y = \log_2 \frac{x}{1-x}.$$

所属章节: 第一章第一节

难度: 二级

9. 下列初等函数由哪些简单函数复合而成?

$$(1) y = \sqrt{2 - x^2}; \quad (2) y = \cos \frac{2}{3}x;$$

$$(3) y = e^{x^2}; \quad (4) y = \ln \sin 2x;$$

$$(5) y = \sin^2(3x+1); \quad (6) y = \arctan e^{\frac{1}{x^2}}.$$

解答: (1) $y = \sqrt{u}, u = 2 - x^2$; (2) $y = \cos u, u = \frac{2}{3}x$; (3) $y = e^u, u = x^2$;

$$(4) y = \ln u, u = \sin v, v = 2x; \quad (5) y = u^2, u = \sin v, v = 3x+1; \quad (6) y = \arctan u, u = e^v, v = -\frac{1}{x^2}$$

所属章节: 第一章第二节

难度: 一级

10. 设 $F(x) = e^x$, 证明:

$$(1) F(x) \cdot F(y) = F(x+y); \quad (2) \frac{F(x)}{F(y)} = F(x-y).$$

解答: (1) $F(x) \cdot F(y) = e^x \cdot e^y = e^{x+y} = F(x+y);$

$$(2) \frac{F(x)}{F(y)} = \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} = F(x-y)$$

所属章节: 第一章第二节

难度: 一级

11. 设 $F(x) = \ln(x+1)$, 证明: $F(x^2-2) - F(x-2) = F(x)$.

解答: $F(x^2-2) - F(x-2) = \ln((x^2-2)+1) - \ln((x-2)+1) = \ln(x^2-1) - \ln(x-1)$

$$= \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln(x+1) = F(x)$$

所属章节: 第一章第二节

难度: 一级

12. 设 $f(x)$ 具有性质: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 证明: 必有 $f(0) = 0$, $pf(x) = f(px)$ (p 为任意正整数)

解答: 在 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 中, 令 $x=0$, 即得 $f(0) = 0$ 。

在 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 中, 令 $y=x$, 即得 $f(2x) = 2f(x)$;

在 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 中, 令 $y=2x$, 结合上式, 即得 $f(3x) = 3f(x)$;

设对正整数 k , 有 $f(kx) = kf(x)$, 则在 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 中, 令 $y=kx$, 结合假设有

$f((k+1)x) = (k+1)f(x)$, 由数学归纳法得证。

所属章节: 第一章第二节

难度: 二级

13. 设 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n\text{次}}$, 若 $f(x) = a + bx$, 证明:

$$f_n(x) = \frac{a(b^n-1)}{b-1} + b^n x \quad (b \neq 1).$$

解答：当 $n=2$ 时， $f_2(x) = f(f(x)) = a + b(a + bx) = a + ab + b^2x = \frac{a(b^2-1)}{b-1} + b^2x$ ，即等式成立；

设 $n=k$ 时等式成立，即 $f_k(x) = \frac{a(b^k-1)}{b-1} + b^kx$ ，则当 $n=k+1$ 时，

$$f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n\text{次}} = f(f_k(x)) = a + b\left[\frac{a(b^k-1)}{b-1} + b^kx\right] = \frac{a(b^{k+1}-1)}{b-1} + b^{k+1}x, \text{ 即等式也成立, 得证.}$$

所属章节：第一章第二节

难度：二级

14. 验证下列恒等式：

$$(1) \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y;$$

$$(2) \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y;$$

$$(3) \sinh x + \sinh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2};$$

$$(4) \cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}.$$

解答：由定义 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ，从右往左证明

$$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y), \text{ 即证}$$

得(1)式；类似可证其他三式。

所属章节：第一章第二节

难度：二级

第二章 极限与连续

1. 用“ $\varepsilon-N$ ”定义来验证下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n+1} = \frac{3}{2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0;$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} = 1;$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0);$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

解答: (1) 对任意 $\varepsilon > 0$ (无论它多么小, 下同), 要使 $\left| \frac{2}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{4}{\varepsilon^2}$, 故可取

$N = [\frac{4}{\varepsilon^2} + 1]$ 。则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = [\frac{4}{\varepsilon^2} + 1]$, 当 $n > N$ 时, $\left| \frac{2}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon$, 故由极限定义

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.$$

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{3n-2}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{7}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$, 故可取 $N = \max(\frac{7}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}, 1)$ 。则对任

意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = \max(\frac{7}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}, 1)$, 当 $n > N$ 时, $\left| \frac{3n-2}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{7}{4n+2} < \varepsilon$, 故由极限定义

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n+1} = \frac{3}{2}.$$

(3) 对任意 $\varepsilon > 0$, 要使 $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < \varepsilon$, 由于 $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, 只要 $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$,

故可取 $N = [\frac{1}{\varepsilon^2} + 1]$ 。则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = [\frac{1}{\varepsilon^2} + 1]$, 当 $n > N$ 时,

$$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon, \text{ 故由极限定义 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

(4) 对任意 $\varepsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} - 1 \right| < \varepsilon$, 由于 $\left| \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+n} + n} < \frac{1}{n}$, 只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$, 故

可取 $N = [\frac{1}{\varepsilon} + 1]$ 。则对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $N = [\frac{1}{\varepsilon} + 1]$ ，当 $n > N$ 时，

$$\left| \frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} + n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon, \text{ 故由极限定义 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} = 1.$$

(5) $a=1$ 时显然; $a>1$ 时, 记 $r_n = \sqrt[n]{a} - 1$, 则 $a = (1 + r_n)^n > nr_n$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 要使 $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$, 只要 $r_n = |\sqrt[n]{a} - 1| < \frac{a}{n}$, 即 $n > \frac{a}{\varepsilon}$, 故可取 $N = [\frac{a}{\varepsilon} + 1]$, 当 $n > N$ 时, $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$, 由极限定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, (a > 1)$; $0 < a < 1$ 时, 类似证明。

(6) 记 $r_n = \sqrt[n]{n} - 1$, 则 $n = (1 + r_n)^n > \frac{n(n-1)}{2} r_n^2$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 要使 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$, 只要 $r_n = |\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, 即 $n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$, 故可取 $N = [\frac{2}{\varepsilon^2} + 1 + 1]$, 当 $n > N$ 时, $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$, 由极限定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 。

所属章节: 第二章第一节

难度: (1) — (4) 二级, (5) - (6) 三级

2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$. 并举例说明反过来未必成立。

解答: 对任意 $\varepsilon > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$, 从而 $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$,

于是由极限定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ 。反过来未必成立, 例如对于 $a_n = (-1)^n$, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$ 存在, 但

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在。

所属章节: 第二章第一节

难度: 二级

3.

解答: 没有题目

所属章节:

难度:

4. 设数列 $\{u_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n-1} = a, \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$.

解答: 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n-1} = a, \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = a$, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1 , 当 $2n > 2N_1$ 时, $|u_{2n} - a| < \varepsilon$;

存在 N_2 , 当 $2n-1 > 2N_2-1$ 时, $|u_{2n-1}-a| < \varepsilon$; 取 $N = \max(2N_1, 2N_2-1)$, 则当 $n > N$ 时,

$|u_n - a| < \varepsilon$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ 。

所属章节: 第二章第一节

难度: 二级

5. 根据定义验证下列数列为无穷小:

$$(1) \left\{ \frac{n-1}{n^2+1} \right\}; \quad (2) \left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}.$$

解答: (1) 对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 $\left| \frac{n-1}{n^2} \right| < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$, 取 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon} + 1 \right]$, 则当 $n > N$ 时,

$\left| \frac{n-1}{n^2} \right| < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \frac{2}{N} < \varepsilon$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^2} = 0$, 即数列 $\left\{ \frac{n-1}{n^2+1} \right\}$ 为无穷小。

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 $\frac{2^n}{n!} = \frac{2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times 2}{n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1} \leq \frac{4}{n}$, 取 $N = \left[\frac{4}{\varepsilon} + 1 \right]$, 则当 $n > N$ 时,

$\frac{2^n}{n!} \leq \frac{4}{n} < \frac{4}{N} < \varepsilon$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$, 即数列 $\left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}$ 为无穷小。

所属章节: 第二章第二节

难度: 二级

6. 根据定义证明下列数列为无穷大:

$$(1) \{2^n\}; \quad (2) \left\{ \frac{n^2+1}{2n+1} \right\}.$$

解答: (1) 对任意的正数 $M > 0$ (无论它多么大, 下同), 取 $N = [\log_2 M + 1]$, 则当 $n > N$ 时,

$|2^n| = 2^n > 2^N > M$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$, 即数列 $\{2^n\}$ 为无穷大;

(2) 对任意的正数 $M > 0$, 取 $N = [3M + 1]$, 则当 $n > N$ 时, $\frac{n^2+1}{2n+1} > \frac{n^2}{3n} = \frac{n}{3} > M$, 因此

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n+1} = \infty$, 即数列 $\left\{ \frac{n^2+1}{2n+1} \right\}$ 为无穷大。

所属章节: 第二章第二节

难度: 二级

7. 试举出满足下列要求的数列例子:

(1) 有界但无极限的数列;

(2) 无界但非无穷大的数列。

解答: (1) $a_n = (-1)^n$ (2) $a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ 偶} \\ n & n \text{ 奇} \end{cases}$

所属章节: 第二章第二节

难度: 二级

8. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 4n - 1}{3n^3 - 5n^2 + 2};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} \right);$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin n!) \cdot \left(\frac{n^2 - 1}{3n^3 + 2} \right).$$

解答: (1) 分子分母同除以 n^3 , $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 4n - 1}{3n^3 - 5n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^3}} = \frac{2}{3};$

$$(2) \text{ 利用 } 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2};$$

$$(3) \text{ 利用 } \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right]$$
$$= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right], \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right] = \frac{3}{4};$$

$$(4) \text{ 利用 } \sin n! \text{ 有界, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{3n^3 + 2} = 0, \text{ 极限 } 0$$

所属章节: 第二章第二节

难度: 一级

9. 利用数列单调有界必有极限的法则, 证明下列数列极限存在:

$$(1) a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}, (n=1, 2, \cdots);$$

$$(2) a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1}, (n=1, 2, \cdots);$$

$$(3) a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}, (n=1, 2, \cdots).$$

解答: (1) 数列 $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}, (n=1, 2, \cdots)$ 单调增加, $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{n+1}{2n} < 1$, 故极限存在;

(2) 数列 $a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1}$, ($n=1,2,\cdots$) 单调增加, 且

$$a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \times \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} < \frac{1}{2}, \text{ 即数列又有界, 故极限存在;}$$

(3) 数列 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, ($n=1,2,\cdots$) 单调增加, 且

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2, \text{ 即数列又有界, 故极限存在。}$$

所属章节: 第二章第三节

难度: 二级

10. 利用夹逼准则证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right) = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

解答: (1) 由于 $\frac{n+1}{(2n)^2} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \leq \frac{n+1}{n^2}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{(2n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$, 故由夹逼

准则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right) = 0$;

$$(2) \text{ 由于 } \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \text{ 而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1,$$

故由夹逼准则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$ 。

所属章节: 第二章第三节

难度: 一级

11. 设有数列 $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, x_n = \sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}_{nk}}, \cdots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

解答: 易知数列 $\{x_n\}$ 单调增加, 且 $x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$, $x_1 \leq 2$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \leq 2$, 设 $x_k \leq 2$, 则

$x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} \leq \sqrt{2+2} = 2$, 即 $\{x_n\}$ 有上界 2, 所以 $\{x_n\}$ 收敛; 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} = a$, 在

等式 $x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$ 两边取极限, 有 $a = \sqrt{2+a}$, 即可解得 $a = 2$ (负值舍去), 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ 。

所属章节：第二章第三节

难度：二级

12. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n}), n=1, 2, \dots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

参考答案：先证明 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$

解答：由条件 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n}), n=1, 2, \dots$ 及平均不等式得 $x_n > 0, x_n \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{3}{x_n}} = \sqrt{3}$ ，又

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n}) - x_n = \frac{3 - x_n^2}{2x_n} \leq 0$ ，即数列 $\{x_n\}$ 单调减少，于是该数列收敛，设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$ ，在等式 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n})$ 两边取极限，即可解得 $a = \sqrt{3}$ （负值舍去），即

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$ 。

所属章节：第二章第三节

难度：二级

13. 利用函数极限的“ $\varepsilon - X$ ”定义验证下列极限：

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$;

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x}{x} = -1$;

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$ 。

解答：(1) 对任意 $\varepsilon > 0$ （无论它多么小，下同），要使 $\left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| < \varepsilon$ ，只要 $|x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ ，故可取

$X = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$ 。则对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $X = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$ ，当 $|x| > X$ 时， $\left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| < \frac{1}{X^2} = \varepsilon$ ，故由极限定

义 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ ；

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$ ，要使 $\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| < \varepsilon$ ，由于 $\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| \leq \frac{1}{|x|}$ ，只要 $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$ ，故可取 $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ 。

则对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ ，当 $|x| > X$ 时， $\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| \leq \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon$ ，故由极限定义

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ；

(3) 对任意 $\varepsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{2-x}{x} - (-1) \right| < \varepsilon$, 由于 $\left| \frac{2-x}{x} - (-1) \right| = \frac{2}{|x|}$, 只要 $|x| > \frac{2}{\varepsilon}$, 故可取 $X = \frac{2}{\varepsilon} > 0$ 。

则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $X = \frac{2}{\varepsilon} > 0$, 当 $|x| > X$ 时, $\left| \frac{2-x}{x} - (-1) \right| = \frac{2}{|x|} < \frac{2}{X} = \varepsilon$, 故由极限定义

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x}{x} = -1;$$

(4) 对任意 $\varepsilon > 0$, 要使 $|\sqrt{x+1} - \sqrt{x}| < \varepsilon$, 由于 $|\sqrt{x+1} - \sqrt{x}| = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$, 只要 $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$,

故可取 $X = \frac{1}{\varepsilon^2} > 0$ 。则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $X = \frac{1}{\varepsilon^2} > 0$, 当 $x > X$ 时,

$$|\sqrt{x+1} - \sqrt{x}| = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{X}} = \varepsilon, \text{ 故由极限定义 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0。$$

所属章节: 第二章第四节

难度: 二级

13. 利用函数极限的“ $\varepsilon - \delta$ ”定义验证下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} (5x+2) = -3; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

解答: (1) 对任意 $\varepsilon > 0$ (无论它多么小, 下同), 要使 $|5x+2 - (-3)| = 5|x - (-1)| < \varepsilon$, 只要

$|x - (-1)| < \frac{\varepsilon}{5}$, 故可取 $\delta = \frac{\varepsilon}{5} > 0$ 。则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \frac{\varepsilon}{5} > 0$, 当 $|x - (-1)| < \delta$ 时,

$|5x+2 - (-3)| = 5|x - (-1)| < 5\delta < \varepsilon$, 故由极限定义 $\lim_{x \rightarrow -1} (5x+2) = -3$;

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| = |x-2| < \varepsilon$, 只要 $|x-2| < \varepsilon$, 故可取 $\delta = \varepsilon > 0$ 。则对任意

$\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \varepsilon > 0$, 当 $|x-2| < \delta$ 时, $\left| \frac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| = |x-2| < \delta = \varepsilon$, 故由极限定义 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$;

(3) 对任意 $\varepsilon > 0$, 要使 $|\sqrt{x} - 2| = \left| \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} \right| < \varepsilon$, 只要 $|x-4| < \varepsilon$, 故可取 $\delta = \varepsilon > 0$ 。则对任意 $\varepsilon > 0$,

存在 $\delta = \varepsilon > 0$, 当 $|x-4| < \delta$ 时, $|\sqrt{x} - 2| = \left| \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} \right| < \frac{|x-4|}{1} < \delta = \varepsilon$, 故由极限定义 $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$;

(4) 对任意 $\varepsilon > 0$, 要使 $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < \varepsilon$, 可先限定 $\varepsilon \leq 1$, 则相应地有 $1 < x < 3$, 只要 $|x^2 - 4| < 3|x - 2|$, 故可取 $\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$ 。则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \min(\frac{\varepsilon}{3}, 1) > 0$, 当 $|x - 2| < \delta$ 时, $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < 3|x - 2| < 3\delta = \varepsilon$, 故由极限定义 $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

所属章节: 第二章第四节

难度: 二级

15. 设 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 2, \\ x-2, & x > 2 \end{cases}$ 问当 $x \rightarrow 2$ 时, $f(x)$ 是否有极限?

解答: 当 $x \rightarrow 2$ 时, $f(x)$ 的左极限等于 4, 右极限等于 0, 故 $f(x)$ 的极限不存在。

所属章节: 第二章第四节

难度: 一级

16. 根据定义证明:

(1) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ 当 $x \rightarrow 3$ 时为无穷小;

(2) $f(x) = \frac{1 + 2x}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时为无穷大。

解答: (1) 对任意 $\varepsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{x^2 - 9}{x + 3} - 0 \right| = |x - 3| < \varepsilon$, 只要 $|x - 3| < \varepsilon$, 故可取 $\delta = \varepsilon > 0$ 。则对

任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \varepsilon > 0$, 当 $|x - 3| < \delta$ 时, $\left| \frac{x^2 - 9}{x + 3} - 0 \right| = |x - 3| < \delta = \varepsilon$, 故由极限定义

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = 0$, 故 $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ 当 $x \rightarrow 3$ 时为无穷小。

(2) 对任意的正数 $M > 0$, 要使 $\left| \frac{1 + 2x}{x} \right| > M$, 由于 $\left| \frac{1 + 2x}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} + 2 \right| \geq \frac{1}{|x|} - 2$, 只要 $|x| < \frac{1}{M + 2}$,

故可取 $\delta = \frac{1}{M + 2} > 0$ 。则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \frac{1}{M + 2} > 0$, 当 $|x| < \delta$ 时,

$\left| \frac{1 + 2x}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} + 2 \right| \geq \frac{1}{|x|} - 2 > M$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x}{x} = \infty$, $f(x) = \frac{1 + 2x}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时为无穷大。

所属章节: 第二章第四节

难度: 二级

17. 求下列极限, 并说明理由:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{1-x}.$$

解答: (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 \rightarrow 0$ 为无穷小, 而 $\sin \frac{1}{x}$ 是有界函数, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$;

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} x = 1, \text{ 或分子分母极限分别为 } 1, \text{ 或无穷小定义.}$$

所属章节: 第二章第四节

难度: 一级

18. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+1}{x-1};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-25};$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right); \text{ (原题目有误)}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2-1};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \quad (n, m \text{ 为正整数}).$$

参考答案: (1) 5; (2) $\frac{3}{10}$; (3) $2x$; (4) $\frac{1}{2}$; (5) $\frac{1}{2}$; (6) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$;

$$(7) \frac{2\sqrt{2}}{3}; \quad (8) \frac{1}{2}mn(n-m)$$

解答: (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)} = \frac{5}{1} = 5$;

$$(2) \text{ 先约分, } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-2}{x+5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 5} (x-2)}{\lim_{x \rightarrow 5} (x+5)} = \frac{3}{10};$$

$$(3) \text{ 先化简, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x;$$

$$(4) \text{ 分子有理化, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2};$$

(5) 先通分, $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$;

(6) 分子有理化, 再约分, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x+1)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$;

(7) 分子分母有理化, 再约分, $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})(\sqrt{2x+1}+3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

(8) 分子两项分别按二项式展开, 则分子的最低次幂为二次, 系数为 $\frac{1}{2}mn(n-m)$, 余为高阶无穷小, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = \frac{1}{2}mn(n-m)$ 。

所属章节: 第二章第四节

难度: 一级

19. 计算下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2}{1-4x^2}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x-1})$;

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n+1}}{2+x^{2n}}$ 。

解答: (1) 分子分母同除以 x^2 , $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2}{1-4x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-4} = -\frac{3}{4}$;

(2) 分子分母同除以 x^{50} , $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2-\frac{3}{x})^{20}(3+\frac{2}{x})^{30}}{(5+\frac{1}{x})^{50}} = \frac{2^{20} \cdot 3^{30}}{5^{50}}$;

(3) 通分, $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x-1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3+x^2}{(2x^2-1)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1+x^{-1}}{(2-x^{-2})(2-x^{-1})} = -\frac{1}{4}$;

(4) 当 $|x| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n+1}}{2+x^{2n}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$;

当 $|x| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \infty$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n+1}}{2+x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{-2n}-x}{2x^{-2n}+1} = \frac{0-x}{0+1} = -x$;

当 $x=1$ 时, $x^{2n}=1$, $x^{2n+1}=1$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n+1}}{2+x^{2n}}=0$;

当 $x=-1$ 时, $x^{2n}=1$, $x^{2n+1}=-1$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n+1}}{2+x^{2n}}=\frac{2}{3}$ 。

所属章节: 第二章第四节

难度: 一级

20. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{(1 - \cos x)^2};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}-1};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{1 - \cos x}.$$

解答: (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos 2x} = 1 \times 2 = 2$;

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{\pi - x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - x)}{(\pi - x)} = 1;$$

$$(4) \text{ 令 } x-a=t, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t+a) - \sin a}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cos a + \cos t \sin a - \sin a}{t} \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \cdot \cos a - \sin a \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{t} \right) = \cos a;$$

$$(5) \text{ 令 } x - \frac{\pi}{2} = t, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{-t} = 1;$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{(1 - \cos x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{(2 \sin^2 \frac{x}{2})^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{x}{2})^4 \cdot 2^4}{4(\sin \frac{x}{2})^4} = 4;$$

$$(7) \text{ 分母有理化, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x \cdot (\sqrt{1+x}+1)}{x} = 2;$$

$$(8) \text{ 分子有理化, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\frac{\sin x}{x} + 1)}{2 \sin^2 \frac{x}{2} (\sqrt{1+x\sin x} + \cos x)} = 2$$

所属章节：第二章第五节

难度：一级

21. 计算下列极限：

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n+1})^n;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^x;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^{x+3};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{2x-1}{2x+1})^x.$$

$$\text{解答: } (1) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n+1})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n+1})} = \frac{e}{1} = e;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - \frac{1}{x})^{-x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^{-x}} = \frac{1}{e};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^3 = [\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{\frac{x}{2}})^{\frac{x}{2}}]^2 \cdot 1 = e^2;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{[(1 - 3x)^{-\frac{1}{3x}}]^3} = \frac{1}{e^3};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\frac{1}{\tan x}} = e;$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{2x-1}{2x+1})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{-2}{2x+1})^{\frac{2x+1}{-2} \cdot \frac{-2x}{2x+1}} = e^{-1}.$$

所属章节：第二章第五节

难度：一级

22. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x - x^2$ 与 $x^2 - x^3$ 相比, 哪一个高阶无穷小?

解答: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^3}{2x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^2}{2 - x} = 0$, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 - x^3$ 比 $2x - x^2$ 高阶无穷小

所属章节：第二章第二节

难度：一级

23. 当 $x \rightarrow 1$ 时, $1-x$ 与 (1) $1-\sqrt[3]{x}$; (2) $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是同阶无穷小还是等价无穷小?

解答: (1) 当 $x \rightarrow 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} = \frac{1}{2}$, 故 $1-\sqrt[3]{x}$ 与 $1-x$ 为同阶非等价无穷小;

(2) 当 $x \rightarrow 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}(1-x)(1+x)}{1-x} = 1$, 故 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 与 $1-x$ 为等价无穷小

所属章节: 第二章第六节

难度: 一级

24. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 试决定下列无穷小对于 x 的阶数:

(1) $x^2 + 10x^3$;

(2) $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}$;

(3) $\frac{x(x+1)}{1+\sqrt[3]{x}}$;

(4) $\sqrt{1+x^4} - \sqrt{1-x^4}$.

解答: (1) 2 阶; (2) $\frac{1}{3}$ 阶; (3) 1 阶; (4) 4 阶

所属章节: 第二章第六节

难度: 一级

25. 利用等价无穷小代换计算下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x \sin x}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + x^2}{\tan 3x}$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(1 - \cos x)}$;

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+3x)}{\tan(x^2)}$.

解答: (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan 3x \sim 3x$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$;

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x, \sin x^2 \sim x^2$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \cdot x} = 1$;

(3) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan 3x \sim 3x$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + x^2}{\tan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = \frac{2}{3}$;

$$(4) \text{ 当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \sqrt{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{2}x^2, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 1;$$

$$(5) \text{ 当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \tan x \sim x, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x(1 - \cos x)} = 1;$$

$$(6) \text{ 当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \tan(x^2) \sim x^2, \ln(1+3x) \sim 3x, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+3x)}{\tan(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 3x}{x^2} = 3.$$

所属章节：第二章第六节

难度：一级

26. 研究下列函数的连续性，并画出函数的图形：

$$(1) f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$$

解答：(1) 已知多项式函数是连续函数，所以函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 和 $(1, 2]$ 内是连续的。而在分段点 $x=1$ 处，因为 $f(1)=1$ ， $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) = 1$ ，所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ ，从而函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是连续的。

综上所述，函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续；图形略。

(2) 由于多项式函数是连续函数，故只需考察函数在分段点 $x=-1$ 和 $x=1$ 处的连续性，在 $x=-1$ 处，因为 $f(-1)=-1$ ， $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 1 = 1 \neq f(-1)$ ， $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1 = f(-1)$ ，所以函数在 $x=-1$ 处间断，但右连续；在 $x=1$ 处，因为 $f(1)=1$ ， $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 = f(1)$ ， $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 = f(1)$ ，所以函数在 $x=1$ 处连续。

综合上述讨论，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 与 $(-1, +\infty)$ 内连续，在 $x=-1$ 处间断，为跳跃间断点。

图形略。

所属章节：第二章第七节

难度：一级

27. 下列函数在所指点处间断，试确定其所属类型。若是可去间断点，则补充定义使它连续：

$$(1) y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}, x=1, x=-1; \quad (2) y = \frac{1 - \cos x}{x^2}, x=0;$$

$$(3) \quad y = \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x(1-x)}, x=0, 1;$$

$$(4) \quad y = \arctan \frac{1}{x}, x=0;$$

$$(5) \quad y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, x=0;$$

$$(6) \quad y = \begin{cases} 3+x^2, & x < 0, \\ \frac{\sin 3x}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

解答: (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$, 所以 $x=1$ 是函数的第一类间断点, 并且是可去间断点, 补充定义 $f(1) = -\frac{1}{2}$ 。

因为 $\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x+1} = \infty$, 所以 $x=-1$ 是函数的第二类间断点。

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, 所以 $x=0$ 为函数的可去间断点, 可补充定义 $f(0) = \frac{1}{2}$ 。

(3) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x(1-x)} = \infty$, 所以 $x=0$ 是函数的第二类间断点;

又因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1-x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} t}{t} = \frac{\pi}{2}$, 所以 $x=1$ 为函数的可去间断点, 可补充

定义 $f(1) = \frac{\pi}{2}$ 。

(4) 因为 $\arctan \frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的左右极限分别为 $-\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}$, 所以 $x=0$ 为函数的跳跃间断点。

(5) 因为 $y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ 在 $x=0$ 处的左右极限分别为 1 和 0, 所以 $x=0$ 为函数的跳跃间断点。

(6) 因为 $y = \begin{cases} 3+x^2, & x < 0 \\ \frac{\sin 3x}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左右极限都为 3, 所以 $x=0$ 为函数的可去间断点,

可补充定义 $f(0) = 3$ 。

所属章节: 第二章第七节

难度: 一级

28. 求下列函数的连续区间:

$$(1) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}}$$

$$(2) y = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x};$$

$$(3) y = \ln(2-x);$$

$$(4) y = \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}.$$

解答: (1) 对函数 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}$, 定义域为 $x \neq 1, x \neq 2$, 易知 $x=1$ 与 $x=2$ 是

函数的间断点, 故连续区间为 $(-\infty, -1), (1, 2), (2, +\infty)$;

(2) 对函数 $y = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$, 定义域为 $[4, 6]$, 且在其内部无间断点, 故连续区间为 $[4, 6]$;

(3) 对函数 $y = \ln(2-x)$, 定义域为 $(-\infty, 2)$, 且在其内部无间断点, 故连续区间为 $(-\infty, 2)$;

(4) 对函数 $y = \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$, 定义域为 $(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$, 且在其内部除 $x=2$ 外无间断点, 故连续

区间为 $(-\infty, 1), (2, +\infty)$ 。

所属章节: 第二章第七节

难度: 一级

$$29. \text{ 讨论函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{2(\sqrt{1+x}-1)}{x}, & x > 0 \end{cases} \text{ 的连续性。}$$

参考答案: 连续

$$\text{解答: 对函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{2(\sqrt{1+x}-1)}{x}, & x > 0 \end{cases} \text{ 可能间断点为 } x=0, \text{ 但在 } x=0 \text{ 处, 左右极限均等}$$

于该点函数值 1, 故函数无间断点, 即函数为处处连续函数。

所属章节: 第二章第七节

难度: 一级

$$30. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a+x, & x \geq 0, \end{cases} \text{ 应怎样选取 } a, \text{ 使函数 } f(x) \text{ 连续。}$$

解答：要使函数 $f(x)$ 连续，左极限应等于右极限，即知 $a=1$ 。

所属章节：第二章第七节

难度：一级

31. 求下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 4};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^3;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin 2x}{x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} - \sqrt{x}}{\ln x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}).$$

解答：(1) 由于函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ 在 $x=0$ 处连续，故 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 4} = f(0) = 2$ ；

(2) 由于函数 $f(x) = (\sin 2x)^3$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处连续，故 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^3 = f(\frac{\pi}{4}) = 1$ ；

(3) 可令 $e^x - 1 = t$ ，则 $x = \ln(1+t)$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2 \ln(1+t)} = \frac{1}{2}$ ；

(4) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$ ，而函数 $y = \ln u$ 在 $x=2$ 处连续，故 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin 2x}{x} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \ln 2$ ；

(5) 可令 $x = 1+t$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} - \sqrt{x}}{\ln x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+5t} - \sqrt{1+t}}{\ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+5t})^2 - (\sqrt{1+t})^2}{t(\sqrt{1+5t} + \sqrt{1+t})} = 2$ ；

(6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = 1$ 。

所属章节：第二章第七节

难度：一级

32. 设 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，证明 $f(x)$ 在任意点 x 处连续。

解答：由 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ，令 $x=y=0$ ，得 $f(0)=0$ ，由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，有 $f(0+\Delta x) - f(0) = f(\Delta x)$ 的极限等于零，从而，在任意点 x 处 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f(\Delta x)$ 的极限等于零，故 $f(x)$ 在任意点 x 处连续。

所属章节：第二章第七节

难度：三级

33. 试证方程 $x^5 - 3x - 1 = 0$ 在 $(1, 2)$ 内至少有一个实根。

解答：设 $f(x) = x^5 - 3x - 1$ ，则 $f(x)$ 是闭区间 $[1, 2]$ 上的连续函数，因为 $f(1) = -3$ ， $f(2) = 25$ ， $f(1)f(2) < 0$ ，所以由零点定理，在 $(1, 2)$ 内至少有一点 ξ ($1 < \xi < 2$)，使 $f(\xi) = 0$ ，即 $x = \xi$ 是方程 $x^5 - 3x - 1 = 0$ 的介于 1 和 2 之间的根。

因此方程 $x^5 - 3x - 1 = 0$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间。

所属章节：第二章第八节

难度：二级

34. 试证方程 $x = a \sin x + b$ ($a > 0, b > 0$) 至少有一个不超过 $a + b$ 的正根。

解答：设 $f(x) = a \sin x + b - x$ ，则 $f(x)$ 是 $[0, a + b]$ 上的连续函数， $f(0) = b$ ，

$f(a + b) = a \sin(a + b) - a \leq 0$ ，若 $f(a + b) = 0$ ，则说明 $x = a + b$ 就是方程 $x = a \sin x + b$ 的一个不超过 $a + b$ 的根；若 $f(a + b) < 0$ ，则 $f(0)f(a + b) < 0$ ，由零点定理，至少存在一点 $\xi \in (0, a + b)$ ，使 $f(\xi) = 0$ ，这说明 $x = \xi$ 也是方程 $x = a \sin x + b$ 的一个不超过 $a + b$ 的根；

总之，方程 $x = a \sin x + b$ 至少有一个正根，并且它不超过 $a + b$ 。

所属章节：第二章第八节

难度：二级

35. 已知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非负连续，且 $f(0) = f(1) = 0$ ，证明对于任意实数 l ($0 < l < 1$)，必存在实数 ξ ($0 \leq \xi < 1$)，使 $f(\xi) = f(\xi + l)$ 。

解答：题目有误 题中 $f(\xi) = f(\xi + 1)$ 应为 $f(\xi) = f(\xi + l)$ ，

令 $F(x) = f(x) - f(x + l)$ ，则函数 $F(x)$ 在 $[0, 1 - l]$ 上连续，

当 $f(l) = 0$ 时，可取 $\xi = 0$ ；

当 $f(1 - l) = 0$ 时，可取 $\xi = 1 - l$ ；

当 $f(l), f(1 - l)$ 都不为零时， $F(0) = f(0) - f(l) = -f(l) < 0$ ，

$F(1 - l) = f(1 - l) - f(1) = f(1 - l) > 0$ ，由零点定理，存在 $\xi \in (0, 1 - l) \subset (0, 1)$ ，使 $F(\xi) = 0$ ，即

$$f(\xi) = f(\xi + l)。$$

所属章节：第二章第八节

难度：三级

36. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ (常数)。证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。

解答: 令 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则对于给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 只要 $|x| > X$, 就有

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ 即 } A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

又由于 $f(x)$ 在闭区间 $[-X, X]$ 上连续, 根据有界性定理, 存在 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M, x \in [-X, X]$,

取 $N = \max\{M, |A - \varepsilon|, |A + \varepsilon|\}$, 则 $|f(x)| \leq N, x \in (-\infty, +\infty)$, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。

所属章节：第二章第八节

难度：三级

第三章 导数与微分

t1. 设物体绕定轴旋转, 在时间间隔 $[0, t]$ 内转过角度是 θ , 从而转角 θ 是 t 的函数: $\theta = \theta(t)$ 。

如果旋转是匀速的, 那么称 $\omega = \frac{\theta}{t}$ 为该物体旋转的角速度。如果旋转是非匀速的, 应怎样确定该物体在时刻 t_0 的角速度?

解答: $\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=t_0}$

所属章节: 第三章第一节

难度: 一级

2. 一个圆锥体因受热而膨胀, 在膨胀过程中, 其高与地面的直径相等, 问:

(1) 体积关于半径的变化率如何?

(2) 半径为 5cm 时, 体积关于半径的变化率是多少?

解答: (1) $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot 2r = \frac{2}{3} \pi r^3$, $\frac{dV}{dr} = 2\pi r^2$; (2) $\left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=5} = 50\pi$

所属章节: 第三章第一节

难度: 一级

3. 设 $N = N(x)$ 表示 x 个劳动力所生产的某产品的数量, 若每个劳动力生产的产品数量相同,

则 $\frac{N}{x}$ 是常数, 称为劳动生产率。实际上, 产品的产量 N 并不是随劳动力 x 的增加而均匀增长的。试求劳动力数量为 x_0 时的劳动生产率 (边际劳动生产率)。

解答: $N'(x_0)$

所属章节: 第三章第一节

难度: 一级

4. 假定 $f(x)$ 可导, 观察下列极限, 指出 A 表示什么?

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = A;$$

$$(2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A;$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3) - f(3-h)}{h} = A;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A, \text{ 且 } f(0) = 0.$$

$$\text{解答: (1) } A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)};$$

$$(2) (x_0 - 2\Delta x) - x_0 = -2\Delta x, \quad A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -2f'(x_0);$$

$$(3) 3 - (3 - h) = h, \quad A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3) - f(3 - h)}{h} = f'(3);$$

$$(4) f(0) = 0, \quad A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

所属章节：第三章第一节

难度：一级

5. 指出下列极限是什么函数在哪一点的导数？

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\arctan x - \arctan \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}.$$

解答：(1) a^x 在 $x=0$ 处的导数；

(2) $(1+x)^m$ 在 $x=0$ 处的导数；

(3) $\arctan x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的导数

所属章节：第三章第一节

难度：一级

6. 按定义证明： $(\cos x)' = -\sin x$ 。

$$\text{解答: 因为 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin x,$$

所以由导数定义， $(\cos x)' = -\sin x$ 。

所属章节：第三章第一节

难度：一级

7. 按定义求下列函数的导数：

$$(1) y = x^2 + 3x - 1;$$

$$(2) y = e^{ax};$$

$$(3) \quad y = \cos(ax+b);$$

$$(4) \quad y = x \sin x.$$

解答: (1) 由于 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) - 1] - (x^2 + 3x - 1)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \Delta x + 3 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + 3,$$

$$\text{故 } y' = 2x + 3;$$

$$(2) \quad \text{由于 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{a(x+\Delta x)} - e^{ax}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{ax}(e^{a\Delta x} - 1)}{\Delta x} = ae^{ax},$$

$$\text{故 } y' = ae^{ax};$$

$$(3) \quad \text{由于 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(a(x+\Delta x)+b) - \cos(ax+b)}{\Delta x} = -a \sin(ax+b),$$

$$\text{故 } y' = -a \sin(ax+b);$$

$$(4) \quad \text{由于 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x) \sin(x+\Delta x) - x \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot \sin(x+\Delta x) + x[\sin(x+\Delta x) - \sin x]}{\Delta x} = \sin x + x \cos x,$$

$$\text{故 } y' = \sin x + x \cos x$$

所属章节: 第三章第二节

难度: 二级

8. 若函数 $F(x)$ 在点 $x=a$ 处连续, 且 $F(x) \neq 0$, 问函数

$$(1) \quad f(x) = |x-a|F(x),$$

$$(2) \quad f(x) = (x-a)F(x)$$

在点 $x=a$ 处是否可导? 为什么?

解答: (1) 对函数 $f(x) = |x-a|F(x)$, 由于 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta x \cdot F(a+\Delta x)}{\Delta x} = F(a),$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{-\Delta x \cdot F(a+\Delta x)}{\Delta x} = -F(a),$$

故函数在点 $x=a$ 处不可导, 因为左、右导数不相等;

$$(2) \quad \text{对函数 } f(x) = (x-a)F(x), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta x \cdot F(a+\Delta x)}{\Delta x} = F(a),$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta x \cdot F(a+\Delta x)}{\Delta x} = F(a),$$

故函数在点 $x=a$ 处可导, 因为左、右导数相等。

所属章节: 第三章第二节

难度：二级

9. 按定义证明：

- (1) 可导的偶函数的导数是奇函数；
- (2) 可导的奇函数的导数是偶函数；
- (3) 可导的周期函数的导数仍是周期导数，且周期不变。

解答：(1) 设 $f(x)$ 为可导的偶函数，则

$$f'(-x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x + \Delta x) - f(-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -f'(x)$$

即它的导数是奇函数；

(2) 设 $f(x)$ 为可导的奇函数，则

$$f'(-x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x + \Delta x) - f(-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-f(x - \Delta x) + f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

即它的导数是偶函数；

(3) 设 $f(x)$ 为可导的周期函数，且周期为 T ，则

$$f'(x + T) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + T + \Delta x) - f(x + T)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

即它的导数是周期函数，且周期不变；

所属章节：第三章第二节

难度：二级

10. 设函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处可导， $\varphi'(0) \neq 0$ ，且 $f(0) = \varphi(0) = 0$ ，则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(0)}{\varphi'(0)}.$$

$$\text{解答：} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(0)}{x}}{\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}} = \frac{f'(0)}{\varphi'(0)}.$$

所属章节：第三章第二节

难度：二级

11. 设 $f'(x)$ 存在，试证：对常数 α, β ，有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha h) - f(x + \beta h)}{h} = (\alpha - \beta)f'(x).$$

$$\text{解答：} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha h) - f(x + \beta h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x + \alpha h) - f(x)] - [f(x + \beta h) - f(x)]}{h} = (\alpha - \beta)f'(x)$$

所属章节：第三章第二节

难度：一级

12. (1) 设函数 $f(x)$ 对任意实数 x, y 均有 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, 且 $f'(0) = 1$, 试求 $f'(x)$;

(2) 设函数 $f(x)$ 对任意实数 x, y 均有 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$, 且 $f'(0)$ 存在, 试求 $f'(x)$ 。

解答: (1) 由于对任意实数 x, y 均有 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, 令 $x = y = 0$, 得 $f(0) = 1$ 或 $f(0) = 0$,

令 $y = 0$, 得 $f(x) = f(x)f(0)$,

如果 $f(0) = 0$, 则 $f(x) \equiv 0$, 从而 $f'(x) \equiv 0$; 如果 $f(0) = 1$, 则由 $f'(0) = 1$,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)[f(\Delta x) - 1]}{\Delta x} = f(x)f'(0) = f(x),$$

故 $f'(x) = f(x)$;

综合知, $f'(x) = f(x)$

(2) 由于对任意实数 x, y 均有 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$, 令 $y = 0$, 得 $f(0) = 0$,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(\Delta x) + 2x\Delta x - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(\Delta x) - f(0)] + 2x\Delta x}{\Delta x} = f'(0) + 2x$$

故 $f'(x) = 2x + f'(0)$

所属章节: 第三章第二节

难度: 三级

13. 设函数 $f(x)$ 对任意 x 有 $f(1+x) = af(x)$, 且 $f'(0) = b$, 试求 $f'(1)$ 。

解答: 由于对任意 x 有 $f(1+x) = af(x)$, 故 $f(1) = af(0), f(1+\Delta x) = af(\Delta x)$,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{af(\Delta x) - af(0)}{\Delta x} = af'(0) = ab$$

所以由导数定义 $f'(1) = ab$

所属章节: 第三章第二节

难度: 三级

14. 在抛物线 $y = x^2$ 上哪一点的切线

(1) 平行于直线 $y = 4x - 5$;

(2) 垂直于直线 $2x - 6y + 5 = 0$;

(3) 与直线 $3x - y + 1 = 0$ 构成 45° 角。

解答: $y' = 2x$

(1) 要使切线平行于直线 $y = 4x - 5$, 则 $y' = 4$, 故切点为 $(2, 4)$;

(2) 要使切线垂直于直线 $2x - 6y + 5 = 0$, 则 $y' = -3$, 故切点为 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$;

(3) 要使切线与直线 $3x - y + 1 = 0$ 构成 45° 角, 则 $y' = -2, \frac{1}{2}$, 故切点为 $(-1, 1)$ 及 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$

所属章节: 第三章第二节

难度: 一级

15. 求曲线 $y = \cos x$ 上点 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程。

解答: $y' = -\sin x$, 故切线斜率为 $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 法线斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 从而由点斜式方

程得到切线方程为 $\frac{\sqrt{3}}{2}x + y - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right) = 0$; 法线方程为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}x - y + \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi = 0$

所属章节: 第三章第二节

难度: 一级

16. 求下列曲线在指定点处的切线方程和法线方程:

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$ 在对应于 $x = 1$ 的点处;

(2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 在对应于 $x = 9$ 的点处。

解答: (1) $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, 令 $x = 1$ 得到切线斜率 -1 , 切点 $(1, 1)$, 从而切线方程为 $x + y - 2 = 0$, 法线方程为 $-x + y = 0$;

(2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$, $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$, 令 $x = 9$ 得到切线斜率 $-\frac{1}{54}$, 切点 $\left(9, \frac{1}{3}\right)$, 从而

切线方程为 $x + 54y - 27 = 0$, 法线方程为 $162x - 3y - 1457 = 0$

所属章节: 第三章第二节

难度: 一级

17. 证明: 双曲线 $xy=a^2$ 上任一点的切线与两坐标轴围成的三角形的面积等于常数。

解答: 由 $xy=a^2$ 得 $y=\frac{a^2}{x}$, $k=y'=-\frac{a^2}{x^2}$.

设 (x_0, y_0) 为曲线上任一点, 则过该点的切线方程为

$$y-y_0=-\frac{a^2}{x_0^2}(x-x_0).$$

令 $y=0$, 并注意 $x_0 y_0=a^2$, 解得 $x=\frac{y_0 x_0^2}{a^2}+x_0=2x_0$ 为切线在 x 轴上的截距.

令 $x=0$, 并注意 $x_0 y_0=a^2$, 解得 $y=\frac{a^2}{x_0}+y_0=2y_0$ 为切线在 y 轴上的截距.

此切线与二坐标轴构成的三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}|2x_0||2y_0|=2|x_0 y_0|=2a^2$$

所属章节: 第三章第二节

难度: 二级

18. 求下列函数在点 x_0 处的左右导数, 并指出在该点的可导性:

$$(1) f(x)=\begin{cases} \sin x, & x \geq 0, \\ x, & x < 0, \end{cases} \quad x_0=0;$$

$$(2) f(x)=\begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ 2-x, & x > 1, \end{cases} \quad x_0=1;$$

$$(3) f(x)=\begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

解答: (1) 因为 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\sin(\Delta x)-0}{\Delta x} = 1$, 故右导数 $f'_+(0)=1$,

因为 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta x-0}{\Delta x} = 1$, 故左导数 $f'_-(0)=1$,

从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导;

$$(2) \text{ 因为 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{(2-1-\Delta x)-1}{\Delta x} = -1, \text{ 故右导数 } f'_+(0)=-1,$$

因为 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x} = 2$, 故左导数 $f'_-(0)=2$,

从而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导;

$$(3) \text{ 因为 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\Delta x}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}} - 0}{\Delta x} = 0, \text{ 故右导数 } f'_+(0) = 0,$$

$$\text{因为 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\Delta x}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}} - 0}{\Delta x} = 1, \text{ 故左导数 } f'_-(0) = 1,$$

从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

所属章节：第三章第二节

难度：二级

19. 分别讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性和可导性：

$$(1) \ y = |\sin x|;$$

$$(2) \ y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$(3) \ y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

解答：(1) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = 0 = y(0)$,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{y(0+\Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{y(0+\Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x} = -1,$$

所以函数 $y = |\sin x|$ 在 $x=0$ 处连续、不可导；

$$(2) \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0 = y(0),$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(0+\Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{\Delta x} \text{ 不存在,}$$

$$\text{所以函数 } y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续、不可导;}$$

$$(3) \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| = 0 = y(0),$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(0+\Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot \sin \frac{1}{\Delta x} = 0,$$

$$\text{所以函数 } y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续、可导}$$

所属章节：第三章第二节

难度：二级

20. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq x_0, \\ ax+b, & x > x_0 \end{cases}$ 在 x_0 处连续且可导，试求 a, b 。

参考答案： $a = 2x_0, b = -x_0^2$

解答：由于函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq x_0, \\ ax+b, & x > x_0 \end{cases}$ 在 x_0 处连续且可导，故

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

即 $ax_0 + b = x_0^2, \quad a = 2x_0,$

解得 $a = 2x_0, b = -x_0^2$ 。

所属章节：第三章第二节

难度：二级

在下列 21~30 题中，求函数的导数（其中 x, y, t 均为变量， a 为常数）：

21. $y = a^x x^a$;

解答： $y' = x^a a^x \ln a + a^{x+1} x^{a-1}$

所属章节：第三章第二节

难度：一级

22. $y = x \sin x \ln x$;

解答： $y' = \sin x \ln x + x \cos x \ln x + \sin x$

所属章节：第三章第二节

难度：一级

$$23. \quad y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9);$$

解答:

$$y' = (x^2 - 1)'(x^2 - 4)(x^2 - 9) + (x^2 - 1)(x^2 - 4)'(x^2 - 9) + (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)' = 2x(3x^4 - 28x^2 + 49)$$

所属章节: 第三章第二节

难度: 一级

$$24. \quad y = 2^x(x \sin x + \cos x);$$

$$\text{解答: } y' = 2^x [\ln 2(x \sin x + \cos x) + x \cos x]$$

所属章节: 第三章第二节

难度: 一级

$$25. \quad y = \frac{\sin x}{x} + \frac{a}{\sin a};$$

$$\text{解答: } y' = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' + 0 = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

所属章节: 第三章第二节

难度: 一级

$$26. \quad y = \frac{x^3 + 2x}{e^x};$$

$$\text{解答: } y' = \left(\frac{x^3 + 2x}{e^x}\right)' = \frac{-x^3 + 3x^2 - 2x + 2}{e^x}$$

所属章节: 第三章第二节

难度: 一级

$$27. \quad y = \frac{1}{1 + \sqrt{t}} - \frac{1}{1 - \sqrt{t}};$$

$$\text{解答: } y' = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{t}} - \frac{1}{1 - \sqrt{t}}\right)' = \left(\frac{-2\sqrt{t}}{1 - t}\right)' = -\frac{1 + t}{\sqrt{t}(1 - t)^2}$$

所属章节: 第三章第二节

难度: 一级

$$28. \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

解答: $y' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)' = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

所属章节: 第三章第二节

难度: 一级

29. $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x};$

解答: $y' = \left(\frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} \right)' = \frac{-\frac{1}{x} \cdot (1 + \ln x) - (1 - \ln x) \cdot \frac{1}{x}}{(1 + \ln x)^2} = -\frac{2}{x(1 + \ln x)^2}$

所属章节: 第三章第二节

难度: 一级

30. $y = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 2\sqrt[3]{x}}.$

解答: $y' = \left(\frac{x + \sqrt{x}}{x - 2\sqrt[3]{x}} \right)' = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3\sqrt[6]{x}}}{(x - 2\sqrt[3]{x})^2}$

所属章节: 第三章第二节

难度: 一级

31. 求下列函数在给定点处的导数:

(1) $y = \sec x - 2 \cos x$, 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处;

(2) $y = x^2 e^{-x}$, 在 $x = 1$ 处;

(3) $y = e^x(x^2 - x + 1)$, 在 $x = 1$ 处;

(4) $y = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$, 在 $x = 9$ 处;

(5) $y = \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\cos \theta + \theta \sin \theta}$, 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处。

解答: (1) 对函数 $y = \sec x - 2 \cos x$, 求导得 $y' = \sec x \tan x + 2 \sin x$, 代入 $x = \frac{\pi}{3}$ 得导数等于 $3\sqrt{3}$;

(2) 对函数 $y = x^2 e^{-x}$, 求导得 $y' = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x}$, 代入 $x = 1$ 得导数等于 $\frac{1}{e}$;

(3) 对函数 $y = e^x(x^2 - x + 1)$, 求导得 $y' = e^x(x^2 + x)$, 代入 $x = 1$ 得导数等于 $2e$;

$$(4) \text{ 对函数 } y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}, \text{ 求导得 } y' = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right)' = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2},$$

代入 $x=9$ 得导数等于 $-\frac{1}{48}$;

$$(5) \text{ 对函数 } y = \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\cos \theta + \theta \sin \theta}, \text{ 求导得 } y' = \left(\frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\cos \theta + \theta \sin \theta} \right)' = \frac{\theta^2}{(\cos \theta + \theta \sin \theta)^2}, \text{ 代入 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 得}$$

导数等于 1。

所属章节：第三章第二节

难度：一级

32. 求下列各函数的反函数的导数：

$$(1) y = x + \ln x;$$

$$(2) y = \cosh x;$$

$$(3) y = e^{\arcsin x};$$

$$(4) y = \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x};$$

$$(5) \theta = r \arctan r.$$

$$\text{参考答案: (1) } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{y+1}; \quad (2) \frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad x > 1; \quad (3) \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(\ln x)}{x};$$

$$(4) \frac{dy}{dx} = -\frac{4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}; \quad (5) \frac{dr}{d\theta} = \frac{1+r^2}{1+(1+r^2)\arctan r} \quad (\text{答案 5 有误?})$$

解答：(1) 对函数 $y = x + \ln x$ ，导函数为 $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$ ，反函数的导数为 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y+1}$ ；

(2) 对函数 $y = \cosh x$ ，反函数为 $y = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$ ，导数为 $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad x > 1$ ；

(3) 对函数 $y = e^{\arcsin x}$ ，反函数为 $y = \sin(\ln x)$ ，导数为 $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(\ln x)}{x}$ ；

(4) 对函数 $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$ ，反函数为 $y = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$ ，导数为 $\frac{dy}{dx} = -\frac{4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$ ；

(5) 对函数 $\theta = r \arctan r$ ，导函数为 $\frac{d\theta}{dr} = \arctan r + r \cdot \frac{1}{1+r^2}$ ，反函数的导数为

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1+r^2}{r+(1+r^2)\arctan r}.$$

所属章节：第三章第三节

难度：二级

在下列 33~85 题中，求函数的导数：

$$33. \quad y = (x^3 - x)^6;$$

$$\text{解答: } y' = 6(x^2 - 1)^5(3x^2 - 1)$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$34. \quad y = \sqrt[3]{(x^2 + x + 2)^2};$$

$$\text{解答: } y' = \frac{2(2x+1)}{3\sqrt[3]{x^2+x+2}}$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$35. \quad y = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}};$$

$$\text{解答: } y' = -\frac{2x}{3(1+x^2)\sqrt[3]{1+x^2}}$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$36. \quad y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3};$$

$$\text{解答: } y' = \frac{3x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 3x + 6}{\sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$37. \quad y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}};$$

$$\text{解答: } y' = \frac{3-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$38. \quad y = \frac{1 - \sqrt[3]{2x-1}}{1 + \sqrt[3]{2x-1}};$$

$$\text{解答: } y' = -\frac{4}{3(1 + \sqrt[3]{2x-1})^2 \sqrt[3]{(2x-1)^2}}$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$39. \quad y = \sin 2x + \cos(x^2);$$

$$\text{解答: } y' = 2 \cos 2x - 2x \sin x^2$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$40. \quad y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2};$$

$$\text{解答: } y' = \frac{2 \sin x (\cos x \sin x^2 - x \sin x \cos x^2)}{\sin^2 x^2}$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$41. \quad y = \sin^2 \frac{x}{3} \cot \frac{x}{2};$$

$$\text{解答: } y' = \frac{1}{3} \sin \frac{2x}{3} \cot \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{x}{3} \csc^2 \frac{x}{2}$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$42. \quad y = \sin^n x \cos nx;$$

$$\text{参考答案: } n \sin^{n-1} x \cos(n+1)x$$

$$\text{解答: } y' = n \sin^{n-1} x \cos(n+1)x$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$43. \quad y = \sqrt{\tan \frac{x}{2}};$$

解答: $y' = \frac{1}{4} \sqrt{\cot \frac{x}{2}} \sec^2 \frac{x}{2}$

所属章节: 第三章第三节

难度: 一级

44. $y = \cos^2 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}};$

参考答案: $\frac{\sin^2 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ (本题答案有误)

解答: $y' = 2 \cos \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot \left(-\sin \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)' = \frac{\sin \frac{2(1-\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

所属章节: 第三章第三节

难度: 一级

45. $y = \sin[\sin(\sin 2x)];$

解答: $y' = 2 \cos[\sin(\sin 2x)] \cos(\sin 2x) \cos 2x$

所属章节: 第三章第三节

难度: 一级

46. $y = \sin 2^x;$

解答: $y' = 2^x \ln 2 \cos 2^x$

所属章节: 第三章第三节

难度: 一级

47. $y = \sin(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x);$

参考答案: $-\sin 2x \cos(\cos 2x)$

解答: $y' = \cos(\cos^2 x) \cdot (\cos^2 x)' \cdot \cos(\sin^2 x) + \sin(\cos^2 x) (-\sin(\sin^2 x)) (\sin^2 x)' = -\sin 2x \cos(\cos 2x)$

所属章节: 第三章第三节

难度: 一级

48. $y = 2^{\tan \frac{1}{x^2}}$;

解答：函数由 $y = 2^u, u = \tan v, v = \frac{1}{x^2}$ 复合而成， $y' = -\frac{\ln 2}{x^3} \cdot 2^{\tan \frac{1}{x^2} + 1} \cdot \sec^2 \frac{1}{x^2}$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

49. $y = \sin e^{x^2+2x-2}$; (若题目中是 x^2+2x-2 ，原答案则有误)

解答：函数由 $y = \sin u, u = e^v, v = x^2 + 2x - 2$ 复合而成， $y' = (2x+2)e^{x^2+2x-2} \cos e^{x^2+2x-2}$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

50. $y = e^{\cosh 2x + \sqrt{1-x}}$;

解答： $y' = e^{\cosh 2x + \sqrt{1-x}} (2 \sinh 2x - \frac{1}{2\sqrt{1-x}})$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

51. $y = \ln^3 x^2$;

解答： $y' = \frac{6}{x} \ln^2 x^2$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

52. $y = \ln [\ln (\ln x)]$;

解答： $y' = \frac{1}{x \ln x \ln (\ln x)}$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

53. $y = \log_5 (\frac{x}{1-x})$;

解答： $y = \log_5 (\frac{x}{1-x}) = \frac{\ln x - \ln (1-x)}{\ln 5}$, $y' = \frac{1}{x(1-x) \ln 5}$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$54. \quad y = \ln \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\text{解答: } y' = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \sec^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \sec x$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$55. \quad y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}};$$

$$\text{参考答案: } -\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\text{解答: } y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad y' = (-\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}))' = -\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$56. \quad y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}};$$

$$\text{参考答案: } -\frac{1}{\cos x} \quad (\text{答案有误})$$

$$\text{解答: } y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \sec x - \tan x, \quad y' = \sec x \tan x - \sec^2 x$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$57. \quad y = \sec^3(\ln x);$$

$$\text{解答: } y' = \frac{3}{x} \sec^3(\ln x) \tan(\ln x)$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$58. \quad y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2});$$

解答: $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{x}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$

所属章节: 第三章第三节

难度: 一级

59. $y = \arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}};$

解答: $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1-x}{\sqrt{2}})^2}} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$

所属章节: 第三章第三节

难度: 一级

60. $y = \arctan \frac{x^2}{2};$

参考答案: $\frac{4x}{x^2+4}$ (答案有误)

解答: $y' = \frac{1}{1+(\frac{x^2}{2})^2} \cdot \frac{2x}{2} = \frac{4x}{x^4+4}$

所属章节: 第三章第三节

难度: 一级

61. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \arccot \frac{\sqrt{2}}{x};$

参考答案: $\frac{1}{x^2+2}$

解答:

所属章节: 第三章第三节

难度: 一级

62. $y = (\arcsin x)^2;$

解答: $y' = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

所属章节: 第三章第三节

难度：一级

$$63. \quad y = \sqrt{x} - \arctan \sqrt{x};$$

$$\text{解答: } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$64. \quad y = x + \sqrt{1-x^2} \arcsin x;$$

$$\text{解答: } y' = 1 + \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2 - \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$65. \quad y = \arccos(\ln x);$$

$$\text{解答: } y' = -\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$66. \quad y = \ln(\arccos 2x);$$

$$\text{解答: } y' = -\frac{2}{\arccos 2x \sqrt{1-4x^2}}$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$67. \quad y = \arcsin(2\sqrt{\sin x});$$

$$\text{解答: } y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x(1-4\sin x)}}$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

68. $y = e^{\arctan \sqrt{x}};$

解答: $y' = \frac{e^{\arctan \sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}$

所属章节: 第三章第三节

难度: 一级

69. $y = \cos(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}});$

解答: $y = \cos(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

所属章节: 第三章第三节

难度: 一级

70. $y = \cosh(\sinh x);$

解答: $y' = \sinh(\sinh x) \cosh x$

所属章节: 第三章第三节

难度: 一级

71. $y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}};$

解答: $y' = e^x + e^{e^x} \cdot e^x + e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x$

所属章节: 第三章第三节

难度: 一级

72. $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x};$

解答: $y' = a^a x^{a^a-1} + ax^{a-1} \ln a + a^{a^x+x} \ln^2 x$

所属章节: 第三章第三节

难度: 一级

73. $y = \sin^2(\frac{1-\ln x}{x});$

解答: $y' = \frac{-2+\ln x}{x^2} \sin(\frac{2-2\ln x}{x})$

所属章节: 第三章第三节

难度：一级

$$74. \quad y = e^{\cosh x} \cdot \sinh x;$$

$$\text{解答: } y' = e^{\cosh x} (\sinh^2 x + \cosh x)$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$75. \quad y = x \arcsin(\ln x);$$

$$\text{解答: } y' = \arcsin(\ln x) + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln^2 x}}$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$76. \quad y = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}};$$

$$\text{参考答案: } \frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$$

$$\text{解答: } y = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = x^{\frac{7}{8}}, \quad y' = \frac{7}{8} x^{-\frac{1}{8}} = \frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$77. \quad y = 10^{x \tan 2x};$$

$$\text{解答: } y' = 10^{x \tan x} \cdot \ln 10 (\tan 2x + 2x \sec^2 x)$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$78. \quad y = e^x \cos^3 x \ln x;$$

$$\text{解答: } y' = e^x \cos^2 x (\cos x \ln x - 3 \sin x \ln x + \frac{\cos x}{x})$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$79. \quad y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin \frac{x}{a};$$

$$\text{解答: } y' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

所属章节：第三章第三节

难度：一级

$$80. \quad y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x};$$

$$\text{解答: } y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} [\ln(1-x) - \ln(1+x)], \quad y' = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

所属章节：第三章第三节

难度：二级

$$81. \quad y = \frac{(x+1)^2 \sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}};$$

$$\text{解答: 用对数求导法, 对 } y = \frac{(x+1)^2 \sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}, \text{ 有 } \ln y = 2 \ln(x+1) + \frac{1}{3} \ln(3x-2) - \frac{2}{3} \ln(x-3), \text{ 两}$$

$$\text{边求导得 } \frac{1}{y} y' = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{3x-2} - \frac{2}{3(x-3)} = \frac{15x^2 - 74x + 31}{3(x+1)(3x-2)(x-3)}$$

$$\text{解得 } y' = \frac{(15x^2 - 74x + 31)(x+1)}{3\sqrt[3]{(x-3)^5(3x-2)^2}}$$

所属章节：第三章第四节

难度：二级

$$82. \quad y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}};$$

$$\text{参考答案: } \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} + \cot x + \frac{e^x}{2(e^x - 1)} \right] \cdot \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}}$$

$$\text{解答: 用对数求导法, 对 } y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}}, \text{ 两边取对数有 } \ln y = \frac{1}{2} [\ln x + \ln \sin x + \frac{1}{2} \ln(1-e^x)],$$

$$\text{两边求导得 } \frac{1}{y} y' = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} + \cot x + \frac{e^x}{2(e^x - 1)} \right]$$

$$\text{解得 } y' = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} + \cot x + \frac{e^x}{2(e^x - 1)} \right] \cdot \sqrt{x \sin x \sqrt{1 - e^x}}$$

所属章节：第三章第四节

难度：二级

$$83. \quad y = x^{\frac{1}{x}};$$

解答：用对数求导法，对 $y = x^{\frac{1}{x}}$ ，两边取对数有 $\ln y = \frac{1}{x} \ln x$ ，两边求导得 $\frac{1}{y} y' = \frac{-1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$ ，

$$\text{解得 } y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x)$$

所属章节：第三章第四节

难度：二级

$$84. \quad y = \left(\frac{x}{1+x} \right)^x;$$

$$\text{参考答案：} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x \left[\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right]$$

解答：用对数求导法，对 $y = \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$ ，两边取对数有 $\ln y = x[\ln x - \ln(1+x)]$ ，两边求导得

$$\frac{1}{y} y' = \ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}, \quad \text{解得 } y' = \left(\frac{x}{1+x} \right)^x \left[\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right]$$

所属章节：第三章第四节

难度：一级

$$85. \quad y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}.$$

解答： $y' = (\sin x)^{\cos x} (\cos x \cot x - \sin x \ln(\sin x)) + (\cos x)^{\sin x} (\cos x \ln(\cos x) - \sin x \tan x)$

所属章节：第三章第四节

难度：一级

86. 求下列函数的导数：

$$(1) \quad y = x|x|;$$

$$(2) \quad y = |(x-1)^2(x+1)^3|;$$

$$(3) \quad y = \arccos \frac{1}{|x|}.$$

解答: (1) $y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$, 用定义求得在 $x=0$ 处导数等于零, $y' = \begin{cases} 2x, & x \geq 0, \\ -2x, & x < 0, \end{cases}$ 即 $y' = 2|x|$;

(2) $y = \begin{cases} (x-1)^2(x+1)^3, & x \geq 0 \\ -(x-1)^2(x+1)^3, & x < 0 \end{cases}$, 用定义求得在 $x=0$ 处导数等于零,

$$y' = (x-1)(x+1)^2(5x-1) \cdot \operatorname{sgn}(x+1);$$

$$(3) \quad y = \begin{cases} \arccos \frac{1}{x}, & x > 1 \\ \arccos \frac{1}{-x}, & x < -1 \end{cases}, \quad y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} (|x| > 1)$$

所属章节: 第三章第四节

难度: 二级

87. 设 $f(x)$ 可导, 求下列函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

$$(1) \quad y = f(x^2);$$

$$(2) \quad y = f(e^x)e^{f(x)};$$

$$(3) \quad y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x);$$

$$(4) \quad y = f\{f[f(x)]\}.$$

解答: (1) $y' = 2xf'(x^2);$

$$(2) \quad y' = e^{f(x)}[e^x f'(e^x) + f(e^x)f'(x)];$$

$$(3) \quad y' = \sin 2x[f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]; \quad (4) \quad y' = f'\{f[f(x)]\}f'[f(x)]f'(x)$$

所属章节: 第三章第四节

难度: 一级

88. 设 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 可导, 求下列函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

$$(1) \quad y = \arctan \frac{\varphi(x)}{\psi(x)};$$

$$(2) \quad y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}.$$

$$\text{解答: (1) } y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^2} \cdot \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)' = \frac{\varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x) + \psi^2(x)};$$

$$(2) \quad y' = \frac{\varphi(x)\varphi'(x) - \psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}}$$

所属章节: 第三章第四节

难度: 一级

89. 验证:

(1) 函数 $y = \ln \frac{1}{1+x}$ 满足关系式 $x \frac{dy}{dx} + 1 = e^y$;

(2) 函数 $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2+1} + \ln \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ 满足关系式 $2y = xy' + \ln y'$.

解答: (1) 对函数 $y = \ln \frac{1}{1+x} = -\ln(1+x)$, 有 $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+x}$, 所以 $x \frac{dy}{dx} + 1 = \frac{1}{1+x} = e^y$;

(2) 对函数 $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2+1} + \ln \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$, 有 $y' = x + \sqrt{x^2+1}$, 容易验证

$2y = xy' + \ln y'$ 成立。

所属章节: 第三章第四节

难度: 一级

90. 求下列方程所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $y^2 - 2xy + 6 = 0$;

(2) $y^2 \cos x = a^2 \sin 3x$;

(3) $\cos(xy) = x$;

(4) $y = 1 + xe^y$;

(5) $x^y = y^x$;

(6) $y \sin x - \cos(x-y) = 0$.

参考答案: (1) $\frac{y}{y-x}$; (2) $\frac{y^2 \sin x + 3a^2 \cos 3x}{2y \cos y}$ (此答案有误); (3) $-\frac{1+y \sin(xy)}{x \sin(xy)}$;

(4) $\frac{e^y}{2-e^y}$ (此答案正确?); (5) $\frac{y^2 - xy \ln y}{x^2 - xy \ln x}$; (6) $\frac{y \cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}$

解答: (1) 方程 $y^2 - 2xy + 6 = 0$ 两边对 x 求导, 有 $2y \frac{dy}{dx} - 2y - 2x \frac{dy}{dx} = 0$, 解得 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x}$;

(2) 方程 $y^2 \cos x = a^2 \sin 3x$ 两边对 x 求导, 有 $2y \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \cos x - y^2 \sin x = 3a^2 \cos 3x$, 解得 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \sin x + 3a^2 \cos 3x}{2y \cos x}$;

(3) 方程 $\cos(xy) = x$ 两边对 x 求导, 有 $-\sin(xy)(y + x \frac{dy}{dx}) = 1$, 解得 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1+y \sin(xy)}{x \sin(xy)}$;

(4) 方程 $y = 1 + xe^y$ 两边对 x 求导, 有 $\frac{dy}{dx} = e^y + xe^y \frac{dy}{dx}$, 解得 $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{1-xe^y}$, 或写成 $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{2-y}$;

(5) 方程 $x^y = y^x$ 两边取对数得 $y \ln x = x \ln y$, 再两边对 x 求导, 有

$$\frac{dy}{dx} \ln x + y \cdot \frac{1}{x} = \ln y + x \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}, \text{ 解得 } \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - xy \ln y}{x^2 - xy \ln x};$$

(6) 方程 $y \sin x - \cos(x-y) = 0$ 两边对 x 求导, 有 $\frac{dy}{dx} \sin x + y \cos x + \sin(x-y) \cdot (1 - \frac{dy}{dx}) = 0$,

$$\text{解得 } \frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}.$$

所属章节: 第三章第四节

难度: 一级

91. 求下列方程所确定的隐函数 $y = y(x)$ 在点 $x = 0$ 处的导数:

$$(1) \sin(xy) + \ln(y-x) = x;$$

$$(2) e^{xy} + \ln \frac{y}{x+1} = 0;$$

$$(3) e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1.$$

解答: (1) 由方程知 $x=0$ 时 $y=1$, 方程 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 两边对 x 求导, 有

$$\cos(xy) \cdot (y + xy') + \frac{y' - 1}{y - x} = 1, \text{ 将 } x=0, y=1 \text{ 代入解得 } y' = 1;$$

$$(2) \text{ 由方程知 } x=0 \text{ 时 } y = \frac{1}{e}, \text{ 方程 } e^{xy} + \ln \frac{y}{x+1} = 0 \text{ 两边对 } x \text{ 求导, 有}$$

$$e^{xy} (y + xy') + \frac{1}{y} y' - \frac{1}{x+1} = 0, \text{ 将 } x=0, y = \frac{1}{e} \text{ 代入解得 } y' = \frac{1}{e} (1 - \frac{1}{e});$$

$$(3) \text{ 由方程知 } x=0 \text{ 时 } y=1, \text{ 方程 } e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1 \text{ 两边对 } x \text{ 求导, 有}$$

$$e^{2x+y} (2 + y') + \sin(xy) \cdot (y + xy') = 0, \text{ 将 } x=0, y=1 \text{ 代入解得 } y' = -2$$

所属章节: 第三章第四节

难度: 一级

92. 验证: 由方程 $xy - \ln y = 1$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 满足关系式 $y^2 + (xy - 1) \frac{dy}{dx} = 0$ 。

解答: 方程 $xy - \ln y = 1$ 两边对 x 求导, 有 $y + x \frac{dy}{dx} - \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$, 解得 $\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{xy - 1}$, 所以

$$y^2 + (xy - 1) \frac{dy}{dx} = 0.$$

所属章节: 第三章第四节

难度: 二级

93. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线和法线方程。

解答: 方程 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 两边对 x 求导, 有 $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$, 将 $(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 代入可

得切线斜率 $k = \frac{dy}{dx} = -1$, 所以切线方程为 $x + y - \frac{\sqrt{2}}{2}a = 0$, 法线方程为 $x - y = 0$ 。

所属章节: 第三章第四节

难度: 二级

94. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{dx}{dy}$:

$$(1) \begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2}. \end{cases}$$

解答: (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d(t-t^3)}{dt}}{\frac{d(1-t^2)}{dt}} = \frac{1-3t^2}{-2t} = \frac{3t^2-1}{2t}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{2t}{3t^2-1}$;

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{3at^2}{1+t^2})'}{(\frac{3at}{1+t^2})'} = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1-t^2}{2t}$$

所属章节: 第三章第四节

难度: 一级

95. 求下列参数方程所确定的函数在指定点处的导数 $\frac{dy}{dx}$:

$$(1) \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = 1 - \arctan t. \end{cases} \text{ 当 } t=1 \text{ 时}; \quad (2) \begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases} \text{ 当 } t = \frac{\pi}{3} \text{ 时}.$$

解答: (1) 由方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = 1 - \arctan t. \end{cases}$ 求得 $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - \arctan t)'}{(\ln(1+t^2))'} = -\frac{1}{2t}$, 当 $t=1$ 时 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$;

$$(2) \text{ 由方程 } \begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases} \text{ 求得 } \frac{dy}{dx} = \frac{(e^t \cos t)'}{(e^t \sin t)'} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}, \text{ 当 } t = \frac{\pi}{3} \text{ 时 } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} - 2.$$

所属章节: 第三章第四节

难度：一级

96. 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线和法线方程：

$$(1) \begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t}, \end{cases} \text{ 在 } t=0 \text{ 处}; \quad (2) \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \end{cases} \text{ 在 } t = \frac{\pi}{6} \text{ 处}.$$

解答：(1) 由方程 $\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t}, \end{cases}$ 求得 $\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{-t})'}{(2e^t)'} = \frac{-e^{-t}}{2e^t} = -\frac{1}{2}e^{-2t}$,

在 $t=0$ 处，切点 $(2,1)$ ，切线斜率 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$ ，

所以切线方程为 $x+2y-4=0$ ，法线方程为 $2x-y-3=0$ ；

$$(2) \text{ 由方程 } \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \end{cases} \text{ 求得 } \frac{dy}{dx} = \frac{(\cos 2t)'}{(\sin t)'} = \frac{-2\sin 2t}{\cos t} = -4\sin t,$$

在 $t = \frac{\pi}{6}$ 处，切点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ，切线斜率 $\frac{dy}{dx} = -2$ ，

所以切线方程为 $4x+2y-3=0$ ，法线方程为 $2x-4y+1=0$ 。

所属章节：第三章第四节

难度：二级

$$97. \text{ 设 } \begin{cases} x = \sqrt{1+t}, \\ y = \sqrt{1-t}, \end{cases} \text{ 求证: } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

解答：由方程 $\begin{cases} x = \sqrt{1+t}, \\ y = \sqrt{1-t}, \end{cases}$ 即得 $\frac{dy}{dx} = \frac{(\sqrt{1-t})'}{(\sqrt{1+t})'} = -\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}} = -\frac{x}{y}$ ，得证。

所属章节：第三章第四节

难度：一级

$$98. \text{ 试证: 由参数方程 } \begin{cases} x = \frac{1+\ln t}{t^2}, \\ y = \frac{3+2\ln t}{t} \end{cases} \text{ 所确定的函数满足关系式 } yy' = 2xy'^2 + 1.$$

解答：由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1+\ln t}{t^2}, \\ y = \frac{3+2\ln t}{t} \end{cases}$ 可求得 $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{3+2\ln t}{t})'}{(\frac{1+\ln t}{t^2})'} = t^2$ ，代入即可验证等式

$yy' = 2xy'^2 + 1$ 成立。

所属章节：第三章第四节

难度：一级

99. 求极坐标方程 $r = \cos \theta + \sin \theta$ 表示的曲线在相应于 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 的点处的切线斜率。

解答：由 $r = \cos \theta + \sin \theta$ ，化为参数方程 $\begin{cases} x = \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta \\ y = \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta \end{cases}$ ，求得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta)'}{(\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta)'} = \frac{-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta},$$

把 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 代入即得切线斜率为 -1 。

注：本题也可化作直角坐标方程 $x^2 + y^2 = x + y$ 用隐函数求导来求解。

所属章节：第三章第四节

难度：二级

100. 设甲车以 70km/h 的速度从东向西行驶，乙车以 80km/h 的速度从北向南行驶，均驶向两条路的交叉处。求当甲车和乙车分别距交叉口 0.3km 和 0.4km 时两车靠近的速率。

参考答案：

解答：再过 t 时刻，两车距离 $s = \sqrt{(0.3 - 70t)^2 + (0.4 - 80t)^2}$ ，求导得 $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = -106 \text{ km/h}$

所属章节：第三章第四节

难度：二级

101. 高为 18cm，底圆半径为 6cm 的正圆锥形漏斗，其内盛满了水。下面接一只半径为 5cm 的圆柱形水桶，水从漏斗中流入桶内。问当漏斗水深为 12cm，且它的水面下降速率为 1cm/s 时，桶内水面上升的速率是多少？

解答：设在 t 时刻漏斗中的水深为 y ，圆柱形筒中水深为 h ，于是有

$$\frac{1}{3} \cdot 6^2 \pi \cdot 18 - \frac{1}{3} \pi r^2 y = 5^2 h.$$

由 $\frac{r}{6} = \frac{y}{18}$ ，得 $r = \frac{y}{3}$ ，代入上式得

$$\frac{1}{3} \cdot 6^2 \pi \cdot 18 - \frac{1}{3} \pi \left(\frac{y}{3}\right)^2 y = 5^2 h,$$

即 $\frac{1}{3} \cdot 6^2 \pi \cdot 18 - \frac{1}{3^3} y^3 = 5^2 h.$

两边对 t 求导得

$$-\frac{1}{3^2} y^2 y' = 5^2 h'.$$

当 $y = 12$ 时， $y' = 1$ 代入上式得

$$h_t = \frac{-\frac{1}{3^2} \cdot 12^2 \cdot (-1)}{5^2} = \frac{16}{25} \text{ (cm/s)}$$

所属章节：第三章第四节

难度：二级

102. 半径为 R 的半球形状的雪堆，其体积融化的速率与半球面面积 S 成正比，比例常数 $k > 0$ ，假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状，已知雪堆在开始融化的 3h 内融化了其体积的 $1/8$ ，问雪堆全部融化需多少小时？

参考答案：6h

解答：设在 t 时刻雪堆半径为 $r = r(t)$ ，则体积 $V(t) = \frac{2}{3}\pi r^3$ ，表面积 $S = 2\pi r^2$ ，由条件知

$\frac{dV}{dt} = -kS$ ，即 $\frac{dr}{dt} = -k$ ，所以 $r = R - kt$ ，又 $t = 3$ 时， $V(t) = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{8} \times \frac{2}{3}\pi R^3$ ，故 $k = \frac{R}{6}$ ，于是令 $r = R - kt = 0$ ，解得 $t = 6$ 小时。

所属章节：第三章第四节

难度：三级

103. 设 $y = x^3 - x$ ，计算在 $x = 2$ 处当 Δx 分别等于 1, 0.1, 0.01 时的增量 Δy 及微分 dy 。

解答： $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - \Delta x$ ， $dy = (3x^2 - 1)dx = (3x^2 - 1)\Delta x$ ，

现在 $x = 2$ ，所以当 $\Delta x = 1$ 时， $\Delta y = 18$ ， $dy = 11$ ；当 $\Delta x = 0.1$ 时， $\Delta y = 1.161$ ， $dy = 1.1$ ；

当 $\Delta x = 0.01$ 时， $\Delta y = 0.110601$ ， $dy = 0.11$ 。

所属章节：第三章第五节

难度：一级

104. 将适当的函数填入下列括号内，使等式成立：

(1) $d(\quad) = 2dx$;

(2) $d(\quad) = \cos x dx$;

(3) $d(\quad) = \sin wx dx$;

(4) $d(\quad) = \frac{1}{1+x} dx$;

(5) $d(\quad) = e^{-2x} dx$;

(6) $d(\quad) = \sec^2 3x dx$.

解答：(1) $2x + C$; (2) $\sin x + C$; (3) $-\frac{1}{w} \cos wx + C$;

(4) $\ln|1+x| + C$; (5) $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C$; (6) $\frac{1}{3}\tan 3x + C$ (此处参考解答有误)

所属章节：第三章第五节

难度：一级

105. 求下列函数的微分：

$$(1) \quad y = x \arctan \sqrt{x};$$

$$(2) \quad y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$(3) \quad y = \ln \tan \frac{x}{2};$$

$$(4) \quad y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};$$

$$(5) \quad y = \cos \ln(x^2 + e^{\frac{1}{x}});$$

$$(6) \quad y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|.$$

解答:

$$(1) \quad dy = \left[\arctan \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} \right] dx;$$

$$(2) \quad dy = \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}};$$

$$(3) \quad dy = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \csc x dx;$$

$$(4) \quad dy = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right] dx;$$

$$(5) \quad dy = -\sin \ln(x^2 + e^{\frac{1}{x}}) \cdot \frac{2x^3 + e^{\frac{1}{x}}}{x^2(x^2 + e^{\frac{1}{x}})} dx;$$

$$(6) \quad dy = \frac{1}{x^2 - a^2} dx$$

所属章节: 第三章第五节

难度: 一级

106. 设 u 、 v 为自变量 x 的可微函数, 将 dy 表示为函数 u 、 v 、 du 、 dv 的函数:

$$(1) \quad y = \ln \sqrt{u^2 + v^2};$$

$$(2) \quad y = \arctan \frac{u}{v}.$$

解答: (1) $dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv = \frac{u du + v dv}{u^2 + v^2};$

$$(2) \quad dy = \frac{u dv - v du}{u^2 + v^2}$$

所属章节: 第三章第五节

难度: 一级

107. 试求:

$$(1) \frac{d}{dx^3}(x^3 - 2x^6 - x^9);$$

$$(2) \frac{d \arcsin x}{d \arccos x}.$$

解答: (1) 令 $x^3 = t$, 则 $x^3 - 2x^6 - x^9 = t - 2t^2 - t^3$, 所以

$$\frac{d}{dx^3}(x^3 - 2x^6 - x^9) = \frac{d}{dt}(t - 2t^2 - t^3) = 1 - 4t - 3t^2 = 1 - 4x^3 - 3x^6;$$

$$(2) \text{ 令 } \arccos x = t, \text{ 则 } \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \frac{\pi}{2} - t, \text{ 所以 } \frac{d \arcsin x}{d \arccos x} = \frac{d(\frac{\pi}{2} - t)}{dt} = -1.$$

所属章节: 第三章第五节

难度: 二级

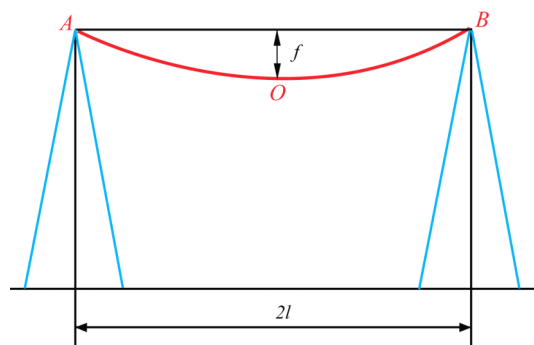
108. 如图所示的电缆 AOB 的长为 L , 跨度为 $2l$, 电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 f , 则电缆长可按下面公式计算:

$$L = 2l(1 + \frac{2f^2}{3l^2})$$

当 f 变化了 Δf 时, 电缆长的变化约为多少?

$$\text{参考答案: } \Delta S \approx \frac{8f}{3l} \Delta f \quad (\text{答案有误})$$

$$\text{解答: } \Delta L \approx dL = 2l(1 + \frac{2f^2}{3l^2})' df = \frac{8f}{3l} \Delta f$$



所属章节: 第三章第五节

难度: 二级

109. 设扇形的圆心角 $\alpha = 60^\circ$, 半径 $R = 100\text{cm}$. 如果 R 不变, α 减少 $30'$, 问扇形面积大约改变了多少? 又如果 α 不变, R 增加 1cm , 问扇形面积大约改变了多少?

参考答案: R 不变, α 减少 $30'$, 面积减少 43.63cm^2 ; α 不变, R 增加 1cm , 面积增加 104.72cm^2

$$\text{解答: (1) 扇形面积 } S = \frac{1}{2} \alpha R^2,$$

$$\Delta S \approx dS = (\frac{1}{2} \alpha R^2)'_{\alpha} d\alpha = \frac{1}{2} R^2 \Delta \alpha.$$

将 $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $R = 100$, $\Delta \alpha = -30' = -\frac{\pi}{360}$ 代入上式得

$$\Delta S \approx \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot (-\frac{\pi}{360}) \approx -43.63 (\text{cm}^2).$$

$$(2) \Delta S \approx dS = (\frac{1}{2} \alpha R^2)'_R dR = \alpha R \Delta R.$$

将 $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $R = 100$, $\Delta R = 1$ 代入上式得

$$\Delta S \approx \frac{\pi}{3} \cdot 100 \cdot 1 \approx 104.72 \text{ (cm}^2\text{)}$$

所属章节：第三章第五节

难度：二级

110. 已知单摆的周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ，其中 $g=980\text{cm/s}^2$ ， l 为摆长。设原摆长为 20cm。为使周期增大 0.05s，摆长约需加长多少？

解答：因为 $\Delta T \approx dT = \frac{\pi}{\sqrt{gl}} \cdot \Delta l$ ，所以

$$\Delta l \approx \frac{0.05\sqrt{gl}}{\pi} \Big|_{l=20} = 2.23 \text{ (cm)}$$

即摆长约需加长 2.23cm

所属章节：第三章第五节

难度：二级

111. 利用微分求下列各式的近似值（计算到小数 3 位）：

(1) $\sin 29^\circ$; (2) $\arctan 1.04$;

(3) $\lg 11$; (4) $\sqrt[3]{996}$.

参考答案：(1) 0.485； (2) 0.805； (3) 1.043； (4) 9.987

解答：(1) 令 $f(x) = \sin x$ ，则 $\sin(x_0 + \Delta x) \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot \Delta x$ ，现在代入

$$x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}, \Delta x = -1^\circ = -\frac{\pi}{180}, \text{ 得 } \sin 29^\circ \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 0.485;$$

$$(2) \arctan 1.04 \approx \arctan 1 + \frac{1}{1+1^2} \times 0.04 \approx 0.7853 + 0.02 \approx 0.805;$$

$$(3) \lg 11 = \lg(10+1) = 1 + \lg 1.1 \approx 1 + \lg 1 + \lg e \times 0.1 \approx 1.043;$$

$$(4) \sqrt[3]{996} = \sqrt[3]{1000-4} = 10 \times (1-0.004)^{\frac{1}{3}} \approx 10\left(1 - \frac{1}{3} \times 0.004\right) \approx 9.987$$

所属章节：第三章第五节

难度：二级

112. 求下列函数的二阶导数，其中 f, φ 二阶可导：

(1) $y = 2x^2 + \ln x$; (2) $y = x \cos x$;

(3) $y = e^{-t} \sin t$; (4) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$;

$$(5) \quad y = \ln(1-x^2);$$

$$(6) \quad y = (1+x^2) \arctan x;$$

$$(7) \quad y = f(x^2);$$

$$(8) \quad y = f(\varphi(x)).$$

解答: (1) $y' = 4x + \frac{1}{x}, y'' = 4 - \frac{1}{x^2};$

$$(2) \quad y' = \cos x - x \sin x, y'' = -2 \sin x - x \cos x;$$

$$(3) \quad y' = -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t, y'' = -2e^{-t} \cos t;$$

$$(4) \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, y'' = -\frac{a^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}};$$

$$(5) \quad y' = -\frac{2x}{1-x^2}, y'' = -\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2};$$

$$(6) \quad y' = 2x \arctan x + 1, y'' = 2 \arctan x + \frac{2x}{1+x^2};$$

$$(7) \quad y' = 2xf'(x^2), y'' = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2);$$

$$(8) \quad y' = \varphi'(x)f'(\varphi(x)), y'' = f''[\varphi(x)]\varphi'^2(x) + f'[\varphi(x)]\varphi''(x)$$

所属章节: 第三章第六节

难度: 二级

113. 验证下列函数满足对应的关系式:

$$(1) \quad y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} \quad (C_1, C_2, \lambda \text{ 为常数}), \quad y'' - \lambda^2 y = 0;$$

$$(2) \quad y = e^x \sin x, y'' - 2y' + 2y = 0;$$

$$(3) \quad y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}, xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0; \quad (\text{题目有误, 后一式应为 } xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0)$$

$$(4) \quad y = \sin(\arcsin x), (1-x^2)y'' - xy' + m^2 y = 0.$$

解答: (1) 因为 $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$, 所以

$$y' = C_1 \lambda e^{\lambda x} - C_2 \lambda e^{-\lambda x}, \quad y'' = C_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + C_2 \lambda^2 e^{-\lambda x},$$

$$\text{从而有 } y'' - \lambda^2 y = 0;$$

(2) 因为 $y = e^x \sin x$, 所以

$$y' = e^x \cos x + e^x \sin x, \quad y'' = 2e^x \cos x$$

$$\text{从而有 } y'' - 2y' + 2y = 0;$$

(3) 因为 $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$, 所以

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}, \quad y'' = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{4x} e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} e^{-\sqrt{x}} + \frac{1}{4x} e^{-\sqrt{x}},$$

$$\text{于是有 } xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0;$$

(4) 因为 $y = \sin(m \arcsin x)$, 所以

$$y' = \cos(m \arcsin x) \cdot \frac{m}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'' = -\frac{m}{1-x^2} \sin(m \arcsin x) + \frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \cos(m \arcsin x)$$

$$\text{于是有 } (1-x^2)y'' - xy' + m^2y = 0.$$

所属章节: 第三章第六节

难度: 一级

114. 求下列函数的 n 阶导数:

(1) $y = \frac{1-x}{1+x};$

(2) $y = x \ln x;$

(3) $y = \sin^2 x;$

(4) $y = \ln \frac{a+bx}{a-bx};$

(5) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2};$

(6) $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}.$

解答: (1) 由于 $y = \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1+x} - 1$, 所以 $y^{(n)} = (-1)^n \frac{2 \cdot n!}{(1+x)^{n+1}};$

(2) 对 $y = x \ln x$, 由于 $y' = \ln x + 1, y'' = \frac{1}{x}$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $y^{(n)} = (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}};$

(3) 对 $y = \sin^2 x$, 由于 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, 所以 $y^{(n)} = -2^{n-1} \cos(2x + \frac{n\pi}{2});$

(4) 由于 $y = \ln \frac{a+bx}{a-bx} = \ln(a+bx) - \ln(a-bx)$, 所以 $y^{(n)} = (n-1)! b^n \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(a+bx)^n} + \frac{1}{(a-bx)^n} \right];$

(5) 由于 $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$, 所以

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right];$$

(6) 由于 $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} = (1-2x)^{-\frac{1}{2}},$

$$y' = -\frac{1}{2}(1-2x)^{-\frac{3}{2}}(-2) = (1-2x)^{-\frac{3}{2}},$$

$$y'' = -\frac{3}{2}(1-2x)^{-\frac{5}{2}}(-2) = 3(1-2x)^{-\frac{5}{2}},$$

$$y''' = 3 \times \left(-\frac{5}{2}\right) \times (1-2x)^{-\frac{7}{2}} \times (-2) = 5!! \cdot (1-2x)^{-\frac{7}{2}},$$

$$\text{一般有 } y^{(n)} = \frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

所属章节：第三章第六节

难度：二级

115. 求下列函数指定阶数的导数：

(1) $y = e^x \cos x$, 求 $y^{(4)}$;

(2) $y = x^2 \ln x$, 求 $y^{(10)}$;

(3) $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$, 求 $y^{(n)}$.

解答：利用函数乘积的高阶导数的莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + uv^{(n)}$$

(1) $y^{(4)} = -4e^x \cos x$;

(2) $y^{(10)} = -2 \times 7! \cdot x^{-8}$;

(3) $y^{(n)} = (-1)^n e^{-x} [x^2 - 2(n-1)x + n^2 - 3n + 2]$

所属章节：第三章第六节

难度：二级

116. 令 $x = \cos t$, 试变换方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0.$$

解答：本题要将方程中的变量 x 消去，利用复合函数求导得 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{-1}{\sin t}$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 t} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{-\cos t}{\sin^3 t},$$

代入方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0$, 即得 $\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$ 。

所属章节：第三章第六节

难度：三级

117. 令 $y = \tan z$ ，试变换方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 + \frac{2(1+y)}{1+y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0. \quad (\text{题目有误, 是否为 } \frac{d^2 y}{dx^2} = 2 + \frac{2(1+y)}{1+y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2?)$$

参考答案: $\frac{d^2 z}{dx^2} - 2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 2\cos^2 z$

解答: 本题要将方程中的变量 y 消去, 利用复合函数求导得 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \sec^2 z \frac{dz}{dx}$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dz}{dx} = \sec^2 z \frac{d^2 z}{dx^2} + 2\sec^2 z \tan z \left(\frac{dz}{dx}\right)^2,$$

代入方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 + \frac{2(1+y)}{1+y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, 即得 $\frac{d^2 z}{dx^2} - 2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 2\cos^2 z$ 。

所属章节：第三章第六节

难度：三级

118. 试导出函数 $y = f(x)$ 的反函数的二阶导数公式:

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}.$$

解答: $\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{-\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}.$

所属章节：第三章第六节

难度：三级

119. 设 $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, 其中函数 $\varphi(x)$ 在点 a 的邻域内有 $n-1$ 阶连续导数, 求 $f^{(n)}(a)$ 。

参考答案: $f^{(n)}(a) = n! \varphi(a)$ (本题能否将条件加强为 $\varphi(x)$ 在点 a 的邻域内有 n 阶导数?)

解答: 对 $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, 利用函数乘积的高阶导数的莱布尼兹公式先求出 $n-1$ 阶导数,

$$f^{(n-1)}(x) = (x-a)^n \varphi^{(n-1)}(x) + (n-1) \cdot n(x-a)^{n-1} \varphi^{(n-2)}(x) + \cdots + n! (x-a) \varphi(x), \quad f^{(n-1)}(a) = 0, \text{ 再用定}$$

义求 $f^{(n)}(a)$, 得 $f^{(n)}(a) = n! \varphi(a)$ 。

所属章节：第三章第六节

难度：三级

120. 设 $y = \arcsin x$, 求 $y^{(n)}|_{x=0} = y^{(n)}(0)$ 。

解答：由 $y = \arcsin x$, 求一阶导数有 $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 即 $y'(0) = 1$,

求二阶导数有 $y'' = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, 即 $y''(0) = 0$, 从而得到等式

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0,$$

对上式两边用莱布尼兹公式求 n 阶导数, 得到

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} = 0$$

令 $x=0$, 有 $y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0)$, 结合 $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, 即得

$$y^{(2n+2)}(0) = y^{(2n)}(0) = \cdots = y''(0) = 0, \quad y^{(2n+1)}(0) = [(2n-1)!!]^2$$

所属章节：第三章第六节

难度：三级

121. 求下列方程所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数:

$$(1) \quad e^{x+y} = xy;$$

$$(2) \quad y = \tan(x+y);$$

$$(3) \quad \arctan \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

解答：(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y(1-x)}{x(y-1)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y}{x^2(y-1)} \left[\frac{(x-1)^2}{(y-1)^2} + 1 \right];$

$$(2) \quad y' = \frac{\sec^2(x+y)}{1 - \sec^2(x+y)} = \frac{1}{\cos^2(x+y) - 1} = \frac{\sin^2(x+y) + \cos^2(x+y)}{-\sin^2(x+y)} = -1 - \frac{1}{y^2},$$

$$y'' = \frac{2}{y^3} y' = \frac{2}{y^3} \left(-1 - \frac{1}{y^2} \right) = -\frac{2(1+y^2)}{y^5} = -\frac{2}{y^3} \csc^2(x+y);$$

(3) 对方程 $\arctan \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ 两边微分或求导, 可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2(x^2 + y^2)}{(x+y)^3} \quad (\text{原答案?})$$

所属章节：第三章第六节

难度：二级

122. 设函数 $y = y(x)$ 是由下列方程所确定的隐函数, 试求 $y'|_{x=0}$ 及 $y''|_{x=0}$ 。

$$(1) \quad y = 1 + xe^{xy}; \quad (2) \quad e^{xy} + \ln \frac{y}{x+1} = 0.$$

解答: (1) 方程 $y = 1 + xe^{xy}$ 两边对 x 求导, 有 $y' = e^{xy} + xe^{xy}(y + xy') = (xy + 1)e^{xy} + x^2 e^{xy} y'$,

再求导一次, 有 $y'' = e^{xy}(y + xy')(xy + 2) + 2xe^{xy}y' + x^2 e^{xy}(y + xy')y' + x^2 e^{xy}y''$,

代入 $x = 0, y = 1$, 即得 $y'|_{x=0} = 1$; $y''|_{x=0} = 2$;

$$(2) \quad \text{方程 } e^{xy} + \ln \frac{y}{x+1} = 0 \text{ 两边对 } x \text{ 求导, 有 } e^{xy}(y + xy') + \frac{1}{y}y' - \frac{1}{x+1} = 0,$$

$$\text{再求导一次, 有 } e^{xy}(y + xy')^2 + e^{xy}(2y' + xy'') + \frac{y''y - (y')^2}{y^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = 0,$$

代入 $x = 0, y = e^{-1}$, 即得 $y'|_{x=0} = e^{-1}(1 - e^{-1})$; $y''|_{x=0} = 2e^{-3} - 4e^{-2}$ 。

所属章节: 第三章第四节

难度: 三级

123. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数:

$$(1) \quad \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad \text{求 } \frac{d^2 y}{dx^2};$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = t - \ln(1+t^2), \\ y = \arctan t, \end{cases} \quad \text{求 } \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ 及 } \frac{d^2 x}{dy^2};$$

$$(3) \quad \begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad \text{求 } \frac{d^2 y}{dx^2};$$

$$(4) \quad \begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t), \end{cases} \quad \text{其中 } f(t) \text{ 二阶可导, 求 } \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$$\text{解答: (1) } \frac{dy}{dx} = \frac{(a \sin^3 t)'}{(a \cos^3 t)'} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{3a \cos^2 t (-\sin t)} = -\tan t,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(-\tan t)'}{(a \cos^3 t)'} = \frac{-\sec^2 t}{-3a \cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3a} \sec^4 t \cdot \csc t$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(\arctan t)'}{[t - \ln(1+t^2)]'} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1 - \frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{1-2t+t^2} = \frac{1}{(t-1)^2},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2(1+t^2)}{(1-t)^5}, \quad \frac{d^2 x}{dy^2} = 2(t-1)(1+t^2)$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \tan t, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\sec^3 t}{at};$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{tf''(t)}{f'(t)} = t, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{f''(t)}.$$

所属章节：第三章第四节

难度：三级

124. 验证： $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 满足关系式 $y''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$.

$$\text{解答: } \frac{dy}{dx} = \frac{(e^t \cos t)'}{(e^t \sin t)'} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2}{(\sin t + \cos t)^2} \cdot \frac{1}{e^t (\sin t + \cos t)},$$

代入即可验证等式 $y''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$ 成立。

所属章节：第三章第四节

难度：二级

第四章 微分中值定理和导数的应用

t1. 验证罗尔定理对函数 $y = e^x \sin x$ 在区间 $[0, 3\pi]$ 上的正确性。

解答: 因为函数 $y = e^x \sin x$ 在区间 $[0, 3\pi]$ 上连续, 在 $(0, 3\pi)$ 内可导, 且 $y(0) = y(3\pi) = 0$, 满足罗尔定理条件, 又由于 $y' = e^x(\sin x + \cos x)$, 当 $\xi = \frac{3}{4}\pi \in (0, 3\pi)$ 时, $y'(\xi) = 0$, 即罗尔定理的结论成立。验证完毕。

所属章节: 第四章第一节

难度: 一级

2. 验证拉格朗日定理对函数 $y = \arctan x$ 在区间 $[0, 1]$ 上的正确性。

解答: 因为函数 $y = \arctan x$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 满足拉格朗日定理条件, 又

由于 $y' = \frac{1}{1+x^2}$, 当 $\xi = \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \in (0, 1)$ 时, $y'(\xi) = \frac{y(1)-y(0)}{1-0} = \frac{\pi}{4}$, 即拉格朗日定理的结论成立。

验证完毕。

所属章节: 第四章第一节

难度: 一级

3. 就下列函数及其区间, 求罗尔定理或拉格朗日定理中 ξ 的值:

(1) $f(x) = \ln \sin x, \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right];$

(2) $f(x) = \arcsin x, [-1, 1];$

(3) $f(x) = ax^2 + bx + c, [x_0, x_0 + h] (h > 0).$ (原题少右上标 2)

解答: (1) 由于 $f(\frac{\pi}{6}) = -\ln 2 = f(\frac{5\pi}{6})$, 令 $f'(\xi) = \cot x|_{x=\xi} = 0$, 有 $\xi = \frac{\pi}{2}$;

(2) 由于 $f(1) = \frac{\pi}{2}, f(-1) = -\frac{\pi}{2}$, 令 $f'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}|_{x=\xi} = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{\pi}{2}$, 得 $\xi = \pm \frac{\sqrt{\pi^2-4}}{\pi}$;

(3) 由于 $f(x_0+h) = a(x_0+h)^2 + b(x_0+h) + c, f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$, 令

$$f'(\xi) = (2ax+b)|_{x=\xi} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 2ax_0 + ah + b, \text{ 得 } \xi = x_0 + \frac{1}{2}h.$$

所属章节: 第四章第一节

难度：一级

4. 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $[a, b]$ 上是否满足拉格朗日定理的条件？

参考答案：当 $0 \notin [a, b]$ 时， $f(x)$ 满足拉格朗日定理的条件，当 $0 \in [a, b]$ 时， $f(x)$ 不满足拉格朗日定理的条件。

解答：由于 $f(b) = \frac{1}{b}, f(a) = \frac{1}{a}, \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = -\frac{1}{ab}$ ，当 $x \neq 0$ 时，有导数 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ，所以当 $0 \notin [a, b]$ 时， $f(x)$ 满足拉格朗日定理的条件，且 $\xi = \sqrt{ab}$ 或 $\xi = -\sqrt{ab}$ ；当 $0 \in [a, b]$ 时， $f(x)$ 由于有不可导点，不满足拉格朗日定理的条件。

所属章节：第四章第一节

难度：二级

5. 验证函数 $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$ 在区间 $[1, 4]$ 上满足柯西定理的条件。

解答：函数 $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$ 在闭区间 $[1, 4]$ 上连续，在开区间 $(1, 4)$ 内可导，在区间 $(1, 4)$ 内

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \neq 0$ ，所以满足柯西定理的条件。

所属章节：第四章第一节

难度：一级

6. 若方程 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x = 0$ 有一正根 $x = x_0$ ，则方程 $a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$ 必有一个小于 x_0 的正根。

解答：令 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x$ ，则由条件知函数 $f(x)$ 在区间 $[0, x_0]$ 上满足罗尔定理条件，所以至少存在正数 $\xi \in (0, x_0)$ 使 $f'(\xi) = 0$ ，即 ξ 为方程 $a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$ 小于 x_0 的正根，得证。

所属章节：第四章第一节

难度：二级

7. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导，且 $f(a) = f(b) = f(c)$ ，其中 c 是 (a, b) 内的某一点，求证方程 $f''(x) = 0$ 在 (a, b) 内必有一实根。

解答：由题设条件知函数 $f(x)$ 在 $[a, c], [c, b]$ 上均满足罗尔定理条件，于是存在 $\xi_1 \in (a, c), \xi_2 \in (c, b)$ ，使 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ ，再在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上应用罗尔定理，有

$\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, 使 $f''(\xi) = 0$, 也即方程 $f''(x) = 0$ 在 (a, b) 内必有一实根。

所属章节: 第四章第一节

难度: 二级

8. 证明方程 $x^3 - 3x + c = 0$ 在开区间 $(0, 1)$ 内不含有两个相异的实根。

解答: 反证法。假设方程 $x^3 - 3x + c = 0$ 在开区间 $(0, 1)$ 内含有两个相异的实根, 记为 x_1, x_2 , 其中 $x_1 < x_2$, 且 $x_1^3 - 3x_1 + c = 0$, $x_2^3 - 3x_2 + c = 0$, 则在区间 $[x_1, x_2]$ 上对函数 $f(x) = x^3 - 3x + c$ 应用罗尔定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (0, 1)$, 使 $f'(\xi) = 3\xi^2 - 3 = 0$, 即有 $\xi = \pm 1$, 与 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (0, 1)$ 矛盾。所以方程 $x^3 - 3x + c = 0$ 在开区间 $(0, 1)$ 内不含有两个相异的实根。

所属章节: 第四章第一节

难度: 二级

9. 设 $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$, 证明方程 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$ 在 0 与 1 之间至少有一实根。

解答: 令 $f(x) = \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2} x^2 + a_n x$, 则 $f'(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$, 由题设条件知函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上满足罗尔定理条件, 所以至少存在实数 $\xi \in (0, 1)$ 使 $f'(\xi) = 0$, 即 ξ 为方程 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$ 在 0 与 1 之间的实根, 得证。

所属章节: 第四章第一节

难度: 二级

10. 不求出函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数, 说明方程 $f'(x) = 0$ 有几个实根, 并指出它们所在的区间。

解答: 因为 $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0$, 所以由罗尔定理知方程 $f'(x) = 0$ 至少有三个实根, 分别在区间 $(1, 2)$ 、 $(2, 3)$ 、 $(3, 4)$ 内, 同时由于函数 $f(x)$ 为四次多项式, 则函数 $f'(x)$ 为三次多项式, 故方程 $f'(x) = 0$ 最多有这三个实根。

所属章节: 第四章第一节

难度: 二级

11. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a)f(b) > 0, f(a)f(\frac{a+b}{2}) > 0$, 试证: 至少

存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = f(\xi)$ 。

【题设条件 $f(a)f(b) > 0, f(a)f(\frac{a+b}{2}) > 0$ 有误, 是否应为 $f(a)f(b) > 0, f(a)f(\frac{a+b}{2}) < 0$? 以下解答按此条件进行】

解答: 对函数 $f(x)$ 在区间 $[a, \frac{a+b}{2}]$ 及 $[\frac{a+b}{2}, b]$ 上分别利用闭区间上连续函数的零点存在定理, 有 $\xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2}), \xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$ 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$, 再对函数 $F(x) = f(x)e^{-x}$ 应用罗尔定理, 则至少存在一点 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, 使 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = f(\xi)$ 。

所属章节: 第四章第一节

难度: 三级

12. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足 $f'(x) = f(x)$, 且 $f(0) = 1$, 证明 $f(x) = e^x$ 。(提示: 令 $\varphi(x) = \frac{f(x)}{e^x}$)

解答: 令 $\varphi(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则函数 $\varphi(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 由于 $f'(x) = f(x)$, 有 $\varphi'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} \equiv 0$, 故 $\varphi(x) \equiv C$ (其中 C 为常数)。又由 $f(0) = 1$ 得 $\varphi(0) = \frac{f(0)}{e^0} = f(0) = 1$, 故 $C = 1$, 即 $\varphi(x) = \frac{f(x)}{e^x} = 1$, 因此 $f(x) = e^x$ 。

所属章节: 第四章第一节

难度: 二级

13. 利用拉格朗日中值定理证明下列不等式:

(1) 若 $0 < a < b$, 当 $n > 1$ 时, $na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$;

(2) 若 $x > 0, \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$;

(3) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$;

(4) $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$ 。

解答: (1) 对函数 $f(x) = x^n$, 当 $n > 1$ 时, 由于它在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 应用拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $b^n - a^n = f'(\xi)(b-a) = n\xi^{n-1}(b-a)$, 由于 $a < \xi < b$, 故 $na^{n-1}(b-a) < n\xi^{n-1}(b-a) < nb^{n-1}(b-a)$, 即 $na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$;

(2) 对函数 $f(x) = \ln(1+x)$, 当 $x > 0$ 时, 由于它在 $[0, x]$ 上连续, 在 $(0, x)$ 内可导, 应用拉格

朗日中值定理, 存在 $\xi \in (0, x)$, 使 $f(x) - f(0) = \ln(1+x) - \ln 1 = f'(\xi)x = \frac{x}{1+\xi}$, 由于 $0 < \xi < x$,

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x, \text{ 故有 } \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x;$$

(3) 对函数 $f(x) = \sin x$, 当 $y < x$ 时, 由于它在 $[y, x]$ 上连续, 在 (y, x) 内可导, 应用拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (y, x)$, 使 $|\sin x - \sin y| = |f'(\xi)(x-y)| = |\cos \xi \cdot (x-y)| \leq |x-y|$; 当 $x < y$ 时类似可证, 当 $x = y$ 时, 结论显然。证毕。

(4) 对函数 $f(x) = \arctan x$ 在区间 $[a, b]$ 或 $[b, a]$ 上应用拉格朗日中值定理,

$$|\arctan a - \arctan b| = |f'(\xi)(a-b)| = \left| \frac{a-b}{1+\xi^2} \right| \leq |a-b|, \text{ 当 } a=b \text{ 时, 结论显然。证毕。}$$

所属章节: 第四章第一节

难度: 二级

14. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f'(x), g'(x)$ 在 (a, b) 内存在, 证明:

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}, \text{ 其中 } \xi \text{ 在 } a \text{ 和 } b \text{ 之间。}$$

解答: 对函数 $F(x) = f(a)g(x) - f(x)g(a)$, 由于它在区间 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 应用拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a)$, 即

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}, \text{ 证毕。}$$

所属章节: 第四章第一节

难度: 二级

15. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续可导, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 证明: 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f'(\xi)(b-a)$ 。

解答: 令 $F(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) & x = a \\ f(x) & a < x < b \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) & x = b \end{cases}$, 则它在区间 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 应用拉格

朗日中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a)$, 即

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f'(\xi)(b - a)。$$

所属章节: 第四章第一节

难度: 二级

16. 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f''(x) > 0$, 证明: 对 (a, b) 内固定的 x_0 及该区间内异于 x_0 的任一点 x , 必存在唯一的点 ξ , 使得 $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$, 其中 ξ 在 x 和 x_0 之间。

解答: 对函数 $f(x)$ 在 $[x_0, x]$ 或 $[x, x_0]$ 上应用拉格朗日中值定理, 必存在 ξ 在 x 和 x_0 之间, 使得

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0), \text{ 其中 } \xi \text{ 在 } x \text{ 和 } x_0 \text{ 之间};$$

如果这样的点 ξ 不唯一, 即至少有两点, 再用罗尔定理可知存在 $f''(x) = 0$ 的根, 与条件矛盾。证毕。

所属章节: 第四章第一节

难度: 二级

17. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$ 及存在 c , 使 $f(c) > 0 (a < c < b)$, 证明: 在 (a, b) 内必存在 ξ , 使 $f''(\xi) < 0$ 。

解答: 由题设条件知函数 $f(x)$ 在 $[a, c], [c, b]$ 上均满足拉格朗日中值定理条件, 于是存在

$$\xi_1 \in (a, c), \xi_2 \in (c, b), \text{ 使 } f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} > 0, f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} < 0。$$

再在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上应用拉格朗日中值定理, 有 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, 使

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0, \text{ 证毕。}$$

所属章节: 第四章第一节

难度: 三级

18. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 但无界, 则其导函数 $f'(x)$ 在该区间内也无界, 反之不然。并举出例子。

解答: 反证。设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 但无界, 而导函数 $f'(x)$ 在该区间内有界, 则存在

$$M > 0, \text{ 当 } x \in (a, b) \text{ 时, 有 } |f'(x)| \leq M。$$

取 $x_0 \in (a, b)$, 则对任意 $x \in (a, b)$,

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| = |f'(\xi)(x - x_0)| + |f(x_0)| \leq M|b - a| + |f(x_0)|$$

上式说明函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界, 矛盾, 即导函数 $f'(x)$ 在 (a, b) 内也无界。

反之不然。举例如下: 对函数 $f(x) = \sqrt{x}$, 导函数 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0, 1)$ 内无界, 但 $f(x) = \sqrt{x}$ 在

(a, b) 内可导, 有界。

所属章节: 第四章第一节

难度: 三级

19. 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 在 $(0, a)$ 内可导, 且 $f(a) = 0$, 证明至少存在一点 $\xi \in (0, a)$, 使 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 。

【 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 是否应为 $f(\xi) + \xi f''(\xi) = 0$? 以下按此证明】

解答: 作辅助函数 $F(x) = xf(x)$, 则它在 $[0, a]$ 上连续, 在 $(0, a)$ 内可导, 且 $F(0) = 0 = F(a)$,

应用罗尔定理, 至少存在一点 $\xi \in (0, a)$, 使 $F'(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 。

所属章节: 第四章第一节

难度: 二级

20. 设当 $x \geq x_0$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 且 $|f'(x)| \leq \varphi'(x)$, 证明: 当 $x \geq x_0$ 时, $|f(x) - f(x_0)| \leq \varphi(x) - \varphi(x_0)$ 。

解答: 当 $x = x_0$ 时结论显然成立。

当 $x > x_0$ 时, 对函数 $f(x)$, $\varphi(x)$ 在区间 $[x_0, x]$ 上应用柯西中值定理, 必存在 ξ 在 x 和 x_0 之

间, 使 $\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$,

又由条件 $|f'(x)| \leq \varphi'(x)$, 可得 $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \right| \leq 1$, 再由条件 $\varphi'(x) > 0$, 有

$\varphi(x) - \varphi(x_0) > 0$, 即得 $|f(x) - f(x_0)| \leq \varphi(x) - \varphi(x_0)$ 。

所属章节: 第四章第一节

难度: 三级

21. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内具有 n 阶导数, 且 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ 。试用柯西

定理证明: $\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}$ ($0 < \theta < 1$)。

解答：对函数 $f(x)$ ， $\varphi(x) = x^n$ 在区间 $[0, x]$ 或 $[x, 0]$ 上应用柯西中值定理，必存在 ξ_1 在 0 和 x

之间，使 $\frac{f(x) - f(0)}{\varphi(x) - \varphi(0)} = \frac{f'(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)}$ ，即 $\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}$ ，再对函数 $f'(x)$ ， $\varphi'(x) = nx^{n-1}$ 在区间 $[0, \xi_1]$ 或

$[\xi_1, 0]$ 上应用柯西中值定理，必存在 ξ_2 在 0 和 ξ_1 之间，使 $\frac{f'(\xi_1) - f'(0)}{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(0)} = \frac{f''(\xi_2)}{\varphi''(\xi_2)}$ ，即

$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}} = \frac{f'(\xi_1) - f'(0)}{n\xi_1^{n-1} - 0} = \frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}}$ ，如此进行 n 次，由于 $(x^n)^{(n)} = n!$ ，就有

$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(0)}{n!\xi_{n-1} - 0} = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}$ ，其中 ξ_n 在 0 和 ξ_{n-1} 之间，自然在 0 和 x 之间，于是可以

写成如下形式 $\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}$ ($0 < \theta < 1$)。

所属章节：第四章第一节

难度：三级

求下列极限（22 ~ 49 题）

$$22. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n};$$

$$\text{解答：} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{m-n}$$

所属章节：第四章第二节

难度：一级

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x};$$

$$\text{解答：} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

所属章节：第四章第二节

难度：一级

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3};$$

$$\text{解答: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}$$

所属章节：第四章第二节

难度：一级

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x};$$

$$\text{解答: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x} = 2$$

所属章节：第四章第二节

难度：一级

$$26. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2};$$

$$\text{解答: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{-4(\pi - 2x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\csc^2 x}{8} = -\frac{1}{8}$$

所属章节：第四章第二节

难度：一级

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + x^3 \sin \frac{\pi}{3}}{x}$$

$$\text{解答: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + x^3 \sin \frac{\pi}{3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3x^2 \sin \frac{\pi}{3}) = 1$$

所属章节：第四章第二节

难度：一级

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{\sec x - \cos x};$$

$$\begin{aligned} \text{解答: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{\sec x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x [\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)]}{1 - \cos^2 x} \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x^2} \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1+2x}{1+x+x^2} + \frac{-1+2x}{1-x+x^2}}{2x} = 1$$

所属章节：第四章第二节

难度：二级

29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{1}{x})^x - e}{x}$; 【此题有误，应为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ ，以下按此计算】

解答： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x^2} \ln(1+x) \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x^2} \ln(1+x) \right]$$

$$= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2} = -\frac{e}{2}$$

所属章节：第四章第二节

难度：二级

30. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$;

解答： $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = 1$

所属章节：第四章第二节

难度：一级

31. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan 7x}{\ln \tan 2x}$;

解答： $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan 7x}{\ln \tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot 7x \cdot \sec^2 7x \cdot 7}{\cot 2x \cdot \sec^2 2x \cdot 2} = 1$

所属章节：第四章第二节

难度：一级

32. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln x}{x \ln x}$;

解答: 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x^2 + \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{2x + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x^2}} = 0$, 且函数非负,

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln x}{x \ln x} = +\infty$ 。也可直接用洛比达法则计算极限。

所属章节: 第四章第二节

难度: 一级

$$33. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}};$$

解答: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$

所属章节: 第四章第二节

难度: 一级

$$34. \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1);$$

解答: $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1$

所属章节: 第四章第二节

难度: 一级

$$35. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n e^{-x} \ln^2 x (n > 0);$$

解答: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n e^{-x} \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{x^{-n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{-n x^{-n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{n^2 x^{-n}} = 0$

所属章节: 第四章第二节

难度: 二级

$$36. \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1-x);$$

解答: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1-x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{-1}{x \ln^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln^2 x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{-1} = 0$

所属章节：第四章第二节

难度：二级

$$37. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$$

$$\text{解答: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

所属章节：第四章第二节

难度：二级

$$38. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{1-x} - \frac{1}{\ln x} \right); \text{【此题有误, 应为 } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{1-x} + \frac{1}{\ln x} \right), \text{ 以下按此计算】}$$

$$\begin{aligned} \text{解答: } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{1-x} + \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x + 1 - x}{(1-x) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{-\ln x + (1-x) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{-x \ln x + 1 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1}{-\ln x - 2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

所属章节：第四章第二节

难度：二级

$$39. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - e^{-x} - 2x};$$

$$\text{解答: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - e^{-x} - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x + e^{-x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2}$$

所属章节：第四章第二节

难度：一级

$$40. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right);$$

$$\begin{aligned} \text{解答: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x - x \cos x)(\sin x + x \cos x)}{x^3 \cdot x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x + x \cos x}{x} = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

所属章节：第四章第二节

难度：二级

$$41. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x;$$

解答：因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln(x-1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = e^2$

所属章节：第四章第二节

难度：一级

42. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$;

解答：因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{\frac{2x}{1+x^2}} = -\frac{1}{2}$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = e^{-\frac{1}{2}}$

所属章节：第四章第二节

难度：二级

43. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$;

解答：因为 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan 2x \cdot \ln \tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \tan x}{\cot 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cot x \cdot \sec^2 x}{-2 \csc^2 2x} = -1$

所以 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

所属章节：第四章第二节

难度：二级

44. $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi^2}}$;

解答：因为 $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{\varphi^2} \cdot \ln \frac{\sin \varphi}{\varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\ln \sin \varphi - \ln \varphi}{\varphi^2} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \frac{1}{\varphi}}{2\varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi \cos \varphi - \sin \varphi}{2\varphi^3}$

$$= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{-\varphi \sin \varphi}{6\varphi^2} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{所以 } \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right)^{\frac{1}{\varphi^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

所属章节：第四章第二节

难度：二级

$$45. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x};$$

$$\text{解答：因为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = e^0 = 1$$

所属章节：第四章第二节

难度：二级

$$46. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}};$$

$$\text{解答：因为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{xe^x} = 1$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} = e^1 = e$$

所属章节：第四章第二节

难度：二级

$$47. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\sin x};$$

$$\text{解答：因为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln \cot x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cot x}{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cot x} \cdot (-\csc^2 x)}{-\csc x \cot x} = 0$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\sin x} = e^0 = 1$$

所属章节：第四章第二节

难度：二级

$$48. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \cos x};$$

解答: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$

所属章节: 第四章第二节

难度: 一级

49. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{2x-1};$

解答: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x-1} \cdot \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

所属章节: 第四章第二节

难度: 二级

50. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ e^{\frac{1}{2}}, & x \leq 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性。

【此题有误, 应为 $f(x) = \begin{cases} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ e^{\frac{1}{2}}, & x \leq 0 \end{cases}$, 以下按此计算】

解答: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}},$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}}$$

所以该函数在点 $x=0$ 处连续。

所属章节: 第四章第二节

难度: 三级

51. 设 $f(x)$ 在点 a 的邻域内二阶可导, 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$

解答: 对所求极限先用洛比达法则, 再用点 a 处的二阶导数定义, 即得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a-h)}{2h} = f''(a)$$

注意：由于二阶导数未必连续，不能用接连两次使用洛比达法则。

所属章节：第四章第二节

难度：三级

52. 若 $f(0)=0$, $f'(x)$ 在点 $x=0$ 的邻域内连续, 且 $f'(0) \neq 0$, 试证: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f'(x)} = 1$ 。

解答：因为对函数 $f(x)$, $f(0)=0$, $f'(x)$ 在点 $x=0$ 的邻域内连续, 且 $f'(0) \neq 0$, 所以

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) = f'(0)x + o(x)$$

而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} o(x) \ln x = 0$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \ln x = 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f'(x)} = \exp(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \ln x) = \exp(0) = 1$$

所属章节：第四章第二节

难度：三级

53. 将多项式 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ 按 $(x+2)$ 的乘幂展开。

解答：对函数 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$, 由于

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3, f''(x) = 6x - 4, f'''(x) = 6, f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = \dots = 0$$

所以 $f(-2) = -26, f'(-2) = 23, f''(-2) = -16, f'''(-2) = 6, f^{(4)}(-2) = f^{(5)}(-2) = \dots = 0$,

于是所求展开式为

$$f(x) = -26 + 23(x+2) - 8(x+2)^2 + (x+2)^3。$$

所属章节：第四章第三节

难度：一级

54. 求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在点 $x_0 = 4$ 处带有拉格朗日余项的 3 阶泰勒公式。

解答：对函数 $f(x) = \sqrt{x}$, 有 $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}, f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}},$

故有 $f(4) = 2, f'(4) = \frac{1}{4}, f''(4) = -\frac{1}{32}, f'''(4) = \frac{3}{256}, f^{(4)}(4 + \theta(x-4)) = -\frac{15}{16(4 + \theta(x-4))^{\frac{7}{2}}},$

所以所求 3 阶泰勒公式为

$$\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{15(x-4)^4}{4! \cdot 16[4 + \theta(x-4)]^{\frac{7}{2}}}, (0 < \theta < 1).$$

所属章节：第四章第三节

难度：二级

55. 求函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在点 $x_0 = -1$ 处带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式。

解答：对函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ ，有 $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$ ，从而有

$$f(-1) = -1, f'(-1) = -1, f''(-1) = 2, f^{(n)}(-1) = -n!, f^{(n+1)}(-1 + \theta(x+1)) = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(-1 + \theta(x+1))^{n+2}}$$

于是所求展式为 $\frac{1}{x} = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - \cdots - (x+1)^n + (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^{n+1}}{[-1 + \theta(x+1)]^{n+2}}, (0 < \theta < 1)$

所属章节：第四章第三节

难度：二级

56. 求函数 $f(x) = x^2 \ln x$ 在点 $x_0 = 1$ 处带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式。

解答：对函数 $f(x) = x^2 \ln x$ ，有

$$f'(x) = 2x \ln x + x, f''(x) = 2 \ln x + 3, f'''(x) = \frac{2}{x}, f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-3} (k-3)!}{x^{k-2}}$$

$$f(1) = 0, f'(1) = 1, f''(1) = 3, f'''(1) = 2, f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot (n-3)!$$

$$f^{(n+1)}(1 + \theta(x-1)) = (-1)^n \frac{2(n-2)!}{(1 + \theta(x-1))^{n-1}}$$

所以所求展式为

$$\begin{aligned} x^2 \ln x &= (x-1) + \frac{3}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot (n-3)!}{n!}(x-1)^n \\ &\quad + \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot (n-2)!}{(n+1)! [1 + \theta(x-1)]^{n-1}} (x-1)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

所属章节：第四章第三节

难度：二级

57. 求函数 $f(x) = \arctan x$ 带有拉格朗日余项的 n 阶麦克劳林公式。

【此题中“ n 阶麦克劳林公式”是否为“2阶麦克劳林公式”？，以下按此计算】

解答：对函数 $f(x) = \arctan x$ ，有

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, f'''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3},$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(\theta x) = \frac{2(3(\theta x)^2-1)}{(1+(\theta x)^2)^3}$$

$$\text{所以 } \arctan x = x + \frac{1}{3} \cdot \frac{3(\theta x)^2-1}{[1+(\theta x)^2]^3} x^3 \quad (0 < \theta < 1)。$$

所属章节：第四章第三节

难度：一级

58. 求函数 $f(x) = xe^x$ 带有皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式。

解答：对函数 $f(x) = xe^x$ ，有

$$f'(x) = xe^x + e^x, f''(x) = xe^x + 2e^x, f'''(x) = xe^x + 3e^x, f^{(n)}(x) = xe^x + ne^x$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 2, f'''(0) = 3, f^{(n)}(0) = n$$

所以所求带有皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式为

$$xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!} + o(x^n)。$$

所属章节：第四章第三节

难度：一级

59. 验证当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ ，依近似公式 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 近似值时，所产生的误差小于 0.01，

应用这个结果求具有三位有效数字的 $\sqrt{e}$ 的近似值。

解答：对近似公式 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ ，舍去的余项为

$$R_3(x) = \frac{e^\xi}{24} x^4, \text{ 故当 } 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ 时, 有 } |R_3(x)| = \left| \frac{e^\xi}{24} x^4 \right| \leq \frac{e^{\frac{1}{2}}}{24} \left(\frac{1}{2}\right)^4 < 0.01, \text{ 所产生的误差小于 } 0.01。$$

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \approx 1.645。$$

所属章节：第四章第三节

难度：一级

60. 求下列各数的值（精确到 0,001）：

(1) $\sqrt[3]{30}$;

(2) $\ln 1.2$.

参考答案：(1) $\sqrt[3]{30} \approx 3.107$ 【此题参考答案有误】；

(2) $\ln 1.2 \approx 0.183$

解答：(1) $\sqrt[3]{30} = (27+3)^{\frac{1}{3}} = 3 \times (1+\frac{1}{9})^{\frac{1}{3}} \approx 3 \times (1+\frac{1}{3} \times \frac{1}{9} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{9^2}) \approx 3.107$;

$$(2) \ln 1.2 \approx \ln 1 + \frac{1}{1} \times 0.2 - \frac{1}{2} \times 0.2^2 + \frac{1}{3} \times 0.2^3 \approx 0.183.$$

所属章节：第四章第三节

难度：一级

61. 应用泰勒公式求下列极限：

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) \right]$.

解答：(1) 利用 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, 有

$$e^x \sin x - x(1+x) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \frac{1}{3};$$

(2) 利用 $e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}x^4 + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$, 有

$$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = -\frac{1}{12};$$

(3) 令 $x = \frac{1}{t}$, 利用 $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$, 有

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) = \frac{1}{2} + \frac{o(t^2)}{t^2}$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right] = \frac{1}{2}。$$

所属章节：第四章第三节

难度：二级

62. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f''(x) \geq 0$ 。证明对于 (a, b) 内任意两点 x_1, x_2 及 $0 \leq t \leq 1$,

有 $f[(1-t)x_1 + tx_2] \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ 。

解答: 不妨设 $x_1 < x_2$, 记 $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$, 分别在 $[x_1, x_0], [x_0, x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理, 有

$$f(x_0) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x_0 - x_1), \quad \xi_1 \in (x_1, x_0)$$

$$f(x_2) - f(x_0) = f'(\xi_2)(x_2 - x_0), \quad \xi_2 \in (x_0, x_2)$$

上面第二式乘以 t 减去第一式乘以 $1-t$, 注意到由于 $f''(x) \geq 0$, $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, 可得

$$tf(x_2) - tf(x_0) - (1-t)f(x_0) + (1-t)f(x_1) = [f'(\xi_2) - f'(\xi_1)]t(1-t)(x_2 - x_0) \geq 0$$

$$\text{即 } f[(1-t)x_1 + tx_2] \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)。$$

所属章节：第四章第三节

难度：三级

63. 判定函数 $f(x) = \arctan x - x$ 的单调性。

解答: 对于函数 $f(x) = \arctan x - x$, 由于

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} \leq 0$$

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调减的。

所属章节：第四章第四节

难度：一级

64. 证明函数 $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ 在区间 $(0, 1)$ 内严格单调增, 而在区间 $(1, 2)$ 严格单调减。

解答: 对于函数 $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$, 定义域 $[0, 2]$, 由于

$$f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

所以当 $x \in (0,1)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (1,2)$ 时, $f'(x) < 0$;

于是函数 $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ 在区间 $(0,1)$ 内严格单调增, 而在区间 $(1,2)$ 严格单调减。

所属章节: 第四章第四节

难度: 一级

65. 确定下列函数的单调区间:

$$(1) y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14;$$

$$(2) y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x};$$

$$(3) y = \ln(x + \sqrt{1+x^2});$$

$$(4) y = (x-1)(x+1)^3;$$

$$(5) y = 2x^2 - \ln x;$$

$$(6) y = x - 2\sin x (0 \leq x \leq 2\pi);$$

$$(7) y = x^n e^{-x} (n > 0, x \geq 0);$$

$$(8) y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2} (a > 0).$$

解答: (1) 对函数 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$, 由于其定义域为 $x \in \mathbb{R}$, 导函数 $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$, 易知当 $x < -1$ 或 $x > 3$ 时, $y' > 0$; 当 $-1 < x < 3$ 时, $y' < 0$; 所以单调增区间: $(-\infty, -1), (3, +\infty)$, 单调减区间: $(-1, 3)$;

$$(2) \text{ 对函数 } y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}, \text{ 由于其定义域为 } x \neq 0, \text{ 导函数 } y' = -\frac{60(2x-1)(x-1)}{(4x^3 - 9x^2 + 6x)^2},$$

易知当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $y' > 0$; 当 $x < 0$ 或 $0 < x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 1$ 时, $y' < 0$; 所以单调增区间: $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$,

单调减区间: $(-\infty, 0), \left(0, \frac{1}{2}\right), (1, +\infty)$;

(3) 对函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 由于其定义域为 $x \in \mathbb{R}$, 导函数 $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$, 所以单调增区间: $(-\infty, +\infty)$;

(4) 对函数 $y = (x-1)(x+1)^3$, 由于其定义域为 $x \in \mathbb{R}$, 导函数 $y' = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)^2$, 易知当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $y' > 0$; 当 $x < \frac{1}{2}$ 时, $y' < 0$; 所以单调减区间: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, 单调增区间: $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$;

(5) 对函数 $y=2x^2-\ln x$, 由于其定义域为 $x>0$, 导函数 $y'=4x-\frac{1}{x}=\frac{(2x+1)(2x-1)}{x}$,

易知当 $x>\frac{1}{2}$ 时, $y'>0$; 当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时, $y'<0$; 所以单调减区间: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, 单调增区间: $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$;

(6) 对函数 $y=x-2\sin x(0\leq x\leq 2\pi)$, 由于其定义域为 $0\leq x\leq 2\pi$, 导函数

$y'=1-2\cos x$, 易知当 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$ 时, $y'>0$; 当 $0<x<\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}<x<2\pi$ 时, $y'<0$; 所以单

调减区间: $\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$, 单调增区间: $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$;

(7) 对函数 $y=x^n e^{-x}(n>0, x\geq 0)$, 由于其定义域为 $x\geq 0$, 导函数 $y'=-x^{n-1}e^{-x}(x-n)$,

易知当 $0<x<n$ 时, $y'>0$; 当 $x>n$ 时, $y'<0$; 所以单调增区间: $(0, n)$, 单调减区间: $(n, +\infty)$;

(8) 对函数 $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}(a>0)$, 由于其定义域为 $x\in R$, 导函数

$y'=2y\frac{x-\frac{2}{3}a}{(2x-a)(x-a)}$, 易知当 $x<\frac{2}{3}a$ 或 $x>a$ 时, $y'>0$; 当 $\frac{2}{3}a<x<a$ 时, $y'<0$; 所以单调

增区间: $\left(-\infty, \frac{2a}{3}\right), (a, +\infty)$, 单调减区间: $\left(\frac{2a}{3}, a\right)$ 。

所属章节: 第四章第四节

难度: 一级

66. 证明下列不等式:

(1) 当 $x\neq 0$ 时, $e^x>1+x$;

(2) 当 $x>1$ 时, $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$;

(3) 当 $x>0$ 时, $x>\ln(1+x)$;

(4) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x+\tan x>2x$;

(5) 当 $x\geq 0$ 时, $1+x\geq \frac{\arctan x}{1+x}$.

解答: (1) 令 $f(x)=e^x-1-x$, 则 $f'(x)=e^x-1$,

当 $x>0$ 时 $f'(x)>0$, 函数 $f(x)$ 严格单调增,

所以当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$,

当 $x < 0$ 时 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 严格单调减,

故当 $x < 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$,

仅当 $x = 0$ 时 $f(x) = 0$,

于是当 $x \neq 0$ 时, $f(x) > 0$, 即 $e^x > 1 + x$;

(2) 令 $f(x) = 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^{\frac{3}{2}} - 1}{x^2}$,

当 $x > 1$ 时 $f'(x) > 0$, 故函数 $f(x)$ 严格单调增,

而当 $x = 1$ 时 $f(x) = 0$,

所以当 $x > 1$ 时, $f(x) > f(1) = 0$, 即 $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$;

(3) 令 $f(x) = x - \ln(1+x)$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$,

当 $x > 0$ 时 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 严格单调增,

所以当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 即 $x > \ln(1+x)$;

(4) 令 $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则

$$f'(x) = \cos x + \sec^2 x - 2 \geq \cos x + \frac{1}{\cos x} - 2 > 0,$$

所以当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 严格单调增,

故 $f(x) > f(0) = 0$, 即 $\sin x + \tan x > 2x$;

(5) 令 $f(x) = (1+x)^2 - \arctan x$, $x \geq 0$, 则

$$f'(x) = 2(1+x) - \frac{1}{1+x^2} > 0,$$

于是函数 $f(x)$ 严格单调增,

所以当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq f(0) = 0$, 即 $1+x \geq \frac{\arctan x}{1+x}$ 。

所属章节: 第四章第四节

难度: 二级

67. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x}, & x > 0, x \neq 1, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x = 1, \end{cases}$ 试证: $f(x)$ 在定义域内连续, 在 $(0,1)$ 内单调减,

$$f'(1) = -\frac{1}{2}.$$

解答: 对函数 $f(x)$, 定义域 $[0, +\infty)$, 由于 $f(x)$ 在定义域内 $x \neq 0, x \neq 1$ 处显然连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 = f(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = -1 = f(1),$$

所以 $f(x)$ 在定义域内处处连续。

又当 $0 < x < 1$ 时, 由于 $f'(x) = \frac{\ln x + 1 - x}{(1-x)^2} < 0$ (可先利用函数单调性证明当 $0 < x < 1$ 时,

$g(x) = \ln x + 1 - x < 0$), 所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调减。

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+\Delta x) \ln(1+\Delta x)}{1-(1+\Delta x)} + 1}{\Delta x} = -\frac{1}{2}.$$

所属章节: 第四章第四节

难度: 二级

68. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty]$ 上连续, 且有 $f(0) = 0$ 及 $f'(x)$ 单调增, 证明: 在 $(0, +\infty)$ 上函数 $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$ 是单调增的。

【注意: 题中区间 $[0, +\infty]$ 应为 $[0, +\infty)$ 】

解答: 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 对函数 $f(x)$ 在 $[0, x]$ 上应用拉格朗日中值定理, 有 $f(x) - f(0) = f'(\xi)x$,

其中 $0 < \xi < x$, 由于 $f'(x)$ 单调增, 又有 $f'(x) > f'(\xi)$, 故

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x)x - [f(x) - f(0)]}{x^2} = \frac{f'(x)x - f'(\xi)x}{x^2} = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x} > 0$$

所以在 $(0, +\infty)$ 上函数 $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$ 是单调增的。

所属章节: 第四章第四节

难度: 三级

69. 求下列函数的极值:

(1) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$;

(2) $y = x^2(a-x)^2 (a > 0)$;

(3) $y = \frac{\ln^2 x}{x}$;

(4) $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;

(5) $y = \sqrt[3]{(x^2 - a^2)^2} (a > 0)$;

(6) $y = e^x \sin x$.

解答: (1) 对函数 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$, 处处可导且 $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$, 驻点为 $x = -1, x = 3$, 当 $x < -1$ 或 $x > 3$ 时, $y' > 0$; 当 $-1 < x < 3$ 时, $y' < 0$, 所以极大值 $y(-1) = 17$, 极小值 $y(3) = -47$;

(2) 对函数 $y = x^2(a-x)^2 (a > 0)$, 处处可导且 $y' = 2x(a-x)^2 - 2x^2(a-x) = 2x(a-x)(a-2x)$, 驻点为 $x = 0, x = a, x = \frac{a}{2}$, 当 $0 < x < \frac{a}{2}$ 或 $x > a$ 时, $y' > 0$; 当 $x < 0$ 或 $\frac{a}{2} < x < a$ 时, $y' < 0$, 所以极大值 $y(\frac{a}{2}) = \frac{a^4}{16}$, 极小值 $y(0) = 0, y(a) = 0$;

(3) 对函数 $y = \frac{\ln^2 x}{x}$, 当 $x > 0$ 时有意义且 $y' = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$, 驻点为 $x = 1, x = e^2$, 当 $1 < x < e^2$ 时, $y' > 0$; 当 $x < 1$ 或 $x > e^2$ 时, $y' < 0$, 所以极大值 $y(e^2) = \frac{4}{e^2}$, 极小值 $y(1) = 0$;

(4) 对函数 $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$, 处处可导且 $y' = \frac{-5(x-\frac{12}{5})}{(4+5x^2)^{3/2}}$, 驻点为 $x = \frac{12}{5}$, 当 $x < \frac{12}{5}$ 时, $y' > 0$; 当 $x > \frac{12}{5}$ 时, $y' < 0$, 所以极大值 $y(\frac{12}{5}) = \frac{1}{10}\sqrt{205}$;

(5) 对函数 $y = \sqrt[3]{(x^2 - a^2)^2} (a > 0)$, 处处有定义, 除 $x = \pm a$ 外可导且 $y' = \frac{\frac{4}{3}x}{(x^2 - a^2)^{1/3}}$,

驻点为 $x = 0$, 不可导点 $x = \pm a$, 当或 $-a < x < 0$ 或 $x > a$ 时, $y' > 0$; 当 $x < -a$ 或 $0 < x < a$ 时, $y' < 0$, 所以极大值 $y(0) = a^{\frac{4}{3}}$, 极小值 $y(\pm a) = 0$;

(6) 对函数 $y = e^x \sin x$, 处处可导且 $y' = e^x(\sin x + \cos x)$, 驻点为 $x = 2k\pi + \frac{3}{4}\pi, x = 2k\pi + \frac{7}{4}\pi$, 当 $2k\pi < x < 2k\pi + \frac{3}{4}\pi$ 或 $2k\pi + \frac{7}{4}\pi < x < 2k\pi + 2\pi$ 时, $y' > 0$; 当

$2k\pi + \frac{3}{4}\pi < x < 2k\pi + \frac{7}{4}\pi$ 时, $y' < 0$, 所以极大值 $y(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}$, 极小值

$$y(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}.$$

所属章节: 第四章第四节

难度: (1) (2) 一级, (3) - (6) 二级

70. 利用二阶导数求下列函数的极值:

$$(1) y = \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2);$$

$$(2) y = \frac{10}{1+\sin^2 x};$$

$$(3) y = xe^{-x};$$

$$(4) y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x;$$

$$(5) y = \frac{2x}{1+x^2}.$$

解答: (1) 对函数 $y = \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$, 它处处可导, 且

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1-x}{1+x^2},$$

驻点 $x=1$, 此时,

$$y''|_{x=1} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(1+x^2)^2}|_{x=1} = -\frac{1}{2} < 0,$$

所以 $x=1$ 为极大值点, 极大值 $y(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$;

(2) 对函数 $y = \frac{10}{1+\sin^2 x}$, 它处处可导, 且

$$y' = -\frac{10 \sin 2x}{(1+\sin^2 x)^2},$$

驻点 $x = k\pi, x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, 此时, 由于

$$y'' = -20 \times \frac{\cos 2x + \cos 2x \sin^2 x - \sin^2 2x}{(1+\sin^2 x)^2},$$

所以 $y''|_{x=k\pi} = -20 < 0$, $y''|_{x=k\pi+\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{2} > 0$, 于是 $x = k\pi$ 为极大值点, 极大值 $y(k\pi) = 10$,

$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 为极小值点, 极小值 $y(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 5$;

(3) 对函数 $y = xe^{-x}$, 它处处可导, 且

$$y' = e^{-x}(1-x),$$

驻点 $x=1$ ，此时，

$$y''|_{x=1} = e^{-x}(x-2)|_{x=1} = -\frac{1}{e} < 0,$$

所以 $x=1$ 为极大值点，极大值 $y(1) = \frac{1}{e}$ ；

(4) 对函数 $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$ ，它处处可导，且

$$y' = -\sin x - \sin 2x = -2 \sin x (\cos x + \frac{1}{2}),$$

驻点 $x = k\pi, x = 2k\pi + \frac{2}{3}\pi, x = 2k\pi + \frac{4}{3}\pi$ ，此时，

$$y'' = -\cos x - 2 \cos 2x, \quad y''|_{x=k\pi} = (-1)^{k+1} - 2 < 0, \quad y''|_{x=2k\pi+\frac{2}{3}\pi} = \frac{3}{2} > 0, \quad y''|_{x=2k\pi+\frac{4}{3}\pi} = \frac{3}{2} > 0,$$

所以 $x = k\pi$ 为极大值点，极大值 $y(k\pi) = (-1)^k + \frac{1}{2}$ ， $x = 2k\pi + \frac{2}{3}\pi, x = 2k\pi + \frac{4}{3}\pi$ 为极小值点，

极小值 $y(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi) = -\frac{3}{4}, y(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi) = -\frac{3}{4}$ ；

(5) 对函数 $y = \frac{2x}{1+x^2}$ ，它处处可导，且

$$y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},$$

驻点 $x = \pm 1$ ，此时，

$$y''|_{x=1} = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}|_{x=1} = -1 < 0, \quad y''|_{x=-1} = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}|_{x=-1} = 1 > 0$$

所以 $x=1$ 为极大值点，极大值 $y(1)=1$ ， $x=-1$ 为极小值点，极小值 $y(-1)=-1$ 。

所属章节：第四章第四节

难度：二级

71. 求下列函数在指定区间上的最大值和最小值：

(1) $y = x^4 - 2x^2 + 5, [-2, 2]$ ；

(2) $y = x + 2\sqrt{x}, [0, 4]$ ；

(3) $y = \arctan \frac{1-x}{1+x}, [0, 1]$ 。

解答：(1) 对函数 $y = x^4 - 2x^2 + 5, [-2, 2]$ ，处处可导，且 $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$ ，比较

$y(0)=5, y(\pm 1)=4, y(\pm 2)=13$ ，得最大值 $y(\pm 2)=13$ ，最小值 $y(\pm 1)=4$ ；

(2) 对函数 $y=x+2\sqrt{x}, [0, 4]$ ，由于 $y'=1+\frac{1}{\sqrt{x}}>0$ ，函数单调增加，故最大值为 $y(4)=8$ ，

最小值为 $y(0)=0$ ；

(3) 对函数 $y=\arctan \frac{1-x}{1+x}, [0, 1]$ ， $y'=-\frac{1}{1+x^2}<0$ ，函数单调减少，故最大值为 $y(0)=\frac{\pi}{4}$ ，最

小值为 $y(1)=0$

所属章节：第四章第四节

难度：一级

72. 已知两正数 x 和 y 之和为 4，当 x, y 为何值时 x^2y^3 为最大。

解答：设 $f(x)=x^2(4-x)^3$ ，其中 $0<x<4$ ，令 $f'(x)=x(4-x)^2(8-5x)=0$ ，

即得唯一驻点 $x=\frac{8}{5}$ ，根据题意，易知它为函数的最大值点，于是当 $x=\frac{8}{5}$ ， $y=\frac{12}{5}$ 时 x^2y^3 为最大。

所属章节：第四章第四节

难度：二级

73. 试求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 而面积最大的矩形的边长。

解答：设矩形的平行与 x 轴的一边长的一半为 x ，则另一边长为 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ ，面积

$$f(x)=4x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \text{ 其中 } 0<x<a,$$

$$\text{令 } f'(x)=\frac{4b(a^2-2x^2)}{a\sqrt{a^2-x^2}}=0,$$

即得唯一驻点 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ ，根据题意，易知它为函数的最大值点，于是当 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}, y=\frac{b}{\sqrt{2}}$ 时内接

矩形面积最大。

所属章节：第四章第四节

难度：二级

74. 从半径为 R 的圆上截下中心角为 α 的扇形卷成一圆锥，问当 α 为何值时，所得圆锥的体积最大？

注意：本题圆的半径为 R ，已加上。

解答：中心角为 α 时，设圆锥的底圆半径为 r ，高为 r ，体积 V ，则由 $2\pi r = R\alpha$ ，得 $r = \frac{R\alpha}{2\pi}$ ，

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{2\pi} R, \text{ 于是}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{R^3 \alpha^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}, 0 < \alpha < 2\pi$$

令 $\frac{dV}{d\alpha} = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \frac{8\pi^2 \alpha - 3\alpha^3}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} = 0$ ，在 $0 < \alpha < 2\pi$ 内得到唯一解 $\alpha = \frac{2}{3}\sqrt{6}\pi$ ，根据题意此时圆锥的

体积最大，为 $V = \frac{2\sqrt{3}}{27} \pi R^3$ 。

所属章节：第四章第四节

难度：二级

75. A, B, C 是不在一直线上的三点，且 $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ ，设一列火车由点 A 开出，同时一辆汽车由点 B 开出。火车以 80km/h 的速度向点 B 前进，而汽车以 50km/h 的速度向点 C 前进，若 $AB = 2000\text{km}$ ，问在什么时候汽车与火车之间的距离最短？

解答：设经过 t 小时后，火车位于 D 点，汽车位于 E 点，则 $BD = 2000 - 80t$ ， $BE = 50t$ ，

汽车与火车的距离的平方为

$$f(t) = DE^2 = BD^2 + BE^2 - 2BD \cdot BE \cdot \cos \angle ABC = (2000 - 80t)^2 + (50t)^2 - 50t(2000 - 80t)$$

令 $f'(t) = 25800t - 42000 = 0$ ，解得 $t = 16.3$ (h)，由题意此时 $f(t)$ 最小，即汽车与火车之间的距离最短。

所属章节：第四章第四节

难度：二级

76. 质量为 P 的物体位于粗糙水平面上，设用力把物体从原位置移动，若物体抹茶系数为 k ，问作用力 F 对水平面的倾角 α 为多少时，才能使所需之力为最小。

解答：由条件知 $F \cos \alpha = k(P - F \sin \alpha)$ ，解得

$$F = \frac{kP}{\cos \alpha + k \sin \alpha}$$

要使 F 最小，只要 $f(\alpha) = \cos \alpha + k \sin \alpha$ 最大，令 $f'(\alpha) = -\sin \alpha + k \cos \alpha = 0$ ，解得 $\alpha = \arctan k$ ，

此时 $f''(\alpha) = -\cos \alpha - k \sin \alpha = -\sqrt{1+k^2} < 0$ ，由题意知当 $\alpha = \arctan k$ 时，所需之力为最小。

所属章节：第四章第四节

难度：二级

77. A, D 分别是曲线 $y = e^x$ 和 $y = e^{-2x}$ 上的点, AB 和 DC 均垂直 x 轴, 且 $|AB|:|DC| = 2:1, |AB| < 1$,

问: 点 B 和点 C 的横坐标为多少, 才能使梯形 $ABCD$ 的面积最大。

注意: 本题没有说明点 B, C 在 x 轴, 应加上, 以下解答已按此进行。

解答: 设点 B 的横坐标为 x , 则 $|AB| = e^x$, 由 $|AB|:|DC| = 2:1, |AB| < 1$, 可以推得点 C 的横坐

标为 $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}x$, 于是梯形 $ABCD$ 的面积为

$$f(x) = \frac{AB+DC}{2} \cdot BC = \frac{9}{8}xe^x - \frac{3\ln 2}{8}e^x,$$

令 $f'(x) = \frac{9}{8}e^x + \frac{9}{8}xe^x - \frac{3\ln 2}{8}e^x = 0$, 解得 $x = \frac{1}{3}\ln 2 - 1$, 根据题意此时梯形面积最大, 即所求点

B 和点 C 的横坐标分别为 $x_B = \frac{1}{3}\ln 2 - 1$ 和 $x_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ln 2$ 。

所属章节：第四章第四节

难度：三级

78. 已知某企业的总收入函数为 $R(x) = 26x - 2x^2 - 4x^3$ (万元), 总成本函数为 $C(x) = 8x + x^2$ (万元), 其中 x 表示产品的产量 (单位: 百台), 求: (1) 利润函数; (2) 边际收入函数; (3) 边际成本函数及企业获得最大利润时的产量和最大利润。

解答: (1) 利润函数 $L(x) = R(x) - C(x) = 18x - 3x^2 - 4x^3$;

(2) 边际收入函数 $R'(x) = 26 - 4x - 12x^2$;

(3) 边际成本函数 $C'(x) = 8 + 2x$,

令 $L'(x) = 18 - 6x - 12x^2 = 0$, 有 $x = 1$, 根据题意, 即知 $x = 1$ (百台) 时最大利润 $L(1) = 11$ (万元)

所属章节：第四章第四节

难度：一级

79. 一商家销售某商品的价格满足关系 $p = 7 - 0.2x$ (万元/吨), x 为销售量 (单位: 吨), 商品的成本函数是 $C = 3x + 1$ (万元)。

(1) 若每销售 1 吨商品, 政府要征税 t (万元), 求该商家获得最大利润的销售量;

(2) t 为何值时, 政府税收总额最大。

解答: (1) 由题设利润函数为 $L(x) = (7 - 0.2x)x - (3x + 1) - tx = (4 - t)x - 0.2x^2$, 令

$$\frac{dL(x)}{dx} = (4 - t) - 0.4x = 0,$$

解得 $x = \frac{5}{2}(4-t)$, 根据题意此时商家获得最大利润, 即所求销售量为 $x = \frac{5}{2}(4-t)$;

(2) 税收总额为 $g(t) = xt = \frac{5}{2}(4-t)t$, 令

$$\frac{dg(t)}{dt} = 10 - 5t = 0$$

解得 $t = 2$, 根据题意此时政府税收总额最大, 即所求为 $t = 2$ 。

所属章节: 第四章第四节

难度: 二级

80. 若 $p > 1$, 证明: 对 $[0, 1]$ 上每一个 x , 有 $x^p + (1-x)^p \geq \frac{1}{2^{p-1}}$ 。

解答: 设函数 $f(x) = x^p + (1-x)^p$, 则由 $f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1}$, 函数在 $[0, 1]$ 上有唯一驻点

$x = \frac{1}{2}$, 比较 $f(0) = 1, f(1) = 1, f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{p-1}}$, 即知函数 $f(x) = x^p + (1-x)^p$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值为 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{p-1}}$, 所以对 $[0, 1]$ 上每一个 x , 有 $x^p + (1-x)^p \geq \frac{1}{2^{p-1}}$ 。

所属章节: 第四章第四节

难度: 二级

81. 证明方程 $a^x = bx (a > 1)$ 当 $b > e \ln a$ 时有两个实根; 当 $0 < b < e \ln a$ 时没有实根; 当 $b < 0$ 时有唯一实根。

解答: 设函数 $f(x) = a^x - bx$, 则 $f'(x) = a^x \ln a - b$,

当 $b < 0$ 时, 由于 $f'(x) > 0$, 函数的零点最多一个, 而 $f(-\infty) < 0, f(+\infty) > 0$, 故由连续函数的零点存在定理, 至少有一个零点, 所以此时零点唯一, 即原方程有唯一实根;

当 $0 < b < e \ln a$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \log_a \frac{b}{\ln a}$ 为函数的最小值点, 最小值 $f(x) = \frac{b}{\ln a} (1 - \ln \frac{b}{\ln a})$ 大于零, 则曲线 $y = f(x) = a^x - bx$ 与 x 轴不相交, 即原方程没有实根;

当 $b > e \ln a$ 时, 由上知最小值 $f(x) = \frac{b}{\ln a} (1 - \ln \frac{b}{\ln a})$ 小于零, 曲线 $y = f(x) = a^x - bx$ 与 x 轴有两个交点, 即原方程有两个实根。

所属章节: 第四章第四节

难度: 三级

82. 判定下列曲线的凹凸性:

(1) $y = 4x - x^2$;

(2) $y = x + \frac{1}{x}$;

(3) $y = x \arctan x$;

(4) $y = \ln(x^2 - 1)$.

解答: (1) 对曲线 $y=4x-x^2$, 由于 $y'=4-2x$, $y''=-2<0$, 故凸区间: $(-\infty, +\infty)$;

(2) 对曲线 $y=x+\frac{1}{x}$, 由于 $x\neq 0$, $y'=1-\frac{1}{x^2}$, $y''=\frac{2}{x^3}$, 当 $x>0$ 时 $y''>0$, 当 $x<0$ 时 $y''<0$, 所以凹区间: $(0, +\infty)$, 凸区间: $(-\infty, 0)$;

(3) 对曲线 $y=x\arctan x$, 由于 $y'=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}$, $y''=\frac{2}{(1+x^2)^2}>0$, 所以凹区间: $(-\infty, +\infty)$;

(4) 对曲线 $y=\ln(x^2-1)$, 由于 $y'=\frac{2x}{x^2-1}$, $y''=-\frac{2+2x^2}{(x^2-1)^2}<0$, 所以凸区间: $(-\infty, +\infty)$ 。

所属章节: 第四章第五节

难度: 二级

83. 求下列曲线的凹凸区间及拐点:

$$(1) y=x^4-12x^3+48x^2-50; \quad (2) y=\frac{x^3}{x^2+3a^2} \quad (a>0);$$

$$(3) y=\ln(1+x^2); \quad (4) y=a^2-\sqrt[3]{x-b};$$

$$(5) y=xe^{-x}.$$

解答: (1) 对曲线 $y=x^4-12x^3+48x^2-50$, 由于

$$y'=4x^3-36x^2+96x, y''=12x^2-72x+96=12(x-2)(x-4)$$

当 $x>4$ 或 $x<2$ 时 $y''>0$, 当 $2<x<4$ 时 $y''<0$,

所以凸区间: $(2, 4)$, 凹区间: $(-\infty, 2), (4, +\infty)$, 拐点 $(2, 62), (4, 206)$;

(2) 对曲线 $y=\frac{x^3}{x^2+3a^2} \quad (a>0)$, 由于

$$y'=\frac{x^4+9a^2x^2}{(x^2+3a^2)^2}, y''=-\frac{6a^2x(x^2-9a^2)}{(x^2+3a^2)^3}$$

当 $0<x<3a$ 或 $x<-3a$ 时 $y''>0$, 当 $x>3a$ 或 $-3a<x<0$ 时 $y''<0$,

所以凸区间: $(-3a, 0), (3a, +\infty)$, 凹区间: $(-\infty, -3a), (0, 3a)$, 拐点: $\left(-3a, -\frac{9a}{4}\right), (0, 0), \left(3a, \frac{9a}{4}\right)$;

(3) 对曲线 $y=\ln(1+x^2)$, 由于

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}, \quad y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

当 $-1 < x < 1$ 时 $y'' > 0$, 当 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时 $y'' < 0$,

所以凸区间: $(-\infty, -1), (1, +\infty)$, 凹区间: $(-1, 1)$, 拐点: $(-1, \ln 2), (1, \ln 2)$;

(4) 对曲线 $y = a^2 - \sqrt[3]{x-b}$, 由于 $x \neq b$ 时有

$$y' = -\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-b)^2}}, \quad y'' = \frac{2\sqrt[3]{x-b}}{9(x-b)^2}$$

当 $x > b$ 时 $y'' > 0$, 当 $x < b$ 时 $y'' < 0$,

所以凸区间: $(-\infty, b)$, 凹区间: $(b, +\infty)$, 拐点: (b, a^2) ;

(5) 对曲线 $y = xe^{-x}$, 由于

$$y' = e^{-x} - xe^{-x}, \quad y'' = -2e^{-x} + xe^{-x}$$

当 $x > 2$ 时 $y'' > 0$, 当 $x < 2$ 时 $y'' < 0$,

所以凸区间: $(-\infty, 2)$, 凹区间: $(2, +\infty)$, 拐点: $(2, 2e^{-2})$ 。

所属章节: 第四章第五节

难度: 二级

84. 求下列曲线的拐点:

$$(1) \begin{cases} x = t^2, \\ y = 3t + t^3; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = \tan t, \\ y = \sin t \cos t. \end{cases}$$

参考答案: (1) $(1, 4), (1, -4), (0, 0)$; (2) $(0, 0), (\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}), (-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$

解答: (1) 当 $t \neq 0$ 时, $\frac{dy}{dx} = \frac{3+3t^2}{2t}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(t^2-1)}{4t^3}$, 分析对应 $t=0, t=-1, t=1$ 的曲线上的点

两侧二阶导数符号, 即知拐点为 $(1, 4), (1, -4), (0, 0)$;

$$(2) \frac{dy}{dx} = \cos 2t \cdot \cos^2 t, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin 2t(2 \cos 2t + 1) \cos^2 t, \quad \text{拐点为 } (0, 0), (\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}), (-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}).$$

所属章节: 第四章第五节

难度: 二级

85. 问 a 与 b 为何值时, 点 $(1,3)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点。

参考答案: $a=-\frac{3}{2}, b=\frac{9}{2}$

解答: 由条件 $y|_{x=1}=3, y''|_{x=1}=0$, 即

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 6a+2b=0 \end{cases},$$

解得 $a=-\frac{3}{2}, b=\frac{9}{2}$ 。

所属章节: 第四章第五节

难度: 二级

86. 试确定 a, b, c , 使三次曲线 $y=ax^3+bx^2+cx$ 有一拐点 $(1,2)$, 且在该点切线斜率为 -1 。

参考答案: $a=3, b=-9, c=8$

解答: 由条件 $y|_{x=1}=2, y'|_{x=1}=-1, y''|_{x=1}=0$, 即

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 3a+2b+c=-1 \\ 6a+2b=0 \end{cases}, \text{ 解得 } a=3, b=-9, c=8$$

所属章节: 第四章第五节

难度: 二级

87. 试证明曲线 $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点且位于一条直线上。

解答: 求导得 $y'=\frac{-x^2+2x+1}{(1+x^2)^2}$, $y''=\frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(1+x^2)^3}$, 令 $y''=0$, 得 $x=-1, x=\pm\sqrt{3}+2$, 由

于当 $x<-1$ 时, $y''<0$, 当 $-1<x<-\sqrt{3}+2$ 时, $y''>0$, 当 $-\sqrt{3}+2<x<\sqrt{3}+2$ 时, $y''<0$, 当

$x>\sqrt{3}+2$ 时, $y''>0$, 故曲线有三个拐点, 分别是 $(-1,-1), (-\sqrt{3}+2, \frac{-\sqrt{3}+1}{8-4\sqrt{3}}), (\sqrt{3}+2, \frac{\sqrt{3}+1}{8+4\sqrt{3}})$,

它们都在直线 $y+1=\frac{1}{4}(x+1)$ 上。

所属章节: 第四章第五节

难度: 二级

88. 利用函数图形的凹凸性证明不等式:

$$(1) \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y);$$

$$(2) x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2} \quad (x > 0, y > 0, x \neq y).$$

解答: (1) 设 $f(x) = e^x$, 则由于 $f''(x) = e^x > 0$, 曲线 $f(x) = e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是凹的, 从而对

任意的两个不相等的实数 x, y , $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y);$

(2) 设 $f(x) = x \ln x$, 则由于 $f''(x) = \frac{1}{x}$, 曲线 $f(x) = x \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是凹的, 从而对任意的两个不相等的正实数 x, y , $x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2} \quad (x > 0, y > 0, x \neq y)$ 。

所属章节: 第四章第五节

难度: 二级

89. 求下列曲线的渐近线:

$$(1) y = \frac{x^2 + x}{(x-2)(x+3)}; \quad (2) y = x e^{\frac{1}{x^2}};$$

$$(3) y = x \ln(e + \frac{1}{x}); \quad (4) y = 2x + \arctan \frac{x}{2}.$$

参考答案: (1) $x=2, x=3, y=1$; (此题参考答案与题目不符) (2) $x=0, y=x$;

$$(3) x = -\frac{1}{e}, y = x + \frac{1}{e}; \quad (4) y = 2x \pm \frac{\pi}{2}$$

解答: (1) 由于 $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow -3} y = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1$,

所以渐近线为 $x=2, x=-3, y=1$;

$$(2) \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x^2}} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x^2}} - 1) = 0,$$

所以渐近线为 $x=0, y=x$;

$$(3) \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} y = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} x \ln(e + \frac{1}{x}) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{ex})}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e},$$

所以渐近线为 $x = -\frac{1}{e}, y = x + \frac{1}{e}$;

$$(4) \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 2, \lim_{x \rightarrow \infty} (y - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan \frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{4},$$

所以渐近线为 $y = 2x \pm \frac{\pi}{2}$

所属章节: 第四章第五节

难度: 二级

90. 全面讨论下列函数的形态, 并描绘它们的图形:

$$(1) y = \frac{1}{5}(x^4 - 6x^2 + 8x + 7); \quad (2) y = \frac{2x^2}{(1-x)^2};$$

$$(3) y = x + \frac{\ln x}{2x}; \quad (4) y = |x| \frac{x}{1+x}.$$

解答: (1) 定义域: $(-\infty, +\infty)$,

由 $y' = \frac{4}{5}(x+1)^2(x-2)$, 可知单调减区间: $(-\infty, -2)$, 单调增区间: $(2, +\infty)$, 极小值:
 $y(-2) = -\frac{17}{5}$,

由 $y'' = \frac{12}{5}(x+1)(x-1)$, 可知凹区间: $(-\infty, -1), (1, +\infty)$, 凸区间: $(-1, 1)$, 拐点: $(-1, -\frac{6}{5})$;

(2) 定义域: $(-\infty, 1), (1, +\infty)$,

由于 $y' = \frac{4x}{(1-x)^3}$, 故单调减区间: $(-\infty, 0), (1, +\infty)$, 单调增区间: $(0, 1)$, 极小值: $y(0) = 0$,

由于 $y'' = \frac{4(2x+1)}{(1-x)^4}$, 故凹区间: $(-\frac{1}{2}, 1), (1, +\infty)$, 凸区间: $(-\infty, -\frac{1}{2})$, 拐点: $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{9})$,

又由于 $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} y = 2$, 故有渐近线: $x = 1, y = 2$;

(3) 定义域: $(0, +\infty)$,

由于 $y' = 1 + \frac{1 - \ln x}{2x^2} > 0$, 所以单调增区间: $(0, +\infty)$,

由于 $y'' = \frac{2 \ln x - 3}{2x^3}$, 所以凸区间: $(0, e^{\frac{3}{2}})$, 凹区间: $(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$, 拐点: $(e^{\frac{3}{2}}, e^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}e^{-\frac{3}{2}})$,

又由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} (y-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x} = 0$, 故有渐近线: $y=x$;

(4) 定义域: $(-\infty, -1), (-1, +\infty)$,

由 $y' = \begin{cases} \frac{x(x+2)}{(1+x)^2} & x > 0 \\ -\frac{x(x+2)}{(1+x)^2} & x < 0, x \neq -1 \end{cases}$, 可知单调减区间: $(-\infty, -2)$, 单调增区间:

$(-2, -1), (-1, +\infty)$, 极小值: $y(-2) = 4$,

由 $y' = \begin{cases} \frac{2}{(1+x)^3} & x > 0 \\ -\frac{2}{(1+x)^3} & x < 0, x \neq -1 \end{cases}$, 可知下凸区间: $(-\infty, -1), (0, +\infty)$, 上凸区间: $(-1, 0)$, 拐

点: $(0, 0)$,

又由于 $\lim_{x \rightarrow -1} y = \infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} (y-x) = -1, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = -1, \lim_{x \rightarrow -\infty} [y-(-x)] = 1$, 故有渐近线:

$x=-1, y=x-1, y=-x+1$ 。

所属章节: 第四章第五节

难度: 二级

91. 试证方程 $x^5 + 5x + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$ 内有唯一的实根, 并用切线法求这个根的近似值, 使误差不超过 0.01。

参考答案: $-0.20 < x < -0.19$

解答: 函数 $f(x) = x^5 + 5x + 1$ 在 $[-1, 0]$ 上连续、可微, $f(-1) = -5 < 0, f(0) = 1 > 0$, 由连续函数的零点定理知方程 $x^5 + 5x + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$ 内至少有一个实根;

又因为 $f'(x) = 5x^4 + 5 > 0$, 故函数严格单调增加, 方程 $x^5 + 5x + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$ 内至多有一个实根;

于是方程 $x^5 + 5x + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$ 内有唯一的实根。

令 $x_0 = 0$, 则 $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -0.2$, $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx -0.2$, 所以这个根的近似值为 -0.20 。

所属章节: 第四章第六节

难度: 二级

92. 求方程 $\sin 2x - x = 0$ 的正实根 (精确到两位小数)。

参考答案: $0.94 < x < 0.95$

解答: 函数 $f(x) = x - \sin 2x$ 在 $[\frac{\pi}{4}, 1]$ 上连续、可微, $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - 1 < 0, f(1) = 1 - \sin 2 > 0$, 由连续函数的零点定理知方程 $\sin 2x - x = 0$ 在 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ 内至少有一个实根, 又因为在 $[\frac{\pi}{4}, 1]$ 上 $f'(x) = 1 - 2\cos 2x > 0$, 故函数在 $[\frac{\pi}{4}, 1]$ 上严格单调增加, 方程 $\sin 2x - x = 0$ 在 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ 内至多有一个实根, 于是在 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ 内根唯一。

以下可用二分法或切线法进一步确定根的范围为 $0.94 < x < 0.95$ 。

所属章节: 第四章第六节

难度: 二级

93. 求曲线 $y = \sin x$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 处的曲率半径。

参考答案: $R = 1$

解答: $y' = \cos x, y'' = -\sin x$, 曲率 $K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$, 于是曲率半径为 $R = 1$ 。

所属章节: 第四章第六节

难度: 二级

94. 求曲线 $y = \cosh x$ 在点 $(0, 1)$ 处的曲率和曲率半径。

参考答案: $K = 1, R = 1$

解答: $y' = \sinh x, y'' = \cosh x$, 曲率 $K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \Big|_{x=0} = 1$, 于是曲率半径为 $R = 1$ 。

所属章节: 第四章第六节

难度: 二级

95. 求曲线 $y = a\cos^3 x, y = a\sin^3 x$ 在 t 所对应点处的曲率。

(题目有误, 曲线应为 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$)

参考答案: $K = \left| \frac{2}{3a} \csc 2t \right|$

解答: 曲率 $K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2]^{3/2}} = \left| \frac{2}{3a} \csc 2t \right|$ 。

所属章节：第四章第六节

难度：二级

96. 对数曲线 $y = \ln x$ 上哪一点曲率半径最小？求出该点的曲率半径。

参考答案： $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\ln 2), R = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

解答： $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$ ，曲率半径 $R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{x}$ ，

令 $\frac{dR}{dx} = \frac{\sqrt{1+x^2}(2x^2-1)}{x^2} = 0$ ，解得 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ （舍去），从而易知曲线上点

$(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\ln 2)$ 处曲率半径最小，为 $R = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ 。

所属章节：第四章第六节

难度：二级

97. 应选用直径多大的圆铣刀，才能使加工后的工件近似于长半轴为 50 单位长，短半轴为 40 单位长的椭圆上短轴一端附近的一段弧。

参考答案： $D = 125$ 单位长

解答：椭圆方程 $\frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{40^2} = 1$ ，求得所求点处 $y' = 0, y'' = -\frac{4}{250}$ ，曲率 $K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{4}{250}$ ，

于是圆铣刀直径 $D = 2R = \frac{2}{K} = 125$ （单位长）。

所属章节：第四章第六节

难度：二级

98. 一飞机沿抛物线路径 $y = \frac{x^2}{10000}$ (y 轴垂直向上，单位为 m) 作俯冲飞行，在坐标原点处飞机

的速度 $v = 200 \text{ m/s}$ ，飞行员体重 $m = 70 \text{ kg}$ ，去飞机俯冲至最低点即原点处时座椅对飞行员的反力)。

参考答案：约 1246N

解答：容易求得该处 $R = 5000$ ，

$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{70 \times 200^2}{5000} = 560(N),$$

反力约 $F' = 560 + 70 \times 9.8 = 1246(N)$ 。

所属章节：第四章第六节

难度：二级

99. 求曲线 $y = \ln x$ 在与轴交点处的曲率圆方程。 (题目轴字前应有 x)

参考答案： $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 8$

解答：在交点处， $x=1, y=0$ ， 导数 $y'|_{x=1} = \frac{1}{x}|_{x=1} = 1$, $y''|_{x=1} = -\frac{1}{x^2}|_{x=1} = -1$,

曲率 $K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ， 曲率半径 $R = \frac{1}{K} = 2\sqrt{2}$ 。

曲率中心坐标为 $\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = 3, \beta = y + \frac{(1+y'^2)}{y''} = -2$,

所以曲率圆方程 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 8$ 。

所属章节：第四章第六节

难度：二级

第五章 不定积分

1. 他填空题:

(1) $(\quad)' = 3, \int 3dx = (\quad);$

(2) $(\quad)' = 5x^2, \int 5x^2 dx = (\quad);$

(3) $(\quad)' = \sin x, \int \sin x dx = (\quad);$

(4) 设 $f(x) = \cos x^2$, 则 $[f(x)dx]' = (\quad).$

解答: (1) $3x + C$; (2) $\frac{5}{3}x^3 + C$; (3) $-\cos x + C$; (4) $\cos x^2$

所属章节: 第五章第一节

难度: 一级

2. 计算下列不定积分:

(1) $\int (x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx;$

(2) $\int \frac{2}{x^2 \sqrt{x}} dx;$

(3) $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx;$

(4) $\int (1 - \frac{1}{x^2})(\sqrt{x}\sqrt{x}) dx;$

(5) $\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx;$

(6) $\int \frac{3x^2}{1 + x^2} dx;$

(7) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx;$

(8) $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx;$

(9) $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx;$

(10) $\int \tan^2 x dx;$

(11) $\int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx;$

(12) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx;$

(13) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx;$

(14) $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx.$

解答: (1) $\int (x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx = \int x^2 dx + \int \frac{1}{x^2} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} + C;$

$$(2) \int \frac{2}{x^2 \sqrt{x}} dx = \int 2x^{-\frac{5}{2}} dx = -\frac{4}{3} x^{-\frac{3}{2}} + C;$$

$$(3) \int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) dx = \int (x^{\frac{3}{2}}+1) dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + x + C;$$

$$(4) \int (1-\frac{1}{x^2})(\sqrt{x}\sqrt{x}) dx = \int (x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{5}{4}}) dx = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + 4x^{\frac{1}{4}} + C;$$

$$(5) \int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}) dx = -\frac{1}{x} + \arctan x + C;$$

$$(6) \int \frac{3x^2}{1+x^2} dx = \int (3 - \frac{3}{1+x^2}) dx = 3x - 3 \arctan x + C;$$

$$(7) \int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} dx = \int (\cos x - \sin x) dx = \sin x + \cos x + C;$$

$$(8) \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x} dx = \int (\frac{1}{2} \sec^2 x + \frac{1}{2}) dx = \frac{1}{2} \tan x + \frac{1}{2} x + C;$$

$$(9) \int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int (\sec^2 x + \csc^2 x) dx = \tan x - \cot x + C;$$

$$(10) \int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C;$$

$$(11) \int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx = \int [2 - 5 \cdot (\frac{2}{3})^x] dx = 2x - \frac{5}{\ln 2 - \ln 3} (\frac{2}{3})^x + C;$$

$$(12) \int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C;$$

$$(13) \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C;$$

$$(14) \int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}) dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C。$$

所属章节：第五章第一节

难度：一级

3. 用换元法计算下列积分：

$$(1) \int \sin 3x dx;$$

$$(2) \int (3+4x)^5 dx;$$

(3) $\int e^{-3x} dx;$

(4) $\int \frac{1}{5x+1} dx;$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{3-2x}} dx;$

(6) $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+3} dx;$

(7) $\int \frac{x^2}{4+x^6} dx;$

(8) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx;$

(9) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx;$ 注: 本题与答案不相符

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$

(11) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$

(12) $\int \frac{\sin x}{1+3 \cos x} dx;$

(13) $\int \tan^3 x \sec x dx;$

(14) $\int \left(\frac{\sec x}{1+\tan x} \right)^2 dx;$

(15) $\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx;$

(16) $\int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx;$

(17) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4} dx;$

(18) $\int \frac{1}{1+e^x} dx;$

(19) $\int x \sqrt{x+1} dx;$

(20) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx;$

(21) $\int \frac{1}{x \sqrt{x+1}} dx;$

(22) $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}} dx;$

(23) $\int \frac{1}{x \sqrt{9-x^2}} dx;$

(24) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx;$

(25) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4x^2-1}} dx;$

(26) $\int 2e^x \sqrt{1-e^{2x}} dx.$

解答: (1) $\int \sin 3x dx = \frac{1}{2} \int \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3} \cos 3x + C;$

(2) $\int (3+4x)^5 dx = \frac{1}{4} \int (3+4x)^5 d(3+4x) = \frac{1}{24} (3+4x)^6 + C;$

(3) $\int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \int e^{-3x} d(-3x) = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C;$

(4) $\int \frac{1}{5x+1} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{5x+1} d(5x+1) = \frac{1}{5} \ln |5x+1| + C;$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{3-2x}} dx = -\frac{1}{2} \int (3-2x)^{-\frac{1}{3}} d(3-2x) = -\frac{3}{4} (3-2x)^{\frac{2}{3}} + C;$

$$(6) \int \frac{2x-5}{x^2-5x+3} dx = \int \frac{1}{x^2-5x+3} d(x^2-5x+3) = \ln|x^2-5x+3| + C;$$

$$(7) \int \frac{x^2}{4+x^6} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{4+(x^3)^2} d(x^3) = \frac{1}{6} \arctan \frac{x^3}{2} + C;$$

$$(8) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+1) = \sqrt{x^2+1} + C;$$

$$(9) \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{2} \int (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(4-x^2) = -(4-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

注：如果题目是 $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx$ ，则解答为 $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{4-(x^2)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{2} + C$ ；

$$(10) \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = 2 \int \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} d\sqrt{x} = 2 \arctan \sqrt{x} + C;$$

$$(11) \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \cos \sqrt{x} d\sqrt{x} = 2 \sin \sqrt{x} + C;$$

$$(12) \int \frac{\sin x}{1+3 \cos x} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{d(1+3 \cos x)}{1+3 \cos x} = -\frac{1}{3} \ln|1+3 \cos x| + C;$$

$$(13) \int \tan^3 x \sec x dx = \int \tan^2 x \cdot \sec x \tan x dx = \int (\sec^2 x - 1) d \sec x = \frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + C;$$

$$(14) \int \left(\frac{\sec x}{1+\tan x} \right)^2 dx = \int \frac{1}{(1+\tan x)^2} d(1+\tan x) = -\frac{1}{1+\tan x} + C;$$

$$(15) \int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx = \int \frac{d \ln(\ln x)}{\ln(\ln x)} = \ln|\ln(\ln x)| + C;$$

$$(16) \int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx = \int \frac{d(x \ln x)}{(x \ln x)^2} = -\frac{1}{x \ln x} + C;$$

$$(17) \int \frac{e^x}{e^{2x}+4} dx = \int \frac{de^x}{(e^x)^2+4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{e^x}{2} + C;$$

$$(18) \int \frac{1}{1+e^x} dx = \int (1 - \frac{e^x}{1+e^x}) dx = x - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = x - \ln(1+e^x) + C;$$

$$(19) \text{ 令 } \sqrt{x+1} = t, \text{ 即 } x = t^2 - 1, \text{ 则}$$

$$\int x \sqrt{x+1} dx = \int (2t^4 - 2t^2) dt = \frac{2}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + C = \frac{2}{5} (x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + C;$$

(20) 令 $\sqrt[3]{x}=t$, 即 $x=t^3$, 则

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx = \int \frac{3t^2}{t+1} dt = \int (3t-3-\frac{3}{t+1}) dt = \frac{3}{2}t^2 - 3t - 3\ln|1+t| + C = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - 3\sqrt[3]{x} + 3\ln|\sqrt[3]{x}+1| + C;$$

本题的参考答案有误

(21) 令 $\sqrt{x+1}=t$, 即 $x=t^2-1$, 则 $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{2}{t^2-1} dt = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C;$

(22) 令 $x=t^6$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}} dx &= \int \frac{6t^2}{1+t} dt = \int [6(t-1) + \frac{6}{1+t}] dt = 3(t-1)^2 + 6\ln|1+t| + C \\ &= 3(\sqrt[6]{x}-1)^2 + 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C; \end{aligned}$$

(23) 令 $x=\frac{1}{t}$, 则

$$\int \frac{1}{x\sqrt{9-x^2}} dx = -\int \frac{dt}{\sqrt{9t^2-1}} = -\frac{1}{3} \ln |3t + \sqrt{9t^2-1}| + C = \frac{1}{3} \ln |3 - \sqrt{9-x^2}| - \frac{1}{3} \ln |x| + C;$$

(24) 令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx = -\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}} = -\sqrt{t^2+1} + C = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C;$

(25) 令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2-1}} dx = \int \frac{-tdt}{\sqrt{4-t^2}} = \sqrt{4-t^2} + C = \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x} + C;$

(26) $\int 2e^x\sqrt{1-e^{2x}} dx = \int 2\sqrt{1-(e^x)^2} d(e^x) = \arcsin e^x + e^x\sqrt{1-e^{2x}} + C。$

所属章节: 第五章第二节

难度: 1~12 一级, 其余二级

4. 用分部积分法计算下列积分:

(1) $\int x \sin 2x dx;$

(2) $\int e^{-x} \cos x dx;$

(3) $\int x e^{-x} dx;$

(4) $\int x^2 \arctan x dx;$

(5) $\int x \ln(x-1) dx;$

(6) $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1}) dx;$

(7) $\int \sin(\ln x) dx;$

(8) $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx;$

(9) $\int (x-1) \cos 2x dx;$

(10) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$

解答: (1) $\int x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \int x d(\cos 2x) = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$;

(2) 由于两次分部积分后有

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \cos x dx &= \int e^{-x} d \sin x = e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx = e^{-x} \sin x - \int e^{-x} d \cos x \\ &= e^{-x} \sin x - e^{-x} d \cos x - \int e^{-x} \cos x dx,\end{aligned}$$

$$\text{移项解得 } \int e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C;$$

$$(3) \int x e^{-x} dx = -\int x d e^{-x} = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C;$$

$$\begin{aligned}(4) \int x^2 \arctan x dx &= \frac{1}{3} \int \arctan x dx^3 = \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \int \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(x^2+1) + C; \text{ 本题的参考答案有误}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5) \int x \ln(x-1) dx &= \frac{1}{2} \int \ln(x-1) d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \ln(x-1) - \int \frac{x^2}{2(x-1)} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln(x-1) - \frac{1}{2} \int \left(x+1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x-1) - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \ln(x-1) + C;\end{aligned}$$

$$(6) \int \ln(x+\sqrt{x^2+1}) dx = x \ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = x \ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + C;$$

(7) 由于两次分部积分后有

$$\int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx$$

$$\text{所以 } \int \sin(\ln x) dx = \frac{1}{2} x \sin(\ln x) - \frac{1}{2} x \cos(\ln x) + C;$$

$$(8) \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \int \ln \frac{1+x}{1-x} d\left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} (x^2-1) \ln \frac{1+x}{1-x} - \int dx = \frac{1}{2} (x^2-1) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - x + C;$$

本题的参考答案有误

$$\begin{aligned}(9) \int (x-1) \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int (x-1) d \sin 2x = \frac{1}{2} (x-1) \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2} (x-1) \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C;\end{aligned}$$

$$(10) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -\int x d \cot x = -x \cot x + \int \cot x dx = -x \cot x - \ln |\sin x| + C.$$

所属章节: 第五章第三节

难度: 一级

5. 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{x}{x^2-7x+12} dx;$$

$$(2) \int \frac{x-1}{x^2+3} dx;$$

$$(3) \int \frac{x+7}{x^2+2x-3} dx;$$

$$(4) \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx.$$

解答: (1) $\int \frac{x}{x^2-7x+12} dx = \int (\frac{4}{x-4} - \frac{3}{x-3}) dx = 4 \ln|x-4| - 3 \ln|x-3| + C;$

$$(2) \int \frac{x-1}{x^2+3} dx = \int (\frac{x}{x^2+3} - \frac{1}{x^2+3}) dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+3) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + C;$$

$$(3) \int \frac{x+7}{x^2+2x-3} dx = \int (\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+3}) dx = \ln(x-1)^2 - \ln|x+3| + C; \text{ 本题的参考答案有误}$$

$$(4) \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \int (\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}) dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

所属章节: 第五章第四节

难度: 一级

6. 计算下列积分:

$$(1) \int \frac{1}{5+4 \sin x} dx;$$

$$(2) \int \frac{1}{4+5 \cos x} dx;$$

$$(3) \int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 3} dx;$$

$$(4) \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx;$$

$$(5) \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx;$$

$$(6) \int \frac{\tan x}{3 \sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx;$$

$$(7) \int \frac{1}{\sin x + \cos x + 1} dx;$$

$$(8) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$$

参考答案: (1) $\frac{2}{3} \arctan(\frac{5}{3} \tan \frac{x}{2} + \frac{4}{3}) + C;$

$$(2) \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3 + \tan \frac{x}{2}}{3 - \tan \frac{x}{2}} \right| + C;$$

$$(3) -\frac{1}{1 + \tan \frac{x}{2}} + C;$$

$$(4) \frac{1}{2} \cos^2 x - 2 \cos x + 3 \ln(\cos x + 2) + C;$$

$$(5) x - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + C;$$

$$(6) \frac{1}{6} \ln(2 + \tan^2 x) + C;$$

$$(7) \ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + C;$$

$$(8) -\frac{1}{2} \arctan \cos 2x + C$$

解答: (1) 令 $u = \tan \frac{x}{2}$, 则 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \frac{2}{1+u^2} du$, 所以

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{5+4\sin x} dx &= \int \frac{2}{5u^2+8u+5} du = \frac{2}{5} \int \frac{1}{(u+\frac{4}{5})^2+(\frac{3}{5})^2} du = \frac{2}{3} \arctan(\frac{5}{3}u+\frac{4}{3}) + C \\ &= \frac{2}{3} \arctan(\frac{5}{3}\tan\frac{x}{2}+\frac{4}{3}) + C;\end{aligned}$$

(2) 令 $u = \tan \frac{x}{2}$, 则 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \frac{2}{1+u^2} du$, 所以

$$\int \frac{1}{4+5\cos x} dx = \int \frac{2}{9-u^2} du = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3+u}{3-u} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3+\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}} \right| + C;$$

(3) 令 $u = \tan \frac{x}{2}$, 则 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \frac{2}{1+u^2} du$, 所以

$$\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 3} dx = \int \frac{1}{2u^2 + 2u + 1} du = \arctan(2u+1) + C = \arctan(2\tan\frac{x}{2}+1) + C;$$

本题的参考答案是否有误?

(4) 令 $\cos x = t$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx &= \int \frac{t^2-1}{t+2} dt = \int (t-2+\frac{3}{t+2}) dt = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3\ln|t+2| + C \\ &= \frac{1}{2}\cos^2 x - 2\cos x + 3\ln(\cos x+2) + C;\end{aligned}$$

$$(5) \int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx = \int (1 - \frac{1}{1+\sin^2 x}) dx = \int (1 - \frac{\sec^2 x}{2\tan^2 x + 1}) dx = x - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}\tan x) + C;$$

$$(6) \int \frac{\tan x}{3\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx = \int \frac{\tan x \cdot \sec^2 x}{3\tan^2 x + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d\tan^2 x}{3\tan^2 x + 2} = \frac{1}{6} \ln(2 + \tan^2 x) + C;$$

(7) 令 $u = \tan \frac{x}{2}$, 则 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \frac{2}{1+u^2} du$, 所以

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x + 1} dx = \int \frac{1}{u+1} du = \ln|u+1| + C = \ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + C;$$

$$(8) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x} dx = -\frac{1}{2} \arctan \cos 2x + C.$$

所属章节: 第五章第四节

难度: 二级

第六章 定积分及其应用

他 1. 应用定积分的定义计算下列定积分:

$$(1) \int_{-1}^2 x^2 dx, \quad (2) \int_0^1 e^x dx.$$

解答: (1) 由于被积函数在区间 $[-1, 2]$ 上连续, 故积分 $\int_{-1}^2 x^2 dx$ 存在, 且它与区间 $[-1, 2]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关, 为便于计算, 将区间 $[-1, 2]$ 进行 n 等分, 得小区间长度为 $\Delta x_i = \frac{3}{n}$, 在小区间上取右端点 $\xi_i = -1 + \frac{3i}{n}, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, 作积分和

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(-1 + \frac{3i}{n}\right)^2 \cdot \frac{3}{n} = 3 - \frac{9n-9}{2n^2},$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3$, 即 $\int_{-1}^2 x^2 dx = 3$;

(2) 将区间 $[0, 1]$ 进行 n 等分, 得小区间长度为 $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, 在小区间上取右端点 $\xi_i = \frac{i}{n}, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, 作积分和

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} e^{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{e-1}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)},$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e-1$, 即 $\int_0^1 e^x dx = e-1$.

所属章节: 第六章第一节

难度: 二级

2. 用定积分的几何意义求下列定积分的值:

$$(1) \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad (2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx,$$

$$(3) \int_0^1 2x dx.$$

解答: (1) 由定积分的几何意义, $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ 表示以原点为圆心、半径为 a 的圆在第一象限

中部分的面积, 故 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2$;

(2) 由定积分的几何意义, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ 表示正弦曲线 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上与 x 轴所围图形

面积的代数和, 由于 x 轴上下部分面积相等, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 0$;

(3) 由定积分的几何意义, $\int_0^1 2x dx$ 表示直线 $y = 2x$ 、 $x = 1$ 与 x 轴所围图形三角形面积,

由于面积等于 1, 所以 $\int_0^1 2x dx = 1$.

所属章节: 第六章第一节

难度: 一级

3. 利用定积分求下列各式的极限:

(1) 已知 $\int_0^\pi \sin x dx = 2$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n-1}{n} \pi \right)$;

(2) 已知 $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$;

(3) 已知 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$;

(4) 已知 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(1+\sqrt{2})$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right)$.

参考答案: (1) $\frac{2}{\pi}$; (2) $\ln 2$; (3) $\frac{\pi}{4}$; (4) $\ln(1+\sqrt{2})$.

解答: (1) 由于 $\frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n-1}{n} \pi \right) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{n}$,

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n-1}{n} \pi \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi}$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$;

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2} + \cdots + \frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2} \right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}} \right)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(1+\sqrt{2}).$$

所属章节：第六章第一节

难度：二级

4. 用定积分的性质比较下列积分的大小：

$$(1) \int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx, \quad (2) \int_0^1 e^x dx \text{ 与 } \int_0^1 (1+x) dx,$$

$$(3) \int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 \ln(1+x) dx, \quad (4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \text{ 与 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} x dx.$$

参考答案：(1) $\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$;

$$(2) \int_0^1 e^x dx > \int_0^1 (1+x) dx;$$

$$(3) \int_0^1 x dx > \int_0^1 \ln(1+x) dx;$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} x dx. \text{ (此处有误, 应为 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} x dx \text{)}$$

解答：(1) 因为在区间 $[0,1]$ 上，有 $x \geq x^2$ ，且等号仅在端点取得，所以由定积分的性质有

$$\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx;$$

(2) 因为在区间 $[0,1]$ 上，有 $e^x \geq 1+x$ ，且等号仅在左端点取得，所以由定积分的性质有

$$\int_0^1 e^x dx > \int_0^1 (1+x) dx;$$

(3) 因为在区间 $[0,1]$ 上，有 $x \geq \ln(1+x)$ ，且等号仅在左端点取得，所以由定积分的性质

有 $\int_0^1 x dx > \int_0^1 \ln(1+x) dx$;

(4) 因为在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上, 有 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$, 且等号仅在端点取得, 所以由定积分的性质

有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} x dx$.

所属章节: 第六章第一节

难度: 二级

5. 求下列函数的导数:

(1) $\frac{d}{dx} \int_1^x \sin t^2 dt$;

(2) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \arctan t dt$;

(3) 设 $f(x) = \int_{x^3}^5 \sqrt{1+t^2} dt$, 求 $f'(1)$;

(4) $\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt$;

(5) 设 $f(x) = x \arctan \frac{1}{x} + \int_0^x \arctan t dt$, 求 $f'(2)$;

(6) 设 $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$;

(7) 设 $x = \int_1^t u \ln u du$, $y = \int_1^{t^2} u^2 \ln u du$, 求 $\frac{dy}{dx}$;

(8) 设 $x = t^2$, $y = \int_0^{t^2} \cos u du$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

解答: (1) $\frac{d}{dx} \int_1^x \sin t^2 dt = \sin x^2$;

(2) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \arctan t dt = 2x \arctan x^2$;

(3) 因为 $f(x) = \int_{x^3}^5 \sqrt{1+t^2} dt$,

$$\text{所以 } f'(x) = -\sqrt{1+(x^3)^2} \cdot 3x^2,$$

$$\text{于是 } f'(1) = -3\sqrt{2};$$

(4) $\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt = \cos(\pi (\cos x)^2) \cdot (\cos x)' - \cos(\pi (\sin x)^2) \cdot (\sin x)'$

$$= -\cos x \cos(\pi \sin^2 x) - \sin x \cos(\pi \cos^2 x) = (\sin x - \cos x) \cos(\pi \sin^2 x);$$

此处最后一步用到 $\cos(\pi \cos^2 x) = \cos(\pi - \pi \sin^2 x) = -\cos(\pi \sin^2 x)$.

(5) 因为 $f(x) = x \arctan \frac{1}{x} + \int_0^x \arctan t dt$, 所以

$$f'(x) = \arctan \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} + \arctan x,$$

$$\text{于是 } f'(2) = \arctan \frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \arctan 2;$$

(6) 利用隐函数求导, 在方程 $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$ 两边对 x 求导, 有 $e^y \frac{dy}{dx} + \cos x = 0$, 解得 $\frac{dy}{dx} = -e^{-y} \cos x$;

(7) 利用参数方程求导, 有 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-t^2 \ln t}{t \ln t} = -t$;

(8) 利用参数方程求导, 有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t \cos t^2}{2t} = \cos t^2, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = -\sin t^2 \cdot 2t \cdot \frac{1}{2t} = -\sin t^2.$$

所属章节: 第六章第二节

难度: 一级

6. 当 x 为何值时, 函数 $F(x) = \int_0^x t e^{-t^2} dt$ 有极值?

解答: 由于 $F(x) = \int_0^x t e^{-t^2} dt$, 所以 $F'(x) = x e^{-x^2}$, $F''(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}$, 当 $x=0$ 时, $F'(x)=0$,

而 $F''(0)=1>0$, 所以当 $x=0$ 时函数 $F(x) = \int_0^x t e^{-t^2} dt$ 有极小值 $F(0)=0$.

所属章节: 第六章第二节

难度: 二级

7. 当 x 为何值时, 函数 $F(x) = \int_0^x \frac{3t+1}{t^2-t+1} dt$ 在区间 $[0,1]$ 上取最大值和最小值.

参考答案: 当 $x=1$ 时, 取最大值; 当 $x=0$ 时, 取最小值.

解答: 由于 $F(x) = \int_0^x \frac{3t+1}{t^2-t+1} dt$, 所以 $F'(x) = \frac{3x+1}{x^2-x+1}$, 在区间 $[0,1]$ 上 $F'(x)>0$, 故函数

$F(x) = \int_0^x \frac{3t+1}{t^2-t+1} dt$ 在区间 $[0,1]$ 上单调增, 于是当 $x=0$ 时, 取最小值 $F(0)=0$, 当 $x=1$ 时,

取最大值 $F(1)$.

所属章节：第六章第二节

难度：二级

8. 求下列各极限：

$$\begin{aligned} (1) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt; & (2) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} t^{\frac{3}{2}} dt}{\int_0^x t(t - \sin t) dt}; \\ (3) \quad & \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t} dt}; & (4) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin 5t dt}{\ln^2(x^2 + 1)}. \end{aligned}$$

参考答案：(1) 1; (2) 12; (3) 1; (4) $\frac{5}{2}$.

解答：(1) 利用洛比达法则，

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x^2 = 1$$

$$(2) \text{ 利用洛比达法则, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} t^{\frac{3}{2}} dt}{\int_0^x t(t - \sin t) dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot x^3}{x(x - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{1 - \cos x} = 12;$$

(3) 利用洛比达法则，

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t} dt} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\tan(\sin x)} \cdot \cos x}{\sqrt{\sin(\tan x)} \cdot \sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{\tan(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{\sin(\tan x)}} = 1;$$

(4) 利用洛比达法则，

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin 5t dt}{\ln^2(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x^2) \cdot 2x}{2 \ln(x^2 + 1) \cdot \frac{2x}{x^2 + 1}} = \frac{5}{2}.$$

所属章节：第六章第二节

难度：二级

9. 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A(1-\cos x)}{x^2}, & x < 0, \\ 4, & x = 0, \\ \frac{B\sin x + \int_0^x \cos t^2 dt}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

当 A, B 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

参考答案: $A=8, B=3$.

解答: 由题意 $f(0^-) = \frac{1}{2}A$, $f(0) = 4$, $f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{B\sin x + \int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{B\cos x + \cos x^2}{1} = B+1$,

如果函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 那么 $f(0^-) = f(0) = f(0^+)$, 于是解得 $A=8, B=3$.

所属章节: 第六章第二节

难度: 二级

10. 设曲线 $y = f(x)$ 通过原点, 且函数 $f(x)$ 具有连续导数, 曲线在原点处切线的倾角为

$$45^\circ, \text{ 求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x \sin x}.$$

解答: 有条件知, $f(0) = 0, f'(0) = \tan 45^\circ = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{2x} = \frac{1}{2} f'(0) = \frac{1}{2} \tan 45^\circ = \frac{1}{2}.$$

所属章节: 第六章第二节

难度: 二级

11. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 函数 $F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)} dt$

试证: (1) $F'(x) \geq 2$;

(2) 方程 $F(x) = 0$ 在 (a, b) 内有且仅有一个实根。

(函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x \frac{1}{f(t)} dt$ 应为 $F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)} dt$)

解答: (1) 由于 $F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)} dt$, $f(x) > 0$, 所以 $F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2$;

(2) 函数 $F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)} dt$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且

$$F(a) = \int_b^a \frac{1}{f(t)} dt = -\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt < 0, \quad F(b) = \int_a^b f(t) dt > 0,$$

所以方程 $F(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一个实根.

又由 (1) 知, 函数 $F(x)$ 严格单调增, 于是方程 $F(x) = 0$ 在 (a, b) 内有且仅有一个实根

所属章节: 第六章第二节

难度: 二级

12. 应用牛顿-莱布尼兹公式计算下列定积分:

$$(1) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dt, \quad (\text{本题应为 } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx) \quad (2) \int_0^1 (e^x - 1)^5 e^x dx;$$

$$(3) \int_1^e \frac{\ln x + 1}{x} dx; \quad (4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx;$$

$$(5) \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}; \quad (6) \int_0^2 |1 - x| dx;$$

$$(7) \int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^4)}; \quad (8) \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx.$$

$$\text{解答: (1) } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3};$$

$$(2) \int_0^1 (e^x - 1)^5 e^x dx = \frac{1}{6} (e^x - 1)^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} (e - 1)^6;$$

$$(3) \int_1^e \frac{\ln x + 1}{x} dx = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x \right]_1^e = \frac{3}{2};$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x (1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec x - \tan x) dx$$

$$= [\ln(\sec x + \tan x) + \ln \cos x] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1 + \frac{\sqrt{2}}{2});$$

$$(5) \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2 + 1} = \arctan(x+2) \Big|_0^1 = \arctan 3 - \arctan 2;$$

$$(6) \int_0^2 |1-x| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = [x - \frac{1}{2}x^2]_0^1 + [\frac{1}{2}x^2 - x]_1^2 = 1;$$

$$(7) \text{ 由于 } \int \frac{dx}{x(1+x^4)} = \int \frac{dx}{x^5(x^{-4}+1)} = -\frac{1}{4} \int \frac{d(x^{-4}+1)}{x^{-4}+1} = -\frac{1}{4} \ln(x^{-4}+1) + C,$$

$$\text{所以 } \int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^4)} = -\frac{1}{4} \ln(x^{-4}+1) \Big|_1^2 = \frac{1}{4} \ln \frac{32}{17};$$

另解: 令 $x = \frac{1}{t}$, 则 $\int \frac{dx}{x(1+x^4)} = \int \frac{-t^3 dx}{t^4+1} = -\frac{1}{4} \int \frac{d(t^4+1)}{t^4+1} = -\frac{1}{4} \ln(t^4+1) + C = \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{x^4+1} + C$, 于是

$$\text{由牛顿-莱布尼兹公式, } \int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^4)} = \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{x^4+1} \Big|_1^2 = \frac{1}{4} \ln \frac{32}{17};$$

$$(8) \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$$

$$= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2} - 2.$$

所属章节: 第六章第二节

难度: 一级

13. 应用换元法计算下列积分:

$$(1) \int_{-2}^1 \frac{dx}{(5x+11)^3};$$

$$(2) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx;$$

$$(3) \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx;$$

$$(4) \int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2+5x+1}} dx;$$

$$(5) \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx;$$

$$(6) \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx;$$

$$(7) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx;$$

$$(8) \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} dx;$$

$$(9) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos^2 x}; \quad (10) \int_1^3 \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$$

参考答案: (1) $\frac{7}{72}$ (第一小题答案有误?); (2) $\frac{5}{3} - \ln 4$; (3) $\ln \frac{2e}{1+e}$;

$$(4) \ln \frac{7+2\sqrt{7}}{9}; \quad (5) \frac{\pi}{12}; \quad (6) \frac{\pi}{16}; \quad (7) \sqrt{3} - \frac{\pi}{3};$$

$$(8) \pi - \frac{8}{3}; \quad (9) \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad (10) \frac{\pi}{12}. \text{ (第 10 小题答案有误?)}$$

解答: (1) 令 $5x+11=t$, 则 $\int_{-2}^1 \frac{dx}{(5x+11)^3} = \frac{1}{5} \int_1^{16} t^{-3} dt = -\frac{1}{10} t^{-2} \Big|_1^{16} = \frac{51}{512}$;

(2) 令 $\sqrt{x}=t$, 则

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}+1} dx = \int_0^1 \frac{2t^3}{t+1} dt = \int_0^1 (2t^2 - 2t + 2 - \frac{2}{t+1}) dt = [\frac{2}{3}t^3 - t^2 + 2t - 2\ln(t+1)]_0^1 = \frac{5}{3} - 2\ln 2;$$

$$(3) \text{ 令 } e^x = t, \text{ 则 } \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_1^e \frac{1}{(1+t)t} dt = \int_1^e (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}) dt = \ln \frac{t}{t+1} \Big|_1^e = \ln \frac{2e}{e+1};$$

$$(4) \text{ 令 } x = \frac{1}{t}, \text{ 则 } \int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2+5x+1}} dx = -\int_1^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{t^2+5t+1}} dt = \ln \left| 2t+5+2\sqrt{t^2+5t+1} \right| \Big|_{\frac{1}{3}}^1 = \ln \frac{7+2\sqrt{7}}{9};$$

$$(5) \text{ 令 } x = \sec t, \text{ 则 } \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12};$$

$$(6) \text{ 令 } x = \sin t, \text{ 则 } \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{8} dt = \frac{\pi}{16};$$

$$(7) \text{ 令 } x = \sec t, \text{ 则 } \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 t dt = [\tan t - t]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3};$$

$$(8) \text{ 令 } \sqrt[4]{x} = t, \text{ 则 } \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{4t^4}{1+t^2} dt = \int_0^1 (4t^2 - 4 + 4\arctan t) dt = \pi - \frac{8}{3};$$

$$(9) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x dx}{\sec^2 x + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x dx}{\tan^2 x + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$(10) \text{ 令 } \arctan \sqrt{x} = t, \text{ 则 } \int_1^3 \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2t dt = t^2 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{7}{144} \pi^2.$$

所属章节：第六章第三节

难度：(1)(2)(5)(6)(7)(8)一级, (3) (4) (9) (10) 二级

14. 证明 $\int_x^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt \quad (x>0)$.

解答：令 $x = \frac{1}{t}$, 则 $\int_x^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+t^2} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+x^2} dx$.

所属章节：第六章第三节

难度：二级

15. 设 $f(x)$ 连续, 求 $\frac{d}{dx} \int_0^x f(x^2 - t^2) dt$.

参考答案: $xf(0)$. (参考答案有误?)

解答：令 $x^2 - t^2 = u, t = \sqrt{x^2 - u}$, 则

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(x^2 - t^2) dt = \frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 \left(-\frac{1}{2}\right) f(u) du = \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \frac{1}{2} f(u) du = xf(x^2).$$

所属章节：第六章第三节

难度：二级

16. 利用分部积分法计算下列积分:

(1) $\int_0^1 x e^x dx$;

(2) $\int_0^\pi x \sin x dx$;

(3) $\int_1^e x \ln x dx$;

(4) $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$;

(5) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$;

(6) $\int_0^1 x \arctan x dx$;

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx$;

(8) $\int_0^{2\pi} x \cos^2 x dx$;

$$(9) \int_0^{\frac{1}{2}} x \ln \frac{1+x}{1-x} dx; \quad (10) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x dx.$$

解答: (1) $\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = 1;$

$$(2) \int_0^{\pi} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi;$$

$$(3) \int_1^e x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^2;$$

$$(4) \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx = (x+1) \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} 1 dx = 1;$$

$$(5) \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = x \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \sqrt{1-x^2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1;$$

$$(6) \int_0^1 x \arctan x dx = \frac{1+x^2}{2} \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2};$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx = e^{2x} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{2x} \sin x dx = e^{2x} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2e^{2x} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx,$$

$$\text{解得} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{\pi} - 2}{5};$$

$$(8) \int_0^{2\pi} x \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} x \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} dx + \int_0^{2\pi} x \frac{\cos 2x}{2} dx \\ = \left[\frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x \right]_0^{2\pi} = \pi^2;$$

$$(9) \int_0^{\frac{1}{2}} x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{1-x^2} dx \\ = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{8} \ln 3 + \frac{1}{2};$$

$$(10) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \cdot \sec^2 x dx = \sec x \cdot \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \cdot \tan^2 x dx$$

$$= [\sec x \cdot \tan x + \ln |\sec x + \tan x|]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x dx = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x dx$$

$$\text{移项, 即得} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x dx = \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)].$$

所属章节：第六章第三节

难度：二级

17. 设 $f(3x+1) = xe^{\frac{x}{2}}$, 求 $\int_0^1 f(t) dt$

解答: $\int_0^1 f(t) dt = 3 \int_{\frac{1}{3}}^0 f(3x+1) dx = 3 \int_{\frac{1}{3}}^0 xe^{\frac{x}{2}} dx = 3(2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}}) \Big|_{\frac{1}{3}}^0 = 14e^{-\frac{1}{6}} - 12$.

所属章节：第六章第三节

难度：二级

18. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上二阶可导, 且 $f(2)=1, f'(2)=0$, 且 $\int_0^2 f(x) dx = 4$, 求 $\int_0^1 x^2 f''(2x) dx$.

参考答案: $\frac{5\pi}{16}$. (参考答案有误?)

解答: $\int_0^1 x^2 f''(2x) dx = x^2 \cdot \frac{1}{2} f'(2x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(2x) dx = x^2 \cdot \frac{1}{2} f'(2x) \Big|_0^1 - x \cdot \frac{1}{2} f(2x) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx$
 $= x^2 \cdot \frac{1}{2} f'(2x) \Big|_0^1 - x \cdot \frac{1}{2} f(2x) \Big|_0^1 + \frac{1}{4} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2}$

所属章节：第六章第三节

难度：二级

19. 已知 $f(x) = e^{-x^2}$, 求 $\int_0^1 f'(x) f''(x) dx$.

解答: 由于 $f(x) = e^{-x^2}$, 所以 $f'(x) = -2xe^{-x^2}, f'(1) = -2e^{-1}, f'(0) = 0$, 于是

$$\int_0^1 f'(x) f''(x) dx = \frac{1}{2} (f'(x))^2 \Big|_0^1 = 2e^{-2}.$$

所属章节：第六章第三节

难度：二级

20. 设 $f(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\sqrt{x}} \frac{dt}{1 + \tan t^2}$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$.

解答: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{x} f'(x) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = -\frac{\pi}{4}$.

其中

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx \right] = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

所属章节：第六章第三节

难度：三级

21. 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 求 $\int_0^\pi f(x) dx$.

解答：由条件 $\int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi - x} dx = f(\pi)$, 利用分部积分, 有

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) dx &= x f(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi x f'(x) dx = \pi f(\pi) - \int_0^\pi x \cdot \frac{\sin x}{\pi - x} dx \\ &= \pi f(\pi) - \int_0^\pi \left[-\sin x + \pi \cdot \frac{\sin x}{\pi - x} \right] dx \\ &= \pi f(\pi) + 2 - \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi - x} dx = 2. \end{aligned}$$

所属章节：第六章第三节

难度：三级

22. 利用辛普森法近似计算下列积分 (把区间分成 6 等分, 精确到小数点后三位):

(1) $\int_0^{2\pi} x \sin x dx$; (2) $\int_0^\pi \sqrt{3 + \cos x} dx$;

(3) $\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx$.

解答: (1) $h = \frac{\pi}{3}, x_0 = 0, y_0 = 0; x_1 = \frac{\pi}{3}, y_1 = \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} = 0.9069$;

$x_2 = \frac{2\pi}{3}, y_2 = \frac{2\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} = 1.8138; x_3 = \pi, y_3 = \pi \sin \pi = 0$;

$x_4 = \frac{4\pi}{3}, y_4 = \frac{4\pi}{3} \sin \frac{4\pi}{3} = -3.6276; x_5 = \frac{5\pi}{3}, y_5 = \frac{5\pi}{3} \sin \frac{5\pi}{3} = -4.5345$;

$x_6 = 2\pi, y_6 = 2\pi \sin 2\pi = 0$

按辛普森公式, 有

$$\int_0^{2\pi} x \sin x dx \approx \frac{\pi}{9} [(0+0) + 4(0.9069+0-4.5345) + 2(1.8138-3.6276)] \approx -6.331;$$

(2) $h = \frac{\pi}{6}, x_0 = 0, y_0 = 2; x_1 = \frac{\pi}{6}, y_1 = \sqrt{3 + \cos \frac{\pi}{6}} = 1.966$;

$$x_2 = \frac{\pi}{3}, y_2 = \sqrt{3 + \cos \frac{\pi}{3}} = 1.871; x_3 = \frac{\pi}{2}, y_3 = \sqrt{3 + \cos \frac{\pi}{2}} = 1.732;$$

$$x_4 = \frac{2\pi}{3}, y_4 = \sqrt{3 + \cos \frac{2\pi}{3}} = 1.581; x_5 = \frac{5\pi}{6}, y_5 = \sqrt{3 + \cos \frac{5\pi}{6}} = 1.461;$$

$$x_6 = \pi, y_6 = \sqrt{3 + \cos \pi} = 1.414$$

按辛普森公式，有

$$\int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos x} dx \approx \frac{\pi}{18} [(2 + 1.414) + 4(1.966 + 1.732 + 1.461) + 2(1.871 + 1.581)] \approx 5.403;$$

(3) 由计算公式 $\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx \approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2k-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2k})]$ ，可得

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx \approx 1.089.$$

所属章节：第六章第三节

难度：二级

23. 函数 $f(x)$ 由下列表格给出：

x	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35
$f(x)$	2.36	2.50	2.74	3.04	3.46	3.98	4.60

用辛普森法计算积分 $\int_{1.05}^{1.35} f(x) dx$ 的近似值（精确到小数点后三位）

解答：由计算公式 $\int_{1.05}^{1.35} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2k-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2k})]$ ，这里

$$h = 0.05, x_0 = 1.05, y_0 = 2.36; x_1 = 1.10, y_1 = 2.5;$$

$$x_2 = 1.15, y_2 = 2.74; x_3 = 1.20, y_3 = 3.04;$$

$$x_4 = 1.25, y_4 = 3.46; x_5 = 1.30, y_5 = 3.98;$$

$$x_6 = 1.35, y_6 = 4.35$$

$$\text{所以 } \int_{1.05}^{1.35} f(x) dx \approx \frac{0.05}{3} [(2.36 + 4.60) + 4(2.5 + 3.04 + 3.98) + 2(2.74 + 3.46)] \approx 0.957.$$

所属章节：第六章第三节

难度：二级

24. 计算并讨论下列广义积分的敛散性:

$$(1) \int_0^{+\infty} C^{-ax} dx \quad (a > 0); \quad (2) \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx,$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx, \quad (4) \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx,$$

$$(5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx, \quad (6) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}; \quad (?)$$

$$(7) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}; \quad (8) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)};$$

$$(9) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}; \quad (10) \int_1^{+\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx,$$

$$(11) \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx, \quad (12) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx.$$

解答: (1) 由于 $\int_0^{+\infty} C^{-ax} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A C^{-ax} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a} C^{-aA} \right) = \frac{1}{a}$, 原积分收敛;

(2) 由于 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_e^A \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \ln A$ 不存在, 故积分 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ 发散;

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{x}{(1+x)^3} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(1+x)^2} \right] \Big|_0^A = \frac{1}{2}$, 原积分收敛;

(4) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x} \sin x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} (e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x) \right] \Big|_0^A = \frac{1}{2}$, 原积分收敛;

(5) 由于 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{2x}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln(1+A^2)$ 不存在, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx$ 发散, 从而原积分发散;

(6) 令 $\sqrt{x-1} = t$, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^{+\infty} \frac{2dt}{t^2+1} = 2 \arctan t \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$, 原积分收敛;

(7) 令 $\sqrt{x} = t$, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{t^2+1} = 2 \arctan t \Big|_0^{+\infty} = \pi$, 原积分收敛;

(8) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \ln \frac{x}{x+1} \Big|_1^{+\infty} = \ln 2$, 原积分收敛;

(9) 令 $x = \frac{1}{t}$, 则

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{A}}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{A}}^1 \frac{d(t-1)}{\sqrt{2-(t-1)^2}} = \frac{\pi}{4}$, 原积分

收敛;

(10) 令 $\sqrt{x}=t, x=t^2$, 则

$$\int_1^A \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx = \int_1^{A^2} \frac{2 \ln t}{t} dt = \ln^2 t \Big|_1^{A^2} = 4 \ln^2 A \rightarrow +\infty,$$

所以 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx$ 发散;

$$(11) \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4}, \text{ 原积分收敛};$$

$$(12) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 + 1 = 2, \text{ 原积分收敛}.$$

所属章节: 第六章第四节

难度: 二级

25. 计算并讨论下列广义积分的敛散性:

$$(1) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad (2) \int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2};$$

$$(3) \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx; \quad (4) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}} dx;$$

$$(5) \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} dx; \quad (6) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx;$$

$$(7) \int_0^2 \frac{1}{x^2-4x+3} dx; \quad (8) \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx.$$

解答: (1) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = 1$, 原积分收敛;

(2) 由于 $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \Big|_0^1$ 不存在, 所以原积分发散;

$$(3) \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \left[\frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x+1} \right]_{-1}^0 = -\frac{4}{3}, \text{ 原积分收敛};$$

$$(4) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \arcsin x \Big|_0^1 + \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3}),$$

原积分收敛;

(5) 令 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{3-2t-t^2}} dt = \arcsin \frac{t+1}{2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{3}{4},$$

原积分收敛;

(6) 令 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2},$$

原积分收敛;

(7) 由于 $\int_0^1 \frac{1}{x^2-4x+3} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2-1}{x-2+1} \right| \Big|_0^1$ 不存在, 所以原积分发散;

(8) 令 $x = \frac{1}{t}$, 则 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1+2t}{\sqrt{t^2-1}} dt = [\ln |t+\sqrt{t^2-1}| + 2\sqrt{t^2-1}]_1^{\sqrt{2}} = \ln(\sqrt{2}+1) + 2,$

原积分收敛。

所属章节: 第六章第四节

难度: 二级

26. 求下列曲线所围成平面图形的面积:

(1) $y = \sqrt{x}, x=1, x=4, y=0;$

(2) $y = x^2, x+y=2;$

(3) $x^2 - y^2 = 1, x-y=1, x+y=2;$

(4) $y = x^2, y = 4 - x^2;$

(5) $y = 4x - x^2, y = 0;$

(6) $y = x^2, y = 3 - 2x^2;$ ((4)(6) 两小题非常相似)

(7) $y^2 = 2x+1, x-y-1=0;$

(8) $y = |\ln x|, y = 0, x = \frac{1}{e}, x = e.$

解答: (1) $A = \int_1^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{14}{3};$

(2) $A = \int_{-2}^1 (2-x-x^2) dx = (2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3) \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2};$

(3) $A = \int_1^{\frac{5}{4}} [\sqrt{x^2-1} - (x-1)] dx + \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{3}{4}} [(2-x) - (x-1)] dx = \frac{1}{2}(1 - \ln 2);$

(4) $A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [(4-x^2) - x^2] dx = [4x - \frac{2}{3}x^3]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{16}{3}\sqrt{2};$

(5) $A = \int_0^4 (4x-x^2) dx = (2x^2 - \frac{1}{3}x^3) \Big|_0^4 = \frac{32}{3};$

(6) $A = \int_{-1}^1 (3-2x^2-x^2) dx = (3x-x^3) \Big|_{-1}^1 = 4;$

(7) $A = \int_{-1}^3 [(y+1) - \frac{y^2-1}{2}] dy = \frac{16}{3};$

(8) $A = \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\ln x) dx + \int_1^e \ln x dx = (x-x\ln x) \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + (x\ln x - x) \Big|_1^e = 2(1 - \frac{1}{e}).$

所属章节: 第六章第五节

难度: 二级

27. 求下列参数方程表示的曲线所围成平面图形的面积:

(1) $x = a \cos t, y = a \sin t,$

(2) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ (星形线);

(3) 摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 的一拱与横坐标轴;

(4) 笛卡儿叶形线 $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$

参考答案: (1) $\pi a^2;$ (2) $\frac{3}{8}\pi a^2;$ (3) $3\pi a^2;$ (4) $\frac{3}{2}a^2;$

解答: (1) $A = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin t (-a \sin t) dt = -4a^2 [\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t]_{\frac{\pi}{2}}^0 = \pi a^2;$

(2) $A = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin^3 t (-3a \cos^2 t \cdot \sin t) dt = 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt = \frac{3}{8}\pi a^2;$

$$(3) \quad A = \int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2;$$

$$(4) \quad \text{化为极坐标, } A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} d\varphi = \frac{9a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt = -\frac{3a^2}{2(1+t^3)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{3}{2}a^2.$$

所属章节：第六章第五节

难度：二级

28. 求下列极坐标方程表示的曲线所围成的平面图形的面积：

$$(1) \quad \text{心脏线 } r = 2a(1 + \cos \theta) \quad (a > 0);$$

$$(2) \quad r = 1, r = 2\cos \theta \text{ 内部的公共部分};$$

$$(3) \quad r = 1 + \sin \theta \text{ 内部 } r = 1 \text{ 内部的公共部分};$$

$$(4) \quad r = 1 + \cos \theta, r = 3\cos \theta \text{ 内部的公共部分};$$

$$(5) \quad r^2 = 2\cos 2\theta \text{ 外部 } r = 2\cos \theta \text{ 内部与 } r = 1 \text{ 内部的公共部分}.$$

解答：(1) 利用图形上下对称， $A = 2 \int_0^{\pi} 2a^2(1 + \cos \theta)^2 d\theta = 4a^2 \left(\frac{3}{2}\theta + 2\sin \theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right) \Big|_0^{\pi} = 6\pi a^2;$

$$(2) \quad \text{利用图形对称, } A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 \theta d\theta = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$(3) \quad \text{利用图形对称, } A = 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \theta) d\theta \right] = \frac{5}{4}\pi - 2;$$

(4) 曲线 $\rho = 3\cos \theta$ 与 $\rho = 1 + \cos \theta$ 交点的极坐标为 $A(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3})$, $B(\frac{3}{2}, -\frac{\pi}{3})$, 由图形对称, 所求的面积为

$$A = 2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos \theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos \theta)^2 d\theta \right] = \frac{5}{4}\pi;$$

(5) 先求出三条曲线在第一象限内的交点的极坐标为 $(1, \frac{\pi}{6})$, $(1, \frac{\pi}{3})$, 由于图形关于极轴对称, 将所求图形在第一象限部分分成三个曲边扇形部分, 所求的面积为

$$A = 2 \left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} (1^2 - 2\cos 2\theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (2\cos \theta)^2 d\theta \right] = \frac{\pi}{2} - 1.$$

所属章节：第六章第五节

难度：三级

29. 求抛物线 $y^2 = 2px$ 及其在点 $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ ($p > 0$) 处的法线所围成图形的面积。

解答：抛物线 $y^2 = 2px$ 在点 $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ 处的法线为 $y = -x + \frac{3}{2}p$ ，所围图形的面积

$$A = \int_{-3p}^p \left(\frac{3}{2}p - y - \frac{1}{2p}y^2\right) dy = \frac{16}{3}p^2。$$

所属章节：第六章第五节

难度：二级

30. 求抛物线 $y = e^x$ ， x 轴及该曲线过原点的切线所围成图形的面积。

解答：该曲线过原点的切线 $y = e \cdot x$ ，所围图形的面积

$$A = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^1 (e^x - ex) dx = \frac{1}{2}e$$

$$\text{或 } A = \int_0^e \left(\frac{1}{e}y - \ln y\right) dy = \frac{1}{2e}y^2 \Big|_0^e - y \ln y \Big|_0^e + \int_0^e y \cdot \frac{1}{y} dy = \frac{e}{2}。$$

所属章节：第六章第五节

难度：二级

31. 求由曲线 $y = e^{-x}$ 与过点 $(-1, e)$ 的切线及 x 轴所围成图形的面积。

解答：曲线 $y = e^{-x}$ 过点 $(-1, e)$ 的切线为 $y = -e \cdot x$ ，所围图形的面积

$$A = \int_{-1}^0 [e^{-x} - (-ex)] dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{3}{2}e。$$

所属章节：第六章第五节

难度：二级

32. 求抛物线 $y = -x^2 + 4x - 3$ 及其在点 $(0, -3)$ 和 $(3, 0)$ 处的切线所围成图形的面积。

解答：抛物线在点 $(0, -3)$ 和 $(3, 0)$ 处的切线分别为 $y = 4x - 3$, $y = -2x + 6$ ，交点为 $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ ，所求面积为

$$A = \int_0^{\frac{3}{2}} [(4x-3) - (-x^2+4x-3)] dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 [(-2x+6) - (-x^2+4x-3)] dx = \frac{9}{4}.$$

所属章节：第六章第五节

难度：二级

33. 求抛物线 $y = x^2$ (第一象限部分) 上求一点, 使过该点的切线与直线 $y = 0, x = 8$ 相交所围成的三角形面积为最大。

解答: 设所求点为 (x_0, x_0^2) , 则过该点的切线为 $y = 2x_0x - x_0^2$, 与 x 轴的交点为 $(\frac{x_0}{2}, 0)$, 与直线 $y = 0, x = 8$ 相交所围成的三角形面积为

$$A = \int_{\frac{x_0}{2}}^8 (2x_0x - x_0^2) dx = 64x_0 - 8x_0^2 + \frac{1}{4}x_0^3,$$

设目标函数 $f(x) = 64x - 8x^2 + \frac{1}{4}x^3$, 令 $f'(x) = 64 - 16x + \frac{3}{4}x^2 = 0$, 解得唯一合适的驻点

$x = \frac{16}{3}$, (另一根因大于 8 而舍去), 由于该实际问题有最大值, 于是即为所求点的横坐标,

所求点即为 $(\frac{16}{3}, \frac{256}{9})$ 。

所属章节：第六章第五节

难度：三级

34. 求曲线 $y = \sqrt{x} (0 \leq x \leq 4)$ 的一条切线 (方程), 使该切线与直线 $x = 0, x = 4, y = 0$ 所围成的梯形面积为最小。

解答: 设切点为 $(x_0, \sqrt{x_0})$, 则过该点的切线为 $y = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}x + \frac{1}{2}\sqrt{x_0}$, 该切线与直线

$x = 0, x = 4, y = 0$ 所围成的梯形面积为

$$A = \int_0^4 (\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x + \frac{1}{2}\sqrt{x_0}) dx = 4x_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x_0^{\frac{1}{2}},$$

设目标函数 $f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$, 令 $f'(x) = -2x^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 0$, 解得唯一合适的驻点 $x = 2$, 由

于该实际问题有最小值, 于是所求切线为

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\text{即 } x - 2\sqrt{2}y + 2 = 0。$$

所属章节：第六章第五节

难度：三级

35. 有一立体，以长半轴 $a=10$ 、短半轴 $b=5$ 的椭圆为底，而垂直于长轴的任一截面都是一个等边三角形，求它的体积。

参考答案： $\frac{1000}{3}\sqrt{2}$. (答案有误?)

解答：设椭圆方程为 $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ ，以 x 为积分变量，截面为以 $2y$ 为边长的等边三角形，截面面积为

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2y)^2 = 25\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2,$$

所求立体体积为

$$V = 2 \int_0^{10} A(x) dx = 2 \int_0^{10} (25\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2) dx = \frac{1000}{3}\sqrt{3}。$$

所属章节：第六章第五节

难度：二级

36. 求如下平行截面已知的立体体积：其底部为 $y = x^2 - 1$ 与 $y = 0$ 所围的平面区域，而它垂直于 x 轴的任一截面都是一个等边三角形。

解答：以 x 为积分变量，截面为以 y 为边长的等边三角形，面积为

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}y^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 - 1)^2,$$

所求立体体积为

$$V = 2 \int_0^1 A(x) dx = 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 - 1)^2 dx = \frac{4}{15}\sqrt{3}。$$

所属章节：第六章第五节

难度：二级

37. 设有半径为 a 的正圆柱体，一平面通过底圆中心且与底面构成 θ 角，得一圆柱楔形，求它的体积。

解答：取平面与底圆交线为 x 轴，底圆圆心为坐标原点，则垂直于 x 轴的截面面积为

$$A(x) = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)\tan\theta,$$

所求立体体积为

$$V = 2 \int_0^a A(x) dx = 2 \int_0^a \frac{1}{2}(a^2 - x^2)\tan\theta dx = \frac{2}{3}a^3 \tan\theta.$$

所属章节：第六章第五节

难度：二级

38. 求下列诸曲线所围平面图形绕指定轴旋转所得的旋转体的体积：

(1) $xy=4, x=1, x=4, y=0$ 所围图形绕 x 轴；

(2) $y=\sin x, y=\frac{2}{\pi}x$ 所围图形绕 x 轴；

(3) $y=x^2, y^2=8x$ 所围图形绕 x 轴，绕 y 轴；

(4) $y=\frac{1}{2}x^2, x=1, x=2, y=-1$ 所围图形绕直线 $y=-1$ ；

(5) $y=x^2, y=2-x^2$ 所围图形绕 x 轴；

(6) $y=\ln x, y=0, x=2$ 所围图形绕 x 轴；

解答：(1) $V = \int_1^4 \pi \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 12\pi$ ；

(2) 利用图形关于原点对称， $V = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi [(\sin x)^2 - (\frac{2}{\pi}x)^2] dx = \frac{\pi^2}{6}$ ；

(3) $V_x = \int_0^2 \pi(8x - x^4) dx = \frac{48}{5}\pi$, $V_y = \int_0^4 \pi(y - \frac{1}{64}y^4) dy = \frac{24}{5}\pi$ ；

(4) $V = \int_1^2 \pi(\frac{1}{2}x^2 + 1)^2 dx = \frac{293}{60}\pi$ ；

(5) 利用图形关于 y 轴对称， $V = 2 \int_0^1 \pi[(2-x^2)^2 - (x^2)^2] dx = \frac{16}{3}\pi$ ；

$$(6) \quad V = \int_1^2 \pi (\ln x)^2 dx = (2 \ln^2 2 - 4 \ln 2 + 2) \pi$$

(原参考答案为 $\left(\ln 8 - \frac{3}{2}\right)\pi$ ，有误？还是原题有误？如绕 y 轴旋转，答案为 $\left(4 \ln 2 - \frac{3}{2}\right)\pi$)

所属章节：第六章第五节

难度：二级

39. 一平面图形由抛物线 $x = y^2 + 2$ 与过点 $(3, 1)$ 处的法线及 x 轴、 y 轴所围成，求此平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积。

参考答案： $\frac{105}{2}\pi$. (原参考答案有误？)

解答：法线方程为 $y = -2x + 7$ ，所求体积为

$$V = \int_0^3 \pi (-2x + 7)^2 dx - \int_2^3 \pi (x - 2) dx = \frac{113}{2} \pi。$$

所属章节：第六章第五节

难度：二级

40. 由曲线 $y = \sin x$ 与它在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的切线，以及 $x = \pi$ 所围成平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积。

解答： $V = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \pi (1 - \sin^2 x) dx = \frac{1}{4} \pi^2。$

所属章节：第六章第五节

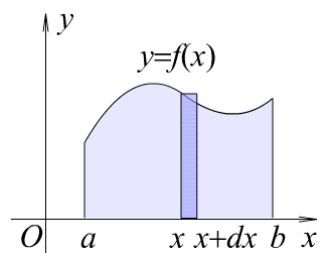
难度：二级

41. 证明：将图形 $a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x)$ 绕 y 轴旋转所得的旋转体体积为 $V_y = 2\pi \int_a^b xy(x) dx$.

解答：如图，在 x 处取一宽为 dx 的小曲边梯形，小曲边梯形绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积近似为 $2\pi x \cdot y(x) dx$ ，这就是体积微元，即

$$dV = 2\pi x \cdot y(x) dx,$$

于是平面图形绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为



$$V = \int_a^b 2\pi xy(x)dx = 2\pi \int_a^b xy(x)dx.$$

所属章节：第六章第五节

难度：二级

42. 用上题公式求下列旋转体体积：

(1) $y = x(x-1)^2, y=0$ 所围图形绕 y 轴；

(2) $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi), y=0$ 所围图形绕 y 轴；

(3) $y = 2x - x^2, y = x, y=0$ 所围图形绕 y 轴。

解答：(1) $V = 2\pi \int_0^1 x \cdot x(x-1)^2 dx = \frac{\pi}{15}$ ；

(2) $V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi^2$ ；

(3) $V = 2\pi \int_0^1 x \cdot x dx + 2\pi \int_1^2 x \cdot (2x - x^2) dx = \frac{5}{2}\pi$ 。

所属章节：第六章第五节

难度：二级

43. 求下列各曲线段的弧长：

(1) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x \quad (1 \leq x \leq e)$ ；

(2) $y = \ln(1-x^2)_x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$ ；（题有误？）

(3) 星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ 的全长。

解答：(1) 由于 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, $y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}$, 所以所求弧长为

$$s = \int_1^e \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_1^e \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right) dx = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4};$$

(2) 由于 $y = \ln(1-x^2)$, $y' = \frac{-2x}{1-x^2}$, 所以所求弧长为

$$s = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \ln 3 - \frac{1}{2};$$

(3) 由于 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$, $x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t, y'(t) = 3a\sin^2 t \cos t$, 所以所求弧长为

$$s = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sin t \cos t dt = 6a。$$

所属章节：第六章第五节

难度：二级

44. 若 10N 的力能使弹簧伸长 1cm,现在使弹簧伸长 10cm, 问需要作多少功?

解答：由虎克定律 $F = kx$ ，得 $k = 1000$ ，即 $F(x) = 1000x$ ，故所作的功为

$$W = \int_0^{0.1} F(x) dx = \int_0^{0.1} 1000x dx = 5 \text{ (N} \cdot \text{m)}。$$

所属章节：第六章第六节

难度：二级

45. 半径为 1 的半球形水池，其中充满了水，把池内的水完全抽尽，问至少需要作多少功？

解答：以球心为坐标原点，垂直向下为 x 轴正向，所求功为

$$\int_0^1 \pi(1-x^2)x dx = \frac{\pi}{4}$$

所属章节：第六章第六节

难度：二级

46. 一容器上半段为圆柱形，下半段为半球形，其中有水，水面高度为圆柱体部分的一半，该容器埋于地下，容器口离地面 3cm，求将其中水全部抽上地面所需的功。

参考答案： $\frac{89}{3} \pi \text{t} \cdot \text{m}.$

解答：(本题条件不足，没有圆柱体的高度及半径)；

所属章节：第六章第六节

难度：二级

47. 有一水槽，其横截面为等腰梯形，两底的长分别为 80cm 和 40cm，高为 20cm，较长的底在上面，当水盛满时，求横截面上一侧所受的水压力。

解答：以上底中心为坐标原点，垂直向下为 x 轴正向，则右侧腰所在直线的方程为

$$y = 0.4 - x,$$

压力元素为

$$dP=1000 \cdot x \cdot 2(0.4-x)dx=(800x-2000x^2)dx, ,$$

所求压力为

$$P=\int_0^{0.2}(800x-2000x^2)dx=\frac{32}{3}(\text{kg}).$$

所属章节：第六章第六节

难度：二级

48. 一个底为 10cm **(此处单位应为 m)**，高为 12m 的等腰三角形闸门垂直置于水中，底与水面相齐，求一侧所受的水压力。

解答：以三角形薄板的底的中点为坐标原点，垂直向下为 x 轴正向，所求水压力为

$$\int_0^{12}(10-\frac{5}{6}x)xdx=240 \quad (\text{t}).$$

所属章节：第六章第六节

难度：二级

49. 一个底为 80cm，高为 60cm 的等腰三角形薄板，垂直沉入水中，顶点在上，底边在下且与水面平行；顶点离水面 30cm，求此薄板一侧所受的水压力（水的比重为 1000kg/m^3 ）。

解答：以三角形薄板的顶点为坐标原点，垂直向下为 x 轴正向，所求水压力为

$$\int_0^{0.6}(x+0.3) \cdot \frac{4}{3}x \cdot 1000dx=168 \quad (\text{kg}).$$

所属章节：第六章第六节

难度：二级

50. 求一质量为 m 的均匀半圆弧（半径为 R ），对位于其圆心的单位质量的引力（设引力常数为 k ）

解答：圆弧的线密度为 $\rho=\frac{m}{\pi R}$ ，所求引力大小为

$$\int_0^\pi k \frac{\rho R}{R^2} \sin \theta d\theta = \frac{2mk}{\pi R^2},$$

方向由圆心指向圆弧中点。

所属章节：第六章第六节

难度：二级

51. 求下列函数在指定区间上的平均值:

(1) $y = x \cos^2 x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上;

(2) $y = 2xe^{-x}$ 在 $[0, 2]$ 上。

解答: (1) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \cos^2 x dx = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2};$

(2) $\frac{1}{2} \int_0^2 2xe^{-x} dx = \frac{1}{2} [-2xe^{-x} - 2e^{-x}]_0^2 = 1 - \frac{3}{e^2}。$

所属章节: 第六章第六节

难度: 二级

52. 一杆长 8m, 其线密度为 $\frac{12}{\sqrt{x+1}}$ kg/m, 其中 x 表示离杆一端的距离, 求杆的平均密度。

解答: 杆的平均密度为 $\frac{1}{8} \int_0^8 \frac{12dx}{\sqrt{x+1}} = 3\sqrt{x+1} \Big|_0^8 = 6 \text{ (kg/m)}。$

所属章节: 第六章第六节

难度: 二级

第七章 空间解析几何与向量代数

1. 求点 $(2, -3, -1)$ 关于: (1) 各坐标面; (2) 各坐标轴; (3) 坐标原点的对称点.

解答: (1) xOy 面: $(2, -3, 1)$, yOz 面: $(-2, -3, -1)$, zOx 面: $(2, 3, -1)$;

(2) x 轴: $(2, 3, 1)$, y 轴: $(-2, -3, 1)$, z 轴: $(-2, 3, -1)$;

(3) $(-2, 3, 1)$.

所属章节: 第七章第一节

难度: 一级

2. 求点 $(4, -3, 5)$ 到坐标原点和各坐标轴的距离.

解答: 点 $(4, -3, 5)$ 到坐标原点的距离为 $\sqrt{(4-0)^2 + (-3-0)^2 + (5-0)^2} = 5\sqrt{2}$,

点 $(4, -3, 5)$ 到 x 轴的距离为 $\sqrt{(4-4)^2 + (-3-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{34}$,

点 $(4, -3, 5)$ 到 y 轴的距离为 $\sqrt{(4-0)^2 + (-3-(-3))^2 + (5-0)^2} = \sqrt{41}$,

点 $(4, -3, 5)$ 到 z 轴的距离为 $\sqrt{(4-0)^2 + (-3-0)^2 + (5-5)^2} = 5$.

所属章节: 第七章第一节

难度: 一级

3. 把两点 $(1, 1, 1)$ 和 $(1, 2, 0)$ 间的线段分成两部分, 使其比等于 $2:1$, 试求分点的坐标.

解答: 设分点坐标为 (x, y, z) , 则由条件 $\frac{x-1}{1-x} = \frac{y-1}{2-y} = \frac{z-1}{0-z} = \frac{2}{1}$, 解得 $x=1, y=\frac{5}{3}, z=\frac{1}{3}$, 即所

求分点坐标为 $\left(1, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

所属章节: 第七章第一节

难度: 一级

4. 设立方体的一个顶点在原点, 三条棱分别在三条坐标轴的正半轴上, 已知棱长为 a , 求各

顶点的坐标.

解答: 各顶点的坐标为: $(0,0,0), (a,0,0), (0,a,0), (0,0,a), (a,a,a), (a,a,0), (a,0,a), (0,a,a)$.

所属章节: 第七章第一节

难度: 一级

5. 在 yOz 平面上求一点, 使它与点 $A(3, 1, 2)$, 点 $B(4, -2, -2)$ 和点 $C(0, 5, 1)$ 的距离相等.

解答: 设所求点为 $P(0, y, z)$, 则由条件有 $|PA|=|PB|=|PC|$, 故

$$\sqrt{(0-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2} = \sqrt{(0-4)^2+(y+2)^2+(z+2)^2} = \sqrt{(0-0)^2+(y-5)^2+(z-1)^2},$$

解得 $y=1, z=-2$. 即所求点为 $(0, 1, -2)$.

所属章节: 第七章第一节

难度: 一级

6. 在 z 轴上求一点, 使它到点 $A(-4, 1, 7)$ 和点 $B(3, 5, -2)$ 的距离相等.

解答: 设所求点为 $P(0, 0, z)$, 则由条件有 $|PA|=|PB|$, 故

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2} = \sqrt{(0-3)^2+(0-5)^2+(z+2)^2},$$

解得 $z=\frac{14}{9}$. 即所求点为 $(0, 0, \frac{14}{9})$.

所属章节: 第七章第一节

难度: 一级

7. 已知向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夹角为 60° , 且 $|\mathbf{a}|=5, |\mathbf{b}|=8$, 试求 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ 和 $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.

解答: 由于 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = 129$, 代入已知条件, 即可得

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = \sqrt{129};$$

又由于 $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}-\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = 49$, 故 $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = 7$.

所属章节: 第七章第三节

难度: 二级

8. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2}{3}\pi$, 且 $|\boldsymbol{a}|=3, |\boldsymbol{b}|=4$, 试求:

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

(2) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$

解答: (1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos \theta = 3 \times 4 \times \cos \frac{2}{3}\pi = -6$;

(2) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}) = 3|\boldsymbol{a}|^2 - 4|\boldsymbol{b}|^2 + 4\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -61$.

所属章节: 第七章第三节

难度: 二级

9. 设 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}, \boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, 其中 $|\boldsymbol{a}|=2, |\boldsymbol{b}|=1$, 向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 试求 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ 及

$\text{Proj}_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{A}$.

解答: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = (2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}) \cdot (3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 6|\boldsymbol{a}|^2 - 3|\boldsymbol{b}|^2 + 7\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 6|\boldsymbol{a}|^2 - 3|\boldsymbol{b}|^2 + 7|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos \theta = 28$;

由于 $|\boldsymbol{B}|^2 = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B} = (3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot (3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 9|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 6\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 9|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 6|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos \theta = 31$,

所以 $\text{Proj}_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|} = \frac{28}{\sqrt{31}} = \frac{28\sqrt{31}}{31}$.

所属章节: 第七章第三节

难度: 二级

10. 设 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{B} = k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, |\boldsymbol{a}|=1, |\boldsymbol{b}|=2$, 且 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, 问:

(1) k 为何值时, $\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B}$;

(2) k 为何值时, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形面积为 6.

解答: (1) 要使 $\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$, 即 $(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 2k|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + (2+k)\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$, 代入条件即 $2k+4=0$, 解得 $k=-2$;

(2) 要使以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形面积为 6, 即 $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = 6$, 代入条件即 $|2-k|=3$,

解得 $k=-1$ 或 $k=5$.

所属章节：第七章第四节

难度：二级

11. 已知向量 $\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ 垂直于向量 $7\mathbf{a}-5\mathbf{b}$, 向量 $\mathbf{a}-4\mathbf{b}$ 垂直于向量 $7\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, 试求向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角.

解答：因为 $\mathbf{a}+3\mathbf{b} \perp 7\mathbf{a}-5\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-4\mathbf{b} \perp 7\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, 所以 $(\mathbf{a}+3\mathbf{b}) \cdot (7\mathbf{a}-5\mathbf{b})=0$, $(\mathbf{a}-4\mathbf{b}) \cdot (7\mathbf{a}-2\mathbf{b})=0$,

即 $7|\mathbf{a}|^2+16\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}-15|\mathbf{b}|^2=0$, $7|\mathbf{a}|^2-30\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}+8|\mathbf{b}|^2=0$,

由以上两式可得

$$|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=\sqrt{2}\sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}},$$

于是 $\cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{1}{2}$, $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = \frac{\pi}{3}$.

所属章节：第七章第三节

难度：二级

12. 设 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 2$, 求: $[(\mathbf{a}+\mathbf{b}), (\mathbf{b}+\mathbf{c}), (\mathbf{c}+\mathbf{a})]$.

解答: $[(\mathbf{a}+\mathbf{b}), (\mathbf{b}+\mathbf{c}), (\mathbf{c}+\mathbf{a})] = [(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times (\mathbf{b}+\mathbf{c})] \cdot (\mathbf{c}+\mathbf{a}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{c}+\mathbf{a}) = 2[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 4$.

所属章节：第七章第四节

难度：二级

13. 设 $\mathbf{a} = \{3, -2, 6\}$, $\mathbf{b} = \{-2, 1, 0\}$, 试求下列各向量的坐标:

$$(1) \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad (2) -\frac{1}{2}\mathbf{b}, \quad (3) \frac{1}{3}\mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

解答: (1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{3, -2, 6\} + \{-2, 1, 0\} = \{1, -1, 6\}$;

$$(2) -\frac{1}{2}\mathbf{b} = -\frac{1}{2}\{2, -1, 0\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, 0\right\};$$

$$(3) \frac{1}{3}\mathbf{a} + \mathbf{b} = \frac{1}{3}\{3, -2, 6\} + \{-2, 1, 0\} = \left\{-1, \frac{1}{3}, 2\right\}.$$

所属章节：第七章第二节

难度：一级

14. 求向量 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \sqrt{2}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ 的模以及它与坐标轴之间的夹角.

解答: $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2;$

与坐标轴的夹角余弦分别为 $\cos \alpha = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{2}, \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \gamma = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{2},$

故与坐标轴的夹角分别为 $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 60^\circ.$

所属章节: 第七章第二节

难度: 一级

15. 已知一向量的起点是 $A(2, -2, 5)$, 终点是 $B(-1, 6, 7)$, 试求:

(1) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在各坐标轴上的投影;

(2) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模和方向余弦;

(3) $\overrightarrow{AB}$ 的单位向量.

解答: 由于向量 $\overrightarrow{AB} = \{-3, 8, 2\}$, 所以

(1) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在各坐标轴上的投影为 $-3, 8, 2$;

(2) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模 $\sqrt{(-3)^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{77},$

方向余弦为 $\cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{77}}, \cos \beta = \frac{8}{\sqrt{77}}, \cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{77}};$

(3) $\overrightarrow{AB}$ 的单位向量 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}, \frac{2}{\sqrt{77}} \right\}.$

所属章节: 第七章第二节

难度: 一级

16. 已知向量 $\{3, -1, 2\}$ 的起点坐标为 $(2, 0, -5)$, 求它的终点坐标.

解答: 终点坐标为 $(3, -1, 2) + (2, 0, -5) = (5, -1, -3).$

所属章节：第七章第二节

难度：一级

17. 已知向量的终点为 $B(2, -1, 7)$ ，它在坐标轴上的投影依次为 4、-4 和 7，求该向量起点 A 的坐标.

解答：起点 A 的坐标 $(2, -1, 7) - (4, -4, 7) = (-2, 3, 0)$.

所属章节：第七章第二节

难度：一级

18. 已知向量 $\mathbf{a} = \{1, 1, 5\}$, $\mathbf{b} = \{2, -3, 5\}$, 求与 $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ 同向的单位向量.

解答：由于 $\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = \{1, 1, 5\} - 3\{2, -3, 5\} = \{-5, 10, -10\}$,

单位化，与 $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ 同向的单位向量为 $\frac{\mathbf{a} - 3\mathbf{b}}{|\mathbf{a} - 3\mathbf{b}|} = \frac{1}{15}\{-5, 10, -10\} = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$.

所属章节：第七章第二节

难度：一级

19. 设向量 $\mathbf{a} = \{l, 5, -1\}$, $\mathbf{b} = \{3, l, m\}$, 且 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$, 试求 l 与 m 的值.

(题目与解答不统一) 如果题目中向量为 $\mathbf{a} = \{l, 5, -1\}$, $\mathbf{b} = \{3, 1, m\}$, 则答案为 $l = 15, m = -\frac{1}{5}$. 即原参考答案，下面按原题解答.

参考答案： $l = 15, m = -\frac{1}{5}$.

解答：由于 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$, 所以 $\frac{l}{3} = \frac{5}{l} = \frac{-1}{m}$, 解得 $l = \sqrt{15}, m = -\frac{\sqrt{15}}{5}$ 或 $l = -\sqrt{15}, m = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

所属章节：第七章第二节

难度：一级

20. 已知向量 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, 试求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

解答： $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \times 2 + 1 \times (-3) + 2 \times (-1) = 1$;

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \{5, 7, -11\}.$$

所属章节：第七章第四节

难度：一级

21. 已知 $A(1, -2, 3)$ 、 $B(4, -4, -3)$ 、 $C(2, 4, 3)$ 和 $D(8, 6, 6)$ ，试求向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{CD}$ 上的投影.

$$\text{解答: } \overrightarrow{AB} = \{3, -2, -6\}, \overrightarrow{CD} = \{6, 2, 3\}, \text{Proj}_{\overrightarrow{CD}} \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} = -\frac{4}{7}.$$

所属章节：第七章第四节

难度：一级

22. 设直线 L 通过点 $(-2, 1, 3)$ 和 $(0, -1, 2)$ ，求点 $(10, 5, 10)$ 到直线 L 的距离.

解答：设 $A(-2, 1, 3)$, $B(0, -1, 2)$, $P(10, 5, 10)$ ，点 P 到直线 L 的距离为 d ，则

$$\overrightarrow{PA} = \{-12, -4, -7\}, \overrightarrow{PB} = \{-10, -6, -8\}, \overrightarrow{AB} = \{2, -2, -1\}$$

$$\text{利用 } S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}|, S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \times d, \text{ 解得}$$

$$d = 10\sqrt{2}.$$

所属章节：第七章第四节

难度：二级

23. 求点 $(1, -3, 2)$ 关于点 $(-1, 2, 1)$ 的对称点.

解答：设 $A(1, -3, 2)$, $B(-1, 2, 1)$ ，所求点为 $C(x, y, z)$ ，由题意知 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ ，即 $\{-2, 5, -1\} = \{x+1, y-2, z-1\}$ ，解得 $C(-3, 7, 0)$.

所属章节：第七章第四节

难度：一级

24. 求以向量 $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ 为相邻三棱的平行六面体的体积.

解答：由于 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -42$ ，所以所求六面体的体积为

$$V = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]| = 42.$$

所属章节：第七章第四节

难度：三级

25. 试证 $A(2, -1, -2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 3, 0)$ 和 $D(5, 0, -6)$ 四点共面.

解答：由题意 $\overrightarrow{AB} = \{-1, 3, 3\}$, $\overrightarrow{AC} = \{0, 4, 2\}$, $\overrightarrow{AD} = \{3, 1, -4\}$ ，由于

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

所以 A, B, C, D 四点共面.

所属章节：第七章第四节

难度：三级

26. 确定球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 7 = 0$ 的球心和半径.

参考答案：球心 $(1, -2, 2)$, $R = 4$. (本题参考答案有误)

解答：将原方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 7 = 0$ 配方，得 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 9$ ，故球心为 $(1, -2, 2)$ ，半径为 $R = 3$.

所属章节：第七章第五节

难度：一级

27. 一球面过坐标原点和 $A(2, 0, 0)$ 、 $B(1, 1, 0)$ 、 $C(1, 0, -1)$ 三点，试确定该球面的方程.

参考答案： $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$.

解答：设球面的方程为 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$ ，将它所经过的四个点的坐标代入，

即可解得 $x_0=1, y_0=z_0=0, R=1$, 即球面方程为 $(x-1)^2+y^2+z^2=1$.

所属章节: 第七章第五节

难度: 二级

28. 试求与 $M_1(2, -1, 3)$ 、 $M_2(4, 1, -2)$ 距离相等的点的轨迹方程.

参考答案: $4x+4y-10z=7$.

解答: 设动点坐标为 $P(x, y, z)$, 则由条件有 $|PM_1|=|PM_2|$, 故有

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=(x-4)^2+(y-1)^2+(z+2)^2,$$

化简得 $4x+4y-10z=7$.

所属章节: 第七章第五节

难度: 一级

29. 指出下列方程所表示的曲面:

$$(1) \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}; \quad (2) \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1;$$

$$(3) \frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1; \quad (4) z=2+y^2$$

解答: (1) 母线平行于 z 轴的圆柱面;

(2) 母线平行于 z 轴的双曲柱面;

(3) 母线平行于 x 轴的椭圆柱面;

(4) 母线平行于 x 轴的抛物柱面.

所属章节: 第七章第五节

难度: 一级

30. 说明下列旋转曲面是如何形成的并写出其名称:

$$(1) x^2+z^2-\frac{y^2}{4}=1; \quad (2) x^2+y^2=4z;$$

$$(3) \frac{z^2}{16} - \frac{x^2 + y^2}{9} = 1;$$

$$(4) x^2 + y^2 = 4z^2$$

解答: (1) 旋转单叶双曲面, 它是由双曲线 $\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{4} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} z^2 - \frac{y^2}{4} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转而成;

(2) 旋转抛物面, 它由抛物线 $\begin{cases} x^2 = 4z, \\ y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y^2 = 4z, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成;

(3) 旋转双叶双曲面, 它是由双曲线 $\begin{cases} \frac{z^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \frac{z^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成;

(4) 圆锥面, 它由相交的两条直线 $\begin{cases} x^2 = 4z^2, \\ y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y^2 = 4z^2, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成.

所属章节: 第七章第五节

难度: 一级

31. 建立下列旋转曲面的方程:

(1) 曲线 $L: \begin{cases} z^2 = 5x, \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面;

(2) yOz 平面上的椭圆 $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ 绕 z 轴旋转一周所生成的曲面;

(3) xOy 平面上的双曲线 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 绕 y 轴和 x 轴旋转一周所生成的曲面;

(4) 直线 $\begin{cases} y = 2x, \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所生成的曲面.

解答: (1) $y^2 + z^2 = 5x$;

$$(2) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1;$$

$$(3) \text{绕 } y \text{ 轴: } 4x^2 - 9y^2 + 4z^2 = 36,$$

$$\text{绕 } x \text{ 轴: } 4x^2 - 9y^2 - 9z^2 = 36;$$

$$(4) 4x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

所属章节：第七章第五节

难度：一级

32. 指出下列方程所表示的曲线：

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x = 3; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} (x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 25, \\ y+1 = 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1; \\ x-2 = 0 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x^2 = 4y; \\ z = 1 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1; \\ x-2 = 0. \end{cases}$$

解答：(1) 平面 $x=3$ 上的圆；

(2) 平面 $y=-1$ 上的圆；

(3) 平面 $x=2$ 上的双曲线；

(4) 平面 $z=1$ 上的抛物线；

(5) 平面 $x=2$ 上的椭圆.

所属章节：第七章第五节

难度：一级

33. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 36, \\ z = 2 \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线.

(原参考答案有误)

解答：在所给方程中消去 z ，得 $x^2 + y^2 = 12$ ，加上 $z=0$ ，即得 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12, \\ z = 0 \end{cases}$.

所属章节：第七章第五节

难度：一级

34. 求曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线.

解答：在所给方程中消去 z ，得 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$ ，加上 $z=0$ ，即得

$$\begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \\ z=0 \end{cases}$$

所属章节：第七章第五节

难度：一级

35. 求下列曲线在 xOy 平面上的投影：

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + 4z^2 = 1, \\ x^2 = y^2 + z^2; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 - y^2 + z^2 = -1. \end{cases}$$

解答：(1) 在所给方程中消去 z ，得 $5x^2 - 3y^2 = 1$ ，加上 $z=0$ ，即得 $\begin{cases} 5x^2 - 3y^2 = 1 \\ z=0 \end{cases}$ ；

(2) 在所给方程中消去 z ，得 $x^2 + y^2 = 4$ ，加上 $z=0$ ，另外由 $x^2 - y^2 + z^2 = -1$ 知

$$y^2 = x^2 + z^2 + 1, \text{ 故 } |y| \geq 1, \text{ 于是投影曲线为 } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z=0 \end{cases} \text{ 且 } |y| \geq 1.$$

所属章节：第七章第五节

难度：二级

36. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$ 在各坐标面上的投影：？

解答： xOy 面： $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{3}{4} \\ z=0 \end{cases}$ ， yOz 面： $\begin{cases} 2z-1=0, \\ x=0 \end{cases}$ 且 $|y| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ；

$$xOz \text{ 面： } \begin{cases} 2z-1=0, \\ y=0 \end{cases} \text{ 且 } |x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所属章节：第七章第五节

难度：二级

37. 求下列各平面的方程：

(1) 平行与(于) Oy 轴, 且通过点 $(1, -5, 1)$ 和 $(3, 2, -2)$;

(2) 通过 Ox 轴和点 $(4, -3, -1)$;

(3) 平行于 xOz 平面, 且通过点 $(3, 2, -7)$.

解答: (1) 由于所求平面平行于 Oy 轴, 故可设方程为 $Ax + Cz + D = 0$, 将另外两点坐标代入即得 $3x + 2z - 5 = 0$;

(2) 由于所求平面通过 Ox 轴, 故可设方程为 $By + Cz = 0$, 将另一点坐标代入即得 $y - 3z = 0$;

(3) 由于所求平面平行于 xOz 平面, 故可设方程为 $By + D = 0$, 又通过点 $(3, 2, -7)$, 故 $y = 2$.

所属章节: 第七章第六节

难度: 一级

38. 设点 $P(3, -6, 2)$ 为原点到一平面的垂足, 求该平面的方程.

解答: 法向量为 $\vec{n} = \vec{OP} = \{3, -6, 2\}$, 所求平面的方程为 $3(x-3) - 6(y+6) + 2(z-2) = 0$, 即 $3x - 6y + 2z - 49 = 0$.

所属章节: 第七章第六节

难度: 一级

39. 求通过两点 $(8, -3, 1)$ 和 $(4, 7, 2)$, 且垂直于平面 $3x + 5y - z - 21 = 0$ 的平面方程.

解答: 由条件可设法向量为

$$\vec{n} = \{-4, 10, 1\} \times \{3, 5, -1\} = \{-15, -1, -50\},$$

由点法式方程得

$$15x + y + 50z - 167 = 0.$$

所属章节: 第七章第六节

难度: 二级

40. 求通过点 $P(1,2,1)$ 且垂直于两平面 $x+y=0$ 和 $5y+z=0$ 的平面方程.

解答: 由条件可设法向量为

$$\vec{n} = \{1, 1, 0\} \times \{0, 5, 1\} = \{1, -1, 5\},$$

由点法式方程得

$$x - y + 5z - 4 = 0.$$

所属章节: 第七章第六节

难度: 二级

41. 求一个通过点 $(1, -5, 1)$ 和 $(3, 2, -1)$ 且平行 y 轴的平面方程.

解答: 由条件可设法向量为

$$\vec{n} = \{2, 7, -2\} \times \{0, 1, 0\} = \{2, 0, 2\},$$

由点法式方程得

$$x + z - 2 = 0.$$

所属章节: 第七章第六节

难度: 二级

42. 求 a 和 b 的值, 使:

(1) 平面 $2x + ay + 3z - 5 = 0$ 与 $bx - 6y - z + 2 = 0$ 平行;

(2) 平面 $3x - 5y + az - 3 = 0$ 与 $x + 3y + 2z + 5 = 0$ 垂直.

解答: (1) 要使平面 $2x + ay + 3z - 5 = 0$ 与 $bx - 6y - z + 2 = 0$ 平行, 则两个法向量平行, 故有

$$\frac{2}{b} = \frac{a}{-6} = \frac{3}{-1}, \text{ 解得 } a = 18, b = -\frac{2}{3};$$

(2) 要使平面 $3x - 5y + az - 3 = 0$ 与 $x + 3y + 2z + 5 = 0$ 垂直, 必须两个法向量垂直, 故有

$$3 \times 1 + (-5) \times 3 + a \times 2 = 0, \text{ 解得 } a = 6.$$

所属章节: 第七章第六节

难度: 一级

43. 求过点 $(2, -3, 8)$ 且平行于直线 $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+3}{5}$ 的直线方程.

解答: 由于两直线平行, 方向向量相同, 故得所求直线方程 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-8}{5}$.

所属章节: 第七章第七节

难度: 一级

44. 求过点 $(4, -2, 3)$ 且垂直于平面 $x+2y-3z+1=0$ 的直线方程.

解答: 由于所求直线垂直于已知平面, 它的方向向量与该平面的法向量相同, 即 $\vec{s} = \{1, 2, -3\}$,

于是所求方程为 $\frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

所属章节: 第七章第七节

难度: 一级

45. 求过点 $(-1, 2, 1)$ 且平行于直线 $\begin{cases} x+y-2z-1=0, \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$ 的直线方程.

解答: 已知直线的方向向量为 $\vec{s} = \{1, 1, -2\} \times \{1, 2, -1\} = \{3, -1, 1\}$, 所求直线方向向量与它相同,

于是所求直线方程为 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

所属章节: 第七章第七节

难度: 二级

46. 试求下列直线的标准方程:

$$(1) \begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z+9=0; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x-3z+5=0; \\ y-2z+8=0. \end{cases}$$

解答: (1) 令 $x=0$, 代入方程, 求得直线上一点坐标为 $(0, 1, 4)$,

方向向量为 $\vec{s} = \{2, -4, 1\} \times \{3, -1, -2\} = \{9, 7, 10\}$,

于是标准方程为 $\frac{x}{9} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-4}{10}$;

(2) 令 $z=0$, 代入方程, 求得直线上一点坐标为 $(-5, -8, 0)$,

方向向量为 $\vec{s} = \{1, 0, -3\} \times \{0, 1, -2\} = \{3, 2, 1\}$,

于是标准方程为 $\frac{x+5}{3} = \frac{y+8}{2} = \frac{z}{1}$.

所属章节：第七章第七节

难度：二级

47. 确定下列直线与平面的位置关系：

(1) $\frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{7} = \frac{z}{-3}$ 与 $4x-2y-2z-3=0$;

(2) $\frac{x}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-7}$ 与 $6x-4y+14z-9=0$.

解答：(1) 直线的方向向量 $\vec{s} = \{2, 7, -3\}$ ，平面的法向量 $\vec{n} = \{4, -2, -2\}$ ，易证 $\vec{s} \perp \vec{n}$ ，故所给直线与平面平行；

(2) 直线的方向向量 $\vec{s} = \{-3, 2, -7\}$ ，平面的法向量 $\vec{n} = \{6, -4, 14\}$ ，易证 $\vec{s} \parallel \vec{n}$ ，故所给直线与平面垂直.

所属章节：第七章第七节

难度：一级

48. 确定下列直线间的平行或垂直关系：

(1) $\begin{cases} x+2y-z=7, \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 3x+6y-3z=8, \\ 2x-y-z=0. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+2y=1, \\ 2y-z=1 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x-y=1, \\ x-2z=3. \end{cases}$

解答：(1) 直线 $\begin{cases} x+2y-z=7, \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$ 的方向向量为 $\vec{s}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \{3, 1, 5\}$,

直线 $\begin{cases} 3x+6y-3z=8, \\ 2x-y-z=0. \end{cases}$ 的方向向量为 $\vec{s}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \{-9, -3, -15\}$,

由于它们平行，所以两条直线平行；

(2) 直线 $\begin{cases} x+2y=1, \\ 2y-z=1 \end{cases}$ 的方向向量为 $\vec{s}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \{-2, 1, 2\}$,

直线 $\begin{cases} x-y=1, \\ x-2z=3. \end{cases}$ 的方向向量为 $\vec{s}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \{2, 2, 1\}$,

由于它们垂直, 所以两条直线垂直.

所属章节: 第七章第七节

难度: 二级

49. 求直线 $\frac{x+2}{3} = \frac{2-y}{1} = \frac{z+1}{2}$ 与平面 $2x+3y+3z-8=0$ 的交点和交角.

参考答案: $(1, 1, 1), \arcsin \frac{9\sqrt{77}}{154}$. (参考答案有误?)

解答: 将直线方程 $\frac{x+2}{3} = \frac{2-y}{1} = \frac{z+1}{2}$ 改写成参数形式 $\begin{cases} x=3t-2 \\ y=-t+2 \\ z=2t-1 \end{cases}$, 代入所给平面方程

$2x+3y+3z-8=0$, 解得 $t=1$, 再代回直线方程, 即得交点 $(1, 1, 1)$;

由于直线的方向向量为 $\vec{s} = \{3, 1, 2\}$, 平面的法向量 $\vec{n} = \{2, 3, 3\}$, 所以交角的正弦为

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{15}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{22}} = \frac{15\sqrt{77}}{154}, \text{ 于是交角为 } \arcsin \frac{15\sqrt{77}}{154}.$$

所属章节: 第七章第七节

难度: 二级

50. 求点 $(3, -1, -1)$ 在平面 $x+2y+3z-30=0$ 上的投影.

解答: 过已知点 $(3, -1, -1)$ 向已知平面作垂线 $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3}$, 参数形式为 $\begin{cases} x=t+3 \\ y=2t-1 \\ z=3t-1 \end{cases}$, 代入

已知平面解得参数 $t = \frac{16}{7}$, 于是交点也即所求投影点为 $\left(\frac{37}{7}, \frac{25}{7}, \frac{41}{7}\right)$.

所属章节: 第七章第七节

难度: 二级

51. 求点 $(2, 3, 1)$ 在直线 $\frac{x+7}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$ 上的投影.

解答: 过已知点作垂直于已知直线的平面 $(x-2)+2(y-1)+3(z-1)=0$,

再将已知直线的参数方程 $\begin{cases} x=t-7 \\ y=2t-2 \\ z=3t-2 \end{cases}$ 代入, 即得参数 $t=2$, 两者交点即所求投影点为 $(-5, 2, 4)$.

所属章节: 第七章第七节

难度: 二级

52. 在平面 $x+y+z=1$ 上求作一直线, 使它与直线 $y=1, z=-1$ 垂直相交.

解答: 由于所求直线与直线 $y=1, z=-1$ 垂直, 故可作平面平行与该已知直线, 得平面方程

$x=x_0$, 联立已知平面方程 $x+y+z=1$, 得一条直线 $\begin{cases} x=x_0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$, 又由于所求直线与直线

$y=1, z=-1$ 相交, 将 $y=1, z=-1$ 代入直线方程 $\begin{cases} x=x_0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$, 可得 $x_0=1$, 于是所求直线方程

为 $\begin{cases} x=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$, 即 $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

所属章节: 第七章第七节

难度: 三级

53. 通过点 $(-1, 0, 4)$ 作一直线, 使它平行于平面 $3x-4y+z-10=0$, 且与直线 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交.

解答: 过点 $(-1, 0, 4)$ 作一平面, 使它平行于平面 $3x-4y+z-10=0$, 得 $3x-4y+z-1=0$,

由于所求直线与已知直线 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交, 将已知直线方程化为参数方程 $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=t+3 \\ z=2t \end{cases}$,

代入平面方程 $3x-4y+z-1=0$, 得交点 $(\frac{41}{7}, \frac{37}{7}, \frac{32}{7})$, 此为所求直线上另一点, 过两点作出直

线 $\frac{x+1}{48} = \frac{y}{37} = \frac{z-4}{4}$, 即为所求.

所属章节：第七章第七节

难度：三级

54. 求两异面直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ 和 $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$ 之间的距离.

解答：分别在两条已知直线上任取一点，如取 $P(-1, 0, 1), Q(0, -1, 2)$ ，连接两点得向量

$\vec{PQ} = \{1, -1, 1\}$ ，作与两条已知直线都垂直的向量 $\vec{s} = \{1, 1, 2\} \times \{1, 3, 4\} = \{-2, -2, 2\}$ ，

则所求距离为 $d = \left| \text{Proj}_{\vec{s}} \vec{PQ} \right| = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{2}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

所属章节：第七章第七节

难度：三级

55. 一直线通过点 $(1, 2, 1)$ 并与 $\frac{x}{2} = y = -z$ 相交，且垂直于直线 $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ ，求它的方程.

解答：过已知点 $P(1, 2, 1)$ 作垂直于已知直线 $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ 的平面，得

$$\pi: 3x + 2y + z - 8 = 0,$$

它与已知直线 $\frac{x}{2} = y = -z$ 交于点 $Q(\frac{16}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{8}{7})$ ，连接 P, Q ，即得所求直线

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{5}.$$

所属章节：第七章第七节

难度：二级

56. 求通过直线 $\begin{cases} x+y=0, \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$ 且平行于直线 $x=y=z$ 的平面方程.

解答：过直线 $\begin{cases} x+y=0, \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$ 的平面束为 $x+y+\lambda(x-y+z-2)=0$ ，即

$(1+\lambda)x + (1-\lambda)y + \lambda z - 2\lambda = 0$ ，由于它与直线 $x=y=z$ 平行，故 $(1+\lambda) + (1-\lambda) + \lambda = 0$ ，解得

$\lambda = -2$ ，于是所求平面方程为 $x - 3y + 2z - 4 = 0$.

所属章节：第七章第七节

难度：二级

57. 求通过直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 且垂直于平面 $4x-y+z=1$ 的平面方程.

解答：过直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 的平面束为 $2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0$ ，即

$(2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0$ ，由于它垂直于平面 $4x-y+z=1$ ，故两者的法向量平行，解得 $\lambda=-\frac{13}{11}$ ，代回平面束方程，即得所求平面方程 $17x+31y-37z-117=0$ 。

所属章节：第七章第七节

难度：二级

58. 过两平面 $x+y-z=0$ 和 $x+2y+z=0$ 的交线，作两个互相垂直的平面，且使其中一个平面通过点 $A(0, 1, -1)$ 。

解答：过两平面 $x+y-z=0$ 和 $x+2y+z=0$ 的交线的平面束方程为 $x+y-z+\lambda(x+2y+z)=0$ ，

即 $(1+\lambda)x+(1+2\lambda)y+(-1+\lambda)z=0$ ，由于其中一个平面经过点 $A(0,1,-1)$ ，将此点坐标代入平面束方程，得 $\lambda=-2$ ，得到一个平面 $x+3y+3z=0$ ，

由于平面束中的另一个平面与上面平面垂直，利用法向量垂直，解得 $9x+8y-11z=0$ 。

所属章节：第七章第七节

难度：三级

第八章 多元函数的定义

1. 求下列函数的定义域, 并作图表示:

$$(1) z = \arcsin \frac{x}{3} + \sqrt{xy}; \quad (2) z = \ln(y^2 - 4x + 8);$$

$$(3) z = x + \sqrt{y}; \quad (4) z = \sqrt{x - \sqrt{y}};$$

$$(5) z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}} (R > r > 0);$$

$$(6) z = \frac{1}{\sqrt{\ln xy}}.$$

解答: 本题图略

$$(1) \begin{cases} -3 \leq x \leq 0, & 0 \leq x \leq 3, \\ y \leq 0, & y \geq 0; \end{cases}$$

$$(2) y^2 > 4(x - 2);$$

$$(3) |x| < +\infty, 0 \leq y < +\infty;$$

$$(4) x \geq \sqrt{y} \text{ 且 } y \geq 0;$$

$$(5) r^2 < x^2 + y^2 \leq R^2;$$

$$(6) xy > 1.$$

所属章节: 第八章第一节

难度: 一级

2. 试用不等式表示由抛物线 $y = x^2$ 和 $y^2 = x$ 所围成的区域 (含边界)。

解答: $0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.

所属章节: 第八章第一节

难度: 一级

3. 设 $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$, 求 $f\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ 及 $f(1, -1)$.

解答: $f\left(\frac{1}{2}, 3\right) = \frac{5}{3}, f(1, -1) = -2$.

所属章节: 第八章第一节

难度: 一级

4. 设 $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y}$, 求 $f(tx, ty)$.

解答: $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$.

所属章节: 第八章第一节

难度: 一级

5. 设 $f\left(x+y, \frac{x}{y}\right) = x^2 - y^2$, 求 $f(x, y)$.

解答: 令 $\begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{uv}{v+1} \\ y = \frac{u}{v+1} \end{cases}$, 代入原式得

$$f(u, v) = \left(\frac{uv}{v+1}\right)^2 - \left(\frac{u}{v+1}\right)^2 = \frac{u^2(v-1)}{v+1},$$

$$\text{即 } f(x, y) = \frac{x^2(y-1)}{y+1}$$

注: 如果题目是“设 $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$, 求 $f(x, y)$.” 则答案为

令 $\begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{v+1} \\ y = \frac{uv}{v+1} \end{cases}$, 代入原式得

$$f(u, v) = \left(\frac{u}{v+1}\right)^2 - \left(\frac{uv}{v+1}\right)^2 = \frac{u^2(1-v)}{v+1},$$

$$\text{即 } f(x, y) = \frac{x^2(1-y)}{y+1}.$$

所属章节: 第八章第一节

难度: 一级

6. 设 $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} (x, y > 0)$, 求 $f(x)$.

解答: 因为 $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \frac{\sqrt{1 + (y/x)^2}}{y/x}$,

$$\text{所以 } f(x) = \frac{\sqrt{1+(x)^2}}{x}.$$

所属章节：第八章第一节

难度：一级

7. 设 $z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x}-1)$, 若当 $y=1$ 时 $z=x$, 求函数 f 和 z .

解答: $x = 1 + f(\sqrt{x}-1)$

$$f(\sqrt{x}-1) = x-1 = (\sqrt{x}-1)^2 + 2(\sqrt{x}-1)$$

$$f(x) = x^2 + 2x$$

$$z = \sqrt{y} + x - 1.$$

所属章节：第八章第一节

难度：二级

8. 求下列函数的间断点或间断线:

$$(1) \ z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (2) \ z = \frac{1}{\sin \pi x} + \frac{1}{\sin \pi y};$$

$$(3) \ z = \frac{1}{y^2 - 2x}; \quad (4) \ z = \frac{1}{x-y}.$$

解答: (1) $(0,0)$;

$$(2) \ x = n \text{ 或 } y = m (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots);$$

$$(3) \ y^2 = 2x;$$

$$(4) \ x = y.$$

所属章节：第八章第二节

难度：一级

9. 求下列函数在指定点处的偏导数:

$$(1) \text{ 设 } f(x, y) = (1 + xy)^y, \text{ 求 } f_x(1,1) \text{ 和 } f_y(1,1);$$

$$(2) \text{ 设 } f(x, y) = \ln \left(x + \frac{y}{2x} \right), \text{ 求 } f_x(1,0);$$

$$(3) \text{ 设 } z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ 求 } \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=3 \\ y=4}};$$

(4) 设 $z = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{y=1}$.

解答: (1) $f_x(1,1)=1, f_y(1,1)=2\ln 2+1$;

(2) $f_x(1,0)=1$;

(3) $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=3 \\ y=4}} = \frac{2}{5}$;

(4) $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{y=1} = 1$.

所属章节: 第八章第三节

难度: 一级

10. 求下列函数对每个自变量的偏导数:

(1) $z = xy + \frac{x}{y}$;

(2) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;

(3) $z = \frac{x+y}{x-y} \sin \frac{x}{y}$;

(4) $z = \arctan \sqrt{x^y}$;

(5) $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$;

(6) $z = \frac{e^{xy}}{e^x + e^y}$;

(7) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(8) $z = \ln \tan \frac{x}{y}$.

解答:

(1) $z_x = y + \frac{1}{y}, z_y = x - \frac{x}{y^2}$;

(2) $z_x = 3x^2 - 3y, z_y = 3y^2 - 3x$;

(3) $z_x = -\frac{2y}{(x-y)^2} \sin \frac{x}{y} + \frac{x+y}{y(x-y)} \cos \frac{x}{y}$;

$z_y = \frac{2x}{(x-y)^2} \sin \frac{x}{y} - \frac{x(x+y)}{y^2(x-y)} \cos \frac{x}{y}$;

(4) $z_x = \frac{y\sqrt{x^y}}{2x(1+x^y)}, z_y = \frac{\sqrt{x^y} \ln x}{2(1+x^y)}$;

(5) $z_x = \sqrt{y} - \frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}}y, z_y = \frac{1}{2}xy^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

$$(6) \quad z_x = \frac{e^{xy}(ye^x + xe^y - e^x)}{(e^x + e^y)^2}, z_y = \frac{e^{xy}(xe^x + ye^y - e^y)}{(e^x + e^y)^2};$$

$$(7) \quad z_x = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, z_y = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}};$$

$$(8) \quad z_x = \frac{2}{y} \csc \frac{2x}{y}, z_y = -\frac{2x}{y^2} \csc \frac{2x}{y}.$$

所属章节：第八章第三节

难度：一级

11. 求曲线 $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$, 在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线与 Ox 轴的夹角。

解答： $\begin{cases} x = x \\ y = 4 \\ z = \frac{x^2}{4} + 4 \end{cases}$, 切向量为 $\vec{T}|_{(2,4,5)} = (1, 0, \frac{x}{2})|_{(2,4,5)} = (1, 0, 1)$ 。 Ox 轴的方向向量为 $\vec{i}$

$$\text{则 } \cos \alpha = \frac{|\vec{T} \cdot \vec{i}|}{|\vec{T}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

所属章节：第八章第三节

难度：二级

12. 求曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{1 + x^2 + y^2} \\ x = 1 \end{cases}$, 在点 $(1, 1, \sqrt{3})$ 处的切线与法平面方程。

解答： $\begin{cases} x = 1 \\ y = y \\ z = \sqrt{2 + y^2} \end{cases}$, 则曲线的切向量为 $\vec{T}|_{(1,1,\sqrt{3})} = (0, 1, \frac{y}{\sqrt{2+y^2}})|_{(1,1,\sqrt{3})} = (0, 1, \frac{\sqrt{3}}{3})$

$$\text{则切线方程为 } \begin{cases} z - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(y - 1) \\ x = 1 \end{cases}, \text{法平面的方程 } \sqrt{3}y + z - 2\sqrt{3} = 0.$$

所属章节：第八章第三节

难度：二级

13. 求下列函数的二阶偏导数：

$$(1) \quad z = \sin^2(ax + by); \quad (2) \quad z = y^{\ln x};$$

$$(3) \quad z = x^y; \quad (4) \quad z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$$

解答:

$$(1) \quad z_x = 2a \sin(ax+by) \cos(ax+by) = a \sin 2(ax+by),$$

$$z_y = 2b \sin(ax+by) \cos(ax+by) = b \sin 2(ax+by);$$

$$z_{xx} = 2a^2 \cos 2(ax+by), z_{yy} = 2b^2 \cos 2(ax+by), z_{xy} = 2ab \cos(ax+by);$$

$$(2) \quad z_x = y^{\ln x} \ln y, z_y = y^{\ln x-1} \ln x$$

$$z_{xx} = \frac{(\ln y - 1) \ln y}{x^2} y^{\ln x}, z_{yy} = y^{\ln x-2} \ln x (\ln x - 1), z_{xy} = \frac{\ln x \ln y + 1}{xy} y^{\ln x};$$

$$(3) \quad z_x = yx^{y-1}, z_y = x^y \ln x$$

$$z_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, z_{yy} = x^y \ln^2 x, z_{xy} = x^{y-1}(1+y \ln x)$$

$$(4) \quad z_x = \frac{1}{1+(\frac{x+y}{1-xy})^2} \cdot \frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{同理 } z_y = \frac{1}{1+y^2}$$

$$z_{xx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, z_{yy} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}, z_{xy} = z_{yx} = 0.$$

所属章节: 第八章第三节

难度: 一级

$$14. \quad \text{设 } z = x \ln(xy), \text{ 求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ 和 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

$$\text{解答: } z_x = \ln(xy) + 1$$

$$z_{xx} = \frac{1}{x}, z_{xy} = \frac{1}{y}.$$

所属章节: 第八章第三节

难度: 二级

$$15. \quad \text{设 } z = \ln(\sqrt{x^2+y^2}), \text{ 求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

解答: $z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$

$$z_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, z_y = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$z_{xx} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}, z_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$z_{xx} + z_{yy} = 0.$$

所属章节: 第八章第三节

难度: 二级

16. 设 $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$, 证明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$.

$$\text{解答: } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + y \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}$$

所属章节: 第八章第三节

难度: 二级

17. 设 $z = e^{xy^{-2}}$, 证明 $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

$$\text{解答: } \frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy^{-2}} y^{-2}, \frac{\partial z}{\partial y} = -2xy e^{xy^{-2}} y^{-3}$$

$$2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy e^{xy^{-2}} y^{-2} + (-2xy e^{xy^{-2}} y^{-2}) = 0.$$

所属章节: 第八章第三节

难度: 二级

18. 验证 $z = e^x \cos y$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

$$\text{解答: } \frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cos y, \frac{\partial z}{\partial y} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \cos y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

所属章节：第八章第三节

难度：二级

19. 设 $u = x + \frac{x-y}{y-z}$, 证明 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$.

解答: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \frac{1}{y-z}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z-x}{(y-z)^2}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x-y}{(y-z)^2}.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1.$$

所属章节：第八章第三节

难度：二级

20. 设 $z = \ln(e^x + e^y)$, 证明 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$.

解答: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{e^x \cdot e^y}{(e^x + e^y)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{e^x \cdot e^y}{(e^x + e^y)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

所属章节：第八章第三节

难度：二级

21. 求函数 $z = x^2 y^3$ 当 $x=2, y=-1, \Delta x=0.02, \Delta y=-0.01$ 时的全增量和全微分。

解答: $\Delta z = z(2.02, -1.01) - z(2, -1) \approx -0.204.$

$$dz = z_x(2, -1)\Delta x + z_y(2, -1)\Delta y = -4 \cdot 0.02 - 12 \cdot 0.01 = -0.2$$

所属章节：第八章第五节

难度：一级

22. 求函数 $z = \frac{y}{x}$ 当 $x=2, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=0.2$ 时的全增量和全微分。

解答: $\Delta z = z(2.1, 1.2) - z(2, 1) \approx 0.071.$

$$dz = z_x(2,1)\Delta x + z_y(2,1)\Delta y = -\frac{1}{4} \cdot 0.1 + \frac{1}{2} \cdot 0.2 = 0.075$$

所属章节：第八章第五节

难度：一级

23. 求下列各函数的全微分：

$$(1) z = \frac{x}{y}; \quad (2) z = \ln(x^2 + y^2);$$

$$(3) z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (4) z = \arctan \frac{y}{x};$$

$$(5) u = (xy)^z; \quad (6) u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}.$$

解答：(1) $dz = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy;$

$$(2) dz = \frac{2xdx + 2ydy}{x^2 + y^2};$$

$$(3) dz = \frac{y^2dx - xydy}{(x^2 + y^2)^{3/2}};$$

$$(4) dz = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2};$$

$$(5) du = (xy)^z \left(\frac{z}{x}dx + \frac{z}{y}dy + \ln(xy)dz \right);$$

$$(6) du = \frac{1}{yz} \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{z}-1} dx - \frac{x}{y^2 z} \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{z}-1} dy - \frac{1}{z^2} \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{z}} \ln \left(\frac{x}{y} \right) dz.$$

所属章节：第八章第五节

难度：二级

24. 求下列近似值：

$$(1) (10.1)^{2.03}; \quad (2) \sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3}.$$

解答：(1) 设函数 $f(x, y) = x^y$ ，显然要计算 $f(10.1, 2.03)$ ，取 $x=10, y=2, \Delta x=0.1, \Delta y=0.03$ ，

由于 $f(10, 2)=100$ ， $f_x(x, y)=yx^{y-1}$, $f_y(x, y)=x^y \ln x$. $f_x(10, 2)=20$, $f_y(10, 2)=100 \ln 10$.

$$(10.1)^{2.03} \approx 100 + 20 \cdot 0.1 + 100 \ln 10 \cdot 0.03 = 108.908$$

(2) 设函数 $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$, 显然要计算 $f(1.02, 1.97)$, 取 $x=1, y=2, \Delta x=0.02, \Delta y=-0.03$

由于 $f(1, 2) = 3$, $f_x(x, y) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}, f_y(x, y) = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \cdot f_x(1, 2) = \frac{1}{2}, f_y(1, 2) = 2$.

$$\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3} \approx 3 + \frac{1}{2} \cdot 0.02 - 2 \cdot 0.03 = 2.95$$

所属章节: 第八章第五节

难度: 二级

25. 扇形中心角 $\alpha = 60^\circ$, 半径 $R=20\text{cm}$, 若将 α 增加 1° 要使扇形面积不变, 应把扇形的半径 R 减少多少?

解答: 题目转化为: $\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}, \Delta\alpha = \frac{\pi}{360}, r = 20\text{cm}$, 函数为 $S(\alpha, r) = \frac{1}{2}\alpha r^2, \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}r^2, \frac{\partial S}{\partial r} = \alpha r$ 求 Δr .

由全微分公式: $S(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{360}, 20 + \Delta r) \approx S(\frac{\pi}{3}, 20) + \frac{\partial S}{\partial \alpha}(\frac{\pi}{3}, 20) \cdot \frac{\pi}{360} + \frac{\partial S}{\partial r}(\frac{\pi}{3}, 20)\Delta r$.

而 $S(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{360}, 20 + \Delta r) = S(\frac{\pi}{3}, 20)$

即 $\frac{\partial S}{\partial \alpha}(\frac{\pi}{3}, 20) \cdot \frac{\pi}{360} = -\frac{\partial S}{\partial r}(\frac{\pi}{3}, 20)\Delta r$.

解得 $\Delta r = \frac{1}{6} \approx 0.17\text{cm}$.

所属章节: 第八章第五节

难度: 三级

26. 设 $z = x^2y - y^2x$, 而 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 求 $\frac{\partial z}{\partial r}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

解答: $\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = (2xy - y^2)\cos\theta + (x^2 - 2xy)\sin\theta = 3r^2\cos\theta\sin\theta(\cos\theta - \sin\theta)$,

$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -(2xy - y^2)r\sin\theta + (x^2 - 2xy)r\cos\theta = r^3(\cos\theta + \sin\theta)\left(1 - \frac{3}{2}\sin 2\theta\right)$

所属章节: 第八章第四节

难度: 一级

27. 设 $z = u^2 \ln v$, 且 $u = \frac{y}{x}, v = 3y - 2x$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解答: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \ln v \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{u^2}{v} \cdot (-2) = -\frac{2y}{x} \left[\frac{y}{x^2} \ln(3y - 2x) + \frac{y}{x(3y - 2x)} \right]$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \ln v \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{u^2}{v} \cdot 3 = \frac{y}{x} \left[\frac{2}{x} \ln(3y-2x) + \frac{3y}{x(3y-2x)} \right].$$

章节：第八章第四节

难度：一级

28. 设 $z = ue^v$, 而 $u = x^2 + y^2$, $v = \frac{x^2 + y^2}{xy}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解答:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = e^v \cdot 2x + ue^v \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 y} = e^{\frac{x^2 + y^2}{xy}} \left(2x + \frac{x^4 - y^4}{x^2 y} \right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = e^v \cdot 2y + ue^v \cdot \frac{y^2 - x^2}{x^2 y} = e^{\frac{x^2 + y^2}{xy}} \left(2y + \frac{y^4 - x^4}{xy^2} \right),$$

章节：第八章第四节

难度：一级

29. 设 $z = (2x + y)^{2x+y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解答: 对数求导法则, $\ln z = (2x + y) \ln(2x + y)$,

$$\text{两边对 } x, y \text{ 求偏导: } \frac{z_x}{z} = 2 \ln(2x + y) + 2, \frac{z_y}{z} = \ln(2x + y) + 1,$$

$$\text{求解得: } \frac{\partial z}{\partial x} = 2(2x + y)^{2x+y} [\ln(2x + y) + 1], \frac{\partial z}{\partial y} = (2x + y)^{2x+y} [\ln(2x + y) + 1].$$

章节：第八章第四节

难度：二级

30. 设 $u = \sin(\xi + \eta^2 + \zeta^3)$, 而且 $\xi = x + y + z$, $\eta = xy + yz + zx$, $\zeta = xyz$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial z}$.

解答:
$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x + u_\zeta \zeta_x$$

$$= \cos(\xi + \eta^2 + \zeta^3) + \cos(\xi + \eta^2 + \zeta^3) \cdot 2(xy + yz + zx) \cdot (y + z) + \cos(\xi + \eta^2 + \zeta^3) \cdot 3(xyz)^2 \cdot yz$$

$$= \left[1 + 2(xy + yz + zx)(y + z) + 3(xyz)^2 yz \right] \cos \left[x + y + z + (xy + yz + zx)^2 + (xyz)^3 \right],$$

同理可知: $u_y = \left[1 + 2(xy + yz + zx)(x + z) + 3(xyz)^2 xz \right] \cos \left[x + y + z + (xy + yz + zx)^2 + (xyz)^3 \right],$

$$u_z = \left[1 + 2(xy + yz + zx)(x + y) + 3(xyz)^2 xy \right] \cos \left[x + y + z + (xy + yz + zx)^2 + (xyz)^3 \right].$$

章节：第八章第四节

难度：三级

31. 设 $z = \arcsin(x - y^2)$, 而 $x = 3t, y = 4t^2$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

$$\text{解答: } \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-y^2)^2}} \cdot 3 + \frac{-2y}{\sqrt{1-(x-y^2)^2}} \cdot 8t = \frac{3-64t^3}{\sqrt{1-[3t-(4t^2)^2]^2}}$$

章节：第八章第四节

难度：二级

32. 设 $z = \tan(3t + 2x^2 - y)$, 而 $x = \frac{1}{t}, y = t^2$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

$$\text{解答: } \frac{dz}{dt} = \frac{-2t^4 + 3t^3 - 4}{t^3} \sec^2 \frac{-t^4 + 3t^3 + 2}{t^2}. \quad (\text{原参考答案有误?})$$

章节：第八章第四节

难度：二级

33. 设 $u = f(x, y, z)$, 而 $x = t, y = \ln t, z = \tan t$, 求 $\frac{du}{dt}$.

$$\text{解答: } \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = f_x + \frac{1}{t} f_y + f_z \sec^2 t.$$

章节：第八章第四节

难度：一级

34. 设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\text{解答: } z_x = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2, z_y = -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2.$$

章节：第八章第四节

难度：二级

35. 设 $z = yf\left(\frac{y}{x}\right)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\text{解答: } z_x = -\frac{y^2}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$z_y = f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right).$$

章节：第八章第四节

难度：二级

36. 设 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$, 证明 $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

解答: 由于 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xf'}{f^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f + 2y^2 f'}{f^2}$,

$$\text{代入可得 } \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

章节: 第八章第四节

难度: 三级

37. 设 $z = \frac{1}{x} f\left(\frac{y}{x}\right)$, 证明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$.

解答: 由于 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} f - \frac{y}{x^3} f'$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2} f'$,

$$\text{代入可得 } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

章节: 第八章第四节

难度: 三级

38. 设 $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f 可导, 证明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

解答: 由于 $\frac{\partial z}{\partial x} = y + f - \frac{y}{x} f'$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x + f'$,

$$\text{代入可得 } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + xf - yf' + xy + yf' = xy + z.$$

章节: 第八章第四节

难度: 二级

39. 试证: 柯西—黎曼方程在极坐标 (r, θ) 下可化为 $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$, $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$.

解答: 首先将 x, y 化为极坐标: $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, 此时视 x, y 为中间变量得:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}.$$

可知 $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta, .$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial x} \cdot r \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot r \cos \theta = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot r \cos \theta = r \frac{\partial u}{\partial r}.$$

同理可知 $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$

章节：第八章第四节

难度：三级

40. 设 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, v = \arctan \frac{y}{x}$, 若取 u, v 作为新的自变量, 试变换方程

$$(x+y) \frac{\partial z}{\partial x} - (x-y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

解答: 由 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, v = \arctan \frac{y}{x}$ 可得 $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

代入等式的右边

$$\begin{aligned} (x+y) \frac{\partial z}{\partial x} - (x-y) \frac{\partial z}{\partial y} &= (e^u \cos v + e^u \sin v) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\cos v}{e^u} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\sin v}{e^u} \right) - (e^u \cos v - e^u \sin v) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\sin v}{e^u} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\cos v}{e^u} \right) \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} \cos^2 v - \frac{\partial z}{\partial v} \sin^2 v + \frac{\partial z}{\partial u} \sin^2 v - \frac{\partial z}{\partial v} \cos^2 v = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned}$$

等于左边 $\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$

章节：第八章第四节

难度：三级

41. 求下列函数对自变量的二阶偏导数, f 具有二阶连续偏导数:

$$(1) \quad z = f(xy^2, x^2y); \quad (2) \quad z = f\left(x, \frac{x}{y}\right);$$

$$(3) \quad z = f(x^2 + y^2); \quad (4) \quad z = f\left(x+y, xy, \frac{x}{y}\right).$$

解答: (1) $z_{xx} = (y^2 f_{11} + 2xy f_{12}) y^2 + (y^2 f_{12} + 2xy f_{22}) 2xy + 2y f_2$

$$= y^4 f_{11} + 4xy^3 f_{12} + 4x^2 y^2 f_{22} + 2y f_2,$$

$$z_{xy} = (2xy f_{11} + x^2 f_{12}) y^2 + 2y f_1 + (2xy f_{21} + x^2 f_{22}) 2xy + 2x f_2$$

$$= 2xy^3 f_{11} + 5x^2 y^2 f_{12} + 2x^3 y f_{22} + 2y f_1 + 2x f_2,$$

$$\begin{aligned} z_{yy} &= (2xyf_{11} + x^2f_{12})2xy + 2xf_1 + (2xyf_{21} + x^2f_{22})x^2 \\ &= 4x^2y^2f_{11} + 4x^3yf_{12} + x^4f_{22} + 2xf_1; \end{aligned}$$

$$(2) \quad z_{xx} = f_{11} + \frac{1}{y}f_{12} + \frac{1}{y}\left(f_{21} + \frac{1}{y}f_{22}\right) = f_{11} + \frac{2}{y}f_{12} + \frac{1}{y^2}f_{22},$$

$$z_{xy} = -\frac{x}{y^2}\left(f_{12} + \frac{1}{y}f_{22}\right) - \frac{1}{y^2}f_2 = -\frac{x}{y^2}f_{12} - \frac{x}{y^3}f_{22} - \frac{1}{y^2}f_2,$$

$$z_{yy} = \frac{2x}{y^3}f_2 + \frac{x^2}{y^4}f_{22};$$

$$(3) \quad z_{xx} = 2f' + 4x^2f'', z_{xy} = 4xyf'', z_{yy} = 2f' + 4y^2f'';$$

$$(4) \quad z_{xx} = f_{11} + y^2f_{22} + \frac{1}{y^2}f_{33} + 2yf_{12} + 2f_{23} + \frac{2}{y}f_{13},$$

$$z_{xy} = f_{11} + xyf_{22} - \frac{x}{y^3}f_{33} + (x+y)f_{12} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)f_{13} - \frac{1}{y^2}f_3 + f_2,$$

$$z_{yy} = f_{11} + x^2f_{22} + \frac{x^2}{y^4}f_{33} + 2xf_{12} - \frac{2x}{y^2}f_{13} - \frac{2x^2}{y^2}f_{23} + \frac{2x}{y^3}f_3.$$

章节：第八章第四节

难度：三级

42. 设 $u = xy, v = \frac{x}{y}$, 若以 u, v 为新的自变量, 试变换方程 $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

解答：由 $u = xy, v = \frac{x}{y}$ 可知 $x^2 = uv, y^2 = \frac{u}{v}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}, \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{x^2}{y^4} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{x^2}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{x^2}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{2x}{y^3} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 \left(y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \right) + y^2 \left(x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{x^2}{y^4} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{x^2}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{x^2}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{2x}{y^3} \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

$$= u^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + uv \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + uv \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + u^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - uv \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - uv \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + 2v \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= 4uv \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - 2v \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

$$\text{整理可得 } 2u \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

章节：第八章第四节

难度：三级

43. 设变换 $\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay \end{cases}$ 可把方程 $6z_{xx} + z_{xy} - z_{yy} = 0$ 简化为 $z_{uv} = 0$, 求常数 a .

解答： $z_x = z_u + z_v, z_y = -2z_u + az_v$.

$$z_{xx} = z_{uu} + z_{vv} + z_{uv} + z_{vu}, z_{xy} = -2z_{uv} + az_{vv}, z_{yy} = 4z_{uu} - 2az_{uv} - 2az_{vu} + a^2 z_{vv}.$$

$$6z_{xx} + z_{xy} - z_{yy} = (10 + 5a)z_{uv} + (6 + a - a^2)z_{vv} = 0.$$

又因为可以化为 $z_{uv} = 0$, 则 z_{vv} 的系数为 0, z_{uv} 的系数不为 0.

可得 $a = 3$.

章节：第八章第四节

难度：三级

44. 求下列隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

$$(1) \sin xy - e^{xy} - x^2 y = 0;$$

$$(2) xy + \ln y + \ln x = 0;$$

$$(3) \arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$(4) y^x = x^y.$$

解答：(1) 令 $F(x, y) = \sin xy - e^{xy} - x^2 y$, 则

$$F_x = y \cos xy - ye^{xy} - 2xy, F_y = x \cos xy - xe^{xy} - x^2$$

$$\text{所以, } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{y[\cos(xy) - e^{xy} - 2x]}{x[\cos(xy) - e^{xy} - x]}.$$

(2) 令 $F(x, y) = xy + \ln y + \ln x$,

$$\text{则 } F_x = y + \frac{1}{x}; F_y = x + \frac{1}{y},$$

所以 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

(3) 令 $F(x, y) = \arctan \frac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2}$,

则 $F_x = \frac{-x-y}{x^2+y^2}; F_y = \frac{x-y}{x^2+y^2}$

所以, $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.

(4) 由 $y^x = x^y$, 得 $x \ln y = y \ln x$, 令 $F(x, y) = x \ln y - y \ln x$, 则

$F_x = \ln y - \frac{y}{x}; F_y = \frac{x}{y} - \ln x$,

所以, $\frac{dy}{dx} = -\frac{y(x \ln y - y)}{x(x - y \ln x)}$.

章节: 第八章第六节

难度: 一级

45. 设 $e^z - xyz = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解答: 令 $F(x, y) = e^z - xyz$, 则

$F_x = -yz, F_y = -xz, F_z = e^z - xy = xy(z-1)$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{z}{x(z-1)}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{z}{y(z-1)}$.

章节: 第八章第六节

难度: 一级

46. 设 $\frac{x}{z} = \ln \sin \frac{z}{y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解答: $F(x, y) = \frac{x}{z} - \ln \sin \frac{z}{y}$

$F_x = \frac{1}{z}; F_y = \frac{z}{y^2} \cot \frac{z}{y}; F_z = -\frac{x}{z^2} - \frac{1}{y} \cot \frac{z}{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{xy + z^2 \cot \frac{z}{y}}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{z^3 \cot \frac{z}{y}}{y \left(xy + z^2 \cot \frac{z}{y} \right)}.$$

章节：第八章第六节

难度：二级

47. 求下列函数在指定点的导数或偏导数：

(1) $\sin(xy) = \ln \frac{x+1}{y} + 1$, 求 $y'(0)$;

(2) $e^y + xy = e$, 求 $y'(0)$;

(3) $e^{xy} + \ln \frac{y}{x+1} = 0$, 求 $y'(0)$;

(4) 设 $e^z + xyz = e$ 确定了 $z = z(x, y)$, 求 $z_x(0, 0)$.

解答：(1) 令 $F(x, y) = \sin(xy) - \ln(x+1) + \ln y - 1 = 0$, 且 $x=0$ 时 $y=e$,

由于 $F_x = y \cos(xy) - \frac{1}{x+1}$; $F_y = x \cos(xy) + \frac{1}{y}$

所以 $y'(0) = -\frac{F_x}{F_y} \Big|_{(0,e)} = e - e^2$

(2) 令 $F(x, y) = e^y + xy - e = 0$, 且 $x=0$ 时 $y=1$,

由于 $F_x = y$, $F_y = x + e^y$

所以 $y'(0) = -\frac{F_x}{F_y} \Big|_{(0,1)} = \frac{-1}{e}$

(3) 令 $F(x, y) = e^{xy} + \ln y - \ln(x+1) = 0$, 且 $x=0$ 时 $y = \frac{1}{e}$

由于 $F_x = ye^{xy} - \frac{1}{x+1}$; $F_y = xe^{xy} + \frac{1}{y}$

所以 $y'(0) = -\frac{F_x}{F_y} \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$

(4) 令 $F(x, y) = e^z + xyz - e = 0$, 且 $x=0, y=0$ 时 $z=1$

由于 $F_x = yz$, $F_y = xz$, $F_z = e^z + xy$.

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{yz}{e^z + xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{xz}{e^z + xy}.$$

$$\text{于是 } z_x(0,0) = -\frac{F_x}{F_z}\bigg|_{(0,0,1)} = 0.$$

章节：第八章第六节

难度：二级

48. 求下列函数的偏导数或全微分：

(1) 设 $u = \frac{x+y}{y+z}$, 其中 z 由方程 $ze^z = xe^{-x} + ye^y$ 所确定, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$;

(2) 设 $z = f(x, y)$ 由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 所确定, 求全微分 dz ;

(3) 设 $z = f(x, y)$ 由方程 $F(x+xy, xyz) = 0$ 所确定, 其中 F 具有一阶偏导数, 求 dz .

解答: (1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(y+z) - (x+y)z_x}{(y+z)^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(y+z) - (x+y)(z_y+1)}{(y+z)^2}$

$$z_x = \frac{e^{-x} - xe^{-x}}{(z+1)e^z}, z_y = \frac{e^y + ye^y}{(z+1)e^z}$$

代入可得:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y+z} - \frac{(y+x)(1-x)}{(y+z)^2(1+z)} e^{-x-z}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y+z} - \frac{(y+x)(1+y)}{(y+z)^2(1+z)} e^{y-z} - \frac{x+y}{(y+z)^2}$$

$$(2) \quad z_x = \frac{x}{1-z}, z_y = \frac{y}{1-z}.$$

$$dz = z_x dx + z_y dy = \frac{x dx + y dy}{1-z}$$

$$(3) \quad z_x = -\frac{(y+1)F_1 + yzF_2}{xyF_2}, z_y = -\frac{x F_1 + xzF_2}{xyF_2}.$$

$$dz = \frac{-1}{xyF_2} \{ [(1+y)F_1 + yzF_2] dx + (xF_1 + xzF_2) dy \}.$$

章节：第八章第六节

难度：二级

49. 设 $u = f(x, y, z)$, 其中 $y = \sin x, z = z(x)$ 由方程 $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$ 所确定, f, φ 具有一阶连续

偏导数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\frac{du}{dx}$.

解答: 由于 $\frac{du}{dx} = f_x + f_y \cos x - f_z \cdot z_x$,

$$\text{而 } z_x = -\frac{2x\varphi_1 + e^y\varphi_2 \cos x}{\varphi_3},$$

$$\text{所以 } \frac{du}{dx} = f_x + f_y \cos x - \frac{2x\varphi_1 + e^y \cos x \cdot \varphi_2}{\varphi_3} f_z.$$

章节：第八章第六节

难度：二级

50. 设 $u = f(z)$, 而 $z = z(x, y)$ 是由方程 $z = x + y\varphi(z)$ 所确定的隐函数, 证明 $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(z) \frac{\partial u}{\partial x}$.

$$\text{解答: } \frac{\partial u}{\partial y} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z) + y\varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x} = 1 + y\varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\text{代入可得 } \frac{\partial u}{\partial y} = f'(z) \cdot \frac{\varphi(z)}{1 - y\varphi'(z)}, \frac{\partial u}{\partial x} = f'(z) \cdot \frac{1}{1 - y\varphi'(z)}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(z) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

章节：第八章第六节

难度：三级

51. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ 所确定, 求证: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

$$\text{解答: } F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0 \text{ 可知}$$

$$F_1 \frac{z - xz_x}{z^2} - F_2 \frac{yz_x}{z^2} = 0; F_1 \frac{-xz_y}{z^2} + F_2 \frac{z - yz_y}{z^2} = 0.$$

$$\text{解得 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{zF_1}{xF_1 + yF_2}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{zF_2}{xF_1 + yF_2}. \text{ 所以}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xzF_1}{xF_1 + yF_2} + \frac{yzF_2}{xF_1 + yF_2} = z.$$

章节：第八章第六节

难度：三级

52. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定, 求证: $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$.

解答: $(c - az_x)\varphi_1 - bz_x\varphi_2 = 0; -az_y\varphi_1 + (c - bz_y)\varphi_2 = 0$

$$z_x = \frac{a\varphi_1}{a\varphi_1 + b\varphi_2}; z_y = \frac{a\varphi_2}{a\varphi_1 + b\varphi_2}$$

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{a^2\varphi_1}{a\varphi_1 + b\varphi_2} + \frac{b^2\varphi_2}{a\varphi_1 + b\varphi_2} c.$$

章节: 第八章第六节

难度: 二级

53. 求由下列方程确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 的二阶偏导数:

$$(1) z^3 - 3xyz = a^3; \quad (2) e^z - xyz = 0;$$

$$(3) x^2 + y^2 + z^2 = 4z; \quad (4) x + y + z = e^{-(x+y+z)}.$$

解答: (1) $z_{xx} = -\frac{2xy^3z}{(z^2 - xy)^3}, z_{yy} = -\frac{2x^3yz}{(z^2 - xy)^3}, z_{xy} = \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3};$

$$(2) z_{xx} = \frac{z(2z - 2 - z^2)}{x^2(z-1)^3}, z_{yy} = \frac{z(2z - 2 - z^2)}{y^2(z-1)^3}, z_{xy} = \frac{-z}{xy(z-1)^3};$$

$$(3) z_{xx} = \frac{(2-z)^2 + x^2}{(2-z)^3}, z_{yy} = \frac{(2-z)^2 + y^2}{(2-z)^3}, z_{xy} = \frac{xy}{(2-z)^3};$$

$$(4) z_{xx} = z_{xy} = z_{yy} = 0.$$

章节: 第八章第六节

难度: 三级

54. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $z^5 - xz^4 + yz^3 = 1$ 所确定, 且 $z(0, 0) = 1$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$.

解答: 令 $F(x, y, z) = z^5 - xz^4 + yz^3 - 1 = 0$

$$F_x = -z^4, F_y = z^3, F_z = 5z^4 - 4xz^3 + 3yz^2$$

$$z_x = \frac{z^2}{5z^2 - 4xz + 3y}, z_y = -\frac{z}{5z^2 - 4xz + 3y}; z_x \Big|_{(0,0,1)} = \frac{1}{5}, z_y \Big|_{(0,0,1)} = -\frac{1}{5}.$$

$$z_{xy} = \frac{2zz_y(5z^2 - 4xz + 3y) - z^2(10zz_y - 3z - 3yz_y)}{(5z^2 - 4xz + 3y)^2}, z_{xy}(0, 0) = -\frac{3}{25}$$

章节：第八章第六节

难度：三级

55. 设方程组 $\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$ 确定了隐函数组 $\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$ 试求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

解答：令 $\begin{cases} F = xu - yv = 0 \\ G = yu + xv - 1 = 0 \end{cases}$; 对 x 求偏导 $\begin{cases} xu_x - yv_x = -u \\ yu_x + xv_x = -v \end{cases}$

$$\text{解得 } u_x = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}; u_y = \frac{-xv + yu}{x^2 + y^2}.$$

$$\text{对 } y \text{ 求偏导 } \begin{cases} xu_y - yv_y = v \\ yu_y + xv_y = -u \end{cases}$$

$$\text{解得 } u_y = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}, v_y = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}.$$

章节：第八章第六节

难度：二级

56. 设 $\begin{cases} x = e^u \cos v, \\ y = e^u \sin v, \\ z = uv, \end{cases}$ 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解答： $\begin{cases} u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \\ v = \arctan \frac{y}{x} \end{cases},$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x \arctan \frac{y}{x} - \frac{y}{2} \ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y \arctan \frac{y}{x} + \frac{x}{2} \ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

章节：第八章第六节

难度：三级

57. 求函数 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在点 $M_0(1, 0, 1)$ 处沿下列 $\vec{l}$ 方向的方向导数：

(1) $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, (2) $\vec{l} = \{1, -1, 1\}$.

解答: $u_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; u_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; u_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

$$u_x|_{M_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}, u_y|_{M_0} = 0, u_z|_{M_0} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$(1) e_l|_{M_0} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \frac{\partial u}{\partial l}|_{M_0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$(2) e_l|_{M_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \frac{\partial u}{\partial l}|_{M_0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 \cdot \frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

章节: 第八章第七节

难度: 一级

58. 求函数 $u = xy + yz + zx$ 在点 $M(2, 1, 3)$ 处沿着从 M 点到点 $N(5, 5, 15)$ 方向的方向导数。

解答: $u_x = y + z, u_y = x + z, u_z = x + y, u_x|_M = 4, u_y|_M = 5, u_z|_M = 3.$

$$\overrightarrow{MN} = (3, 4, 12), e_{\overrightarrow{MN}} = \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{3}{13} \cdot 4 + \frac{4}{13} \cdot 5 + \frac{12}{13} \cdot 3 = \frac{68}{13}.$$

章节: 第八章第七节

难度: 二级

59. 求下列函数的梯度:

$$(1) u = x^2 y^3 z^4;$$

$$(2) u = 3x^2 - 2y^2 + 3z^2.$$

解答: (1) $\text{grad} u = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k} = 2xy^3 z^4 \mathbf{i} + 3x^2 y^2 z^4 \mathbf{j} + 4x^2 y^3 z^3 \mathbf{k}.$

$$(2) \text{grad} u = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k} = 6x \mathbf{i} - 4y \mathbf{j} + 6z \mathbf{k}.$$

章节: 第八章第七节

难度: 一级

60. 求函数 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ 在原点和点 $A(1, 1, 1)$ 处梯度的大小和方向, 并求梯度为零的点的坐标。

解答: $u_x = 2x + y + 3, u_y = 4y + x - 2, u_z = 6z - 6.$ 在原点 $u_x|_O = 3, u_y|_O = -2, u_z|_O = -6.$ 此时

$$|\text{grad} u| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = 7.$$

$$\cos \alpha = \frac{u_x|_O}{|\text{grad} u|} = \frac{3}{7}, \cos \beta = \frac{u_y|_O}{|\text{grad} u|} = -\frac{2}{7}, \cos \gamma = \frac{u_z|_O}{|\text{grad} u|} = -\frac{6}{7}$$

在 A 点 $u_x|_O = 6, u_y|_O = 3, u_z|_O = 0$. 此时

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 0} = 3\sqrt{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{u_x|_O}{|\operatorname{grad} u|} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \beta = \frac{u_y|_O}{|\operatorname{grad} u|} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \gamma = \frac{u_z|_O}{|\operatorname{grad} u|} = 0$$

若要梯度为零, 即 $u_x = 0, u_y = 0, u_z = 0$. 得方程组:

$$2x + y + 3 = 0, 4y + x - 2 = 0, 6z - 6 = 0. \text{ 得 } x = -2, y = 1, z = 1.$$

所求点的坐标: $(-2, 1, 1)$.

章节: 第八章第七节

难度: 二级

61. 求数量场 $u = z^2 \sqrt{x^2 + 2y^2}$ 在点 $M\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ 处的梯度及沿曲面 $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ 在该点的外法线方向上的方向导数。

解答: $\operatorname{grad} u(M) = (u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k})|_M$

$$= \left(\frac{xz^2}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} \mathbf{i} + \frac{2yz^2}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} \mathbf{j} + 2z\sqrt{x^2 + 2y^2} \mathbf{k} \right)|_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\sqrt{2} \mathbf{k},$$

曲面 $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ 在 $M\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ 的单位外法向量 $\mathbf{n}|_M = \frac{2}{\sqrt{10}} \left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{2} \right)$,

$$\text{则 } \frac{\partial u}{\partial n}|_M = \operatorname{grad} u(M) \cdot \mathbf{n}|_M = \frac{9}{10} \sqrt{5}$$

章节: 第八章第七节

难度: 二级

62. 数量场 $u = x^2 - 2yz + y^2$ 在点 $M(-1, 2, 1)$ 处沿什么方向的方向导数最大? 求此最大值。

$$\text{参考答案: } \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}, \cos \gamma = -\frac{2}{\sqrt{6}}, \max \frac{\partial u}{\partial l} = 2\sqrt{6}.$$

解答: $u_x = 2x, u_y = -2z + 2y, u_z = -2y$.

$$\operatorname{grad} u(M) = (u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k})|_M = \left(\frac{xz^2}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} \mathbf{i} + \frac{2yz^2}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} \mathbf{j} + 2z\sqrt{x^2 + 2y^2} \mathbf{k} \right)|_M = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k};$$

当沿梯度方向时方向导数最大, 此时方向余弦为 $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}, \cos \gamma = -\frac{2}{\sqrt{6}}$.

此时方向导数 $\max \frac{\partial u}{\partial l} = 2\sqrt{6}$ 。

章节：第八章第七节

难度：二级

63. 求下列曲线在指定处的切线和法平面方程：

$$(1) \begin{cases} x = a \sin^2 t, \\ y = b \sin t \cos t, \\ z = c \cos^2 t, \end{cases} \quad \text{在 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 处};$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + z^2 = 10, \\ y^2 + z^2 = 10, \end{cases} \quad \text{在点 } (1, 1, 3) \text{ 处};$$

$$(3) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0, \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0, \end{cases} \quad \text{在点 } (1, 1, 1) \text{ 处}.$$

解答：(1) $\left. \frac{\mathbf{y}}{T} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = (a \sin 2t, b \cos 2t, -c \sin 2t) \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = (a, 0, -c)$. 在点 $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2})$ 处切线.

$$\frac{x - \frac{a}{2}}{a} = \frac{y - \frac{b}{2}}{0} = \frac{z - \frac{c}{2}}{-c}, \text{ 法平面 } a\left(x - \frac{a}{2}\right) - c\left(z - \frac{c}{2}\right) = 0.$$

$$(2) \left. \frac{\mathbf{y}}{T} \right|_{(1,1,3)} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 0 & 2z \\ 0 & 2y & 2z \end{vmatrix} \Big|_{(1,1,3)} = (-12, -12, 4), \text{ 在点 } (1, 1, 3) \text{ 处切线}.$$

$$\text{切线 } \frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{1}, \text{ 法平面 } 3x + 3y - z - 3 = 0;$$

$$(3) \left. \frac{\mathbf{y}}{T} \right|_{(1,1,1)} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x-3 & 2y & 2z \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} \Big|_{(1,1,1)} = (-16, 9, -1), \text{ 在点 } (1, 1, 1) \text{ 处}$$

$$\text{切线 } \frac{x-1}{16} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1}, \text{ 法平面 } 16x + 9y - z - 24 = 0.$$

章节：第八章第八节

难度：二级

64. 求下列曲面在指定处的切平面和法线方程：

$$(1) z = \arctan \frac{y}{x} \text{ 在点 } \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right) \text{ 处};$$

$$(2) ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \text{ 在点 } (x_0, y_0, z_0) \text{ 处};$$

$$(3) e^{\frac{x}{z}} + e^{\frac{y}{z}} = 4 \text{ 在点 } (\ln 2, \ln 2, 1) \text{ 处}.$$

解答: (1) $\vec{n}\bigg|_{(1,1,\frac{\pi}{4})} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, -1\right)\bigg|_{(1,1,\frac{\pi}{4})} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$. 在点 $\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$ 处

$$\text{切平面 } x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\text{法线 } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$$

(2) $\vec{n}\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} = (2ax, 2by, 2cz)\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} = (2ax_0, 2by_0, 2cz_0)$. 在点 (x_0, y_0, z_0) 处

$$\text{切平面 } ax_0x + by_0y + cz_0z = 1,$$

$$\text{法线 } \frac{x-x_0}{ax_0} = \frac{y-y_0}{by_0} = \frac{z-z_0}{cz_0}.$$

(3) $\vec{n}\bigg|_{(\ln 2, \ln 2, 1)} = \left(\frac{1}{z}e^{\frac{x}{z}}, \frac{1}{z}e^{\frac{y}{z}}, -\frac{x}{z^2}e^{\frac{x}{z}} - \frac{y}{z^2}e^{\frac{y}{z}}\right)\bigg|_{(\ln 2, \ln 2, 1)} = (2, 2, -4\ln 2)$. 在点 $(\ln 2, \ln 2, 1)$ 处

$$\text{切平面 } x + y - 2\ln 2z = 0,$$

$$\text{法线 } \frac{x-\ln 2}{1} = \frac{y-\ln 2}{1} = \frac{z-1}{-2\ln 2}.$$

章节: 第八章第八节

难度: 一级

65. 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上求一点, 使此点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解答: 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上任一点, 则 $\vec{T} = (1, 2t, 3t^2)$,

而平面 $x+2y+z=4$ 的法向量 $\vec{n} = (1, 2, 1)$, 而 $\vec{T} \perp \vec{n}$, 即 $3t^2 + 4t + 1 = 0$, 得 $t_1 = -1, t_2 = -\frac{1}{3}$,

得点 $(-1, 1, -1), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right)$.

章节: 第八章第八节

难度: 二级

66. 曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 在哪些点处的切平面平行于 (1) xOy 面; (2) 平面 $2x+2y+z=0$? 并求出这些切平面.

解答: 切平面的法向量 $\vec{n} = (2x, 2y, 1)$

(1) xOy 面的法向量为 $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$, 而此时 $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}$, 法向量即为 $\vec{n}_1$, 解得 $x=0, y=0$, 此时切点 $(0, 0, 4)$ 切平面 $z-4=0$.

(2) 平面 $2x+2y+z=0$ 的法向量为 $\vec{n}_2 = (2, 2, 1)$, 此时 $\vec{n}_2 \parallel \vec{n}$, 法向量即为 $\vec{n}_2$, 解得 $x=1, y=1$,

此时切点 $(1, 1, 2)$, 切平面 $2x + 2y + z - 6 = 0$.

章节: 第八章第八节

难度: 二级

67. 试求曲面 $(2a^2 - z^2)x^2 - a^2y^2 = 0$ 在点 (a, a, a) 处的切平面和坐标原点到该切平面的距离。

解答: 曲面 $(2a^2 - z^2)x^2 - a^2y^2 = 0$ 在点 (a, a, a) 处的切向量为

$$\vec{n}|_{(a,a,a)} = \{2(2a^2 - z^2)x, -2a^2y, -2zx^2\}|_{(a,a,a)} = (a^3, -a^3, -a^3).$$

此时切平面 $x - y - z + a = 0$.

$$d = \frac{|a|}{\sqrt{3}}.$$

章节: 第八章第八节

难度: 二级

68. 证明: 曲面 $xyz = a^3$ 上任一点处的切平面与坐标面所围的四面体的体积为常数。

解答: $xyz - a^3 = 0$ 的任一点 (x_0, y_0, z_0) 切向量为 (y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0) , 此时切平面的方程为

$$y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0,$$

化为截距式 $\frac{x}{3a^3/y_0z_0} + \frac{y}{3a^3/x_0z_0} + \frac{z}{3a^3/x_0y_0} = 0,$

切平面与坐标面所围的四面体的体积

$$V = \frac{3a^3}{y_0z_0} \cdot \frac{3a^3}{x_0z_0} \cdot \frac{3}{x_0y_0} = 27a^3$$

章节: 第八章第八节

难度: 三级

69. 证明: 曲面 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 上任一点处的切平面与各坐标轴的截距平方和等于 a^2 .

解答: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 的任一点 (x_0, y_0, z_0) 切向量为 $\frac{2}{3}(x_0^{-\frac{1}{3}}, y_0^{-\frac{1}{3}}, z_0^{-\frac{1}{3}})$, 此时切平面的方程为:

$$x_0^{-\frac{1}{3}}(x - x_0) + y_0^{-\frac{1}{3}}(y - y_0) + z_0^{-\frac{1}{3}}(z - z_0) = 0, \text{ 化为截距式 } \frac{x}{x_0^{-\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}} + \frac{y}{y_0^{-\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}} + \frac{z}{z_0^{-\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}} = 0,$$

与各坐标轴的截距平方和为 $x_0^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} + z_0^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{4}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}} + z_0^{\frac{2}{3}}) = a^2$.

章节: 第八章第八节

难度：三级

70. 求下列函数的极值：

$$(1) f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2;$$

$$(2) f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1;$$

$$(3) f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}.$$

解答：(1) $\begin{cases} f_x(x, y) = 4 - 2x = 0 \\ f_y(x, y) = -4 - 2y = 0 \end{cases}$, 解得驻点为 $(2, -2)$,

$$A = f_{xx}(2, -2) = -2, B = f_{xy}(2, -2) = 0, C = f_{yy}(2, -2) = -2, AC - B^2 = 4 > 0, A < 0,$$

故得极大值 $f(2, -2) = 8$.

$$(2) \begin{cases} f_x(x, y) = 2x + y + 1 = 0 \\ f_y(x, y) = 2y + x - 1 = 0 \end{cases}, \text{解得驻点为 } (-1, 1),$$

$$A = f_{xx}(-1, 1) = 2, B = f_{xy}(-1, 1) = 1, C = f_{yy}(-1, 1) = 2, AC - B^2 = 3 > 0, A > 0,$$

故得极小值 $f(-1, 1) = 0$.

$$(3) \begin{cases} f_x(x, y) = y - \frac{20}{x^2} = 0 \\ f_y(x, y) = x - \frac{50}{y^2} = 0 \end{cases}, \text{解得驻点为 } (2, 5),$$

$$A = f_{xx}(2, 5) = \frac{25}{2}, B = f_{xy}(2, 5) = 1, C = f_{yy}(2, 5) = \frac{8}{25}, AC - B^2 = 3 > 0, A > 0,$$

故得极小值 $f(5, 2) = 30$.

章节：第八章第九节

难度：二级

71. 求函数 $z = xy(4 - x - y)$ 在 $x = 1, y = 0, x + y = 6$ 所围闭域上的最大值和最小值。

解答： $\begin{cases} z_x = 4y - 2xy - y^2 = 0 \\ z_y = 4x - 2xy - x^2 = 0 \end{cases}$, 解得驻点为 $A: (0, 0), B: (0, 4), C: (4, 0), D: (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. 其中 C, D 属于所

围区域。则 $z(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = \frac{64}{27}, z(4, 0) = 0$.

再求边界曲线 $x = 1, (0 \leq y \leq 5)$, 此时 $z = y(3 - y)$ 此时最值为 $\frac{9}{4}, -10$;

再求边界曲线 $y = 0, (1 \leq x \leq 5)$, 此时 $z = 0$ 此时最值为 0;

再求边界曲线 $y=6-x, (1 \leq x \leq 5)$, 此时 $z=-2x(6-x)$ 此时最值为 $-10, -18$;

综上所述, 最大值 $\frac{64}{27}$, 最小值 -18 .

章节: 第八章第九节

难度: 三级

72. 求下列函数在指定条件下的极值:

(1) $z=xy$ 在条件 $x+y=1$ 之下;

(2) $z=x^2+xy+y^2$ 在条件 $x^2+y^2=4$ 之下。

解答: (1) 设 $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 1)$, 令

$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = y + \lambda = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = x + \lambda = 0, \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 1 \end{cases}$$

解得 $x=y=\frac{1}{2}$, 由题意可知极大值 $z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

(2) 设 $L(x, y, \lambda) = x^2 + xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$, 令

$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = y + 2x + 2x\lambda = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = x + 2y + 2y\lambda = 0, \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

解得 $(x, y) = (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ 四个点. 比较得

极大值 $z(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 6, z(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 6,$

极小值 $z(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 2, z(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2.$

章节: 第八章第九节

难度: 二级

73. 在平面 $3x-2z=0$ 上求一点, 使它与点 $A(1,1,1), B(2,3,4)$ 的距离平方和最小。

解答: 平面 $3x-2z=0$ 上一点 (x, y, z) , 其到点 $A(1,1,1), B(2,3,4)$ 的距离平方和

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6x - 8y - 10z + 32$$

设 $L(x, y, z, \lambda) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6x - 8y - 10z + 32 + \lambda(3x - 2z)$, 令

$$\begin{cases} L_x = 4x - 6 + 3\lambda = 0 \\ L_y = 4y - 8 = 0 \\ L_z = 4z - 10 + 2y\lambda = 0 \\ L_\lambda = 3x - 2z = 0 \end{cases},$$

解得唯一驻点为 $\left(\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26}\right)$.

根据实际问题, 该点即为所求。

章节: 第八章第九节

难度: 二级

74. 求曲面 $4z = 3x^2 - 2xy + 3y^2$ 到平面 $x + y - 4z = 1$ 的最短距离。

解答: 设曲面 $4z = 3x^2 - 2xy + 3y^2$ 上任一点 (x, y, z) 到平面 $x + y - 4z = 1$ 的距离为

$$d = \frac{|x + y - 4z - 1|}{\sqrt{18}}, d^2 = \frac{(x + y - 4z - 1)^2}{18}.$$

设 $L(x, y, z, \lambda) = \frac{(x + y - 4z - 1)^2}{18} + \lambda(4z - 3x^2 + 2xy - 3y^2)$, 令

$$\begin{cases} L_x = \frac{(x + y - 4z - 1)}{9} + \lambda(2y - 6x) = 0 \\ L_y = \frac{(x + y - 4z - 1)}{9} + \lambda(2x - 6y) = 0 \\ L_z = -\frac{2(x + y - 4z - 1)}{9} + 4 = 0 \\ L_\lambda = 4z - 3x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \end{cases},$$

解得唯一驻点为 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$,

又最短距离存在, 故此为取得最短距离的点, 计算得 $d_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{8}$ 。

章节: 第八章第九节

难度: 三级

75. 在曲面 $z = 2 - x^2 - y^2$ 位于第一卦限部分上求一点, 使该点的切平面与三个坐标面围成的四面体体积最小。

解答: 在曲面 $x^2 + y^2 + z = 2$ 位于第一卦限部分上的一点 (x_0, y_0, z_0) 的切向量为 $\vec{T} = (2x_0, 2y_0, 1)$,

该点的切平面为 $2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + (z - z_0) = 0$, 与三个坐标面围成的四面体体积为

$$V = \frac{(4-z)^3}{24xy}, \text{ 设 } L(x, y, z, \lambda) = \frac{(4-z)^3}{24xy} + \lambda(x^2 + y^2 + z - 2), \text{ 令}$$

$$\begin{cases} L_x = -\frac{(4-z)^3}{24x^2y} + 2x\lambda = 0 \\ L_y = -\frac{(4-z)^3}{24xy^2} + 2y\lambda = 0 \\ L_z = -\frac{3(4-z)^2}{24xy} + \lambda = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 + z - 2 = 0 \end{cases},$$

解得驻点为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$. 又因为点在第一卦限, 该四面体的最小值存在, 知

所求点为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

章节: 第八章第九节

难度: 三级

76. 将正数 a 表示三个正数之和. 当这三个正数取何值时, 它们的乘积最大? 求此最大值.

解答: 设三个正数为 x, y, z , 则要求在 $x + y + z = a$ 的条件下 $f(x, y, z) = xyz$ 的最值.

设 $L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - a)$, 令

$$\begin{cases} L_x = yz + \lambda = 0 \\ L_y = xz + \lambda = 0 \\ L_z = xy + \lambda = 0 \\ L_\lambda = x + y + z - a = 0 \end{cases},$$

解得唯一驻点 $x = \frac{a}{3}, y = \frac{a}{3}, z = \frac{a}{3}$.

又由于该实际问题的最小值存在, 故所求最大值当三个数相等时取得, 最大值为 $\left(\frac{a}{3}\right)^3$.

章节: 第八章第九节

难度: 二级

77. 将正数 a 表示三个正数之积. 当这三个正数取何值时, 它们的和最小? 求此最小值.

解答: 设三个正数为 x, y, z , 则要求在 $xyz = a$ 的条件下 $f(x, y, z) = x + y + z$ 的最值.

设 $L(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(xyz - a)$, 令

$$\begin{cases} L_x = 1 + yz\lambda = 0 \\ L_y = 1 + xz\lambda = 0 \\ L_z = 1 + xy\lambda = 0 \\ L_\lambda = xyz - a = 0 \end{cases}$$

解得唯一驻点 $x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{a}, z = \sqrt[3]{a}$.

又由于该实际问题的最小值存在, 故当这三个正数分别是 $x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{a}, z = \sqrt[3]{a}$, 也即它们相等时, 它们的和最小, 最小值为 $3\sqrt[3]{a}$.

章节: 第八章第九节

难度: 二级

78. 设某种产品的产量是劳动力 x 和原料 y 的函数: $f(x, y) = 60x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$. 假设每单位劳动力花费 100 元, 每单位原料花费 200 元. 现在有 30 000 元资金用于生产, 应如何安排劳动力和原料, 才能使产品的产量最大?

解答: 由劳动力和原料与资金的函数为 $x + 2y = 300$, 设 $L(x, y, \lambda) = 60x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} + \lambda(x + 2y - 300)$,

$$\text{令} \begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = 45x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} + \lambda = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = 15x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} + 2\lambda = 0, \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = x + 2y - 300 = 0 \end{cases}$$

解得唯一驻点 $x = 225, y = 37.5$.

又由于该实际问题的最大值存在, 故当劳动力和原料分别是 $x = 225, y = 37.5$ 时, 能使产品的产量最大。

章节: 第八章第九节

难度: 二级

第9章 重积分及其应用

1. 用二重积分表示下列立体的体积:

(1) 上半球体: $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2; z \geq 0\}$;

(2) 由抛物面 $z = 2 - x^2 - y^2$, 柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及 xOy 平面所围成的空间立体

解答: (1) $V = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$;

$$(2) V = \iint_D (2 - x^2 - y^2) dx dy, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

所属章节: 第九章第一节

难度: 一级

2. 根据二重积分的几何意义, 确定下列积分的值:

(1) $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} d\sigma$, 其中 D 为 $x^2 + y^2 \leq a^2$;

(2) $\iint_D (b - \sqrt{x^2 + y^2}) d\sigma$, 其中 D 为 $x^2 + y^2 \leq a^2, b > a > 0$

解答: (1) $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} d\sigma = \frac{2}{3}\pi a^3$;

$$(2) \iint_D (b - \sqrt{x^2 + y^2}) d\sigma = \pi a^2 b - \frac{2}{3}\pi a^3$$

所属章节: 第九章第一节

难度: 一级

3. 一带电薄板位于 xOy 平面上, 占有闭区域 D , 薄板上电荷分布的面密度为 $\mu = \mu(x, y)$, 且

$\mu(x, y)$ 在 D 上连续, 试用二重积分表示该板上的全部电荷 Q .

解答: $Q = \iint_D \mu(x, y) d\sigma$

所属章节: 第九章第一节

难度: 一级

4. 将一平面薄板铅直浸没于水中, 取 x 轴铅直向下, y 轴位于水平面上, 并设薄板占有 xOy 平面上的闭区域 D , 试用二重积分表示薄板的一侧所受到的水压力

解答: $p = \rho g \iint_D x d\sigma$

所属章节: 第九章第一节

难度: 一级

5. 利用二重积分性质, 比较下列各组二重积分的大小

(1) $I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中 D 是由 x 轴, y 轴及直线 $x+y=1$ 所围成的区域;

(2) $I_1 = \iint_D \ln(x+y+1) d\sigma$ 与 $I_2 = \iint_D \ln(x^2+y^2+1) d\sigma$, 其中 D 是矩形区域: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$;

(3) $I_1 = \iint_D \sin^2(x+y) d\sigma$ 与 $I_2 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma$, 其中 D 是任一平面有界闭区域;

(4) $I_1 = \iint_D e^{xy} d\sigma$ 与 $I_2 = \iint_D e^{2xy} d\sigma$, 其中 D 是矩形区域: $-1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1$;

解答: (1) 在区域 D 内部, $x+y < 1$, 所以 $I_1 > I_2$;

(2) 在区域 D 内部, $x < x^2, y < y^2$, 故 $\ln(x+y+1) < \ln(x^2+y^2+1)$, 所以 $I_1 > I_2$; ?

(3) 由于 $\sin^2(x+y) < (x+y)^2$, 所以 $I_1 < I_2$;

(4) 在区域 D 内部, $xy < 0$, 故 $e^{xy} > e^{2xy}$, 所以 $I_1 > I_2$

所属章节: 第九章第一节

难度: 一级

6. 利用二重积分性质, 估计下列二重积分的值

(1) $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\ln(4+x+y)}, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 8\}$;

(2) $I = \iint_D \sin(x^2+y^2) d\sigma, D = \left\{ (x, y) \mid \frac{\pi}{4} \leq x^2+y^2 \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$;

(3) $I = \iint_D \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} d\sigma, D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$;

(4) $I = \iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma, D = \left\{ (x, y) \mid x^2+y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$

解答: (1) 由于 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 8\}$ 的面积为 32, 在其中 $\frac{1}{\ln 16} \leq \frac{1}{\ln(4+x+y)} \leq \frac{1}{\ln 4}$,

而等号不恒成立, 故 $\frac{8}{\ln 2} < I < \frac{16}{\ln 2}$;

(2) 由于 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{\pi}{4} \leq x^2+y^2 \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$ 的面积为 $\frac{1}{2}\pi^2$, 在其中 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(x^2+y^2) \leq 1$, 而等号不

恒成立, 故 $\frac{\sqrt{2}\pi^2}{4} < I < \frac{\pi^2}{2}$;

(3) 由于 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$ 的面积为 2, 在其中 $\frac{1}{102} \leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100}$, 而等号不恒成立, 故 $\frac{1}{51} < I < \frac{1}{50}$;

注: 原题有误? 还是原参考答案有误? 如将 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$ 改为 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 10\}$, 则区域面积为 200, 结论为 $\frac{100}{51} < I < 2$

(4) 由于 $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$ 的面积为 $\frac{1}{4}\pi$, 在其中 $1 \leq \sin(x^2 + y^2) \leq e^{\frac{1}{4}}$, 而等号不恒成立, 故 $\frac{\pi}{4} < I < \frac{\pi e^{\frac{1}{4}}}{4}$.

所属章节: 第九章第一节

难度: 二级

7. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 试求极限: $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} f(x, y) d\sigma$

解答: 先用积分中值定理, 再利用函数的连续性, 即得

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} f(x, y) d\sigma = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi r^2} f(\xi, \eta) \cdot \sigma = \lim_{r \rightarrow 0^+} f(\xi, \eta) = f(0, 0).$$

所属章节: 第九章第一节

难度: 二级

8. 设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上非负连续, 证明:

(1) 若 $f(x, y)$ 不恒为零, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma > 0$;

(2) 若 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$, 则 $f(x, y) \equiv 0$

解答: (1) 若 $f(x, y)$ 不恒为零, 则存在 $(x_0, y_0) \in D$, $f(x_0, y_0) > 0$, 利用连续函数的保号性, 存在 (x_0, y_0) 的一个邻域 $D_1 \subset D$, 在其上恒有 $f(x, y) > 0$, 于是 $\iint_{D_1} f(x, y) d\sigma > 0$, 而

$$\iint_{D-D_1} f(x, y) d\sigma \geq 0, \text{ 所以 } \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D-D_1} f(x, y) d\sigma > 0;$$

(2) 假若 $f(x, y)$ 不恒为零, 则由上题知 $\iint_D f(x, y) d\sigma > 0$, 矛盾, 故 $f(x, y) \equiv 0$.

所属章节: 第九章第一节

难度: 二级

9. 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D x \sin y \, d\sigma, D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\};$$

$$(2) \iint_D (xy^2 + e^{x+2y}) \, d\sigma, D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$(3) \iint_D xy e^{xy^2} \, d\sigma, D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$(4) \iint_D x^2 y \sin(xy^2) \, d\sigma, D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 2 \right\};$$

$$(5) \iint_D x \, d\sigma, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 2, x^2 + y^2 \leq 2x\}$$

解答: (1) $\iint_D x \sin y \, d\sigma = \int_1^2 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin y \, dy = \int_1^2 x \, dx = \frac{3}{2};$

$$(2) \iint_D (xy^2 + e^{x+2y}) \, d\sigma = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (xy^2 + e^{x+2y}) \, dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 e^{x+2y} \, dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (e^2 - 1) e^x \, dx = \frac{(e^2 - 1)^2}{2e};$$

$$(3) \iint_D xy e^{xy^2} \, d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^1 xy e^{xy^2} \, dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (e^x - 1) \, dx = \frac{e}{2} - 1;$$

$$(4) \iint_D x^2 y \sin(xy^2) \, d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^2 x^2 y \sin(xy^2) \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (x - x \cos 4x) \, dx = \frac{\pi^2}{16};$$

$$(5) \iint_D x \, d\sigma = \int_{-1}^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} x \, dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} \, dy = \frac{\pi}{2}.$$

所属章节: 第九章第二节

难度: 一级

10. 画出下列各题中给出的区域 D , 并将二重积分 $\iint_D f(x, y) \, d\sigma$ 化为两种次序不同的二次积分:

(1) D 由曲线 $y = \ln x$, 直线 $x = 2$ 及 x 轴所围成;

(2) D 由抛物线 $y = x^2$ 与直线 $2x + y = 3$ 所围成;

(3) D 由 $y = 0$ 及 $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$ 所围成;

(4) D 由曲线 $y = x^3$, $y = x$ 所围成;

(5) D 由直线 $y = 0$, $y = 1$, $y = x$, $y = x - 2$ 所围成

解答: 本题图略, 建议画出

$$(1) \int_1^2 dx \int_0^{\ln x} f(x, y) \, dy = \int_0^{\ln 2} dy \int_{e^y}^2 f(x, y) \, dx;$$

$$(2) \int_{-3}^1 dx \int_{x^2}^{3-2x} f(x, y) \, dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx + \int_1^9 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\frac{3-y}{2}} f(x, y) \, dx;$$

$$(3) \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx;$$

$$(4) \int_{-1}^0 dx \int_x^{x^3} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{x^3}^x f(x, y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^y f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx;$$

注：原题有误？还是原参考答案有误？如将“ D 由曲线 $y=x^3$ ， $y=x$ 所围成”改为“ D 由曲线 $y=x^3$ ， $y=1$ ， $x=-1$ 所围成”，则答案为原参考答案

$$\int_{-1}^1 dx \int_{x^3}^1 f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx;$$

$$(5) \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^1 f(x, y) dy + \int_2^3 dx \int_{x-2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^{y+2} f(x, y) dx$$

所属章节：第九章第二节

难度：一级

11. 计算下列二重积分：

$$(1) \iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma, \quad D \text{ 由曲线 } x=2, y=x, xy=1 \text{ 所围成};$$

$$(2) \iint_D x \cos(x+y) dx dy, \quad D \text{ 由点 } (0, 0), (\pi, 0), (\pi, \pi) \text{ 为顶点的三角形区域};$$

$$(3) \iint_D x \sqrt{y} d\sigma, \quad D \text{ 由抛物线 } y=\sqrt{x} \text{ 和 } y=x^2 \text{ 围成};$$

$$(4) \iint_D xy dx dy, \quad D \text{ 由抛物线 } y^2=x \text{ 与直线 } y=x-2 \text{ 所围成};$$

$$(5) \iint_D \sin\left(\frac{x}{y}\right) d\sigma, \quad D \text{ 由直线 } y=x, y=2 \text{ 和曲线 } x=y^3 \text{ 所围成}$$

$$\text{解答: (1) } \iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{9}{4};$$

$$(2) \iint_D x \cos(x+y) dx dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^x x \cos(x+y) dy = \int_0^{\pi} (x \sin 2x - x \sin x) dx = -\frac{3}{2};$$

$$(3) \iint_D x \sqrt{y} d\sigma = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x \sqrt{y} dy = \int_0^1 \frac{2}{3} (x^{\frac{7}{4}} - x^4) dx = \frac{6}{55};$$

$$(4) \iint_D xy dx dy = \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} xy dx = \int_{-1}^2 \frac{1}{2} y (y^2 + 4y + 4 - y^4) dy = \frac{45}{8};$$

$$(5) \iint_D \sin\left(\frac{x}{y}\right) d\sigma = \int_1^2 dy \int_y^{y^3} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dx = \int_1^2 (y \cos 1 - y \cos y^2) dy = \frac{3 \cos 1 + \sin 1 - \sin 4}{2}.$$

所属章节：第九章第二节

难度：二级

12. 画出下列各题中的积分区域, 并交换积分次序(假定 $f(x, y)$ 在积分区域上连续):

$$(1) \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx;$$

$$(2) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_{-2}^1 dy \int_{y^2}^{2-y} f(x, y) dx;$$

$$(4) \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$(5) \int_0^1 dx \int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$$

$$(6) \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx$$

解答: 本题图略, 建议画出

$$(1) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy;$$

$$(2) \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_{-\sqrt{x}}^{2-x} f(x, y) dy;$$

$$(4) \int_0^1 dy \int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx;$$

$$(5) \int_{-1}^0 dy \int_0^{y+1} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$$

$$(6) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy$$

所属章节: 第九章第二节

难度: 一级

13. 计算下列二次积分:

$$(1) \int_0^1 dy \int_{y^{1/3}}^1 \sqrt{1-x^4} dx;$$

$$(2) \int_1^3 dx \int_{x-1}^2 e^{-y^2} dy;$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$(4) \int_0^2 dx \int_x^2 2y^2 \sin(xy) dy;$$

$$(5) \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1+\cos^2 x} dx;$$

$$(6) \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy$$

$$\text{解答: (1) } \int_0^1 dy \int_{y^{1/3}}^1 \sqrt{1-x^4} dx = \int_0^1 dx \int_0^{x^3} \sqrt{1-x^4} dy = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^4} dx = \frac{1}{6};$$

$$(2) \int_1^3 dx \int_{x-1}^2 e^{-y^2} dy = \int_0^2 dy \int_0^{y+1} e^{-y^2} dx = \int_0^2 y e^{-y^2} dy = \frac{1}{2}(1-e^{-4});$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1;$$

$$(4) \int_0^2 dx \int_x^2 2y^2 \sin(xy) dy = \int_0^2 dy \int_0^y 2y^2 \sin(xy) dx = \int_0^2 [2y - 2y \cos(y^2)] dy = 4 - \sin 4;$$

$$(5) \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1+\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sin x} \cos x \sqrt{1+\cos^2 x} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \sqrt{1+\cos^2 x} dx$$

$$= -\frac{1}{3}(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1);$$

$$(6) \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy = \int_1^2 dy \int_y^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dx = -\frac{2}{\pi} \int_1^2 y \cos \frac{\pi}{2} y dy = \frac{8+4\pi}{\pi^3}.$$

所属章节：第九章第二节

难度：二级

14. 利用积分区域的对称性和被积函数关于 x 或 y 的奇偶性，计算下列二重积分：

$$(1) \iint_D |xy| d\sigma, D: x^2 + y^2 \leq R^2;$$

$$(2) \iint_D (x^2 \tan x + y^3 + 4) dx dy, D: x^2 + y^2 \leq 4;$$

$$(3) \iint_D (1+x+x^2) \arcsin \frac{y}{R} d\sigma, D: (x-R)^2 + y^2 \leq R^2;$$

$$(4) \iint_D (|x| + |y|) dx dy, D: |x| + |y| \leq 1$$

解答：(1) 设 $D_1: x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0$ ，则

$$\iint_D |xy| d\sigma = 4 \iint_{D_1} |xy| d\sigma = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R r^3 \sin \theta \cos \theta dr = \frac{R^4}{2};$$

$$(2) \iint_D (x^2 \tan x + y^3 + 4) dx dy = \iint_D 4 dx dy = 16\pi;$$

$$(3) \text{ 由于积分区域关于 } x \text{ 对称，被积函数是关于 } y \text{ 的奇函数，故 } \iint_D (1+x+x^2) \arcsin \frac{y}{R} d\sigma = 0;$$

(4) 设 $D_1: x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$, 则

$$\iint_D (|x| + |y|) dx dy = 2 \iint_{D_1} |x| dx dy = 8 \iint_{D_1} x dx dy = 8 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x dy = \frac{4}{3}.$$

所属章节: 第九章第二节

难度: 二级

15. 利用极坐标化二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 为二次积分, 其中积分区域 D 为:

(1) $D: x^2 + y^2 \leq ax, (a > 0);$

(2) $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4;$

(3) $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x;$

(4) $D: x^2 + y^2 \leq 2(x+y)$

(5) $D: 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4$

解答: (1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr;$

(2) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr;$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr;$

(4) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2(\cos \theta + \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr;$

(5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2 \cos \theta}^2 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^2 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

所属章节: 第九章第二节

难度: 一级

16. 利用极坐标计算下列二重积分:

(1) $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy, D: x^2 + y^2 \leq Rx;$

(2) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, D: (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2);$

(3) $\iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy, D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, y \leq x;$

$$(4) \iint_D x dx dy, D: x^2 + y^2 \geq 2, x^2 + y^2 \leq 2x;$$

$$(5) \iint_D \frac{e^{\arctan \frac{y}{x}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma, D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq \sqrt{3}x$$

$$(6) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, D: \text{第一象限中由圆 } x^2 + y^2 = 2y, x^2 + y^2 = 4y \text{ 及直线 } x = \sqrt{3}y, y = \sqrt{3}x \text{ 所围成.}$$

解答:

$$(1) \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \sqrt{R^2 - r^2} r dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} R^3 (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{1}{3} R^3 \left(\pi - \frac{4}{3} \right);$$

$$(2) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a \sqrt{\cos 2\theta}} r^3 dr = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta d\theta = \frac{\pi}{8} a^4;$$

$$(3) \iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 \theta r dr = \frac{3\pi^2}{64};$$

$$(4) \iint_D x dx dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sqrt{2}}^{2 \cos \theta} r^2 \cos \theta dr = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{8}{3} \cos^4 \theta - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos \theta \right) d\theta = \frac{\pi}{2};$$

注: 本小题与第 9 大题第 (5) 小题相同.

$$(5) \iint_D \frac{e^{\arctan \frac{y}{x}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^2 e^{\theta} dr = e^{\frac{\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{4}};$$

$$(6) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{2 \sin \theta}^{4 \sin \theta} r^3 dr = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 60 \sin^4 \theta d\theta = \frac{15}{8} (2\pi + \sqrt{3}).$$

所属章节: 第九章第二节

难度: 二级

17. 设 r, θ 为极坐标, 在下列积分中交换积分次序:

$$(1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} f(r, \theta) dr \quad (a > 0);$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \sqrt{\sin 2\theta}} f(r, \theta) dr \quad (a > 0);$$

$$(3) \int_0^a d\theta \int_0^{\theta} f(r, \theta) dr \quad (0 < a < 2\pi);$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\cos \theta}} f(r, \theta) dr \quad (a > 0);$$

解答: (1) $\int_0^a dr \int_{-\arccos \frac{r}{a}}^{\arccos \frac{r}{a}} f(r, \theta) d\theta$;

(2) $\int_0^a dr \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}} f(r, \theta) d\theta$;

(3) $\int_0^a dr \int_r^a f(r, \theta) d\theta$;

(4) $\int_0^a dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(r, \theta) d\theta + \int_0^{\sqrt{2}a} dr \int_{\arccos \frac{a}{r}}^{\frac{\pi}{4}} f(r, \theta) d\theta$.

所属章节: 第九章第二节

难度: 一级

18. 计算下列二次积分:

(1) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dy$;

(2) $\int_0^{\sqrt{2}/2} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \arctan \frac{y}{x} dx$;

(3) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy$;

(4) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{-3/2} dy$.

解答: (1) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 e^{r^2} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e-1}{2} d\theta = \frac{\pi(e-1)}{4}$;

(2) $\int_0^{\sqrt{2}/2} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \arctan \frac{y}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \theta r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \theta d\theta = \frac{1}{64} \pi^2$;

(3) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} \cos^3 \theta d\theta = \frac{16}{9}$;

(4) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{-3/2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^1 r^{-2} dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta + \cos\theta - 1) d\theta = 2 - \frac{\pi}{2}$

所属章节: 第九章第二节

难度: 二级

19. 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D e^{\max(x^2, y^2)} dx dy, D: \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;

(2) $\iint_D |x^2 + y^2 - 4| dx dy, D: \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 9\}$;

$$(3) \iint_D |\cos(x+y)| dx dy, D: \{(x, y) | 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\};$$

$$(4) \iint_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy, D: \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}.$$

解答: (1) $\iint_D e^{\max(x^2, y^2)} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy + \int_0^1 dy \int_0^y e^{y^2} dx = e - 1;$

$$(2) \iint_D |x^2 + y^2 - 4| dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - r^2) r dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^3 (r^2 - 4) r dr = \frac{21}{2} \pi;$$

$$(3) \iint_D |\cos(x+y)| dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y) dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y) dy = \pi - 2;$$

$$(4) \iint_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy + 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \sqrt{y - x^2} dy = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}$$

所属章节: 第九章第二节

难度: 三级

20. 选择适当坐标计算下列各题:

$$(1) \iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是由双曲线 } xy=1 \text{ 与直线 } y=x, x=2 \text{ 围成};$$

$$(2) \iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\};$$

$$(3) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 是直线 } y=x, y=x+a, y=a, y=3a(a>0) \text{ 围成};$$

$$(4) \iint_D xy dx dy, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 2x\}.$$

解答: (1) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{9}{4};$

注: 本小题与第 11 大题第 (1) 小题重复.

$$(2) \iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{2}{1+r^2} - 1} r dr = \frac{\pi(\pi-2)}{8};$$

$$(3) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{3a} dy \int_{x+a}^x (x^2 + y^2) dx = 14a^2;$$

$$(4) \iint_D xy dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{2\cos\theta} r^3 \sin\theta \cos\theta dr = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\cos^5\theta \sin\theta - \frac{1}{4}\sin\theta \cos\theta) d\theta = \frac{9}{16}.$$

所属章节：第九章第二节

难度：二级

21. 用适当的变量变换, 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D \sin(9x^2 + 4y^2) dx dy$, 中 D 是椭圆形闭区域 $9x^2 + 4y^2 \leq 1$ 位于第一象限内的部分;

(2) $\iint_D x^2 y^2 dx dy$, D 是由双曲线 $xy=1$, $xy=2$ 与直线 $x=y$, $x=4y$ 所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint_D (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) dx dy$, D 是椭圆形闭区域 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$;

(4) $\iint_D e^{x+y} dx dy$, D 是闭区域 $|x|+|y| \leq 1$;

(5) $\iint_D (x+y)^3 \cos^2(x-y) dx dy$, 其中 D 是以 $(\pi, 0)$, $(3\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, $(0, \pi)$ 为顶点的平行四边形;

参考答案: (1) $\frac{\pi}{24}(1-\cos 1)$ (提示: 作变换 $x = \frac{1}{3}r \cos \theta, y = \frac{1}{2}r \sin \theta$);

(2) $\frac{7}{3} \ln 2$ (提示: 作变换 $xy = u, \frac{y}{x} = v$);

(3) $\frac{1}{2} \pi ab$ (提示: 作变换 $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$);

(4) $e - e^{-1}$ (提示: 作变换 $x+y = u, x-y = v$);

(5) $78\pi^5$ (提示: 作变换 $x+y = u, x-y = v$)

解答: (1) 作变换 $x = \frac{1}{3}r \cos \theta, y = \frac{1}{2}r \sin \theta$, 则 $|J| = \frac{1}{6}r$,

$$\iint_D \sin(9x^2 + 4y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sin r^2 \cdot \frac{1}{6} r dr = \frac{\pi}{24} (1 - \cos 1);$$

(2) 作变换 $xy = u, \frac{y}{x} = v$, 则 $|J| = \frac{1}{2v}$,

$$\iint_D x^2 y^2 dx dy = \int_1^2 du \int_{\frac{1}{4}}^1 u^2 \frac{1}{2v} dv = \frac{7}{3} \ln 2;$$

(3) 作变换 $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$, 则 $|J| = abr$,

$$\iint_D (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 abr^3 dr = \frac{1}{2} \pi ab;$$

(4) 作变换 $x+y = u, x-y = v$, 则 $|J| = \frac{1}{2}$,

$$\iint_D e^{x+y} dx dy = \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 \frac{1}{2} e^u dv = e - e^{-1};$$

(5) 作变换 $x+y=u, x-y=v$, 则 $|J| = \frac{1}{2}$

$$\iint_D (x+y)^3 \cos^2(x-y) dx dy = \int_{-\pi}^{5\pi} du \int_{-\pi}^{2\pi} u^3 \cos^2 v \cdot \frac{1}{2} dv = 39\pi^5.$$

(原参考答案有误?)

所属章节: 第九章第二节

难度: 三级

22. 利用二重积分求下列平面区域的面积:

(1) D 由曲线 $y=e^x, y=e^{-x}$ 及 $x=1$ 围成;

(2) D 由曲线 $y=x+1, y^2=-x-1$ 围成;

(3) D 由双纽线 $(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$ 围成;

(4) $D = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) | 2 \leq r \leq 4 \sin \theta\}$;

(5) $D = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) | \frac{1}{2} \leq r \leq 1 + \cos \theta\}$;

(6) D 由曲线 $(x^2+y^2)^2=2ax^3 (a>0)$ 围成;

(7) D 由曲线 $y=x^3, y=4x^3, x=y^3, x=4y^3$ 所围成的第一象限部分

参考答案: (1) $e+e^{-1}-2$; (2) $\frac{1}{6}$; (3) 4 ; (4) $\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}$; (5) $\frac{5\pi}{6}+\frac{7\sqrt{3}}{8}$; (6) $\frac{5\pi}{8}a^2$; (7) $\frac{1}{8}$

解答: (1) $A = \iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} dy = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = e + e^{-1} - 2$;

(2) $A = \iint_D dx dy = \int_{-1}^0 dy \int_{y-1}^{-y^2-1} dx = \int_{-1}^0 (-y^2 - y) dy = \frac{1}{6}$;

(3) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$ 用极坐标表示 $r^2=4\cos 2\theta$,

$$A = \iint_D dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r dr = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = 4;$$

(4) $A = \iint_D dx dy = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_2^{4\sin\theta} r dr = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (4 - 8\cos 2\theta) d\theta = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$;

(5) $A = \iint_D dx dy = 2 \int_0^{\frac{2\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2}}^{1+\cos\theta} r dr = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\frac{5}{2} + 4\cos\theta + \cos 2\theta) d\theta = \frac{5\pi}{6} + \frac{7\sqrt{3}}{8}$;

(6) 曲线 $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$ ($a > 0$) 用极坐标表示 $r = 2a \cos^3 \theta$,

$$A = \iint_D dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos^3 \theta} r dr = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta d\theta = \frac{5\pi}{8} a^2;$$

(7)

$$A = \iint_D dx dy = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_2^{4 \sin \theta} r dr = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (4 - 8 \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{8}$$

?

所属章节：第九章第二节

难度：二级

23. 利用二重积分求下列各题中的立体 Ω 的体积:

(1) Ω 为第一象限中由圆柱面 $y^2 + z^2 = 4$ 与平面 $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$ 所围成; (注: 象限应为卦限?)

(2) Ω 由平面 $y = 0$, $z = 0$, $y = x$ 及 $6x + 2y + 3z = 6$ 围成;

(3) $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$;

(4) $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 1 + z^2, -1 \leq z \leq 1\}$;

参考答案: (1) $\frac{16}{3}$; (2) $\frac{1}{4}$; (3) $\frac{7\pi}{6}$; (4) $\frac{8\pi}{3}$

解答: (1) $V = \iint_D \sqrt{4 - y^2} dx dy = \int_0^2 dy \int_0^{2y} \sqrt{4 - y^2} dx = \int_0^2 2y \sqrt{4 - y^2} dy = \frac{16}{3}$;

(2) $V = \iint_D (2 - 2x - \frac{2}{3}y) dx dy = \frac{1}{4}$;

(3) $V = \iint_D [(1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}) - (x^2 + y^2)] dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 + \sqrt{1 - r^2} - r^2) r dr = \frac{7\pi}{6}$;

(4) $V = \pi(\sqrt{2})^2 \cdot 2 - 2 \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} dx dy = 4\pi - 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{r^2 - 1} \cdot r dr = \frac{8}{3}\pi$

所属章节：第九章第二节

难度：二级

24. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, D 由点 $(0, 0)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(0, 1)$ 为顶点的三角形区域, 证明:

$$\iint_D f(x+y) d\sigma = \int_0^1 u f(u) du$$

解答: 将二重积分化为二次积分, 再用积分变换 $u = x + y$, 然后交换积分顺序

$$\iint_D f(x+y) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x+y) dy = \int_0^1 dx \int_x^1 f(u) du = \int_0^1 du \int_0^u f(u) dx = \int_0^1 u f(u) du.$$

所属章节：第九章第二节

难度：三级

25. 设 $f(x)$ 连续, 证明: $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x+y) dx dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(u) \sqrt{2-u^2} du$

解答: 作变量变换 $x = \frac{1}{2}(u-v), y = \frac{1}{2}(u+v)$, 则 $|J| = \frac{1}{2}$,

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x+y) dx dy = \frac{1}{2} \iint_{u^2+v^2 \leq 2} f(u) du dv = \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} du \int_{-\sqrt{2-u^2}}^{\sqrt{2-u^2}} f(u) dv = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(u) \sqrt{2-u^2} du.$$

所属章节：第九章第二节

难度：三级

26. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明: $\left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$

解答: 设区域 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$, 则

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 &= \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b f(y) dy = \iint_D f(x) f(y) dx dy \\ &\leq \iint_D \frac{f^2(x) + f^2(y)}{2} dx dy = \frac{1}{2} \iint_D f^2(x) dx dy + \frac{1}{2} \iint_D f^2(y) dx dy \\ &= \iint_D f^2(x) dx dy = \int_a^b dx \int_a^b f^2(x) dy = (b-a) \int_a^b f^2(x) dx. \end{aligned}$$

所属章节：第九章第二节

难度：三级

27. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x) > 0$, 证明: $\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2$

解答: 设区域 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$, 则

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx &= \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(y)} dy = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)} dx dy, \\ \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx &= \int_a^b f(y) dy \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)} dx dy, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(y)} dy = \frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \right) dx dy \geq \iint_D dx dy = (b-a)^2.$$

所属章节：第九章第二节

难度：三级

28. 在曲线族 $y=c(1-x^2)$ ($c>0$) 中试选一条曲线，使这条曲线和它在 $(-1, 0)$ 及 $(1, 0)$ 两点处的法线所围成的图形面积最小

解答：曲线在 $(1, 0)$ 处的法线为 $y = \frac{1}{2c}x - \frac{1}{2c}$ ，由对称性知所围图形面积为

$$A = 2 \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2c}x - \frac{1}{2c}}^{c(1-x^2)} dy = \frac{4}{3}c + \frac{1}{2c},$$

$$\text{令 } \frac{dA}{dc} = 0, \text{ 得唯一驻点 } c = \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ (负值舍去)}$$

又由于该实际问题的最小值存在，故当 $c = \frac{\sqrt{6}}{4}$ 时，所围图形面积最小，为 $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ 。

所属章节：第九章第二节

难度：三级

29. 设 $f(x)$ 是连续函数，区域 D 由 $y=x^3$, $y=1$, $x=-1$ 围成，计算二重积分

$$\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)] dx dy$$

解答：将 D 分成两块，记为

$$D_1 = \{(x, y) | -\sqrt[3]{y} \leq x \leq \sqrt[3]{y}, 0 \leq y \leq 1\}, D_2 = \{(x, y) | x^3 \leq y \leq -x^3, -1 \leq x \leq 0\},$$

则由函数的奇偶性与积分区域的对称性得

$$\begin{aligned} \iint_D x[1+yf(x^2+y^2)] dx dy &= \iint_{D_1} x[1+yf(x^2+y^2)] dx dy + \iint_{D_2} x[1+yf(x^2+y^2)] dx dy \\ &= \iint_{D_2} x dx dy = 2 \int_{-1}^0 dx \int_0^{-x^3} x dy = -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

所属章节：第九章第二节

难度：三级

30. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且都是单调减少的，试证：

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \geq \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx$$

解答：设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ，则

$$I = \int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx = \iint_D f(x)g(x)dx dy - \iint_D f(x)g(y)dx dy$$

$$= \iint_D f(x)[g(x) - g(y)] dx dy,$$

类似地有 $I = \iint_D f(y)[g(y) - g(x)] dx dy$, 两式相加, 并利用条件 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且都是单调减少的, 就有

$$2I = \iint_D [f(x) - f(y)][g(x) - g(y)] dx dy \geq 0,$$

所以 $I \geq 0$, 即 $\int_0^1 f(x)g(x)dx \geq \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx$.

所属章节: 第九章第二节

难度: 三级

31. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 并设 $\int_0^1 f(x)dx = A$, 求 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy$

解答: 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy &= \int_0^1 dy \int_0^y f(x)f(y)dx = \int_0^1 dx \int_0^x f(x)f(y)dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy + \int_0^1 dx \int_0^x f(x)f(y)dy \right] \\ &= \frac{1}{2} \iint_D f(x)f(y) dx dy = \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 f(y)dy = A^2. \end{aligned}$$

所属章节: 第九章第二节

难度: 三级

32. 至少利用三种不同的积分次序计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + yz) dv$, 其中 $\Omega = [0, 2] \times [-3, 0] \times [-1, 1]$

$$\text{解答: } \iiint_{\Omega} (x^2 + yz) dv = \int_0^2 dx \int_{-3}^0 dy \int_{-1}^1 (x^2 + yz) dz = \int_0^2 dx \int_{-3}^0 2x^2 dy = \int_0^2 6x^2 dx = 16,$$

$$\text{类似 } \iiint_{\Omega} (x^2 + yz) dv = \int_{-3}^0 dy \int_0^2 dx \int_{-1}^1 (x^2 + yz) dz = 16,$$

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + yz) dv = \int_{-1}^1 dz \int_{-3}^0 dy \int_0^2 (x^2 + yz) dx = 16.$$

所属章节: 第九章第三节

难度: 一级

33. 将三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ 化为累次积分(三次积分), 其中积分区域 Ω 分别是:

(1) $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$;

(2) Ω 由 $x^2+y^2=4$, $z=0$, $z=x+y+10$ 所围成;

(3) $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leq 2, z \geq x^2+y^2$

(4) Ω : 由双曲抛物面 $z=xy$ 及平面 $x+y-1=0$, $z=0$ 所围成的闭区域

解答: (1) $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x,y,z) dz$;

(2) $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{x+y+10} f(x,y,z) dz$;

(3) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} f(x,y,z) dz$;

(4) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} f(x,y,z) dz$

所属章节: 第九章第三节

难度: 二级

34. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} y dv$, 其中 Ω 是在平面 $z=x+2y$ 下放, xOy 平面上由 $y=x^2$ 、 $y=0$ 及 $x=1$ 围成的平面区域上方的立体;

(2) $\iiint_{\Omega} e^{x+y+z} dv$, 其中 Ω 是在平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成;

(3) $\iiint_{\Omega} x \sin(y+z) dx dy dz$, 其中

$$\Omega = \{(x,y,z) | 0 \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2} - y\}$$

(4) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是第一象限中由曲面 $y^2+z^2=9$ 与平面 $x=0$ 、 $y=3x$ 和 $z=0$ 所围成的空间立体;

(5) $\iiint_{\Omega} \frac{xyz}{1+x^2+y^2+z^2} dx dy dz$, 其中 $\Omega = \{(x,y,z) | x \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$;

(6) $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是由抛物面 $x=4y^2+4z^2$ 与平面 $x=4$ 围成

参考答案: (1) $\frac{5}{28}$; (2) $\frac{e}{2}-1$; (3) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; (4) $\frac{27}{8}$; (5) 0; (6) $\frac{16}{3}\pi$

解答: (1) $\frac{5}{28}$;

(2) $\frac{e}{2}-1$;

(3) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$;

(4) $\frac{27}{8}$;

(5) 0;

(6) $\frac{16}{3}\pi$

所属章节：第九章第三节

难度：二级

35. 用截面法(先算二重积分后算单积分)解下列三重积分问题:

(1) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} \sin z \, dv$, 其中 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和平面 $z = \pi$ 围成;

(2) 设 Ω 是由单叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$ 和平面 $z = 0$, $z = H$ 围成, 试求其体积;

(3) 已知物体 Ω 的底面是 xOy 平面上的区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$, 当垂直于 x 轴的平面与 Ω 相交时, 截得的都是正三角形, 物体的体密度函数为 $\rho(x, y, z) = 1 + \frac{x}{R}$, 试求其质量;

(4) 试求立体 $\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq z \leq 1 \right\}$ 的形心坐标

参考答案: (1) $\pi^2 - 4\pi$; (2) $\pi R^2 H + \frac{1}{3}\pi H^3$; (3) $\frac{4}{3}\sqrt{3}R^3$; (4) $\left(0, 0, \frac{2}{3}\right)$

解答: (1) $\iiint_{\Omega} \sin z \, dv = \int_0^{\pi} \sin z \, dz \iint_{D_z} dx dy = \int_0^{\pi} \sin z \cdot \pi z^2 \, dz = \pi^3 - 4\pi$; 与原参考答案不同

(2) $V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^H dz \iint_{D_z} dx dy = \int_0^H \pi(R^2 + z^2) \, dz = \pi R^2 H + \frac{1}{3}\pi H^3$;

(3) $m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dv = \int_{-R}^R dx \iint_{D_x} \left(1 + \frac{x}{R}\right) dy dz = \int_{-R}^R \left(1 + \frac{x}{R}\right) \cdot \sqrt{3}(R^2 - x^2) \, dx = \frac{4}{3}\sqrt{3}R^3$;

(4) 由对称性, $\bar{x} = \bar{y} = 0$,

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^1 dz \iint_{D_z} dx dy = \int_0^1 \pi abz \, dz = \frac{1}{2}\pi ab,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z \, dv = \frac{1}{V} \int_0^1 z \, dz \iint_{D_z} dx dy = \frac{1}{V} \int_0^1 \pi abz^2 \, dz = \frac{2}{3}, \text{ 即所求形心坐标为 } \left(0, 0, \frac{2}{3}\right).$$

所属章节：第九章第三节

难度：二级

36. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dv$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 4, -1 \leq z \leq 2\}$;

(2) $\iiint_{\Omega} (x^3 + xy^2) \, dx dy dz$, 其中 Ω 由柱面 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 及平面 $z = 0$, $z = 2$ 所围成;

- (3) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dv$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2\}$;
- (4) $\iiint_{\Omega} y dx dy dz$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) | 1 \leq y^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq x \leq z + 2\}$;
- (5) $\iiint_{\Omega} xy dv$, 其中 Ω 为 $z \geq 0$ 上平面 $y=0$ 、 $y=z$ 及柱面 $x^2 + z^2 = 1$ 围成

解答: (1) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r dr \int_{-1}^2 r^2 dz = 2\pi \int_0^2 3r^3 dr = 24\pi$;

(2) 由于被积函数、积分区域关于 x 为奇, 故 $\iiint_{\Omega} (x^3 + xy^2) dx dy dz = 0$;

(3) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r dr \int_0^{9-r^2} r dz = 2\pi \int_0^3 (9r^2 - r^4) dr = \frac{324\pi}{5}$;

(4) $\iiint_{\Omega} y dx dy dz = 0$;

(5) $\iiint_{\Omega} xy dv = 0$

所属章节: 第九章第四节

难度: 三级

37. 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} e^{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dv$, 其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$;

(2) $\iiint_{\Omega} xe^{(x^2 + y^2 + z^2)^2} dv$, 其中 Ω 是第一象限中球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 之间的部分;

(3) $\iiint_{\Omega} y^2 dv$, 其中 Ω 是单位球体在第五象限部分;

(4) $\iiint_{\Omega} \frac{\sin(1 + x^2 + y^2 + z^2)}{1 + x^2 + y^2 + z^2} dv$, 其中 Ω 是 $0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

(5) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$, 其中 Ω 是锥面 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 上方与上半球面 $\rho = 2$ 所围立体

解答: (1) $\iiint_{\Omega} e^{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a e^r r^2 \sin \varphi dr = 4\pi \int_0^a r^2 e^r dr = 4\pi e^a (a^2 - 2a + 2) - 8\pi$;

(2) $\iiint_{\Omega} xe^{(x^2 + y^2 + z^2)^2} dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 r \sin \varphi \cos \theta e^{r^4} \cdot r^2 \sin \varphi dr$

$$= \frac{e^{16} - e}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{e^{16} - e}{16} \pi ;$$

$$(3) \iiint_{\Omega} y^2 dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{30};$$

$$(4) \iiint_{\Omega} \frac{z \ln(1+x^2+y^2+z^2)}{1+x^2+y^2+z^2} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{r^3}{1+r^2} \ln(1+r^2) \sin \varphi \cos \varphi dr$$

$$= 2\pi \left(\ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \ln^2 2 \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} (4 \ln 2 - 2 - \ln^2 2);$$

$$(5) \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^2 r^3 \sin \varphi dr = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \varphi d\varphi = 4(2-\sqrt{3})\pi.$$

所属章节：第九章第四节

难度：三级

38. 将下列三次积分化为柱面坐标或球面坐标下的三次积分，再计算积分值，并画出积分区域图：

$$(1) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{3/2} dz;$$

$$(2) \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz dz;$$

$$(3) \int_{-3}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz;$$

$$(4) \int_0^3 dy \int_0^{\sqrt{9-y^2}} dx \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2) dz;$$

参考答案：(1) $\frac{8\pi}{35}$; (2) $\frac{1}{96}$; (3) $\frac{243}{5}\pi$; (4) $\frac{486(\sqrt{2}-1)}{5}\pi$

解答：本题图略

(1) 用柱面坐标，

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{3/2} dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^{2-r^2} r^3 dz = 4\pi \int_0^1 (r^4 - r^6) dr = \frac{8}{35}\pi;$$

(2) 用柱面坐标，

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^r r^2 \sin \theta \cos \theta dz = \frac{1}{48} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{96};$$

(3) 用球面坐标，

$$\int_{-3}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^3 r^4 \sin \varphi \cos \varphi dr = \frac{243}{5}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{243}{5}\pi$$

;

(4) 用球面坐标，

$$\int_0^3 dy \int_0^{\sqrt{9-y^2}} dx \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2) dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{3\sqrt{2}} r^4 \sin \varphi dr = \frac{486(\sqrt{2}-1)}{5} \pi .$$

所属章节：第九章第四节

难度：三级

39. 选择适当坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint_{\Omega} 2z dv$ ，其中 Ω 由柱面 $x^2+y^2=8$ ，椭圆锥面 $z=\sqrt{x^2+2y^2}$ 及平面 $z=0$ 所围成；

(2) $\iiint_{\Omega} (x+y) dv$ ，其中 $\Omega = \{(x,y,z) | 1 \leq z \leq 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\}$ ；

(3) $\iiint_{\Omega} z dv$ ，其中 Ω 由曲面 $2z=x^2+y^2, (x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 及平面 $z=0$ 所围成；

(4) $\iiint_{\Omega} \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \right) dv$ ，其中 Ω 由曲面 $z^2=x^2+y^2, z^2=3x^2+3y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成；

(5) $\iiint_{\Omega} z^2 dv$ ，其中 Ω 是两个球体 $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ 与 $x^2+y^2+z^2 \leq 2Rz$ 的公共部分

解答：

(1) 用柱面坐标，

$$\iiint_{\Omega} 2z dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} r dr \int_0^{r\sqrt{1+\sin^2\theta}} 2z dz = 16 \int_0^{2\pi} (1+\sin^2\theta) d\theta = 48\pi ;$$

(2) 用柱面坐标，

$$\iiint_{\Omega} (x+y) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_1^{1+\sqrt{1-r^2}} r(\sin\theta + \cos\theta) dz = 0 ;$$

(3) 用柱面坐标，

$$\iiint_{\Omega} z dv = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r dr \int_0^{\frac{1}{2}r^2} z dz = \frac{1}{38} ;$$

(4) 用球面坐标，

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \right) dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \left[r + \frac{1}{r^2} \right] \cdot r^2 \sin\varphi dr \\ &= \frac{9\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{27} \pi + (\ln 3 - \ln 2) \pi ; \end{aligned}$$

(5) 用柱面坐标，两球面的公共部分在 xOy 面上的投影 $x^2+y^2 \leq (\frac{\sqrt{3}}{2}R)^2$ ，在柱面坐标下积分区域可表示为

$$\Omega: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \frac{\sqrt{3}}{2}R, R - \sqrt{R^2 - \rho^2} \leq z \leq R\sqrt{R^2 - \rho^2} ,$$

所以
$$\iiint_{\Omega} z^2 dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} d\rho \int_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} z^2 \rho dz$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \frac{1}{3} [(R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} - (R - \sqrt{R^2 - \rho^2})^3] \rho d\rho = \frac{59}{480} \pi R^5.$$

注：本题也可用截面法来计算，分上下两部分，

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z^2 dv &= \int_0^{\frac{R}{2}} dz \iint_{D_z} z^2 dx dy + \int_{\frac{R}{2}}^R dz \iint_{D_z} z^2 dx dy \\ &= \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 \pi (2Rz - z^2) dz + \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 \pi (R^2 - z^2) dz \\ &= \frac{1}{40} \pi R^5 + \frac{47}{480} \pi R^5 = \frac{59}{480} \pi R^5. \end{aligned}$$

所属章节：第九章第四节

难度：三级

40. 利用三重积分求所给立体 Ω 的体积：

(1) Ω 由柱面 $x=y^2$ 和平面 $z=0$ 及 $x+z=1$ 围成的立体；

(2) Ω 由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和 $z=18-x^2-y^2$ 围成的立体；

(3) Ω 为圆柱体 $r \leq a \cos \theta$ 内被球心在原点、半径为 a 的球所割下的部分

解答：(1)
$$V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy \int_0^{1-x} dz = \int_0^1 (2x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{8}{15};$$

(2)
$$V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r dr \int_{r^2}^{18-r^2} dz = 81\pi;$$

(3)
$$V = \iiint_{\Omega} dv = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} r dr \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} dz = \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{2}{9} a^3 (3\pi - 4).$$

所属章节：第九章第四节

难度：二级

41. 设 Ω 是 $Oxyz$ 坐标系中体积为 $V=5$ 的有界闭区域， Ω^* 为 Ω 在变换

$$u=4x+4y+8z, \quad v=2x+7y+4z, \quad w=x+4y+3z$$

下的有界闭区域，试求 Ω^* 的体积 V^*

解答：在变换 $u=4x+4y+8z, \quad v=2x+7y+4z, \quad w=x+4y+3z$ 下，

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 20,$$

所以 $V^*=20 \quad V=100.$

所属章节：第九章第四节

难度：二级

42. 计算三重积分
$$\iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1} \sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{3/2}} dx dy dz$$

解答：作变换 $x = a\rho \sin \varphi \cos \theta, y = b\rho \sin \varphi \sin \theta, z = c\rho \cos \varphi$ ，则 $|J| = abc\rho^2 \sin \varphi$ ，

$$\iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1} \sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{3/2}} dx dy dz = abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho = \frac{8}{9} \pi abc.$$

所属章节：第九章第四节

难度：三级

43. 计算三重积分
$$I = \iiint_{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leq R^2} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

解答：作变换 $x = a + \rho \sin \varphi \cos \theta, y = b + \rho \sin \varphi \sin \theta, z = c + \rho \cos \varphi$ ，则 $|J| = \rho^2 \sin \varphi$ ，

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^R (a^2 + b^2 + c^2 + 2a\rho \sin \varphi \cos \theta + 2b\rho \sin \varphi \sin \theta + 2c\rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= \frac{4}{5} \pi R^5 + \frac{4}{3} \pi R^3 (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

所属章节：第九章第四节

难度：三级

44. 计算平面 $6x+3y+2z=12$ 在第一象限中的部分的面积

参考答案：14

解答：平面方程 $z = 6 - 3x - \frac{3}{2}y$ ， $D: 6x + 3y \leq 12, x \geq 0, y \geq 0$ ，投影面积 4，

$$dA = \frac{7}{2} d\sigma,$$

$$A = \iint_D \frac{7}{2} d\sigma = \frac{7}{2} \times 4 = 14.$$

所属章节：第九章第五节

难度：二级

45. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 含在圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 内部的曲面面积

解答：由对称性，设 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ， $D: x^2 + y^2 \leq ax, y \geq 0$ ，则

$$dA = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy,$$

$$A = 4 \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = 2a^2(\pi - 2).$$

所属章节：第九章第五节

难度：二级

46. 计算旋转抛物面 $2z = x^2 + y^2$ 被柱面 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 所截下部分的曲面面积

解答：柱面投影曲线方程化为 $r = \sqrt{\cos 2\theta}$ ，用极坐标计算曲面面积，

$$dA = \sqrt{1 + x^2 + y^2} d\sigma = \sqrt{1 + r^2} r dr d\theta,$$

$$A = \iint_D \sqrt{1 + r^2} r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \sqrt{1 + r^2} r dr = \frac{20}{9} - \frac{\pi}{3}.$$

所属章节：第九章第五节

难度：二级

47. 求双曲抛物面 $z = y^2 - x^2$ 夹在圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 4$ 之间部分的曲面面积

解答：曲面方程 $z = y^2 - x^2$ ，投影区域为圆环域 $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ ，

$$dA = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma = \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta,$$

$$A = \iint_D \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}).$$

所属章节：第九章第五节

难度：二级

48. 计算由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 (z > 0)$ 和旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 2az (a > 0)$ 所围成立体的表面积

参考答案： $\frac{16}{3}\pi a^2$

解答：上半曲面方程 $z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$ ，投影区域为圆环域 $D: x^2 + y^2 \leq 2a^2$ ，

$$dA = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}} d\sigma = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2 - r^2}} r dr d\theta,$$

$$A_1 = \iint_D \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2 - r^2}} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}a} r \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2 - r^2}} dr = 2\pi a^2 (3 - \sqrt{3});$$

类似，下半曲面面积，

$$A_2 = \iint_D \frac{\sqrt{a^2 + r^2}}{a} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}a} r \frac{\sqrt{a^2 + r^2}}{a} dr = 2\pi a^2 \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right);$$

所以所求总的曲面面积为 $A_1 + A_2 = \frac{16}{3}\pi a^2$.

所属章节：第九章第五节

难度：二级

49. 求由圆柱面 $x^2 + y^2 = 9$ 、平面 $4y + 3z = 12$ 和 $4y - 3z = 12$ 所围成立体的表面积

解答：该立体表面可分成两块来计算面积，一块为上下底，在两个平面上，由于对称，只计算上底面积 A_1 ，另一块为侧面，面积记为 A_2 ，整个立体的表面积 $A = 2A_1 + A_2$ 。

先计算 A_1 ，由于对应曲面方程为 $z = 4 - \frac{4}{3}y$ ， $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4}{3}$ ， D_{xy} 为投影区域，

$$dA = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{5}{3} d\sigma, \text{ 所以}$$

$$A_1 = \iint_{D_{xy}} dA = \frac{5}{3} \iint_{D_{xy}} d\sigma = \frac{5}{3} \cdot 9\pi = 15\pi,$$

再计算 A_2 ，由于对应曲面方程之一为 $y = \sqrt{9 - x^2}$ ， $\frac{\partial y}{\partial z} = 0, \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$ ， D_{xz} 为投影区域，

$$dA = \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} d\sigma, \text{ 所以}$$

$$A_2 = 2 \iint_{D_{xz}} dA = 2 \int_{-3}^3 dx \int_0^8 \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} dz = 48\pi,$$

于是，总面积为

$$A = 2A_1 + A_2 = 30\pi + 48\pi = 78\pi.$$

所属章节：第九章第五节

难度：三级

50. 设两个圆柱半径相等，轴相互垂直，求它们所围立体的表面积

解答：设两个圆柱面的方程为 $x^2 + y^2 = R^2, x^2 + z^2 = R^2$ ，由对称性，只要计算出立体在第一卦限部分上面部分面积 A_1 ，再乘以 16 即可，

$$\text{由于 } z = \sqrt{R^2 - x^2}, dA = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx dy, \text{ 所以}$$

$$A=16A_1=16\iint_{D_1}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dxdy=16\int_0^Rdx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dy=16R^2.$$

所属章节：第九章第五节

难度：二级

51. 设平面薄片所占的闭区域 D 是由直线 $x+y=2$, $y=x$ 和 x 轴所围成, 它的面密度 $\rho(x,y)=x^2+y^2$, 求该薄片的质量

$$\text{解答: } m = \iint_D \rho(x,y) dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x^2 + y^2) dx = \frac{4}{3}$$

所属章节：第九章第五节

难度：二级

52. 求占有下列区域 D 的平面薄片的质量与重心(质心):

(1) D 是以 $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$ 为顶点的三角形区域, $\rho(x, y)=x+y$;

(2) D 是第一象限中由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 围成的区域, $\rho(x, y)=xy$;

(3) D 由心脏线 $r=1+\sin\theta$ 所围成的区域, $\rho(x, y)=2$;

(4) $D = \{(x, y) | x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$, $\rho(x, y) = y + |y-1|$

$$\text{解答: (1) } m = \iint_D \rho(x,y) dxdy = \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} (x+y) dy = 6,$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x,y) dxdy = \frac{1}{6} \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} (x^2 + xy) dy = \frac{3}{4},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x,y) dxdy = \frac{1}{6} \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} (xy + y^2) dy = \frac{3}{2},$$

即所求平面薄片的质量为 6, 质心坐标为 $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$;

$$(2) m = \iint_D \rho(x,y) dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 xy dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (x - x^5) dx = \frac{1}{6},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x,y) dxdy = 6 \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 x^2 y dy = 3 \int_0^1 (x^2 - x^6) dx = \frac{4}{7},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x,y) dxdy = 6 \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 xy^2 dy = \frac{3}{4},$$

即所求平面薄片的质量、质心坐标分别为 $m = \frac{1}{6}$ 、 $(\frac{4}{7}, \frac{3}{4})$;

$$(3) m = \iint_D \rho(x,y) dxdy = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{1+\sin\theta} r dr = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin^2 \theta) d\theta = 3\pi,$$

由对称性知, $\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dx dy = 0$,

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dx dy = \frac{4}{3\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{1+\sin\theta} r^2 \sin\theta dr = \frac{8}{9\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin^2\theta + \sin^4\theta) d\theta = \frac{5}{6},$$

即所求平面薄片的质量、质心坐标分别为 $m = 3\pi, (0, \frac{5}{6})$;

(4) 将区域分为两个部分, 记为 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + (y-1)^2 \leq 1, y \leq 1\}$, 此处 $\rho(x, y) = 1$,

$D_2 = \{(x, y) | x^2 + (y-1)^2 \leq 1, y \geq 1\}$, 此处 $\rho(x, y) = 2y-1$, 故

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy = \iint_{D_1} dx dy + \iint_{D_2} (2y-1) dx dy = \pi + \frac{4}{3},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dx dy = 0,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dx dy = \frac{1}{m} \iint_{D_1} y dx dy + \frac{1}{m} \iint_{D_2} y(2y-1) dx dy = \frac{15\pi+16}{12\pi+16},$$

即所求平面薄片的质量、质心坐标分别为 $m = \pi + \frac{4}{3}, (0, \frac{15\pi+16}{12\pi+16})$.

所属章节: 第九章第五节

难度: 二级

53. 求均匀平面薄片 $D = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) | 2 \sin \theta \leq r \leq 4 \sin \theta\}$ 绕极轴的转动惯量

$$\text{解答: } I = \iint_D y^2 \mu d\sigma = 2\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2 \sin^2 \theta r dr = 60\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta = \frac{75\pi\mu}{4}$$

所属章节: 第九章第五节

难度: 二级

54. 求底长为 a , 高为 h 的等腰三角形薄片, 绕其高的转动惯量(设密度为 1)

解答: 将高放在 y 轴上, 以底的中心为原点建立坐标系, 问题转化为求密度为 1、占有区域

$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq h, -\frac{a}{2h}(h-y) \leq x \leq \frac{a}{2h}(h-y)\}$ 的物体绕 y 轴的转动惯量, 即

$$I_y = \iint_D x^2 d\sigma = 2 \int_0^h dy \int_0^{\frac{a}{2h}(h-y)} x^2 dx = \frac{a^3}{12h^3} \int_0^h (h-y)^3 dy = \frac{a^3 h}{48}.$$

所属章节: 第九章第五节

难度: 二级

55. 利用三重积分计算下列立体 Ω 的体积和形心:

(1) $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 36 - 3x^2 - 3y^2\}$;

(2) Ω 为锥面 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 上方和球面 $\rho = 4\cos\varphi$ 下方所围的立体.

参考答案: (1) 162π , $(0, 0, 15)$; (2) 10π , $(0, 2, 1)$

解答: (1) 立体体积为 $V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r dr \int_{r^2}^{36-3r^2} dz = 162\pi$,

由对称性知 $\bar{x} = \bar{y} = 0$, 计算得

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dv = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r dr \int_{r^2}^{36-3r^2} z dz = 15, \text{ 即质心为 } (0, 0, 15).$$

(2) 立体体积为 $V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} r^2 \sin\varphi dr = 10\pi$,

由对称性知 $\bar{x} = \bar{y} = 0$, 计算得

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dv = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} r \cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr = \frac{21}{25}, \text{ 即质心为 } (0, 0, \frac{21}{25}).$$

注: 此处第二小题答案与原参考答案不同, 是否是由于球面坐标的定义不同?

所属章节: 第九章第五节

难度: 二级

56. 求一半径为 a 的半球体的质量与重心. 假设其上任一点密度与该点到底面之距离成正比.

解答: 不妨假设半球体以 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0$ 表示, 则它的质量为

$$M = \iiint_{\Omega} kz dv = k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r \cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr = \frac{1}{4} k\pi a^4,$$

由对称性知 $\bar{x} = \bar{y} = 0$,

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} kz^2 dv = \frac{k}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^2 \cos^2\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr = \frac{8}{15} a,$$

即重心为 $(0, 0, \frac{8}{15}a)$.

注: 书中涉及的“重心”是否都应该改为“质心”?

所属章节: 第九章第五节

难度: 二级

57. 设半径为 R 的非均匀球体上任一点的密度与球心到该点的距离成正比, 若球体的质量为 M , 求它对于直径的转动惯量.

解答: 不妨假设球体以 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 表示, 则球体的质量为

$$M = \iiint_{\Omega} k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv = k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r \cdot r^2 \sin \varphi dr = k\pi R^4,$$

它对于直径的转动惯量为

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv = k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R kr^3 \sin^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{4}{9} k\pi R^6,$$

两式联立, 即得

$$I_z = \frac{4}{9} MR^2.$$

所属章节: 第九章第五节

难度: 二级

58. 求均匀物体: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 \geq z^2$ 关于 Oz 轴的转动惯量.

解答: 设 μ 为物体的密度, 则

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \mu dv = 2\mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sin^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{16\sqrt{2}}{5} \pi \mu \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{8}{3} \pi \mu.$$

所属章节: 第九章第五节

难度: 二级

59. 设物体所占区域为 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq R^2, |z| \leq H\}$, 其密度为常数. 已知 Ω 关于 x 轴及 z 轴的转动惯量相等, 试证明 $H:R = \sqrt{3}/2$.

解答: 由于密度为常数, 不妨设为 1, Ω 关于 x 轴及 z 轴的转动惯量分别为

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_{-H}^H (r^2 \sin^2 \theta + z^2) dz = \frac{H\pi R^4}{2} + \frac{2H^3 R^2}{3},$$

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_{-H}^H r^2 dz = H\pi R^4,$$

由条件知它们相等, 建立等式, 即可解得

$$H:R = \sqrt{3}/2.$$

所属章节: 第九章第五节

难度: 二级

60. 求高为 h , 半顶角为 α , 密度为常数 μ 的均匀圆锥体对位于其顶点的一单位质量质点的引力

解答: 设圆锥体的顶点在下, 设为坐标原点, z 轴为中心轴, 则由对称性知 $F_x = F_y = 0$, 所求引力在 z 轴上的分量为

$$F_z = k\mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{h \tan \alpha} r dr \int_{r \cot \alpha}^{h \tan \alpha} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dz$$

$= 2\pi k\mu h(1 - \cos \alpha)$. 这里取正号, 表示方向朝上, k 为引力常数.

所属章节: 第九章第五节

难度: 二级

61. 求一密度为常数 ρ 的均匀柱体 $x^2 + y^2 = R^2 (0 \leq z \leq h)$ 对于位于点 $M_0(0, 0, a) (a > h)$ 处的单位常数质量的质点的引力

解答: 由对称性及立体密度均匀知, $F_x = F_y = 0$, 所求引力在 z 轴上的分量为

$$F_z = k\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_0^h \frac{z-a}{[r^2 + (z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} dz$$

$= -2\pi k\rho [\sqrt{(h-a)^2 + R^2} - \sqrt{R^2 + a^2} + h]$. 这里取负号, 表示方向朝下, k 为引力常数.

所属章节: 第九章第五节

难度: 三级

62. 求一空间闭区域 Ω , 使三重积分 $\iiint_{\Omega} (1 - x^2 - 4y^2 - 9z^2) dx dy dz$ 为最大

解答: 由于被积函数 $f(x, y, z) = 1 - x^2 - 4y^2 - 9z^2$, 要使三重积分 $\iiint_{\Omega} (1 - x^2 - 4y^2 - 9z^2) dx dy dz$ 为

最大, 应当 $f(x, y, z) \geq 0$, 因此要求 $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1$, 设 $\Omega: x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1$, 则在 Ω 内部

$f(x, y, z) \geq 0$, 在 Ω 外部 $f(x, y, z) \leq 0$, 对任何其它的空间闭区域 Ω_1 ,

如果 $\Omega_1 \subset \Omega$,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_1} (1 - x^2 - 4y^2 - 9z^2) dx dy dz &= \iiint_{\Omega} (1 - x^2 - 4y^2 - 9z^2) dx dy dz - \iiint_{\Omega - \Omega_1} (1 - x^2 - 4y^2 - 9z^2) dx dy dz \\ &\leq \iiint_{\Omega} (1 - x^2 - 4y^2 - 9z^2) dx dy dz, \end{aligned}$$

如果 $\Omega_1 \supset \Omega$,

$$\iiint_{\Omega_1} (1 - x^2 - 4y^2 - 9z^2) dx dy dz = \iiint_{\Omega} (1 - x^2 - 4y^2 - 9z^2) dx dy dz + \iiint_{\Omega_1 - \Omega} (1 - x^2 - 4y^2 - 9z^2) dx dy dz$$

$$\leq \iiint_{\Omega} (1-x^2-4y^2-9z^2) dx dy dz,$$

如果 Ω_l 与 Ω 相交或相离, 也有类似结果.

所以所求空间区域就是 $\Omega: x^2+4y^2+9z^2 \leq 1$.

所属章节: 第九章第五节

难度: 三级

63. 求曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ 和坐标面围成的立体区域之体积

解答: 所求立体体积为

$$V = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy \int_0^{(1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} dz = \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} (1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 dy = \int_0^1 \frac{1}{6} (1-\sqrt{x})^4 dx = \frac{1}{90}.$$

所属章节: 第九章第五节

难度: 二级

64. 设 $f(x)$ 是连续函数, 而 $F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz$, 求 $F(t)$

$$\text{解答: } F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^t f(r^2) r^2 \sin \varphi dr = 4\pi \int_0^t f(r^2) r^2 dr,$$

$$\text{求得 } F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2).$$

所属章节: 第九章第五节

难度: 三级

65. 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(t) = \iiint_{\Omega} [z^2 + f(x^2+y^2)] dx dy dz$, 其中 $\Omega: 0 \leq z \leq h, x^2+y^2 \leq t^2$, 求 $\frac{dF(t)}{dt}$

解答: 利用柱面坐标将三重积分化为三次积分,

$$F(t) = \iiint_{\Omega} [z^2 + f(x^2+y^2)] dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t r dr \int_0^h [z^2 + f(r^2)] dz = 2\pi \int_0^t \left[\frac{1}{3} h^3 + f(r^2) r \right] dr,$$

$$\text{所以, } \frac{dF(t)}{dt} = 2\pi t \left[\frac{h^3}{3} + hf(t^2) \right].$$

所属章节: 第九章第五节

难度: 三级

66. 求极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^4} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz$

解答：利用球面坐标将三重积分化为三次积分，再取极限

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^4} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^t r^3 \sin \varphi dr = \pi .$$

所属章节：第九章第五节

难度：三级

第 10 章 曲线积分与曲面积分

1. 计算下列对弧长的曲线积分:

(1) $\int_C x \sin y \, ds$, 其中 C 为 $\begin{cases} x=3t \\ y=t \end{cases}, (0 \leq t \leq 1)$;

(2) $\oint_C (x^2 + y^2) \, ds$, 其中 C 为圆周 $\begin{cases} x=a \cos t \\ y=a \sin t \end{cases}, (0 \leq t \leq 2\pi)$;

(3) $\int_C y^2 \, ds$, 其中 C 为摆线 $\begin{cases} x=a(t - \sin t) \\ y=a(1 - \cos t) \end{cases}$ 的第一拱 $(0 \leq t \leq 2\pi)$;

(4) $\int_C y \, ds$, 其中 C 为抛物线 $y^2=2x$ 上由点 $(0, 0)$ 到点 $(2, 2)$ 之间的一段弧;

(5) $\int_C (x+y) \, ds$, 其中 C 为以 $O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1)$ 为顶点的三角形的边界;

(6) $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$, 其中 C 为圆周 $x^2 + y^2 = ax (a > 0)$;

(7) $\int_C z \, ds$, 其中 C 为圆锥螺线 $\begin{cases} x=t \cos t \\ y=t \sin t \\ z=t \end{cases}$ 从 $t=0$ 到 $t=1$ 的一段;

(8) $\int_C x^2 \, ds$, 其中 C 为圆周 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = \sqrt{3} \end{cases}$

解答: (1) $\int_C x \sin y \, ds = \int_0^1 3t \sin t \sqrt{3^2 + 1^2} \, dt = 3\sqrt{10} \int_0^1 t \sin t \, dt = 3\sqrt{10} (-t \cos t \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos t \, dt)$
 $= 3\sqrt{10} (\sin 1 - \cos 1);$

(2) $\oint_C (x^2 + y^2) \, ds = \int_0^{2\pi} a^2 \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} \, dt = 2\pi a^3;$

(3) $\int_C y^2 \, ds = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \sqrt{(a - a \cos t)^2 + (a \sin t)^2} \, dt = 16 \int_0^{2\pi} a^3 \sin^5 \frac{t}{2} \, dt$
 $= 32 \int_0^{\pi} a^3 \sin^5 \theta \, d\theta = \frac{256}{15} a^3;$

(4) $\int_C y \, ds = \int_0^2 y^2 \sqrt{1 + y^2} \, dy = \frac{1}{3} (1 + y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 1);$

(5) C 可以分割为三条直线 $OA: y=0 (0 \leq x \leq 1),$

$OB: x=0 (0 \leq y \leq 1),$

$$BA: y=1-x(0 \leq x \leq 1)$$

$$\begin{aligned}\int_C (x+y)ds &= \int_{OA} (x+y)ds + \int_{OB} (x+y)ds + \int_{AB} (x+y)ds \\ &= \int_0^1 xdx + \int_0^1 ydy + \int_0^1 (x+1-x)\sqrt{2}dx \\ &= \sqrt{2} + 1;\end{aligned}$$

$$(6) C \text{ 为圆周 } x^2+y^2=ax(a>0); \text{ 化为参数方程 } \begin{cases} x = \frac{a}{2}\cos t + \frac{a}{2} \\ y = \frac{a}{2}\sin t \end{cases}, (0 \leq t \leq 2\pi),$$

$$\int_C \sqrt{x^2+y^2}ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^2(1+\cos t)}{2}} \cdot \frac{a}{2} dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt = a^2 \int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} dt = 2a^2;$$

$$\begin{aligned}(7) \int_C z ds &= \int_0^1 t \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt \\ &= \int_0^1 t \sqrt{2+t^2} dt = \frac{1}{3} (2+t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2});\end{aligned}$$

$$(8) C \text{ 可以表示为参数方程 } \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta; \theta \in [0, 2\pi] \\ z = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\int_C x^2 ds = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d\theta = \pi.$$

所属章节：第十章第一节

难度：一级

2. 已知半圆形状铁丝 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq \pi)$ 其上每一点的线密度等于该点的纵坐标，求此铁丝的质量

$$\text{解答: } m = \int_C y ds = \int_0^{\pi} a \sin t \sqrt{(a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} dt = 2a^2$$

所属章节：第十章第一节

难度：一级

3. 已知螺旋线 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t (b>0) \\ z = bt \end{cases}$ 上各点的线密度等于该点到原点的距离的平方，试求 t 从 0 到

2π 一段弧的质量

$$\text{解答: } m = \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} (2\pi a^2 + \frac{8}{3} \pi^3 b^2)$$

所属章节: 第十章第一节

难度: 二级

4. 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 的第一拱 ($0 \leq t \leq 2\pi$) 关于 Ox 轴的转动惯量 (设其上各点的密度与该点到 x 轴的距离成正比, 比例系数为 k)

$$\begin{aligned} \text{解答: } I &= \int_C k y^3 ds = k \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \sqrt{2} k a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{\frac{7}{2}} dt \\ &= 64 k a^3 \int_0^{2\pi} \sin^7 \frac{t}{2} dt = \frac{1024}{35} k a^4 \end{aligned}$$

所属章节: 第十章第一节

难度: 二级

5. 计算下列对坐标的曲线积分:

(1) $\int_C y dx + x dy$, 其中 C 为圆弧 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$, ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$), 依参数 t 增加方向绕行;

(2) $\int_C (2a - y) dx - (a - y) dy$, 其中 C 为摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 自原点起的第一拱;

(3) $\int_C x dy$, 其中 C 为 $x + y = 5$ 上由点 $A(0, 5)$ 到点 $B(5, 0)$ 的一直线段;

(4) $\oint_C xy dx$, 其中 C 为圆周 $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界 (按逆时针方向绕行)

$$\text{解答: (1) } \int_C y dx + x dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [a \sin t d(a \cos t) + a \cos t d(a \sin t)] = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t dt = \frac{a^2}{2}$$

$$(2) \int_C (2a - y) dx - (a - y) dy$$

$$= \int_0^{2\pi} [(2a - a + a \cos t) d(at - a \sin t) - (a - a + a \cos t) d(a(1 - \cos t))] = \pi a^2$$

$$(3) \int_C x dy = \int_0^5 x d(5 - x) = -\frac{25}{2}$$

(4) C 分成两部分在 $C_1: (x - a)^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) 在 x 轴的上部逆时针方向, C_2 是从原点

$$\text{指向 } (2a, 0), \text{ 则 } \int_C xy dx = \int_{C_1} xy dx + \int_{C_2} xy dx = \int_{2a}^0 x \sqrt{a^2 - (x - a)^2} dx + \int_0^{2a} x \cdot 0 dx = -\frac{\pi}{2} a^3$$

所属章节: 第十章第二节

难度: 一级

6. 计算 $\int_{OA} (x^2 - y^2)dx + xydy$, 其中 O 为坐标原点, 点 A 的坐标为 $(1, 1)$:

(1) OA 为直线段 $y=x$;

(2) OA 为抛物线段 $y=x^2$;

(3) OA 为 $y=0, x=1$ 的折线段

解答: (1) $\int_{OA} (x^2 - y^2)dx + xydy = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$;

$$(2) \int_{OA} (x^2 - y^2)dx + xydy = \int_0^1 [(x^2 - x^4)dx - x^3 d(x^2)] = \frac{8}{15};$$

(3) 设点 B 的坐标为 $(1, 0)$, 则 OA 分为两段

$$\int_{OA} (x^2 - y^2)dx + xydy = \int_{OB} + \int_{BA} = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 ydy = \frac{5}{6}.$$

所属章节: 第十章第二节

难度: 一级

7. 计算 $\int_{AB} 2xydx + x^2dy$, 其中点 A, B 的坐标分别为 $A(0, 0), B(1, 1)$:

(1) AB 为直线段 $y=x$;

(2) AB 为抛物线段 $y=x^2$;

(3) AB 为 $y=0, x=1$ 的折线段

解答: (1) $\int_{AB} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2x^2 dx + x^2 dx) = 1$;

$$(2) \int_{AB} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 [2x^3 dx + x^2 d(x^2)] = 1;$$

(3) 设点 C 的坐标为 $(1, 0)$, 则 AB 分为两段

$$\int_{AB} 2xydx + x^2dy = \int_{AC} + \int_{CB} = \int_0^1 0dx + \int_0^1 1dy = 1.$$

所属章节: 第十章第二节

难度: 一级

8. 计算下列曲线积分:

$$(1) \int_L (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz, \text{ 其中 } L \text{ 依参数增加方向绕行的曲线段 } \begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases} (0 \leq t \leq 1);$$

(2) $\int_L xdx + ydy + (x+y-1)dz$, L 为从点 $A(1, 1, 1)$ 到点 $B(2, 3, 4)$ 的一直线段;

解答: (1) $\int_L (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz = \int_0^1 (t^4 - t^6 + 4t^6 - 3t^4)dt = \frac{1}{35}$;

$$(2) \text{ 此时 } L \text{ 写作参数方程 } \begin{cases} x=t+1 \\ y=2t+1 \\ z=3t+1 \end{cases} (0 \leq t \leq 1)$$

$$\int_L xdx + ydy + (x+y-1)dz = \int_0^1 (t+1+4t+2+9t+3)dt = 13.$$

所属章节：第十章第二节

难度：一级

9. 一力场由沿横轴正方向的常力 $\mathbf{F}$ 所构成。试求当一质量为 m 的质点沿圆周 $x^2+y^2=a^2 (a>0)$ 按逆时针方向移过位于第一象限那一段圆弧时场力所作的功

解答: $\int_L |\mathbf{F}| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\mathbf{F}| da \cos t = -|\mathbf{F}| a.$

所属章节：第十章第二节

难度：一级

10. 设有力场的力, 其大小与作用点到 Oz 轴的距离成反比(比例系数为 k), 方向垂直且朝着

Oz 轴, 试求当一质点沿圆周 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 \\ z = \sin t \end{cases}$ 从点(1, 1, 0)到点(0, 1, 1)时力所作的功.

注: 本题已改动, 否则点不在圆周上.

解答: 由题目可知 $\mathbf{F} = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0)$. 当一质点沿圆周 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 \\ z = \sin t \end{cases}$ 从点(1, 1, 0)

到点(0, 1, 1)时, y 为常数, $dy=0$, 此时力所作的功为:

$$\int_L \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \cos t}{1+\cos^2 t} d \cos t = -\int_1^0 \frac{kt}{1+t^2} dt = -\frac{1}{2} k \ln(1+t^2) \Big|_1^0 = \frac{1}{2} k \ln 2.$$

所属章节：第十章第二节

难度：三级

11. 把对坐标的曲线积分 $\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 化成对弧长的曲线积分, 其中 C 为:

- (1) 在 xOy 平面内沿直线 $y=x$ 从点(0, 0)到点(1, 1);
- (2) 在 xOy 平面内沿抛物线 $y=x^2$ 从点(0, 0)到点(1, 1);

解答: (1) $\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, $\mathbf{n}$ 为 $y=x$ 的单位法向量, $\mathbf{n} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$,

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \int_C \frac{1}{\sqrt{2}} (P(x,y) + Q(x,y)) ds;$$

(2) $\mathbf{n}$ 为 $y=x^2$ 的单位法向量, $\mathbf{n} = (\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}, \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}})$,

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \int_C \frac{P(x,y) + 2xQ(x,y)}{\sqrt{1+4x^2}} ds.$$

所属章节：第十章第二节

难度：二级

12. 设 L 为曲线 $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ 上相应于 t 从 0 到 1 的曲线段, 试把对坐标的曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$

化成对弧长的曲线积分

解答: $\mathbf{n}$ 为曲线 L $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ 的单位法向量,

$$\mathbf{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}, \frac{3t^2}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}, \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}, \frac{3y}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}} \right),$$

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \int_L \frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}} dS.$$

所属章节：第十章第二节

难度：二级

13. 设闭曲线 C 为正向圆周 $x^2+y^2=4$, 试就函数 $P=2x-y$, $Q=x+3y$ 验证格林公式的正确性

解答: 格林公式 $\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$

$$\begin{aligned} \text{由于 } \int_C (2x-y)dx + (x+3y)dy &= 2 \int_0^{2\pi} (4\cos\theta - 2\sin\theta) d\cos\theta + 2 \int_0^{2\pi} (2\cos\theta - 6\sin\theta) d\sin\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (2 - 10\sin\theta \cos\theta) d\theta = 8\pi, \end{aligned}$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D 2 dxdy = 8\pi,$$

所以格林公式正确.

所属章节：第十章第三节

难度：一级

14. 试利用格林公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_C (x^2y - 2y)dx + \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right)dy$, 其中 C 以 $x=1$ 、 $y=x$ 及 $y=2x$ 为边的三角形正向边界;

(2) $\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx$, C 为正向圆周 $x^2+y^2=a^2$;

(注: 本题已改动, 否则结果为 0)

(3) $\oint_C (x+y)dx - (x-y)dy$, C 为椭圆周 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 取正向

解答: (1) $\oint_C (x^2y - 2y)dx + \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)dy = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$, D 为 C 所围区域;

(2) $\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} \pi a^4$, D 为 C 所围区域;

(3) $\oint_C (x+y)dx - (x-y)dy = -2 \iint_D dx dy = -2\pi ab$, D 为 C 所围区域.

所属章节: 第十章第三节

难度: 一级

15. 利用曲线积分, 求下列曲线所围图形的面积:

(1) 星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$;

(2) 椭圆 $9x^2 + 16y^2 = 144$;

(3) 圆 $x^2 + y^2 = 2ax$

解答: (1) $\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} a^2 \left\{ \int_0^{2\pi} \cos^3 t d \sin^3 t - \int_0^{2\pi} \sin^3 t d \cos^3 t \right\} = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8} \pi a^2$;

(2) 椭圆 $9x^2 + 16y^2 = 144$ 化为参数方程 $\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$,

$$\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = 6 \left\{ \int_0^{2\pi} \cos t d \sin t - \int_0^{2\pi} \sin t d \cos t \right\} = 6 \int_0^{2\pi} dt = 12\pi$$
;

(3) 圆 $x^2 + y^2 = 2ax$ 化为参数方程 $\begin{cases} x = a \cos t + a \\ y = a \sin t \end{cases}$,

$$\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{a}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} (a \cos t + a) d \sin t - \int_0^{2\pi} a \sin t d (a \cos t + a) \right\} = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos t) dt = \pi a^2$$
.

所属章节: 第十章第三节

难度: 二级

16. 验证下列曲线积分在 xOy 平面内与路径无关, 并计算它们的积分值:

(1) $\int_{(1,1)}^{(2,2)} (x+y)dx + (x-y)dy$;

(2) $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy$;

(3) $\int_{(0,0)}^{(1,2)} (2xy - y^4 + 1)dx + (x^2 - 4xy^3)dy$

解答: (1) 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, 则曲线积分在 xOy 平面内与路径无关, 此时可选取 $y = x, x \in [1, 2]$,

$$\int_{(1,1)}^{(2,2)} (x+y)dx + (x-y)dy = \int_1^2 2x dx = 3;$$

(2) 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 12xy - 3y^2$, 则曲线积分在 xOy 平面内与路径无关, 此时可选取

$$y = x+1, x \in [1, 2],$$

$$\begin{aligned} \int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy &= \int_1^2 \{6x(x+1)^2 - (x+1)^3 + 6x^2(x+1) - 3x(x+1)^2\} dx \\ &= \int_1^2 (x+1)\{6x^2 + 3x(x+1) - (x+1)^2\} dx = 236; \end{aligned}$$

(3) 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 4y^3$, 则曲线积分在 xOy 平面内与路径无关, 此时选取 $y = 2x, x \in [0, 1]$,

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} (2xy - y^4 + 1)dx + (x^2 - 4xy^3)dy = \int_0^1 \{4x^2 - 16x^4 + 1 + 2x^2 - 64x^4\} dx = -15.$$

所属章节: 第十章第四节

难度: 二级

17. 利用格林公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_C (2x - y + 4)dx + (3x + 5y - 6)dy$, 其中 C 为三顶点分别为 (0, 0), (3, 0), (3, 2) 三角形正向边界;

(2) $\int_C (x^2y + 3xe^x)dx + \left(\frac{x^3}{3} - y\sin y\right)dy$, 其中 C 是沿摆线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 从点 (0, 0) 到点 (π , 2) 的一段弧;

(3) $\int_C (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$, 其中 C 为上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$, 取逆时针方向.

注: 本小题已加了条件.

解答:

(1) $\oint_C (2x - y + 4)dx + (3x + 5y - 6)dy = \iint_D 4 dx dy = 12$, D 为 C 所围区域;

(2) $\int_C (x^2y + 3xe^x)dx + \left(\frac{x^3}{3} - y\sin y\right)dy$

$$= \oint_{C+C_1} (x^2y + 3xe^x)dx + \left(\frac{x^3}{3} - y\sin y\right)dy - \int_{C_1} (x^2y + 3xe^x)dx + \left(\frac{x^3}{3} - y\sin y\right)dy,$$

其中 $C_1: x = \frac{\pi}{2}y, y \in [0, 2]$ 方向从点 (π , 2) 到点 (0, 0), 由格林公式前一积分为零, 故

$$\begin{aligned}\text{原积分} &= -\int_{C_1} (x^2 y + 3xe^x) dx + \left(\frac{x^3}{3} - y \sin y \right) dy = \int_0^2 \left\{ \left(\frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi^3}{24} \right) x^3 + \frac{3\pi^2}{4} e^{\frac{\pi}{2}} - y \sin y \right\} dy \\ &= 3e^{\pi}(\pi-1) + 3 + \frac{2}{3}\pi^3 + 2\cos 2 - \sin 2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad & \int_C (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy \\ &= \oint_{C+C_1} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy - \int_{C_1} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy\end{aligned}$$

其中 $C_1: y=0, x \in [0, 2a]$ 方向从点 $[2a, 0]$ 到点 $(0, 0)$, 记 D 为 $C+C_1$ 所围区域, 则由格林公式

$$\text{原积分} = \iint_D m dx dy + \int_0^{2a} 0 dy = \frac{1}{8} m \pi a^2.$$

所属章节: 第十章第三节

难度: 二级

18. 计算曲线积分 $\oint_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$:

(1) C 为任一按段光滑的、不包含原点的闭曲线;

(2) C 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 取正向;

解答: (1) 由于当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$, 故由格林公式

$$\oint_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \iint_D 0 dx dy = 0$$

$$(2) \quad \int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_{C+C_1} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} - \int_{C_1} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = - \int_{C_1} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}, \text{ 其中 } C_1: x^2 + y^2 = \varepsilon^2$$

取负向, 由于 $C_1: x = \varepsilon \cos t, y = \varepsilon \sin t$, 所以

$$\oint_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 \sin^2 t + \varepsilon^2 \cos^2 t}{\varepsilon^2} dt = 2\pi.$$

所属章节: 第十章第三节

难度: 三级

19. 验证下列 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 在全平面内是某个函数 $u(x, y)$ 的全微分, 并求此原函数 $u(x, y)$:

(1) $(x+2y)dx + (2x+y)dy$;

$$(2) (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy;$$

$$(3) (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 + 5y^4)dy;$$

注：本小题已作改动，原来题中 $(x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$ ，与参考答案 $\frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 + y^5 + C$

不相符。也可以改动答案为 $\frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5 + C$ 。

$$(4) e^x \cos y dx - e^x \sin y dy;$$

解答：(1) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2$ ， $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 在全平面内是 $u(x, y)$ 的全微分。

$$u(x, y) = \int_0^x (x + 2y) dx = 2xy + \frac{x^2}{2} + \varphi(y), \frac{\partial u}{\partial y} = 2x + \varphi'(y) = 2x + y, \varphi(y) = \frac{y^2}{2} + C$$

$$\text{则 } u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 2xy + C$$

(2) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y$ ， $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 在全平面内是 $u(x, y)$ 的全微分。

$$u(x, y) = \int_0^x (x^2 + 2xy - y^2) dx = x^2y + \frac{x^3}{3} - xy^2 + \varphi(y), \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 2xy + \varphi'(y) = x^2 - 2xy - y^2,$$

$$\varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + C, \text{ 则}$$

$$u(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 - y^3) + xy(x - y) + C;$$

(3) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2$ ， $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 在全平面内是 $u(x, y)$ 的全微分。

$$u(x, y) = \int_0^x (x^4 + 4xy^3) dx = 2x^2y^3 + \frac{x^5}{5} + \varphi(y), \frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y^2 + \varphi'(y) = 6x^2y^2 + 5y^4, \varphi(y) = y^5 + C$$

$$\text{则 } u(x, y) = \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 + y^5 + C;$$

(4) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y$ ， $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 在全平面内是 $u(x, y)$ 的全微分。

$$u(x, y) = \int_0^x e^x \cos y dx = e^x \cos y + \varphi(y), \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y + \varphi'(y) = -e^x \sin y, \varphi(y) = C$$

则 $u(x, y) = e^x \cos y + C$.

所属章节：第十章第四节

难度：二级

20. 设有力场 $\mathbf{F} = (x+y^2)\mathbf{i} + (2xy-8)\mathbf{j}$, 证明质点在此力场内移动时, 场力所作的功与路径无关, 只与起终点有关

解答: 由于 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$, 利用格林公式知场力所作的功与路径无关, 只与起终点有关.

所属章节：第十章第四节

难度：二级

21. 计算下列曲面积分

(1) $\iint_S xyz dS$, 其中 S 为平面 $x+y+\frac{z}{2}=1$ 在第一卦限的部分;

(2) $\iint_S x dS$, 其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在第一卦限的部分;

(3) $\iint_S \sqrt{x^2+y^2} dS$, 其中 S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$;

(4) $\iint_S (x^2+y^2) dS$, 其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围区域的整个边界曲面;

解答: (1) $z=2-2x-2y, z_x=-2, z_y=-2, D_{xy} = \{(x, y) | x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

$$\iint_S xyz dS = 3 \iint_{D_{xy}} xy(2-2x-2y) dx dy = 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy(1-x-y) dy = \frac{1}{20};$$

(2)

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, z_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, z_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$\iint_S x dS = \iint_{D_{xy}} \frac{xR}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \frac{\rho^2 \cos \theta}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho = \frac{\pi R^4}{4};$$

(3) $z = \sqrt{1-x^2-y^2}, z_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, z_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS = 2 \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\rho = \pi^2;$$

(3) 将 S 分为两个曲面 S_1, S_2 . S_1 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\iint_{S_1} (x^2 + y^2) dS = \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

S_2 为平面 $z=1$, $z=1, z_x=0, z_y=0, D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$\iint_{S_2} (x^2 + y^2) dS = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} \pi$$

$$\iint_S (x^2 + y^2) dS = \frac{1}{2} (\sqrt{2} + 1) \pi.$$

所属章节：第十章第五节

难度：二级

22. 设半径为 R 的球面上每点的密度等于该点到某一定直径的距离的平方，求此球面的质量

解答：将直径设为 Z 轴，球心为原点，球的方程为 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$,

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, z_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

球面的质量为 $\iint_S (x^2 + y^2) dS$,

$$\iint_S (x^2 + y^2) dS = 2R \iint_{D_{xy}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 2R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho^3}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho = \frac{8}{3} \pi R^4.$$

所属章节：第十章第五节

难度：二级

23. 求球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 含在柱面 $x^2 + y^2 - ax = 0$ 内部的面积

解答： $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, z_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq ax\}$

$$\iint_S dS = \iint_{D_{xy}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho = (\pi - 2)a^2.$$

所属章节：第十章第五节

难度：二级

24. 求旋转抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 被平面 $z=2$ 所截部分的质心位置, 假设其上各点的密度与该点到 z 轴的距离平方成正比.

解答: 由旋转抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 的对称性, 质心位置在 z 轴,

$$\bar{z} = \frac{M_z}{M} = \frac{k \iint_S z(x^2 + y^2) dS}{k \iint_S (x^2 + y^2) dS} = \frac{k \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy}{k \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy} = \frac{2(125\sqrt{5} - 1)}{7(25\sqrt{5} + 1)},$$

其中 $D_{xy}: \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$.

所属章节：第十章第五节

难度：二级

25. 计算下列曲面积分

(1) $\iint_S z^2 dx dy$, 其中 S 为平面 $x + y + z = 1$ 位于第一象限部分的上侧;

(2) $\oiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧;

(3) $\oiint_S (x^3 - yz) dy dz - 2x^2 y dz dx + z dx dy$, 其中 S 为柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ ($0 \leq z \leq 1$) 的外侧;

(此题的柱面是否封闭? 若是, 则答案有误, 若不是, 则题目中积分符号上的圆圈不对; 以下按封闭解答)

(4) $\oiint_S xz dy dz + x^2 y dz dx + y^2 z dx dy$, 其中 S 为 $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ 在第一象限

中所围立体的表面的外侧;

解答:

$$(1) \iint_S z^2 dx dy = \iint_{D_{xy}} (1 - x - y)^2 dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2 dy = \frac{1}{12};$$

(2) 由 S 的对称性可知,

$$\begin{aligned} \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy &= 3 \iint_S z dx dy = 6 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr = 4\pi R^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \oiint_S (x^3 - yz) dy dz - 2x^2 y dz dx + z dx dy &= \iiint_{\Omega} (x^2 + 1) dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta + 1) r dz = \frac{\pi}{4} R^4 + \pi R^2; \end{aligned}$$

$$(4) \oint_S xzdydz + x^2ydzdx + y^2zdx dy = \iiint_{\Omega} (z + x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{r^2} (z + r^2) dz = \frac{\pi}{8}.$$

所属章节：第十章第六节

难度：二级

26. 利用高斯公式计算下列曲面积分

(1) $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 其中 S 是由 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围立体表面的外侧;

(2) $\oint_S x(y-z) dy dz + (x-y) dx dy$, 其中 S 为 $x^2 + y^2 = 1, z=0$ 及 $z=3$ 所围立体表面的外侧;

(3) $\iint_S x dy dz + y dz dx + (x+y+z+1) dx dy$, 其中 S 为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧;

(4) $\iint_S (x^2 - yz) dy dz + (y^2 - zx) dz dx + 2z dx dy$, 其中 S 为锥面 $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 被 $z=0$ 所截部分的上侧.

上侧.

注：(3)(4)两题积分符号上的圆圈已去掉，由于所涉曲面不封闭。

解答：

$$(1) \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = \iiint_{\Omega} (2x + 2y + 2z) dx dy dz = 6 \iiint_{\Omega} x dx dy dz = \frac{1}{4};$$

$$(2) \oint_S x(y-z) dy dz + (x-y) dx dy = \iiint_{\Omega} (y-z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^3 (r \sin \theta - z) r dz = -\frac{9}{2} \pi;$$

$$\begin{aligned} (3) & \iint_S x dy dz + y dz dx + (x+y+z+1) dx dy \\ &= \oint_{S+S_1} x dy dz + y dz dx + (x+y+z+1) dx dy - \iint_{S_1} x dy dz + y dz dx + (x+y+z+1) dx dy \\ &= 3 \iiint_{\Omega} dx dy dz + \iint_{D_{xy}} (1+x+y) dx dy = 2\pi a^3 + \pi a^2, \end{aligned}$$

其中 S_1 为平面 $z=0, x^2 + y^2 \leq a^2$ 的下侧;

$$\begin{aligned} (4) & \iint_S (x^2 - yz) dy dz + (y^2 - zx) dz dx + 2z dx dy \\ &= \oint_{S+S_1} (x^2 - yz) dy dz + (y^2 - zx) dz dx + 2z dx dy - \iint_{S_1} (x^2 - yz) dy dz + (y^2 - zx) dz dx + 2z dx dy \\ &= 2 \iiint_{\Omega} (x+y+1) dx dy dz + \iint_{D_{xy}} 0 dx dy = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

其中 S_1 为平面 $z=0, x^2 + y^2 \leq 1$ 下侧.

所属章节：第十章第六节

难度：二级

27. 利用斯托克斯公式计算曲线积分 $\oint_L (e^x + x^2 y^2 z^2) dx + (e^y - y^2 z) dy + (e^z + yz^2) dz$, 其中 L 为

$$\text{正向圆周} \begin{cases} y^2 + z^2 = R^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

解答:

$$\begin{aligned} \oint_L (e^x + x^2 y^2 z^2) dx + (e^y - y^2 z) dy + (e^z + yz^2) dz &= \iint_{\Sigma: \begin{cases} y^2 + z^2 = R^2 \\ x = 0 \end{cases}} (y^2 + z^2) dy dz + 2x^2 y^2 z dx dz - 2x^2 yz^2 dx dy \\ &= \iint_{D_{yz}: y^2 + z^2 = R^2} (y^2 + z^2) dy dz = \frac{\pi R^2}{2}. \end{aligned}$$

所属章节：第十章第六节

难度：二级

28. 求向量场 $\mathbf{A}$ 穿出所给曲面的通量:

(1) $\mathbf{A} = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$, S 为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

(2) $\mathbf{A} = 2x \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$, S 为柱面 $x^2 + y^2 = a^2$, $z=0$, $z=h$ 所围立体的全表面

$$\text{解答: (1) } \Phi = \iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a 3r^4 \sin \varphi dr = \frac{12}{5} \pi a^5;$$

$$(2) \Phi = \iiint_{\Omega} (2 + 2y + 2z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dr \int_0^h (2 + 2r \sin \theta + 2z) r dr = 2\pi h(1 + h) a^2.$$

所属章节：第十章第七节

难度：二级

29. 求下列向量场的散度 $\operatorname{div} \mathbf{A}$:

(1) $\mathbf{A} = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$ 在点 $(1, 0, -1)$ 处的散度;

(2) $\mathbf{A} = x^2 y \mathbf{i} + x y z \mathbf{j} - y z^2 \mathbf{k}$ 在点 $(1, -1, 1)$ 处的散度;

(3) $\mathbf{A} = x^2 y z \mathbf{i} + x y^2 z \mathbf{j} + x y z^2 \mathbf{k}$ 在任一点的散度;

(4) $\mathbf{A} = x^2 y z^3 (x z \mathbf{i} - y^2 \mathbf{j} + 2x^2 y \mathbf{k})$ 在任一点的散度

$$\text{解答: (1) } \operatorname{div} \mathbf{A}|_M = (3x^2 + 3y^2 + 3z^2)|_M = 6;$$

$$(2) \operatorname{div} \mathbf{A}|_M = (3xy + xz - 2yz)|_M = 1;$$

$$(3) \operatorname{div} \mathbf{A} = 2xyz + 2xyz + 2xyz = 6xyz;$$

$$(4) \operatorname{div} \mathbf{A} = 3x^2 y z^4 - 3x^2 y^2 z^3 + 6x^4 y^2 z^2 = 3x^2 y z^2 (z^2 - yz + 2x^2 y).$$

所属章节：第十章第七节

难度：二级

30. 求向量场 $\mathbf{A} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ (C 为常数) 沿下列闭曲线 C 的环量 Γ :

- (1) C : 圆周 $x^2 + y^2 = R^2$, $z=0$ 的正向;
 (2) C : 圆周 $(x-2)^2 + y^2 = R^2$, $z=0$ 的正向

解答: (1) $\Gamma = \iint_S \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & C \end{vmatrix} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_S 2 dx dy = 2\pi R^2$, 其中 S 圆周 $x^2 + y^2 = R^2$, $z=0$ 的平面;

(2) $\Gamma = \iint_S \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & C \end{vmatrix} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_S 2 dx dy = 2\pi R^2$, 其中 S 圆周 $(x-2)^2 + y^2 = R^2$, $z=0$ 的平面.

所属章节：第十章第七节

难度：二级

31. 求下列向量场 $\mathbf{A}$ 的旋度 $\text{rot } \mathbf{A}$:

- (1) $\mathbf{A} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$;
 (2) $\mathbf{A} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$;
 (3) $\mathbf{A} = x\cos z\mathbf{i} + y\ln x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$;
 (4) $\mathbf{A} = 3xz^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + (x+2z)\mathbf{k}$

解答: (1) $\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} = -2(z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k})$;

(2) $\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$;

(3) $\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x\cos z & y\ln x & -z^2 \end{vmatrix} = -x\sin z\mathbf{j} + \frac{y}{x}\mathbf{k}$;

(4) $\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3xz^2 & -yz & x+2z \end{vmatrix} = y\mathbf{i} + (6xz-1)\mathbf{k}$.

所属章节：第十章第七节

难度：二级

32. 设 $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $r=|\mathbf{r}|$, $f(r)$ 为可微函数, 试求:

(1) $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{r}]$;

(2) $\operatorname{rot}[f(r)\mathbf{r}]$

解答: (1) $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{r}]=\frac{f'(r)}{r}x^2+f(r)+\frac{f'(r)}{r}y^2+f(r)+\frac{f'(r)}{r}z^2+f(r)=rf'(r)+3f(r)$;

$$(2) \operatorname{rot}[f(r)\mathbf{r}]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(r)x & f(r)y & f(r)z \end{vmatrix}=\mathbf{0}.$$

所属章节：第十章第七节

难度：二级