



普通高等学校“十三五”数字化建设规划教材
新经度 国家级精品课程教材

高等数学 (下)

黄立宏 主 编



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本教材是在面向 21 世纪数学系列课程教学内容与课程体系改革方针的指导下,编者根据多年的教学实践经验和研究成果,结合“高等数学课程教学基本要求”编写而成的.

本书分为上、下两册.上册含函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数微分学的应用,一元函数积分学,一元函数积分学的应用,常微分方程,以及几种常用的曲线、积分表等内容.下册含向量与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数微分学的应用,多元函数积分学(Ⅰ),多元函数积分学(Ⅱ),无穷级数等内容.除每节配有与该节内容对应的习题外,每章后还配有综合性习题,书末附有习题参考答案,便于教与学.

本书可供综合性大学、高等理工科院校、高等师范院校(非数学专业)的学生使用.

北京大学出版社

本书配套云资源使用说明

本书配有网络云资源,资源类型包括:知识结构、动画视频、习题参考答案和数学家简介.

一、资源说明

1. 知识结构:对每章知识点以框图形式做系统总结,让学生提前了解本章讲述的大概内容,方便学生学完本章内容后做自我测评,也可以加深学生对本章内容的理解.
2. 动画视频:针对重要知识点、抽象内容,提供演示动画,便于学生理解和掌握,提高学习兴趣.
3. 习题参考答案:对每章节的习题给出标准答案,启发学生思维,测试学生对知识点的掌握情况.
4. 数学家简介:提供数学家简介,目的在于提高学生对数学的认识,培养学生学习数学的兴趣.

二、使用方法

1. 打开微信的“扫一扫”功能,扫描关注公众号(公众号二维码见封底).
2. 点击公众号页面内的“激活课程”.
3. 刮开激活码涂层,扫描激活云资源(激活码见封底).
4. 激活成功后,扫描书中的二维码,即可直接访问对应的云资源.

注:1. 每本书的激活码都是唯一的,不能重复激活使用.

2. 非正版图书无法使用本书配套云资源.

北京大学出版社

总 序

数学是人一生中学得最多的一门功课.中小学里就已开设了很多数学课程,涉及算术、平面几何、三角、代数、立体几何、解析几何等众多科目,看起来洋洋大观、琳琅满目,但均属于初等数学的范畴,实际上只能用来解决一些相当简单的问题,面对现实世界中一些复杂的情况则往往无能为力.正因为如此,在大学学习阶段,专攻数学专业的学生不必说了,就是对于广大非数学专业的大学生,也都必须选学一些数学基础课程,花相当多的时间和精力学习高等数学,这就对非数学专业的大学数学基础教材提出了迫切的需求.

这些年来,各种大学数学基础教材已经林林总总地出版了许多,但平心而论,除少数精品以外,大多均偏于雷同,难以使人满意.而学习数学这门学科,关键又在于理解与熟练,同一种类型的教材只需精读一本好的就足够了.这样,精选并推出一些优秀的大学数学基础教材,就理所当然地成为编辑出版这一丛书的宗旨.

大学数学基础课程的名目并不多,所涵盖的内容又大体相似,但教材的编写不仅仅是材料的堆积和梳理,更体现编写者的教学思想和理念.同一门课程,应该鼓励有不同风格的教材来诠释和体现;针对不同程度的教学对象,也应该有不同层次的教材来使用和适应.特别是,大学非数学专业是一个相当广泛的概念,对分属工程类、财经管理类、医药类、农林类、社科类甚至文史类的众多大学生,不分青红皂白、一刀切地采用统一的数学教材进行教学,很难密切联系有关专业的实际,很难充分针对有关专业的迫切需要和特殊要求,是不值得提倡的.相反,通过教材编写者和相应专业工作者的密切结合和协作,针对该专业的特点编写出来的教材,才能特色鲜明、有血有肉,才能深受欢迎,并产生重要而深远的影响.这是专业类大学数学基础教材所应有的定位和标准,也是大家的迫切期望,但却是当前明显的短板,因而使我们对这套丛书可以大有作为有了足够的信心和依据.

说得更远一些,我们一些教师往往把数学看成一堆定义、公式、定理及证明的堆积,千方百计地要把这些知识灌输到学生头脑中去,却忘记了有关数学最根本的三件事.一是数学知识的来龙去脉——从哪儿来,又可以到哪儿去.割断数学与生动活泼的现实世界的血肉联系,学生就不会有学习数学持续的积极性.二是数学的精神实质和思想方法.只讲知识,不讲精神;只讲技巧,不讲思想,学生就不可能学到数学的精髓,不能对数学有真正的领悟.三是数学的人文内涵.数学在人类认识世界和改造世界的过程中起着关键的、不可替代的作用,是人类文明的坚实基础和重要支柱.不自觉地接受数学文化的熏陶,是不可能真正走近数学、了解数学、领悟数学并热爱数学的.在数学教学中抓住了上面这三点,就抓住了数学的灵魂,学生对数学的学习就一定会更有成效.但客观地说,现有的大学数学基础教材,能够真正体现这三方面要求的,恐怕为数不多.这一现实为大学数学基础教材的编写提供了广阔的发

展空间,很多探索有待进行,很多经验有待总结,可以说是任重而道远.从这个意义上说,由北京大学出版社推出的这套新经度大学数学丛书实际上已经为一批有特色、高品质的大学数学基础教材的面世,搭建了一个很好的平台,特别值得称道,也相信一定会得到各方面广泛而大力的支持.

特为之序.

李大潜

2015年1月28日



李大潜先生简介

北京大学出版社

前言

数学是一门重要而应用广泛的学科,被誉为锻炼思维的体操和人类智慧之冠上最明亮的宝石.不仅如此,数学还是各类科学和技术的基础,它的应用几乎涉及所有的学科领域,对于世界文化的发展有着深远的影响.高等学校作为培育人才的摇篮,其数学课程的开设也就具有特别重要的意义.

近年来,随着我国经济建设与科学技术的迅速发展,高等教育进入了一个飞速发展时期,已经突破了以前的精英式教育模式,发展成为一种在终身学习的大背景下极具创造性和再创性的基础学科教育.高等学校教育教学理念不断更新,教学改革不断深入,办学规模不断扩大,数学课程开设的专业覆盖面也不断增大.为了适应这一发展需要,经众多高校的数学教师多次研究讨论,我们联合编写了一套高质量的高等学校非数学类专业的数学系列教材.

本系列教材是为普通高等学校非数学专业学生编写的,也可供各类需要提高数学素质和能力的人员使用.为了适应分层次教学的需要,选修内容用*号标出.教材中,概念、定理及理论叙述准确、精练,符号使用标准、规范,知识点突出,难点分散,证明和计算过程严谨,例题、习题等均经过精选,具有代表性和启发性.

本书分为上、下两册.上册含函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数微分学的应用,一元函数积分学,一元函数积分学的应用,常微分方程,以及几种常用的曲线、积分表等内容.下册含向量与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数微分学的应用,多元函数积分学(I),多元函数积分学(II),无穷级数等内容.

《高等数学(下)》由黄立宏任主编,李俊锋、胡春华任副主编,参加讨论和编写的人员有:凌生智、王跃恒、王晓梅、方丽飞、孙明保、汤琼、刘如艳、汤四平、周斌、林晓艳、杨刚、陈国华、徐立新、谢永钦、彭懿等.苏文华、赵子平构思并设计了全书在线课程教学资源的结构与配置,吴浪、邓之豪编辑了教学资源内容,并编写了相关动画文字材料,余燕、沈辉参与了动画制作及教学资源的信息化实现,袁晓辉、范军怀审查了全书配套在线课程的教学资源,苏文春、苏娟提供了版式和装帧设计方案.在此一并致谢.本教材的编写还得到了著名数学家侯振挺教授的悉心指导,编者表示衷心感谢.

教材中难免有不妥之处,希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见或建议.

编者

2018年1月



作者简介

北京大学出版社

目 录

第七章 向量与空间解析几何/	1
第一节 空间直角坐标系	2
一、空间直角坐标系(2) 二、空间两点间的距离(3) 习题 7-1(4)	
第二节 向量及其运算	5
一、向量及其线性运算(5) 二、向量的坐标表示(7)	
三、向量的数量积与向量积(12) 习题 7-2(16)	
第三节 空间平面与直线	17
一、平面及其方程(17) 二、空间直线的方程(20)	
三、平面与直线的位置关系(22) 习题 7-3(26)	
第四节 空间曲面与曲线	27
一、曲面及其方程(27) 二、旋转曲面(29) 三、二次曲面举例(31)	
四、空间曲线(34) 习题 7-4(37)	
习 题 七	38
第八章 多元函数微分学/	40
第一节 多元函数的基本概念	41
一、平面点集(41) 二、 n 维空间(42) 三、多元函数定义(43)	
四、多元复合函数及隐函数(45) 习题 8-1(45)	
第二节 多元函数的极限与连续性	46
一、多元函数的极限(46) 二、多元函数的连续性(48)	
习题 8-2(50)	
第三节 偏导数	50
一、偏导数的定义及其算法(50) 二、高阶偏导数(54)	
习题 8-3(56)	
第四节 全微分及其应用	56
一、全微分的定义(56) * 二、全微分的应用举例(60)	
习题 8-4(62)	
第五节 复合函数的微分法	62
一、复合函数的求导法则(62) 二、全微分形式不变性(67)	
习题 8-5(68)	
第六节 隐函数的导数	68

一、一个方程的情形(68) 二、方程组的情形(71)	
习题 8-6(74)	
*第七节 二元函数的泰勒公式	74
习题 8-7(77)	
习 题 八	77
第九章 多元函数微分学的应用/	79
第一节 空间曲线的切线与法平面	80
习题 9-1(82)	
第二节 空间曲面的切平面与法线	82
习题 9-2(86)	
第三节 方向导数	86
习题 9-3(88)	
第四节 多元函数的极值及其求法	89
一、多元函数的极值及最大值与最小值(89) 二、条件极值(92)	
习题 9-4(94)	
习 题 九	95
第十章 多元函数积分学(I)/	97
第一节 二重积分	98
一、二重积分的概念(98) 二、二重积分的性质(100)	
三、二重积分的计算(102) 四、二重积分的换元法(107)	
习题 10-1(112)	
*第二节 反常二重积分	114
一、无界区域的反常二重积分(114) 二、无界函数的反常二重积分(115)	
习题 10-2(116)	
第三节 三重积分	117
一、三重积分的概念(117) 二、三重积分的计算(118)	
三、三重积分的换元法(121) 习题 10-3(125)	
第四节 重积分的应用	126
一、空间曲面的面积(127) 二、平面薄片的重心(129)	
三、平面薄片的转动惯量(130) 四、平面薄片对质点的引力(131)	
习题 10-4(132)	
第五节 对弧长的曲线积分	133
一、对弧长的曲线积分的概念(133) 二、对弧长的曲线积分的性质(134)	
三、对弧长的曲线积分的计算法(134) 习题 10-5(137)	
第六节 对面积的曲面积分	138
一、对面积的曲面积分的概念(138)	

二、对面积的曲面积分的算法(139) 习题 10-6(140)	
*第七节 黎曼积分小结	141
习 题 十	143
第十一章 多元函数积分学(II)/	146
第一节 对坐标的曲线积分的概念与性质	147
一、引例(147) 二、对坐标的曲线积分的定义(148)	
三、对坐标的曲线积分的性质(149)	
第二节 对坐标的曲线积分的计算	150
习题 11-2(155)	
第三节 曲线积分与路径无关的条件	156
一、格林公式(156) 二、平面上曲线积分与路径无关的条件(160)	
三、全微分方程(164) 习题 11-3(166)	
第四节 对坐标的曲面积分的概念	167
一、有向曲面的概念(167) 二、引例——流向曲面一侧的流量(168)	
三、对坐标的曲面积分的概念(170)	
第五节 对坐标的曲面积分的计算	171
习题 11-5(173)	
第六节 高斯公式与斯托克斯公式	174
一、高斯公式(174) 二、斯托克斯公式(176) 习题 11-6(177)	
第七节 两类曲线积分、曲面积分的联系	178
一、两类曲线积分之间的联系(178)	
二、两类曲面积分之间的联系(179)	
*三、高斯公式、斯托克斯公式的另一种表示(181) 习题 11-7(182)	
习 题 十 一	183
第十二章 无穷级数/	186
第一节 常数项级数的概念和性质	187
一、常数项级数的概念(187) 二、常数项级数的性质(190)	
*三、柯西收敛准则(192) 习题 12-1(193)	
第二节 正项级数敛散性判别法	193
习题 12-2(199)	
第三节 任意项级数敛散性判别法	200
一、交错级数收敛性判别法(200) 二、绝对收敛与条件收敛(201)	
习题 12-3(205)	
第四节 函数项级数	206
一、函数项级数的概念(206) 二、幂级数及其收敛性(207)	
三、幂级数的和函数的性质(211) 四、幂级数的运算(213)	

习题 12-4(215)	
第五节 函数展开成幂级数	215
一、泰勒级数(215) 二、函数展开成幂级数(217)	
三、函数的幂级数展开式在近似计算中的应用(223)	
*四、函数的幂级数展开式在微分方程求解中的应用(225)	
习题 12-5(227)	
第六节 傅里叶级数	228
一、三角级数、三角函数系的正交性(228)	
二、周期函数展开成傅里叶级数(230)	
三、非周期函数的傅里叶展开(235)	
四、任意区间上的傅里叶级数(237) 习题 12-6(239)	
习题 十二	240
习题参考答案/	243

北京大学出版社

第七章

向量与空间解析几何

空间解析几何是多元函数微积分学必备的基础知识. 本章首先建立空间直角坐标系; 然后引进具有广泛应用的向量及其运算, 以它为工具, 讨论空间的平面和直线; 最后介绍空间曲面和空间曲线的部分内容.



第一节 空间直角坐标系

平面解析几何是我们已经熟悉的内容. 所谓解析几何就是用解析的, 或者说是代数的方法来研究几何问题. 引起这场数学史上伟大革命的正是坐标系的建立. 代数运算的基本对象是数, 几何图形的基本元素是点. 正如我们在平面解析几何中所见到的那样, 通过建立平面直角坐标系使几何中的点与代数中的有序数组之间建立一一对应关系. 在此基础上, 引入运动的观点, 使平面曲线和方程对应, 从而使我们能够运用代数方法去研究几何问题. 同样, 要运用代数方法去研究空间的图形——曲面和空间曲线, 就必须建立空间中的点与数组之间的对应关系.

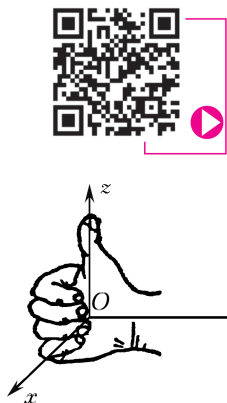


图 7-1

一、空间直角坐标系

空间直角坐标系是平面直角坐标系的推广. 过空间一定点 O , 作三条两两互相垂直的数轴, 它们都以 O 为原点. 这三条数轴分别叫作 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴), 统称为**坐标轴**. 它们的正向按右手法则确定, 即以右手握住 z 轴, 当右手的四个手指从 x 轴的正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴的正向时, 大拇指的指向就是 z 轴的正向(见图 7-1), 这样的三条坐标轴就组成了一**空间直角坐标系** $Oxyz$, 点 O 叫作**坐标原点**.

三条坐标轴两两分别确定一个平面, 这样定出的三个相互垂直的平面: xOy , yOz , zOx 平面, 统称为**坐标面**. 三个坐标面把空间分成八个部分, 称为八个**卦限**, 上半空间($z > 0$)中, 从含有 x 轴、 y 轴、 z 轴正半轴的那个卦限数起, 按逆时针方向分别叫作 I, II, III, IV 卦限; 下半空间($z < 0$)中, 与 I, II, III, IV 卦限依次对应的部分叫作 V, VI, VII, VIII 卦限(见图 7-2).

确定了空间直角坐标系后, 就可以建立起空间点与数组之间的对应关系.

设 M 为空间的一点, 过点 M 作三个平面分别垂直于三条坐标轴, 它们与 x 轴、 y 轴、 z 轴的交点依次为 P, Q, R (见图 7-3). 这三点在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的坐标依次为 x, y, z . 这样, 空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x, y, z) , 称之为点 M 的**直角坐标**, 并依

次把 x, y 和 z 叫作点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**. 坐标为 (x, y, z) 的点 M , 通常记为 $M(x, y, z)$.

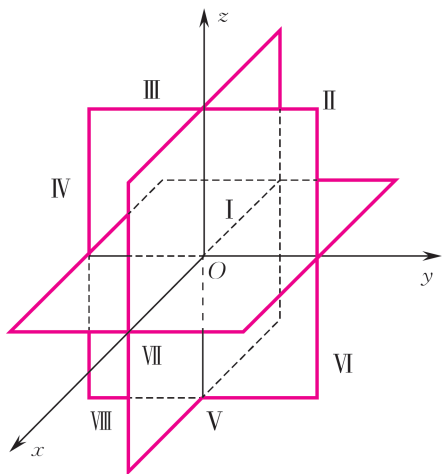


图 7-2

反过来, 给定了一有序数组 (x, y, z) , 我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P , 在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q , 在 z 轴上取坐标为 z 的点 R , 然后通过 P, Q 与 R 分别作 x 轴、 y 轴与 z 轴的垂直平面. 这三个平面的交点 M 就是具有坐标 (x, y, z) 的点 (见图 7-3), 从而对应于一有序数组 (x, y, z) , 必有空间的一个确定的点 M . 这样, 就建立了空间的点 M 和有序数组 (x, y, z) 之间的一一对应关系.

如图 7-3 所示, x 轴、 y 轴和 z 轴上的点的坐标分别为 $P(x, 0, 0), Q(0, y, 0), R(0, 0, z)$; xOy 平面、 yOz 平面和 zOx 平面上的点的坐标分别为 $A(x, y, 0), B(0, y, z), C(x, 0, z)$; 坐标原点 O 的坐标为 $O(0, 0, 0)$. 它们各具有一定的特征, 应注意区分.

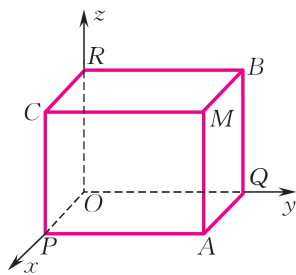


图 7-3

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点. 为了用两点的坐标来表达它们间的距离 d , 我们过 M_1, M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面. 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体 (见图 7-4). 根据勾股定理, 有

$$\begin{aligned} |M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} |M_1P| &= |P_1P_2| = |x_2 - x_1|, \\ |M_1Q| &= |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|, \\ |M_1R| &= |R_1R_2| = |z_2 - z_1|, \end{aligned}$$

所以

$$d = |M_1 M_2| \\ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

这就是 **两点间的距离公式**.

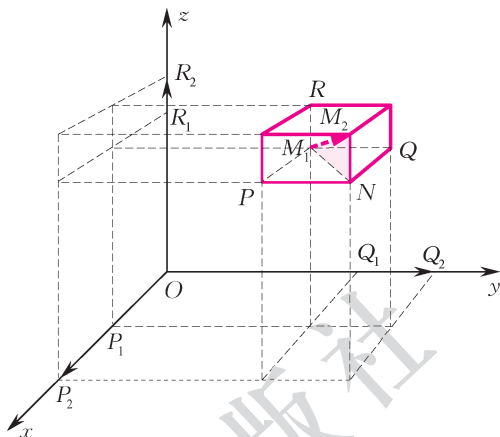


图 7-4

特别地,点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

习 题 7-1



- 在空间直角坐标系中,定出下列各点的位置:
 $A(1, 2, 3)$; $B(-2, 3, 4)$; $C(2, -3, -4)$;
 $D(3, 4, 0)$; $E(0, 4, 3)$; $F(3, 0, 0)$.
- xOy 坐标面上的点,其坐标有什么特点? yOz 坐标面上的点呢? zOx 坐标面上的点呢?
- 对于 x 轴上的点,其坐标有什么特点? y 轴上的点呢? z 轴上的点呢?
- 求下列各对点之间的距离:
 (1) $(0, 0, 0)$, $(2, 3, 4)$; (2) $(0, 0, 0)$, $(2, -3, -4)$;
 (3) $(-2, 3, -4)$, $(1, 0, 3)$; (4) $(4, -2, 3)$, $(-2, 1, 3)$.
- 求点 $(4, -3, 5)$ 到坐标原点和各坐标轴间的距离.
- 在 z 轴上求一点,使该点与两点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 距离相等.
- 试证:以三点 $A(4, 1, 9)$, $B(10, -1, 6)$, $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

第二节 向量及其运算

一、向量及其线性运算

1. 向量概念

我们曾经遇到的物理量有两种：一种是只有大小的量，叫作**数量**，如时间、温度、距离、质量等；另一种是不仅有大小，而且还有方向的量，叫作**向量**或**矢量**，如速度、加速度、力等。

在数学上，往往用一条有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向。如图 7-5 所示，以 M_1 为始点、 M_2 为终点的有向线段所表示的向量，用记号 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 表示，有时也用一个黑体字母或上面加箭头的字母来表示向量，如向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{i}, \mathbf{u}$ 或 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{i}, \vec{u}$ 等。

向量的大小叫作向量的**模**，向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 或 $\mathbf{a}$ 的模分别记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 或 $|\mathbf{a}|$ 。

在研究向量的运算时，将会用到以下几个特殊向量及向量相等的概念：

单位向量 模等于 1 的向量称为单位向量。

逆向量(或**负向量**) 与向量 $\mathbf{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\mathbf{a}$ 的逆向量(或负向量)，记为 $-\mathbf{a}$ 。

零向量 模等于 0 的向量称为零向量，记作 $\mathbf{0}$ 。零向量没有确定的方向，也可以说它的方向是任意的。

向量相等 两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ ，如果它们方向相同，且模相等，就说这两个向量**相等**，记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 。

自由向量 与始点位置无关的向量称为自由向量(即向量可以在空间平行移动，所得向量与原向量相等)。

我们所研究的向量均为自由向量。今后，必要时可以把一个向量平行移动到空间任一位置。

2. 向量的线性运算

(1) 向量的加(减)法。

仿照物理学中力的合成，我们可按如下方式定义向量的加(减)法。



图 7-5

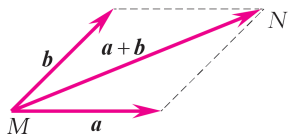


图 7-6

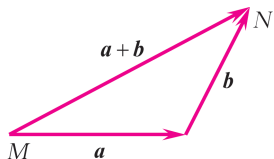


图 7-7

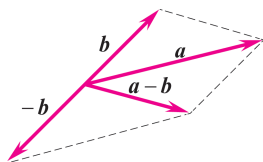


图 7-8

定义 1 设 a, b 为两个(非零)向量,把 a, b 平行移动,使它们的始点重合于 M ,并以 a, b 为邻边作平行四边形,把以点 M 为始点的对角线向量 $\overrightarrow{MN}$ 定义为 a, b 的和,记为 $a+b$ (见图 7-6). 这种用平行四边形的对角线来定义两个向量的和的方法,叫作 **平行四边形法则**.

由于平行四边形的对边平行且相等,因此从图 7-6 可以看出, $a+b$ 也可以按下列方法得出:把 b 平行移动,使它的始点与 a 的终点重合,这时,从 a 的始点到 b 的终点的有向线段 $\overrightarrow{MN}$ 就表示向量 a 与 b 的和 $a+b$ (见图 7-7). 这个方法叫作 **三角形法则**.

定义 2 设 a, b 为两个(非零)向量, b 的逆向量为 $-b$. 称向量 a 与向量 $-b$ 的和向量为向量 a 与向量 b 的**差向量**,简称为向量 a 与向量 b 的差,即

$$a-b = a+(-b).$$

按定义容易用作图法得到向量 a 与 b 的差. 把向量 a 与 b 的始点放在一起,则由 b 的终点到 a 的终点的向量就是 a 与 b 的差 $a-b$ (见图 7-8).

在定义 1 与定义 2 中,我们都假设 a, b 为非零向量,其实这只是为了几何直观的需要,事实上 a, b 都可以是零向量. 根据零向量的定义,我们可以将零向量看成一个可取任意方向的点. 这样我们就可以约定:

任何向量与零向量的和与差都等于该向量自己.

向量的加法满足下列性质:

$$a+b = b+a; \quad (\text{交换律})$$

$$(a+b)+c = a+(b+c); \quad (\text{结合律})$$

$$a+0 = a; \quad a+(-a) = 0.$$

(2) 向量与数量的乘法.

定义 3 设 λ 是一实数,向量 a 与 λ 的乘积 λa 是一个这样的向量:

当 $\lambda > 0$ 时, λa 的方向与 a 的方向相同,它的模等于 $|a|$ 的 λ 倍,即 $|\lambda a| = \lambda |a|$;

当 $\lambda < 0$ 时, λa 的方向与 a 的方向相反,它的模等于 $|a|$ 的 $|\lambda|$ 倍,即 $|\lambda a| = |\lambda| |a|$;

当 $\lambda = 0$ 时, λa 是零向量,即 $\lambda a = 0$.

向量与数量的乘法满足下列性质(λ, μ 为实数):

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a; \quad (\text{结合律})$$

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a; \quad (\text{分配律})$$

$$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b. \quad (\text{分配律})$$

设 e_a 是方向与 a 相同的**单位向量**,则根据向量与数量乘法的定义,可以将 a 写成

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \boldsymbol{e}_a.$$

这样就把一个向量的大小和方向都明显地表示出来. 由此, 若 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量, 也有

$$\boldsymbol{e}_a = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},$$

就是说把一个非零向量除以它的模就得到与它同方向的单位向量.

二、向量的坐标表示

1. 向量在轴上的投影

为了用分析方法来研究向量, 需要引进向量在轴上的投影的概念.

(1) 两向量的夹角.

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为两个非零向量, 任取空间一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, 则称这两向量正向间的夹角 θ 为两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 (见图 7-9), 记作

$$\theta = (\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{b}}) \quad \text{或} \quad \theta = (\hat{\boldsymbol{b}}, \hat{\boldsymbol{a}}), \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时, $\theta = 0$; 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时, $\theta = \pi$.

(2) 点 A 在数轴上的投影.

为了表达方便, 若无特别声明, 不妨设数轴为 x 轴. 过点 A 作与 x 轴垂直的平面, 交 x 轴于点 A' , 则点 A' 称为 **点 A 在 x 轴上的投影** (见图 7-10). 点 A 和 A' 之间的距离称为点 A 到 x 轴的距离.

(3) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在数轴上的投影.

首先, 我们引进数轴上的有向线段的值的概念.

设 $\overrightarrow{AB}$ 是 x 轴上的有向线段. 如果数 λ 满足 $|\lambda| = |\overrightarrow{AB}|$, 且当 $\overrightarrow{AB}$ 与 x 轴同向时 λ 是正的, 当 $\overrightarrow{AB}$ 与 x 轴反向时 λ 是负的, 那么数 λ 叫作 x 轴上 **有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的值**, 记作 AB , 即 $\lambda = AB$.

设 A, B 两点在 x 轴上的投影分别为 A', B' (见图 7-11), 则有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴上的投影, 记作 $\text{Prj}_x \overrightarrow{AB} = A'B'$, 它是一个数量. 这时 x 轴叫作 **投影轴**.

这里应特别指出的是: 投影不是向量, 也不是长度, 而是数量, 它可正, 可负, 也可以是零.

类似地, 可定义一个向量在另一个向量方向上的投影.

关于向量的投影, 有下面两个定理.

定理 1 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴上的投影等于向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模乘以 x 轴与向量 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角 α 的余弦, 即

$$\text{Prj}_x \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \alpha.$$

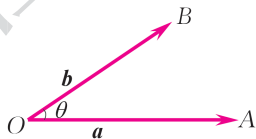


图 7-9

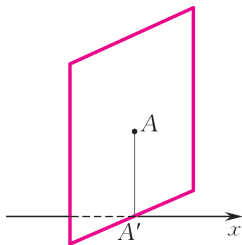


图 7-10

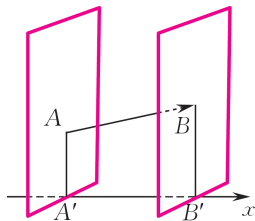


图 7-11

证 过 A 作与 x 轴平行, 且有相同正向的 x' 轴, 则 x 轴与向量 $\overrightarrow{AB}$ 间的夹角 α 等于 x' 轴与向量 $\overrightarrow{AB}$ 间的夹角 (见图 7-12), 从而有

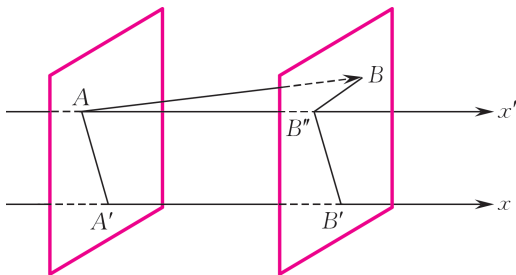
$$\text{Prj}_x \overrightarrow{AB} = \text{Prj}_{x'} \overrightarrow{AB} = AB'' = |\overrightarrow{AB}| \cos \alpha.$$


图 7-12

显然, 当 α 是锐角时, 投影为正值; 当 α 是钝角时, 投影为负值; 当 α 是直角时, 投影为 0.

定理 2 两个向量的和在某数轴上的投影等于这两个向量在该数轴上投影的和, 即

$$\text{Prj}_x (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \text{Prj}_x \mathbf{a}_1 + \text{Prj}_x \mathbf{a}_2.$$

证 设有两个向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 及 x 轴, 由图 7-13 可以看到

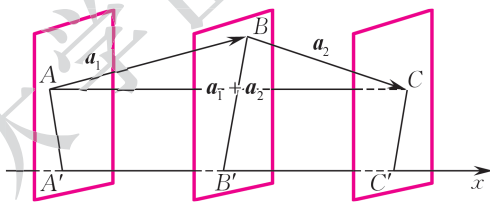


图 7-13

$$\text{Prj}_x (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \text{Prj}_x (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \text{Prj}_x \overrightarrow{AC} = A'C',$$

而

$$\text{Prj}_x \mathbf{a}_1 + \text{Prj}_x \mathbf{a}_2 = \text{Prj}_x \overrightarrow{AB} + \text{Prj}_x \overrightarrow{BC} = A'B' + B'C' = A'C',$$

所以

$$\text{Prj}_x (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \text{Prj}_x \mathbf{a}_1 + \text{Prj}_x \mathbf{a}_2.$$

显然, 定理 2 可推广到有限个向量的情形, 即

$$\text{Prj}_x (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n) = \text{Prj}_x \mathbf{a}_1 + \text{Prj}_x \mathbf{a}_2 + \cdots + \text{Prj}_x \mathbf{a}_n.$$

2. 向量的坐标表示

(1) 向量的分解.

设空间直角坐标系 $Oxyz$, 以 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别表示沿 x 轴、 y 轴、 z 轴正向的单位向量, 并称它们为这一坐标系的基本单位向量. 始点固定在原点 O 、终点为 M 的向量 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, 称为点 M 的向径.

设向径 $\overrightarrow{OM}$ 的终点 M 的坐标为 (x, y, z) . 过点 M 分别作与三条坐标轴垂直的平面, 依次交坐标轴于 P, Q, R (见图 7-14). 根据向量

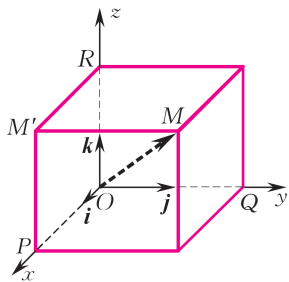


图 7-14

的加法,有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{M'M},$$

但

$$\overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{OR}, \quad \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OQ},$$

所以

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.$$

向量 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$, 分别称为向量 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ 在 x, y, z 轴上的分向量.

根据数与向量的乘法, 可得

$$\overrightarrow{OP} = xi, \quad \overrightarrow{OQ} = yj, \quad \overrightarrow{OR} = zk.$$

因此, 有

$$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r} = xi + yj + zk.$$

这就是向量 $\boldsymbol{r}$ 在坐标系中的分解式, 其中 x, y, z 三个数是向量 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ 在三条坐标轴上的投影.

一般地, 设向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, 两点 M_1, M_2 的坐标分别为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 及 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 如图 7-15 所示. 由于

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1,$$

而

$$\boldsymbol{r}_2 = x_2i + y_2j + z_2k,$$

$$\boldsymbol{r}_1 = x_1i + y_1j + z_1k,$$

因此

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2} &= (x_2i + y_2j + z_2k) - (x_1i + y_1j + z_1k) \\ &= (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k. \end{aligned}$$

这个式子称为**向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 按基本单位向量的分解式**, 其中三个数量

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1$$

是向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 在三个坐标轴上的投影. 我们也可以将向量 $\boldsymbol{a}$ 的分解式写成

$$\boldsymbol{a} = a_xi + a_yj + a_zk.$$

(2) 向量的坐标表示.

向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影 a_x, a_y, a_z 叫作**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标**, 并将 $\boldsymbol{a}$ 表示为

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z).$$

上式叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式, 从而基本单位向量的坐标表示式是

$$i = (1, 0, 0), \quad j = (0, 1, 0), \quad k = (0, 0, 1).$$

零向量的坐标表示式为 $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

起点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 、终点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的向量的坐标表示式为

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

特别地, 点 M 的向径 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标就是终点 M 的坐标, 即

$$\overrightarrow{OM} = (x, y, z).$$

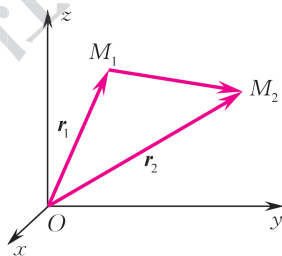


图 7-15

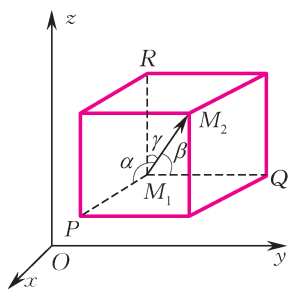


图 7-16

(3) 向量的模与方向余弦的坐标表示式.

向量可以用它的模和方向来表示,也可以用它的坐标来表示.为了找出向量的坐标与向量的模、方向之间的联系,我们先介绍一种表达空间方向的方法.

与平面解析几何里用倾角表示直线对坐标轴的倾斜程度相类似,我们可以用向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 与三条坐标轴(正向)的夹角 α, β, γ 来表示此向量的方向,并规定 $0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi, 0 \leq \gamma \leq \pi$ (见图 7-16). α, β, γ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**.

过点 M_1, M_2 各作垂直于三条坐标轴的平面,如图 7-16 所示.可以看出,由于 $\angle PM_1M_2 = \alpha$, 又 $M_2P \perp M_1P$, 因此

$$\begin{aligned} a_x &= M_1P = |\overrightarrow{M_1M_2}| \cos \alpha = |\boldsymbol{a}| \cos \alpha, \\ a_y &= M_1Q = |\overrightarrow{M_1M_2}| \cos \beta = |\boldsymbol{a}| \cos \beta, \\ a_z &= M_1R = |\overrightarrow{M_1M_2}| \cos \gamma = |\boldsymbol{a}| \cos \gamma. \end{aligned} \quad (7-2-1)$$

公式(7-2-1)中出现的不是方向角 α, β, γ 本身,而是它们的余弦,因而通常也用数组 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 来表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向,叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**.

把公式(7-2-1)代入向量的坐标表示式,就可以用向量的模及方向余弦来表示向量:

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| (\cos \alpha \boldsymbol{i} + \cos \beta \boldsymbol{j} + \cos \gamma \boldsymbol{k}). \quad (7-2-2)$$

而向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为

$$|\boldsymbol{a}| = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{|M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2},$$

由此得向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的坐标表示式

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (7-2-3)$$

再把式(7-2-3)代入式(7-2-1),可得向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦的坐标表示式

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \end{cases} \quad (7-2-4)$$

把公式(7-2-4)的三个等式两边分别平方后相加,便得到

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

即任一向量的方向余弦的平方和等于1.由此可见,由任一向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦所组成的向量 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 是单位向量,即

$$\boldsymbol{e}_a = \cos \alpha \boldsymbol{i} + \cos \beta \boldsymbol{j} + \cos \gamma \boldsymbol{k}.$$

例 1 已知两点 $P_1(2, -2, 5)$ 及 $P_2(-1, 6, 7)$, 试求:

(1) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在三条坐标轴上的投影及分解表达式;

(2) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模;

(3) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦;

(4) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 上的单位向量 $e_{P_1P_2}$.

解 (1) 设 $\overrightarrow{P_1P_2} = (a_x, a_y, a_z)$, 则 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在三条坐标轴上的投影分别为

$$a_x = -3, \quad a_y = 8, \quad a_z = 2.$$

于是 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的分解表达式为

$$\overrightarrow{P_1P_2} = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

$$(2) |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(-3)^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{77}.$$

$$(3) \cos\alpha = \frac{a_x}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} = \frac{-3}{\sqrt{77}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} = \frac{8}{\sqrt{77}}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} = \frac{2}{\sqrt{77}}.$$

$$(4) e_{P_1P_2} = \frac{1}{\sqrt{77}}(-3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 2\mathbf{k}).$$

(4) 用坐标进行向量的线性运算.

利用向量的分解式, 向量的线性运算可以化为代数运算.

设 λ 是一数量, $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, 则

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \pm (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})$$

$$= (a_x \pm b_x)\mathbf{i} + (a_y \pm b_y)\mathbf{j} + (a_z \pm b_z)\mathbf{k},$$

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) = \lambda a_x\mathbf{i} + \lambda a_y\mathbf{j} + \lambda a_z\mathbf{k},$$

或者

$$(a_x, a_y, a_z) \pm (b_x, b_y, b_z) = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z),$$

$$\lambda(a_x, a_y, a_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

这就是说, 两向量之和(差)的坐标等于两向量同名坐标之和(差);

数与向量之积等于此数乘上向量的每一个坐标.

例 2 从点 $A(2, -1, 7)$ 沿向量 $\mathbf{a} = 8\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ 的方向取线段 AB , 使 $|\overrightarrow{AB}| = 34$, 求点 B 的坐标.

解 设点 B 的坐标为 (x, y, z) , 则

$$\overrightarrow{AB} = (x-2)\mathbf{i} + (y+1)\mathbf{j} + (z-7)\mathbf{k}.$$

按题意可知 $\overrightarrow{AB}$ 上的单位向量与 $\mathbf{a}$ 上的单位向量相等, 即

$$e_{AB} = e_a.$$

而 $|\overrightarrow{AB}| = 34$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{8^2 + 9^2 + (-12)^2} = 17$, 所以

$$e_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{x-2}{34}\mathbf{i} + \frac{y+1}{34}\mathbf{j} + \frac{z-7}{34}\mathbf{k},$$

$$e_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{8}{17}\mathbf{i} + \frac{9}{17}\mathbf{j} - \frac{12}{17}\mathbf{k}.$$

比较以上两式,得

$$\frac{x-2}{34} = \frac{8}{17}, \quad \frac{y+1}{34} = \frac{9}{17}, \quad \frac{z-7}{34} = -\frac{12}{17}.$$

解得

$$x = 18, \quad y = 17, \quad z = -17.$$

所以,点 B 的坐标为 $(18, 17, -17)$.

例 3 已知 $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, 求 $3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 方向的单位向量.

解 因为

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= 3\mathbf{a} - \mathbf{b} = 3(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) - (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) \\ &= 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k}, \end{aligned}$$

所以

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{3^2 + (-7)^2 + 11^2} = \sqrt{179}.$$

于是

$$e_c = \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \frac{3\mathbf{a} - \mathbf{b}}{|3\mathbf{a} - \mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{179}}(3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k}).$$

三、向量的数量积与向量积

1. 两向量的数量积

在物理学中,我们知道当物体在力 $\mathbf{F}$ 的作用下(见图 7-17)产生位移 $\mathbf{s}$ 时,力 $\mathbf{F}$ 所做的功为

$$W = |\mathbf{F}| |\mathbf{s}| \cos(\widehat{\mathbf{F}, \mathbf{s}}).$$

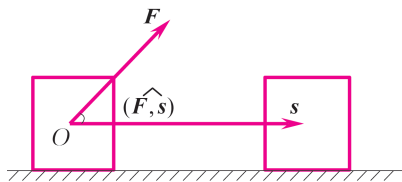


图 7-17

这样,由两个向量 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{s}$ 决定了一个数量 $|\mathbf{F}| |\mathbf{s}| \cos(\widehat{\mathbf{F}, \mathbf{s}})$. 根据这一实际背景,我们把由两个向量 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{s}$ 所确定的数量 $|\mathbf{F}| |\mathbf{s}| \cos(\widehat{\mathbf{F}, \mathbf{s}})$ 定义为两向量 $\mathbf{F}$ 与 $\mathbf{s}$ 的数量积.

定义 4 两向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的模与它们的夹角余弦的乘积,叫作 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的数量积,记为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$,即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}).$$

因其中的 $|\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ 是向量 $\mathbf{b}$ 在向量 $\mathbf{a}$ 的方向上的投影, 故数量积又可表示为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \operatorname{Prj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}.$$

同样,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \operatorname{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}.$$

数量积满足下列运算性质 (λ 为实数):

$$(1) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}; \quad (\text{交换律})$$

$$(2) \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}; \quad (\text{分配律})$$

$$(3) (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}). \quad (\text{结合律})$$

由数量积的定义, 容易得出下面的结论:

$$(1) \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2;$$

$$(2) \text{两个非零向量 } \mathbf{a} \text{ 与 } \mathbf{b} \text{ 互相垂直的充要条件是 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

2. 数量积的坐标表示式

设

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}.$$

由于基本单位向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 两两互相垂直, 从而

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

又因为 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 的模都是 1, 所以

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1.$$

因此, 根据数量积的运算性质可得

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

即两向量的数量积等于它们同名坐标的乘积之和.

由于 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$, 当 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 都是非零向量时, 有

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示式. 从这个公式可以看出, 两非零向量互相垂直的充要条件为

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (7-2-5)$$

例 4

解 因为

求向量 $\mathbf{a} = (3, -2, 2\sqrt{3})$ 和 $\mathbf{b} = (3, 0, 0)$ 的夹角.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 2\sqrt{3} \cdot 0 = 9,$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 5,$$

$$|\mathbf{b}| = 3,$$

所以

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{9}{5 \times 3} = \frac{3}{5}.$$

故其夹角

$$(\hat{a}, \hat{b}) = \arccos \frac{3}{5} \approx 53^\circ 8'.$$

例 5 求向量 $\mathbf{a} = (4, -1, 2)$ 在 $\mathbf{b} = (3, 1, 0)$ 上的投影.

解 因为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 11,$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{10},$$

所以

$$\text{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{11}{\sqrt{10}} = \frac{11\sqrt{10}}{10}.$$

例 6 在 xOy 平面上, 求一单位向量与 $\mathbf{p} = (-4, 3, 7)$ 垂直.

解 设所求向量为 (a, b, c) , 因为它在 xOy 平面上, 所以 $c = 0$. 又 $(a, b, 0)$ 与 $\mathbf{p} = (-4, 3, 7)$ 垂直, 且是单位向量, 故有

$$-4a + 3b = 0, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

由此求得

$$a = \frac{3}{5}, \quad b = \frac{4}{5} \quad \text{或} \quad a = -\frac{3}{5}, \quad b = -\frac{4}{5},$$

因此所求向量为

$$\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right) \quad \text{或} \quad \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right).$$

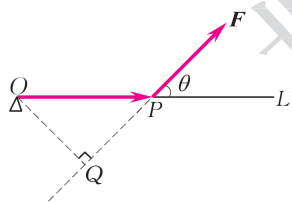


图 7-18

3. 两向量的向量积

在研究物体转动问题时, 不但要考虑此物体所受的力, 还要分析这些力所产生的力矩. 下面举例说明表示力矩的方法.

设 O 为杠杆 L 的支点, 有一个力 $\mathbf{F}$ 作用于这杠杆上点 P 处, $\mathbf{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ (见图 7-18). 由物理学知道, 力 $\mathbf{F}$ 对支点 O 的力矩是一向量 $\mathbf{M}$, 它的模为

$$|\mathbf{M}| = |\overrightarrow{OP}| |\mathbf{F}| \sin \theta.$$

而 $\mathbf{M}$ 的方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\mathbf{F}$ 所确定的平面 (即 $\mathbf{M}$ 既垂直于 $\overrightarrow{OP}$, 又垂直于 $\mathbf{F}$), $\mathbf{M}$ 的方向按右手规则确定, 即当右手的四个手指从 $\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 $\mathbf{F}$ 时, 大拇指的指向就是 $\mathbf{M}$ 的方向.

由两个已知向量按上述规则来确定另一向量, 在一些其他物理问题中也会遇到, 抽象出来, 就是两个向量的向量积的概念.

定义 5 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为两个向量, 若向量 $\mathbf{c}$ 满足:

(1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$, 即等于以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为邻边的平行四边形的面积;

(2) $\mathbf{c}$ 的方向垂直于 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所确定的平面, 并且按顺序 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 符合右手法则,

则称向量 c 为向量 a 与向量 b 的**向量积**, 记为 $a \times b$ (见图 7-19), 即

$$c = a \times b.$$

向量积满足下列规律 (λ 为实数):

$$(1) a \times b = -b \times a \quad (\text{向量积不满足交换律});$$

$$(2) (a + b) \times c = a \times c + b \times c;$$

$$(3) (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b).$$

由向量积的定义, 容易得出下面的结论:

$$(1) a \times a = 0;$$

$$(2) \text{两个非零向量 } a \text{ 与 } b \text{ 互相平行的充要条件是 } a \times b = 0.$$

4. 向量积的坐标表示式

设 $a = a_x i + a_y j + a_z k$, $b = b_x i + b_y j + b_z k$, 则

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_x i + a_y j + a_z k) \times (b_x i + b_y j + b_z k) \\ &= a_x b_x (i \times i) + a_x b_y (i \times j) + a_x b_z (i \times k) \\ &\quad + a_y b_x (j \times i) + a_y b_y (j \times j) + a_y b_z (j \times k) \\ &\quad + a_z b_x (k \times i) + a_z b_y (k \times j) + a_z b_z (k \times k). \end{aligned}$$

由于

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0,$$

$$i \times j = k, \quad j \times k = i,$$

$$k \times i = j, \quad j \times i = -k,$$

$$k \times j = -i, \quad i \times k = -j,$$

因此

$$a \times b = (a_y b_z - a_z b_y) i + (a_z b_x - a_x b_z) j + (a_x b_y - a_y b_x) k.$$

这就是**向量积的坐标表示式**. 这个公式可以用**行列式**(行列式的定义及简单运算见上册书后附录) 写成下列便于记忆的形式, 即

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

从这个公式可以看出, 两非零向量 a 和 b 互相平行的充要条件为

$$a_y b_z - a_z b_y = 0, \quad a_z b_x - a_x b_z = 0, \quad a_x b_y - a_y b_x = 0$$

或

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (7-2-6)$$

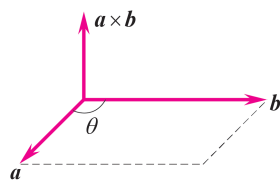


图 7-19

例 7 设 $a = 2i + j - k$, $b = i - j + 2k$, 计算 $a \times b$.

$$\text{解 } a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1 \cdot 2 - (-1)^2)\mathbf{i} + ((-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2)\mathbf{j} + (2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1)\mathbf{k} \\ = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

例 8 || 求以 $A(1,2,3), B(3,4,5), C(2,4,7)$ 为顶点的三角形的面积 S .

解 根据向量积的定义, 可知所求三角形的面积 S 等于

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

因为

$$\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad \overrightarrow{AC} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

所以

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{14}.$$

例 9 || 已知 $\mathbf{a} = (2, 1, 1), \mathbf{b} = (1, -1, 1)$, 求与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 都垂直的单位向量.

解 设 $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 则 $\mathbf{c}$ 同时垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$. 于是, $\mathbf{c}$ 上的单位向量是所求的单位向量. 因为

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \\ |\mathbf{c}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14},$$

所以

$$\mathbf{e}_c = \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}} \right)$$

与

$$-\mathbf{e}_c = \left(-\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

都是所求的单位向量.



习 题 7-2

1. 验证: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.
2. 设 $\mathbf{u} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$, 试用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示 $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.
3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分, 设分点依次为 D_1, D_2, D_3, D_4 , 再把各分点与 A 连接, 试以 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}, \overrightarrow{D_2A}, \overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.
4. 设向量 $\overrightarrow{OM}$ 的模是 4, 它与投影轴的夹角是 60° , 求该向量在该轴上的投影.
5. 一向量的终点为点 $B(2, -1, 7)$, 它在三条坐标轴上的投影依次是 4, -4 和 7, 求该向量的起点 A 的坐标.

6. 一向量的起点是 $P_1(4,0,5)$, 终点是 $P_2(7,1,3)$, 试求:

- (1) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在各坐标轴上的投影; (2) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模;
(3) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦; (4) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 方向的单位向量.

7. 三个力 $\mathbf{F}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{F}_2 = (-2, 3, -4)$, $\mathbf{F}_3 = (3, -4, 5)$ 同时作用于一点, 求合力 $\mathbf{R}$ 的大小和方向余弦.

8. 求出向量 $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 的模, 并分别用单位向量 $\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_c$ 来表达向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

9. 设 $\mathbf{m} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$, $\mathbf{p} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, 求向量 $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} + 3\mathbf{n} - \mathbf{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

10. 已知单位向量 $\mathbf{a}$ 与 x 轴正向夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 与其在 xOy 平面上的投影向量的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 试求向量 $\mathbf{a}$.

11. 已知两点 $M_1(2, 5, -3)$, $M_2(3, -2, 5)$, 点 M 在线段 M_1M_2 上, 且 $\overrightarrow{M_1M} = 3\overrightarrow{MM_2}$, 求向径 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标.

12. 已知点 P 到点 $A(0, 0, 12)$ 的距离是 7, $\overrightarrow{OP}$ 的方向余弦是 $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}$, 求点 P 的坐标.

13. 已知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, 且 $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 4$, 计算:

- (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; (2) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$.

14. 已知 $\mathbf{a} = (4, -2, 4)$, $\mathbf{b} = (6, -3, 2)$, 计算:

- (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; (2) $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$;
(3) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$.

15. 已知 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, 求:

- (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$; (2) $2\mathbf{a} \times 7\mathbf{b}$;
(3) $7\mathbf{b} \times 2\mathbf{a}$; (4) $\mathbf{a} \times \mathbf{a}$.

16. 已知向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 互相垂直, 且 $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 4$, 计算:

- (1) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \times |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$; (2) $|(3\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})|$.

第三节 空间平面与直线

本节将以向量为工具, 在空间直角坐标系中建立最简单的空间图形——平面和直线的代数方程.

一、平面及其方程

垂直于平面的非零向量叫作该平面的**法向量**. 容易看出, 平面上的任一向量都与该平面的法向量垂直.

由中学立体几何知识我们知道, 过空间一点可以作, 而且只能作一平面垂直于一已知直线, 所以当平面 Π 上的一点 M_0 和它的法

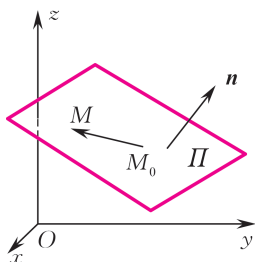


图 7-20

向量 n 为已知时,平面 Π 的位置就完全确定了.

设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 Π 上一已知点, $n = (A, B, C)$ 是它的法向量(见图 7-20), $M(x, y, z)$ 是平面 Π 上的任一点,那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 必与平面 Π 的法向量 n 垂直,即它们的数量积等于零: $n \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$. 由于 $n = (A, B, C)$, $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, 因此有

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (7-3-1)$$

因为所给的条件是已知一定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和一个法向量 $n = (A, B, C)$, 所以方程(7-3-1) 叫作 **平面的点法式方程**.

例 1 || 求过点 $(2, -3, 0)$ 及法向量为 $n = (1, -2, 3)$ 的平面方程.

解 根据平面的点法式方程(7-3-1), 得所求平面的方程为

$$(x - 2) - 2(y + 3) + 3z = 0$$

或

$$x - 2y + 3z - 8 = 0.$$

将方程(7-3-1) 化简, 得

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (7-3-2)$$

其中 $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. 由于方程(7-3-1) 是 x, y, z 的一次方程, 因此任何平面都可以用三元一次方程来表示.

反过来, 对于任给的一个形如方程(7-3-2) 的三元一次方程, 我们取满足该方程的一组解 x_0, y_0, z_0 , 则

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (7-3-3)$$

由方程(7-3-2) 减去方程(7-3-3), 得

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (7-3-4)$$

把它与方程(7-3-1) 相比较, 便知方程(7-3-4) 是通过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且以 $n = (A, B, C)$ 为法向量的平面方程. 因为方程(7-3-2) 与方程(7-3-4) 同解, 所以任意一个三元一次方程(7-3-2) 的图形是一个平面. 方程(7-3-2) 称为 **平面的一般式方程**, 其中 x, y, z 的系数就是该平面的法向量 n 的坐标, 即 $n = (A, B, C)$.

例 2 || 如图 7-21 所示, 平面 Π 在三个坐标轴上的截距分别为 a, b, c , 求此平面的方程(设 $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$).

解 因为 a, b, c 分别表示平面 Π 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的截距, 所以平面 Π 通过三点 $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$, 且这三点不在一直线上.

先找出平面 Π 的法向量 n . 由于法向量 n 与向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 都垂直, 可取 $n = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, 而 $\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0), \overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$, 因此得

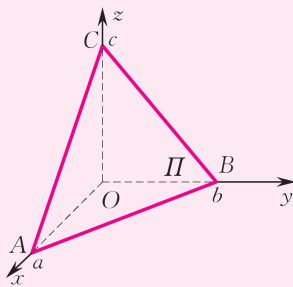


图 7-21

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} \\ &= bci + acj + abk. \end{aligned}$$

再根据平面的点法式方程(7-3-1),得此平面的方程为

$$bc(x-a) + ac(y-0) + ab(z-0) = 0.$$

由于 $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, 上式可改写成

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (7-3-5)$$

式(7-3-5) 叫作**平面的截距式方程**.

下面我们讨论一下**特殊位置**的平面方程.

(1) 过原点的平面方程.

因为平面通过原点, 所以将 $x = y = z = 0$ 代入方程(7-3-2), 得 $D = 0$. 故过原点的平面方程为

$$Ax + By + Cz = 0, \quad (7-3-6)$$

其特点是常数项 $D = 0$.

(2) 平行于坐标轴的平面方程.

如果平面平行于 x 轴, 则平面的法向量 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 与 x 轴的单位向量 $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ 垂直. 故

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = 0,$$

即

$$A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0.$$

由此, 有

$$A = 0,$$

从而得到平行于 x 轴的平面方程为

$$By + Cz + D = 0,$$

其方程中不含 x .

类似地, 平行于 y 轴的平面方程为

$$Ax + Cz + D = 0;$$

平行于 z 轴的平面方程为

$$Ax + By + D = 0.$$

(3) 过坐标轴的平面方程.

过坐标轴的平面必过原点, 且与该坐标轴平行. 根据上面讨论的结果, 可得过 x 轴的平面方程为

$$By + Cz = 0;$$

过 y 轴的平面方程为

$$Ax + Cz = 0;$$

过 z 轴的平面方程为

$$Ax + By = 0.$$

(4) 垂直于坐标轴的平面方程.

如果平面垂直于 z 轴, 则该平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 可取与 z 轴平行的任一非零向量 $(0, 0, C)$, 故平面方程为 $Cz + D = 0$.

类似地, 垂直于 x 轴的平面方程为 $Ax + D = 0$, 垂直于 y 轴的平面方程为 $By + D = 0$; 而 $z = 0$ 表示 xOy 坐标面, $x = 0$ 表示 yOz 坐标面, $y = 0$ 表示 zOx 坐标面.

例 3 指出下列平面位置的特点, 并作出其图形:

- (1) $x + y = 4$; (2) $z = 2$.

解 (1) $x + y = 4$, 由于方程中不含 z 的项, 因此平面平行于 z 轴(见图 7-22).

(2) $z = 2$, 表示过点 $(0, 0, 2)$ 且垂直于 z 轴的平面(见图 7-23).

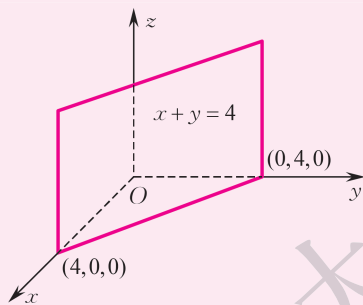


图 7-22

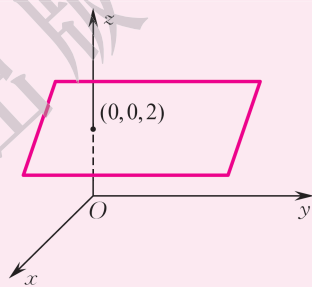


图 7-23

二、空间直线的方程

空间中的直线 L 可以看作两个不重合的相交平面 Π_1 和 Π_2 的交线. 若平面 Π_1 和 Π_2 的方程分别是

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

和

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

那么直线 L 上任何点的坐标应同时满足方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (7-3-7)$$

反过来, 如果点 M 不在直线 L 上, 那么它不可能同时在平面 Π_1 和 Π_2 上, 所以它的坐标就不会满足方程组(7-3-7). 因此, 可以用方程组(7-3-7)来描述直线 L . 方程组(7-3-7)称为**直线的一般方程**.

通过空间中一条直线 L 的平面可以有无穷多个, 我们只要在这

无穷多个平面中任取两个, 把它们的方程联系起来就得到该直线的一般方程.

在平面解析几何中, 我们知道, xOy 平面上的一定点和一非零向量就可确定一条直线. 三维空间的情形也是一样. 设空间直线 L 过定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且平行于非零向量

$$\mathbf{s} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k},$$

这时直线的位置就完全确定了(见图 7-24). 下面我们来求这条直线的方程.

设 $M(x, y, z)$ 是直线 L 上任意一点. 因为 L 平行于向量 $\mathbf{s}$, 所以

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$$

平行于向量 $\mathbf{s}$. 由两向量平行的充要条件式(7-2-6) 有

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (7-3-8)$$

方程(7-3-8) 称为 **直线 L 的对称式方程**, 也叫作 **直线 L 的标准式方程**.

在建立直线 L 的标准式方程(7-3-8) 时, 我们用到了向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 平行于向量 $\mathbf{s}$ 的充要条件, 即这两个向量的对应坐标成比例. 如果我们设这个比例系数为 t , 则有

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t,$$

那么

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt. \quad (7-3-9)$$

当 t 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时, 方程(7-3-9) 就是过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的 **直线 L 的参数方程**, 其中 t 是参数, 向量 $\mathbf{s}$ 称为 **直线 L 的方向向量**. 向量 $\mathbf{s}$ 的坐标 m, n, p 叫作 **直线的方向数**.

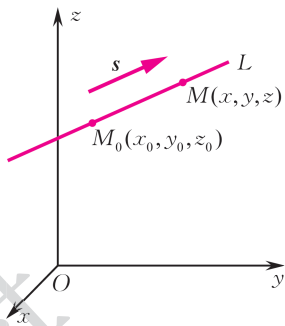


图 7-24

例 4 求过两点 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线的方程.

解 可以取方向向量

$$\mathbf{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

由直线的标准式方程可知, 过两点 M_1, M_2 的直线方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

上式称为 **直线的两点式方程**.

例 5 用标准式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ 2x + y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$$

解 为寻找直线的方向向量 $\mathbf{s}$, 在直线上找出两个点即可. 令 $x_0 = 1$, 代入题中方程

组,得

$$y_0 = 0, \quad z_0 = -2,$$

同理,令 $x_1 = 0$, 代入题中方程组,得

$$y_1 = \frac{1}{2}, \quad z_1 = -\frac{3}{2},$$

即点 $A(1, 0, -2)$ 与点 $B(0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ 在直线上.

取 $s = \overrightarrow{AB} = (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 因此所给直线标准式方程为

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1},$$

参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = t, \\ z = -2 + t. \end{cases}$$

注意 本例提供了化直线的一般方程为标准式方程和参数方程的方法.

三、平面与直线的位置关系

1. 两平面的夹角及平行、垂直的条件

设平面 Π_1 与 Π_2 的法向量分别为 $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ 和 $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. 如果这两个平面相交, 它们之间有两个互补的二面角 (见图 7-25), 其中一个二面角与向量 $\mathbf{n}_1$ 与 $\mathbf{n}_2$ 的夹角相等. 我们把这两个平面的法向量的夹角中的锐角称为 **两平面的夹角**. 根据两向量夹角余弦的公式, 有

$$\begin{aligned} \cos \theta &= | \cos(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) | \\ &= \frac{| A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 |}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \end{aligned} \quad (7-3-10)$$

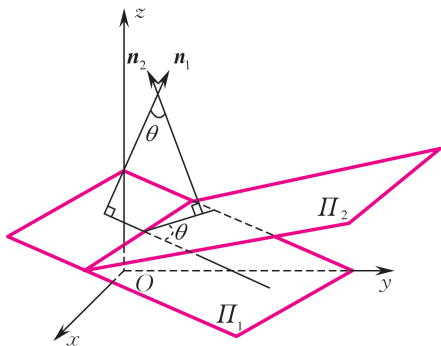


图 7-25

从两非零向量垂直、平行的条件,立即推得两平面垂直、平行的条件:

两平面 Π_1, Π_2 互相垂直的充要条件是

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0; \quad (7-3-11)$$

两平面 Π_1, Π_2 互相平行的充要条件是

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (7-3-12)$$

例 6 || 设平面 Π_1 与 Π_2 的方程分别为 $x - y + 2z - 6 = 0$ 及 $2x + y + z - 5 = 0$, 求它们的夹角.

解 根据公式(7-3-10)得

$$\cos \theta = \frac{|1 \times 2 + (-1) \times 1 + 2 \times 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}.$$

所以平面 Π_1 与 Π_2 的夹角为 $\theta = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

例 7 || 一平面通过点 $P_1(1, 1, 1)$ 和点 $P_2(0, 1, -1)$, 且垂直于平面 $x + y + z = 0$, 求这平面的方程.

解 平面 $x + y + z = 0$ 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (1, 1, 1)$, 又向量 $\overrightarrow{P_1 P_2} = (-1, 0, -2)$ 在所求平面上. 设所求平面的法向量为 $\mathbf{n}$, 则 $\mathbf{n}$ 同时垂直于向量 $\overrightarrow{P_1 P_2}$ 及 $\mathbf{n}_1$, 所以可取

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

故所求平面方程为

$$-2(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$$

或

$$2x - y - z = 0.$$

2. 两直线的夹角及平行、垂直的条件

设两直线 L_1 和 L_2 的标准式方程分别为

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

和

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2},$$

两直线的方向向量 $\mathbf{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ 与 $\mathbf{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ 的夹角(这里指锐角或直角)称为**两直线的夹角**, 记为 θ , 则

$$\cos \theta = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (7-3-13)$$

由此推出,两直线互相垂直的充要条件是

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0; \quad (7-3-14)$$

两直线互相平行的充要条件是

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (7-3-15)$$

例 8 求直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1}$ 和直线 $L_2: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$ 的夹角.

解 直线 L_1 的方向向量为 $s_1 = (1, -4, 1)$, 直线 L_2 的方向向量为 $s_2 = (2, -2, -1)$, 故直线 L_1 与 L_2 的夹角 θ 的余弦为

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|1 \times 2 + (-4) \times (-2) + 1 \times (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

所以

$$\theta = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

例 9 求经过点 $(2, 0, -1)$, 且与直线

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 6 = 0, \\ 4x - 2y + 3z + 9 = 0 \end{cases}$$

平行的直线方程.

解 所求直线与已知直线平行, 其方向向量可取为

$$s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -7i - 2j + 8k.$$

根据直线的标准式方程, 得所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{-7} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{8}.$$

例 10 求过点 $(2, 1, 3)$, 且与直线 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

解 先作一过点 $(2, 1, 3)$, 且垂直于已知直线的平面, 那么这平面的方程应为

$$3(x-2) + 2(y-1) - (z-3) = 0.$$

再求已知直线与这平面的交点. 把已知直线的参数方程

$$\begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = -t \end{cases}$$

代入平面方程, 解之得 $t = \frac{3}{7}$. 再将求得的 t 值代入直线参数方程中, 即得

$$x = \frac{2}{7}, \quad y = \frac{13}{7}, \quad z = -\frac{3}{7}.$$

所以,交点的坐标是 $\left(\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7}\right)$.

于是,向量 $\left(\frac{2}{7} - 2, \frac{13}{7} - 1, -\frac{3}{7} - 3\right)$ 是所求直线的一个方向向量,故所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{\frac{2}{7}-2} = \frac{y-1}{\frac{13}{7}-1} = \frac{z-3}{-\frac{3}{7}-3},$$

即

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}.$$

3. 直线与平面的夹角及平行、垂直的条件

过平面 Π 外一点 A 作垂直于 Π 的垂线交 Π 于点 A' ,则点 A' 称为点 A 在平面 Π 上的投影.点 A 和点 A' 之间的距离称为点 A 到平面 Π 的距离.设直线 L 上相异两点 A_1 和 A_2 在平面 Π 上的投影分别为 A'_1 和 A'_2 ,若 A'_1 与 A'_2 不重合,则过 A'_1 和 A'_2 的直线称为直线 L 在平面 Π 上的投影;若 A'_1 与 A'_2 重合,则必有直线 L 垂直于平面 Π ,此时直线 L 上任一点在平面 Π 上的投影都为同一点,我们说直线 L 在平面 Π 上的投影退化为一.直线 L 与它在平面 Π 上的投影所成的角 θ 称为直线 L 与平面 Π 的夹角(见图7-26).一般取 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

设直线 L 的方程为

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

其方向向量为 $s = (m, n, p)$;平面 Π 的方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

其法向量为 $n = (A, B, C)$,则

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{|n \cdot s|}{|n| |s|},$$

即

$$\sin \theta = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (7-3-16)$$

从而,直线 L 与平面 Π 平行的充要条件是

$$Am + Bn + Cp = 0; \quad (7-3-17)$$

直线 L 与平面 Π 垂直的充要条件是

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (7-3-18)$$

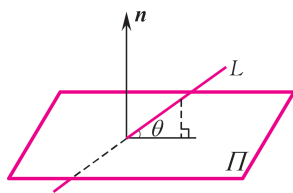


图 7-26

例 11 设平面 Π 的方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 是平面外的一点, 试求 M_1 到平面 Π 的距离.

解 在平面 Π 上取一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (见图 7-27), 则点 M_1 到平面 Π 的距离为

$$d = |\text{Prj}_n \overrightarrow{M_0 M_1}| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M_1}|}{|\mathbf{n}|},$$

而

$$\begin{aligned} |\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M_1}| &= |A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)| \\ &= |Ax_1 + By_1 + Cz_1 - Ax_0 - By_0 - Cz_0|, \end{aligned}$$

由于点 (x_0, y_0, z_0) 在平面 Π 上, 有

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

即

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D.$$

由此可得

$$|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M_1}| = |Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|,$$

所以

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (7-3-19)$$

公式(7-3-19) 称为 **点到平面的距离公式**.

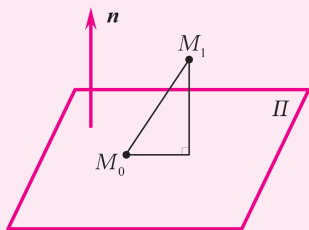


图 7-27

习 题 7-3



- 求过点 $(4, 1, -2)$, 且与平面 $3x - 2y + 6z = 11$ 平行的平面方程.
- 求过点 $M_0(1, 7, -3)$, 且与连接坐标原点到点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.
- 设平面过点 $(1, 2, -1)$, 而在 x 轴和 z 轴上的截距都等于在 y 轴上的截距的两倍, 求此平面方程.
- 求过 $(1, 1, -1)$, $(-2, -2, 2)$ 和 $(1, -1, 2)$ 三点的平面方程.
- 指出下列各平面的特殊位置, 并画出其图形:
 - $y = 0$;
 - $3x - 1 = 0$;
 - $2x - 3y - 6 = 0$;
 - $x - y = 0$;
 - $2x - 3y + 4z = 0$.
- 通过两点 $(1, 1, 1)$ 和 $(2, 2, 2)$ 作垂直于平面 $x + y - z = 0$ 的平面.
- 求通过下列两已知点的直线方程:
 - $(1, -2, 1), (3, 1, -1)$;
 - $(3, -1, 0), (1, 0, -3)$.
- 求直线 $\begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ 的标准式方程和参数方程.
- 决定参数 k 的值, 使平面 $x + ky - 2z = 9$ 适合下列条件:
 - 经过点 $(5, -4, 6)$;
 - 与平面 $2x - 3y + z = 0$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 的角.

10. 确定下列方程中的 l 和 m :

(1) 平面 $2x + ly + 3z - 5 = 0$ 和平面 $mx - 6y - z + 2 = 0$ 平行;

(2) 平面 $3x - 5y + lz - 3 = 0$ 和平面 $x + 3y + 2z + 5 = 0$ 垂直.

11. 通过点 $(1, -1, 1)$ 作垂直于两平面 $x - y + z - 1 = 0$ 和 $2x + y + z + 1 = 0$ 的平面.

12. 求平行于平面 $3x - y + 7z = 5$, 且垂直于向量 $i - j + 2k$ 的单位向量.

13. 求下列直线的夹角:

$$(1) \begin{cases} 5x - 3y + 3z - 9 = 0, \\ 3x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} 2x + 2y - z + 23 = 0, \\ 3x + 8y + z - 18 = 0; \end{cases}$$

$$(2) \frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{-12} = \frac{z-1}{3} \text{ 和 } \begin{cases} \frac{y-3}{-1} = \frac{z-8}{-2}, \\ x = 1. \end{cases}$$

14. 求下列直线与平面的交点:

$$(1) \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} \text{ 与 } 2x + 3y + z - 1 = 0;$$

$$(2) \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2} \text{ 与 } x + 2y - 2z + 6 = 0.$$

15. 求点 $(1, 2, 1)$ 到平面 $x + 2y + 2z - 10 = 0$ 的距离.

第四节 空间曲面与曲线

一、曲面及其方程

平面解析几何把曲线看作动点的轨迹. 类似地, 空间解析几何把曲面当作是一个动点或一条动曲线按一定规律运动而产生的轨迹.

一般地, 如果曲面 S 与三元方程 $F(x, y, z) = 0$ 之间存在如下关系:

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 $F(x, y, z) = 0$;

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足 $F(x, y, z) = 0$, 即满足方程的点都在曲面上,

那么称 $F(x, y, z) = 0$ 为 **曲面 S 的方程**, 而曲面 S 称为 **方程的图形**.

在上一节中, 我们所考察的平面是曲面的特殊形式, 是最简单的曲面; 所考察的直线是空间曲线的特殊形式, 是最简单的空间曲线. 我们建立了它们的一些常见形式的方程. 在这里, 我们将介绍几种常见类型的曲面及其方程.

1. 球面方程

到空间一定点 M_0 之间的距离恒定的动点的轨迹称为球面.

例 1 建立球心在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 、半径为 R 的球面方程.

解 设 $M(x, y, z)$ 是球面上的任一点, 则

$$|M_0M| = R.$$

由于

$$|M_0M| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

因此

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R.$$

两边平方, 得

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2. \quad (7-4-1)$$

显然, 球面上的点的坐标满足这个方程, 而不在球面上的点的坐标不满足这个方程. 所以, 方程(7-4-1)就是以 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球心、 R 为半径的球面方程.

如果 M_0 为原点, 即 $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, 这时球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (7-4-2)$$

若记 $A = -2x_0, B = -2y_0, C = -2z_0, D = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2$, 则式(7-4-1)可化为

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0. \quad (7-4-3)$$

式(7-4-3)称为球面的一般方程.

由式(7-4-3)可以看出, 球面的方程是关于 x, y, z 的二次方程, 它的 x^2, y^2, z^2 三项系数相等, 并且方程中没有 xy, yz, zx 的项.

对于形如式(7-4-3)的一般方程, 我们有下面几个结论:

(1) 当 $A^2 + B^2 + C^2 - 4D > 0$ 时, 式(7-4-3)为一球面方程;

(2) 当 $A^2 + B^2 + C^2 - 4D = 0$ 时, 式(7-4-3)只表示一个点;

(3) 当 $A^2 + B^2 + C^2 - 4D < 0$ 时, 式(7-4-3)不能代表任何图形, 或者说它表示一个虚球.

例 2 方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$ 表示怎样的曲面?

解 通过配方, 原方程可以改写为

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5.$$

与式(7-4-1)比较, 可知原方程表示球心在点 $M_0(1, -2, 0)$ 、半径为 $R = \sqrt{5}$ 的球面.

2. 柱面

设给定一条曲线 C 及直线 l , 则平行于直线 l , 且沿曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面叫作**柱面**. 定曲线 C 叫作柱面的**准线**, 动直线 L 叫作柱面的**母线** (见图 7-28).

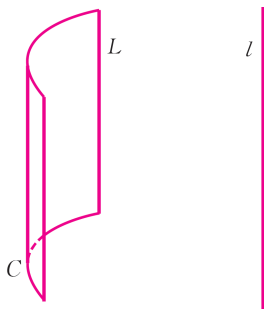


图 7-28

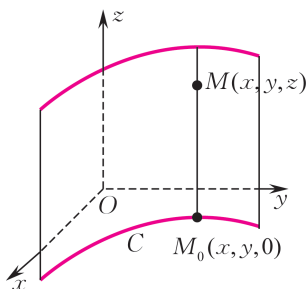


图 7-29

如果柱面的准线是 xOy 平面上的曲线 C , 其方程为

$$f(x, y) = 0, \quad (7-4-4)$$

柱面的母线平行于 z 轴, 则方程 $f(x, y) = 0$ 就是这一柱面的方程 (见图 7-29). 因为在此柱面上任取一点 $M(x, y, z)$, 过点 M 作直线平行于 z 轴, 此直线与 xOy 平面相交于点 $M_0(x, y, 0)$, 点 M_0 就是点 M 在 xOy 平面上的投影. 于是, 点 M_0 必落在准线上, 它在 xOy 平面上的坐标 (x, y) 必满足方程 $f(x, y) = 0$. 这个方程不含 z 的项, 所以点 M 的坐标 (x, y, z) 也满足方程 $f(x, y) = 0$.

因此, 在空间直角坐标系中, 方程 $f(x, y) = 0$ 所表示的图形就是母线平行于 z 轴的柱面.

同理可知, 只含 y, z 而不含 x 的方程 $\varphi(y, z) = 0$ 和只含 x, z 而不含 y 的方程 $\psi(x, z) = 0$, 分别表示母线平行于 x 轴和 y 轴的柱面.

注意到在上述三个柱面方程中都缺少一个变量, 缺少哪一个变量, 该柱面的母线就平行于哪一条坐标轴.

例如, 方程 $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x^2 = 2py$

分别表示母线平行于 z 轴的柱面, 其准线分别可取为 xOy 平面内的圆、椭圆、双曲线和抛物线, 所以我们分别称它们为**圆柱面**、**椭圆柱面**、**双曲柱面**和**抛物柱面** (见图 7-30). 因为它们的方程都是二次的, 所以统称为**二次柱面**.

二、旋转曲面

一平面曲线 C 绕着该平面内一定直线 l 旋转一周所形成的曲

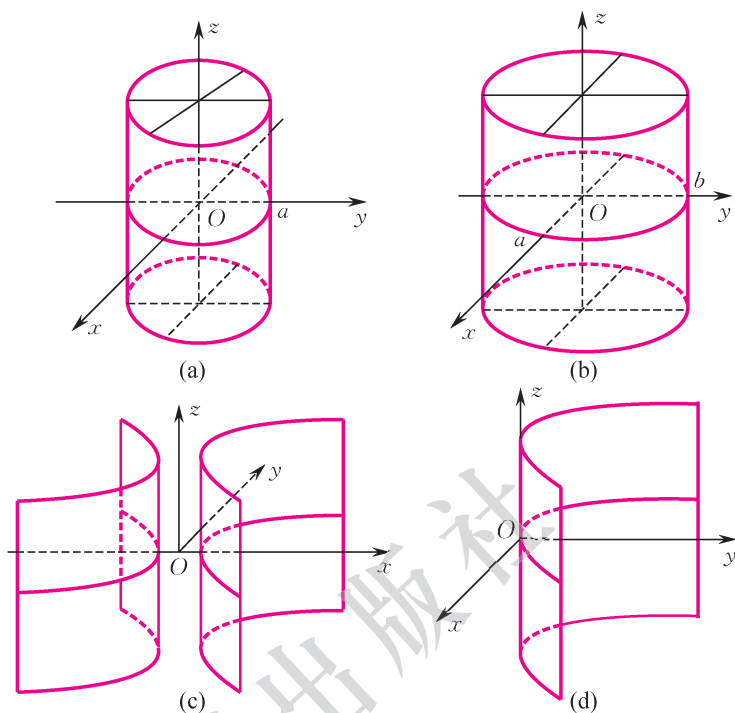


图 7-30

面,叫作**旋转曲面**.曲线 C 叫作旋转曲面的母线,直线 l 叫作**旋转曲面的轴**.

设在 yOz 平面上有一已知曲线 C ,它的方程为 $f(y, z) = 0$.将这曲线绕 z 轴旋转一周,就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面(见图 7-31).现在来求这个旋转曲面的方程.

在旋转曲面上任取一点 $M(x, y, z)$,设这点是母线 C 上的点 $M_1(0, y_1, z_1)$ 绕 z 轴旋转而得到的.点 M 与 M_1 的 z 坐标相同,且它们到 z 轴的距离相等,所以

$$\begin{cases} z = z_1, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = |y_1|. \end{cases}$$

因为点 M_1 在曲线 C 上,所以

$$f(y_1, z_1) = 0.$$

将上述关系代入这个方程中,得

$$f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (7-4-5)$$

因此,旋转曲面上任何点 M 的坐标 x, y, z 都满足方程(7-4-5).如果点 $M(x, y, z)$ 不在旋转曲面上,它的坐标就不满足方程(7-4-5).所以,方程(7-4-5)就是所求**旋转曲面的方程**.

从上述推导过程中可以发现:只要在曲线 C 的方程 $f(y, z) = 0$ 中,将变量 y 换成 $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$,便可得曲线 C 绕 z 轴旋转而形成的

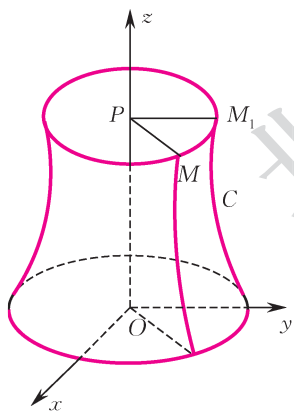


图 7-31

旋转曲面的方程为

$$f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

同理,如果曲线 C 绕 y 轴旋转一周,所得旋转曲面的方程为

$$f(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0. \quad (7-4-6)$$

对于其他坐标面上的曲线,绕该坐标面内任一坐标轴旋转所得到的旋转曲面的方程可用类似的方法求得.

特别地,一直线绕与它相交的一条定直线旋转一周就得到圆锥面,动直线与定直线的交点叫作**圆锥面的顶点**(见图 7-32).

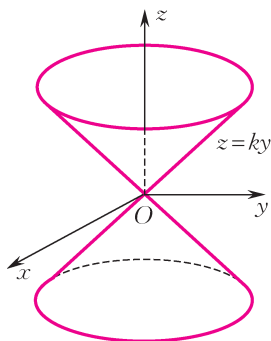


图 7-32

例 3 求 yOz 平面上的直线 $z = ky$ 绕 z 轴旋转一周所形成的旋转曲面的方程.

解 因为旋转轴为 z 轴,所以只要将方程 $z = ky$ 中的 y 改成 $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$,便得到旋转曲面——**圆锥面的方程**

$$z = \pm k \sqrt{x^2 + y^2}$$

或

$$z^2 = k^2(x^2 + y^2).$$

三、二次曲面举例

在空间直角坐标系中,方程 $F(x, y, z) = 0$ 一般代表曲面.若 $F(x, y, z) = 0$ 为一次方程,则它代表一次曲面,即平面;若 $F(x, y, z) = 0$ 为二次方程,则它所表示的曲面称为**二次曲面**.如何通过方程去了解它所表示的曲面的形状呢?我们可以利用坐标面或平行于坐标面的平面与曲面相截,通过考察其交线(截痕)的方法,从不同的角度去了解曲面的形状,然后加以综合,从而了解整个曲面的形状.这种方法叫作**截痕法**.下面我们用截痕法来研究几种二次曲面的形状.

1. 椭球面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (7-4-7)$$

所表示的曲面叫作**椭球面**.

由方程(7-4-7)可知

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$

即

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |z| \leq c.$$

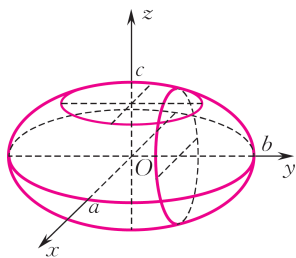


图 7-33

这说明, 椭球面(7-4-7) 完全包含在 $x = \pm a, y = \pm b, z = \pm c$ 这六个平面所围成的长方体内. a, b, c 叫作**椭球面的半轴**.

用三个坐标面截这一椭球面, 所得的截痕都是椭圆, 即

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

用平行于 xOy 坐标面的平面 $z = h (|h| \leq c)$ 截这一椭球面, 所得交线为椭圆, 即

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}$$

这一椭圆的半轴为 $\frac{a}{c} \sqrt{c^2 - h^2}$ 与 $\frac{b}{c} \sqrt{c^2 - h^2}$. 当 $|h|$ 由 0 逐渐增大到 c 时, 椭圆由大变小, 最后(当 $|h| = c$ 时) 缩成一个点(即顶点: $(0, 0, c), (0, 0, -c)$); 如果 $|h| > c$, 平面 $z = h$ 不与椭球面相交.

用平行于 yOz 坐标面或 zOx 坐标面的平面去截椭球面, 可得到类似的结果.

容易看出, 椭球面关于各坐标面、各坐标轴和坐标原点都是对称的. 综合以上讨论, 可知椭球面的图形如图 7-33 所示.

2. 双曲面

(1) 单叶双曲面.

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (7-4-8)$$

所表示的曲面叫作**单叶双曲面**.

下面讨论 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的形状:

用 xOy 坐标面($z = 0$) 截此曲面, 所得的截痕为中心在原点、两个半轴分别为 a, b 的椭圆, 即

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

用平行于坐标面 xOy 的平面 $z = z_1$ 截此曲面, 所得的截痕是中心在 z 轴上的椭圆, 即

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_1^2}{c^2}, \\ z = z_1, \end{cases}$$

它的两个半轴分别为 $\frac{a}{c} \sqrt{c^2 + z_1^2}$ 和 $\frac{b}{c} \sqrt{c^2 + z_1^2}$. 当 $|z_1|$ 由 0 逐渐增大时, 椭圆的两个半轴分别从 a, b 逐渐增大.

用 zOx 坐标面 ($y = 0$) 截此曲面, 所得的截痕为中心在原点的双曲线, 即

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0, \end{cases}$$

它的实轴在 x 轴上, 虚轴在 z 轴上.

用平行于 zOx 坐标面的平面 $y = y_1$ 截此曲面, 当 $y_1 \neq \pm b$ 时, 所得的截痕是中心在 y 轴上的双曲线, 即

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y_1^2}{b^2}, \\ y = y_1. \end{cases}$$

当 $y_1^2 < b^2$ 时, 双曲线的实轴平行于 x 轴, 虚轴平行于 z 轴;

当 $y_1^2 > b^2$ 时, 双曲线的实轴平行于 z 轴, 虚轴平行于 x 轴;

当 $y_1^2 = b^2$ 时, 所得的截痕为两条相交的直线

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = y_1. \end{cases}$$

类似地, 用 yOz 坐标面 ($x = 0$) 和平行于 yOz 坐标面的平面 $x = x_1$ 截此曲面, 当 $x_1 \neq \pm a$ 时, 所得的截痕也是双曲线; 当 $x_1 = \pm a$ 时, 所得截痕为两条相交的直线.

因此, 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的形状如图 7-34 所示.

(2) 双叶双曲面.

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (7-4-9)$$

所表示的曲面叫作**双叶双曲面**.

同样可用截痕法讨论, 得双叶曲面形状如图 7-35 所示.

3. 抛物面

(1) 椭圆抛物面.

方程

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (7-4-10)$$

所表示的曲面叫作**椭圆抛物面**(见图 7-36, 其中 $p > 0, q > 0$).

(2) 双曲抛物面.

方程

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (7-4-11)$$

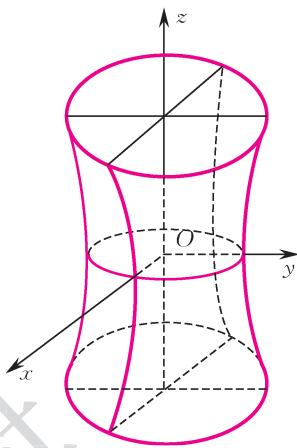


图 7-34

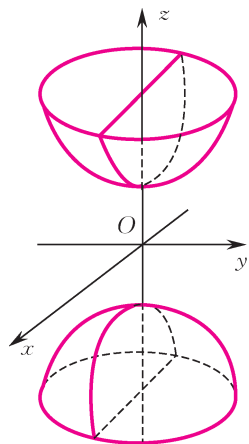


图 7-35

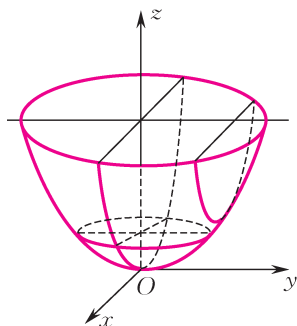


图 7-36

所表示的曲面叫作**双曲抛物面**或**鞍形曲面**(见图 7-37, 其中 $p > 0$, $q > 0$).

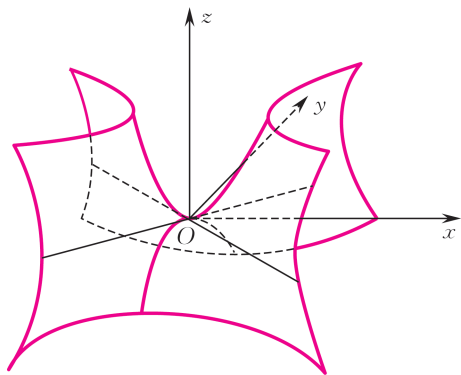


图 7-37

四、空间曲线

1. 空间曲线的一般方程

空间曲线可以看作两个曲面的交线. 设两曲面方程分别为 $F_1(x, y, z) = 0$ 和 $F_2(x, y, z) = 0$, 则它们的交线 C 上的点同时在这两个曲面上, 其坐标必同时满足这两个方程; 反之, 坐标同时满足这两个方程的点, 也一定在这两曲面的交线 C 上. 因此, 联立方程组

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (7-4-12)$$

即为空间曲线 C 的方程, 称为**空间曲线的一般方程**.

例如, 方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ z = 1 \end{cases}$$

表示平面 $z = 1$ 与以原点为球心、 $\sqrt{2}$ 为半径的球面的交线. 如果将 $z = 1$ 代入第一个方程中, 得 $x^2 + y^2 = 1$, 所以这一曲线是平面 $z = 1$ 上以 $(0, 0, 1)$ 为圆心的单位圆(见图 7-38).

方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - ax = 0, \\ z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \end{cases} \quad (a > 0)$$

表示球心为原点、半径为 a 的上半球面与圆柱面 $x^2 + y^2 - ax = 0$, 即 $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ 的交线(见图 7-39).

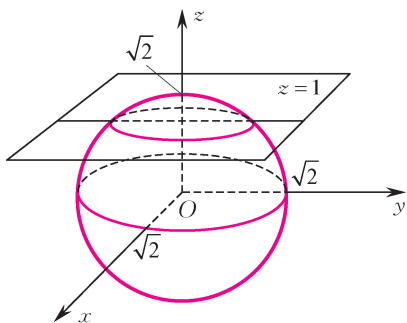


图 7-38

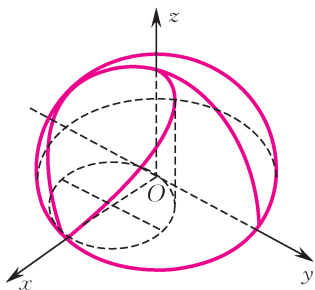


图 7-39

2. 空间曲线的参数方程

在上一节中,我们介绍了空间直线的参数方程.对于空间曲线,除了上面的一般方程外,也可以用参数方程表示,即将空间曲线 C 上的点的坐标 x, y, z 用同一参变量 t 的函数

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \quad (t_1 \leq t \leq t_2) \quad (7-4-13)$$

表示.当给定 t 的一个值时,由式(7-4-13)得到曲线 C 上的一个点的坐标;当 t 在区间 $[t_1, t_2]$ 上变动时,就可得到曲线 C 上的所有点.方程组(7-4-13)叫作**空间曲线的参数方程**.

例 4 设空间一动点 M 在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转,同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升(其中 ω, v 都是常数),则动点 M 的轨迹叫作**螺旋线**.试求螺旋线的参数方程.

解 取时间 t 为参数,设运动开始时($t=0$)动点的位置在 $M_0(a, 0, 0)$,经过时间 t ,动点的位置在 $M(x, y, z)$ (见图 7-40),点 M 在 xOy 平面上的投影为 $P(x, y, 0)$.由于 $\angle M_0OP = \omega t$,于是有

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t, \\ y = a \sin \omega t. \end{cases}$$

因动点同时以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升,有

$$z = PM = vt.$$

因此,螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t, \\ y = a \sin \omega t, \\ z = vt. \end{cases}$$

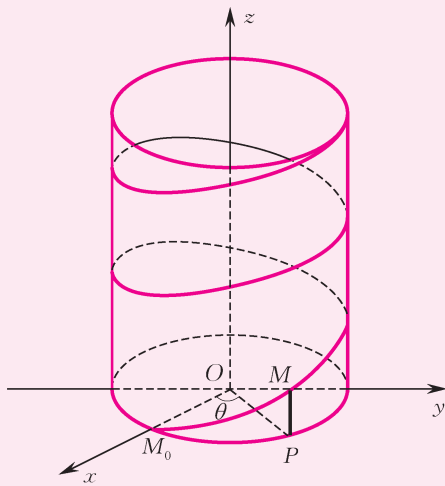


图 7-40

如果令 $\theta = \omega t$, 以 θ 为参数, 则螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b \theta, \end{cases}$$

其中 $b = \frac{v}{\omega}$.

3. 空间曲线在坐标面上的投影

空间曲线 C 上所有点在平面 Π 上的投影所构成的曲线称为 **曲线 C 在平面 Π 上的投影**.

设空间曲线 C 的方程为

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (7-4-14)$$

下面来求它在 xOy 坐标面上的投影曲线方程.

作曲线 C 在 xOy 坐标面上的投影时, 要通过曲线 C 上每一点作 xOy 坐标面上的垂线, 这相当于作一个母线平行于 z 轴, 且通过曲线 C 的柱面, 这柱面与 xOy 坐标面的交线就是曲线 C 在 xOy 坐标面上的投影曲线. 所以, 关键在于求这个柱面的方程. 从方程 (7-4-14) 中消去变量 z , 得到

$$F(x, y) = 0. \quad (7-4-15)$$

方程 (7-4-15) 表示一个母线平行于 z 轴的柱面, 此柱面必定包含曲线 C , 所以它是一个以曲线 C 为准线、母线平行于 z 轴的柱面, 叫作曲线 C 关于 xOy 坐标面的 **投影柱面**. 它与 xOy 坐标面的交线就是空间曲线 C 在 xOy 坐标面上的 **投影曲线**, 简称 **投影**. 曲线 C 在 xOy 坐标面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad (7-4-16)$$

其中 $F(x, y) = 0$ 可从方程 (7-4-14) 中消去 z 而得到.

同理, 分别从方程 (7-4-14) 中消去 x 与 y , 得到 $G(y, z) = 0$ 和 $H(x, z) = 0$, 则曲线 C 在 yOz 和 zOx 坐标面上的投影曲线方程分别为

$$\begin{cases} G(y, z) = 0, \\ x = 0 \end{cases} \quad (7-4-17)$$

和

$$\begin{cases} H(x, z) = 0, \\ y = 0. \end{cases} \quad (7-4-18)$$

例 5 已知两球面的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (7-4-19)$$

和 $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1, \quad (7-4-20)$

求它们的交线在 xOy 坐标面上的投影的方程.

解 先求包含两球面的交线, 而母线平行于 z 轴的柱面方程. 要由方程(7-4-19) 和方程(7-4-20) 消去 z , 为此可从方程(7-4-19) 中减去方程(7-4-20) 并化简, 得到

$$y + z = 1.$$

再以 $z = 1 - y$ 代入方程(7-4-19) 或方程(7-4-20), 即得所求的柱面方程为

$$x^2 + 2y^2 - 2y = 0.$$

于是, 两球面的交线在 xOy 坐标面上的投影的方程为

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$



习 题 7-4

1. 建立以点 $(1, 3, -2)$ 为中心, 且通过坐标原点的球面方程.
2. 一动点离点 $(2, 0, -3)$ 的距离与离点 $(4, -6, 6)$ 的距离之比为 3, 求此动点的轨迹方程.
3. 指出下列方程所表示的是什么曲面, 并画出其图形:

(1) $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ (a 为正常数); (2) $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;

(3) $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$; (4) $y^2 - z = 0$;

(5) $x^2 - y^2 = 0$; (6) $x^2 + y^2 = 0$.

4. 指出下列方程表示怎样的曲面, 并作出图形:

(1) $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$; (2) $36x^2 + 9y^2 - 4z = 36$;

(3) $x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$; (4) $x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 11$;

(5) $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{9} = 0$.

5. 作出下列曲面所围成的立体的图形:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $z = 0, z = \frac{a}{2}$ ($a > 0$ 为常数);

(2) $x + y + z = 4, x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$ 及 $z = 0$;

(3) $z = 4 - x^2, x = 0, y = 0, z = 0$ 及 $2x + y = 4$;

(4) $z = 6 - (x^2 + y^2), x = 0, y = 0, z = 0$ 及 $x + y = 1$.

6. 求下列曲面和直线的交点:

(1) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$ 与 $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z+2}{4}$;

(2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ 与 $\frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{4}$.

7. 设有一圆,它的中心在 z 轴上、半径为 3,且位于距离 xOy 平面 5 个单位的平面上,试建立这个圆的方程.

8. 试考察曲面 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$ 被下列各平面所截得的截痕的形状,并写出其方程:

(1) 平面 $x = 2$;

(2) 平面 $y = 0$;

(3) 平面 $y = 5$;

(4) 平面 $z = 2$.

9. 求曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = z^2$ 在 xOy 平面上的投影曲线.

10. 建立曲线 $x^2 + y^2 = z, z = x + 1$ 在 xOy 平面上的投影方程.

习 题 七



1. 填空题:

(1) 过 $(0, 1, 0)$ 且与平面 $x - y + z = 1$ 平行的平面方程为_____.

(2) 点 $(2, 1, 0)$ 到平面 $3x + 4y + 5z = 0$ 的距离 $d =$ _____.

(3) 原点关于平面 $6x + 2y - 9z + 121 = 0$ 的对称点是_____.

(4) 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线方程是_____.

(5) 将 zOx 平面上的曲线 $x^2 + z^2 = 1$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为_____.

2. 选择题:

(1) 设三向量 a, b, c 满足关系式 $a + b + c = 0$, 则 $a \times b =$ ().

A. $c \times b$

B. $b \times c$

C. $a \times c$

D. $b \times a$

(2) 两平行平面 $\pi_1: 19x - 4y + 8z + 21 = 0$ 与 $\pi_2: 19x - 4y + 8z + 42 = 0$ 之间的距离为 ().

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. 2

D. 21

(3) 直线 $L_1: \begin{cases} x + 2y - z = 7, \\ -2x + y + z = 7 \end{cases}$ 与 $L_2: \begin{cases} 3x + 6y - 3z = 8, \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$ 之间的关系是 ().

A. $L_1 \perp L_2$

B. $L_1 // L_2$

C. L_1 与 L_2 相交但不一定垂直

D. L_1 与 L_2 为异面直线

(4) 方程 $(z - a)^2 = x^2 + y^2$ 表示 ().

A. zOx 平面上的曲线 $(z - a)^2 = x^2$ 绕 y 轴旋转所得的曲面

B. zOx 平面上的直线 $z - a = x$ 绕 z 轴旋转所得的曲面

C. yOz 平面上的直线 $z - a = y$ 绕 y 轴旋转所得的曲面

D. yOz 平面上的曲线 $(z - a)^2 = y^2$ 绕 x 轴旋转所得的曲面

(5) 下列方程所对应的曲面为双曲抛物面的是 ().

A. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

B. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 1$

C. $x^2 + 2y^2 - 3z = 0$

D. $x^2 - 2y^2 - 3z = 0$

3. 已知四点 $A(1, -2, 3), B(4, -4, -3), C(2, 4, 3)$ 和 $D(8, 6, 6)$, 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{CD}$ 上的投影.

4. 若向量 $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ 垂直于向量 $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$, 向量 $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ 垂直于向量 $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, 求 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夹角.
5. 设 $\mathbf{a} = (-2, 7, 6)$, $\mathbf{b} = (4, -3, -8)$, 证明: 以 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 为邻边的平行四边形的两条对角线互相垂直.
6. 求垂直于向量 $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ 和 $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 的单位向量, 并求上述两向量夹角的正弦.
7. 一平行四边形以向量 $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$ 和 $\mathbf{b} = (1, -2, 1)$ 为邻边, 求其对角线夹角的正弦.
8. 已知三点 $A(2, -1, 5)$, $B(0, 3, -2)$, $C(-2, 3, 1)$, 点 M, N, P 分别是 AB, BC, CA 的中点, 证明: $\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC})$.

9. 已知 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 试证明:

(1) 三向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面的充要条件是
$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0;$$

(2) 若三向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面, 则 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$.

10. 设一四面体的顶点为 $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 2)$ 和 $(3, -1, 2)$, 求该四面体的表面积.
11. 设一四面体的顶点为 $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 3)$, $C(3, 5, 4)$ 及 $D(5, 5, 5)$, 求该四面体的体积.
12. 已知三点 $A(2, 4, 1)$, $B(3, 7, 5)$, $C(4, 10, 9)$, 证明: 此三点共线.
13. 一动点和 $M_0(1, 1, 1)$ 连成的向量与向量 $\mathbf{n} = (2, 3, -4)$ 垂直, 求动点的轨迹方程.
14. 求满足下列各组条件的直线方程:
- (1) 经过点 $(2, -3, 4)$, 且与平面 $3x - y + 2z - 4 = 0$ 垂直;
- (2) 经过点 $(0, 2, 4)$, 且与两平面 $x + 2z = 1$ 和 $y - 3z = 2$ 平行;
- (3) 经过点 $(-1, 2, 1)$, 且与直线 $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{3}$ 平行.
15. 试确定出下列各题中直线与平面间的关系:
- (1) $\frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z}{3}$ 和 $4x - 2y - 2z = 3$;
- (2) $\frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{7}$ 和 $3x - 2y + 7z = 8$;
- (3) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4}$ 和 $x + y + z = 3$.
16. 求过点 $(1, -2, 1)$, 且垂直于直线 $\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0, \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ 的平面方程.
17. 求过点 $M(1, -2, 3)$ 和两平面 $2x - 3y + z = 3$, $x + 3y + 2z + 1 = 0$ 的交线的平面方程.
18. 求点 $(-1, 2, 0)$ 在平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 上的投影.
19. 求点 $(3, -1, 2)$ 到直线 $\begin{cases} x = 0, \\ y = z - 2 \end{cases}$ 的距离.
20. 求直线 $L: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{3}$ 在平面 $\pi: 2x - y + 5z - 3 = 0$ 上的投影直线方程.
21. 设有两直线

$$L_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}, \quad L_2: \frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2},$$

求平行于 L_1, L_2 且与它们等距离的平面方程.

22. 曲线 L 是旋转曲面与平面的交线 $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ x + z = 1. \end{cases}$

- (1) 求 L 在 xOy 平面上的投影曲线;
- (2) 求经过曲线 L , 母线平行于 z 轴的柱面.

第八章

多元函数微分学

在上册中,我们讨论的函数只有一个自变量,即所谓的一元函数.然而,在实际问题中常常会有这样的问题,一个变量依赖于两个或更多的变量.这就是我们将要学习的多元函数.本章将在一元函数微分学的基础上,讨论多元函数的微分法及其应用.本章的讨论中将以二元函数为主,有关二元函数的结论和研究方法,一般可以推广到多元函数.



第一节 多元函数的基本概念

讨论一元函数时,经常用到邻域和区间的概念.在多元函数讨论中,首先需要把邻域和区间的概念加以推广.

一、平面点集

设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点, δ 是某一正数. 与点 $P_0(x_0, y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x, y)$ 的全体,称为点 P_0 的 δ 邻域,记为 $U(P_0, \delta)$, 即

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\},$$

其中 δ 称为邻域的半径. 也就是说,

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}.$$

在几何上, $U(P_0, \delta)$ 就是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为中心、 $\delta > 0$ 为半径的圆内部的点 $P(x, y)$ 的全体.

此外,我们记点 P_0 的 **去心 δ 邻域** 为 $\dot{U}(P_0, \delta)$, 定义为

$$\dot{U}(P_0, \delta) = \{P \mid 0 < |PP_0| < \delta\}.$$

如果不需要特别强调邻域半径 δ , 则用 $U(P_0)$ 表示 P_0 的某邻域, 用 $\dot{U}(P_0)$ 表示 P_0 的某去心邻域.

设 E 是平面上的一个点集, P 是平面上的一个点. 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$ 使 $U(P) \subset E$, 则称 P 为 E 的 **内点** (见图 8-1).

如果点集 E 的点都是内点, 则称 E 为 **开集**.

如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点, 也有不属于 E 的点 (点 P 可以属于 E , 也可以不属于 E), 则称 P 为 E 的 **边界点** (见图 8-2). E 的边界点的全体称为 E 的 **边界**. 如果对于平面点集 D 内任何两点, 都可用完全属于 D 的折线连接起来, 则称点集 D 是 **连通集**; 否则, 称 D 为 **非连通集**.

如图 8-3 所示, 平面 $\mathbf{R}^2$ 上的点集 D_1, D_2 是连通集; D_3 由两个部分组成, 是非连通集.

连通的开集称为 **区域** 或 **开区域**. 开区域连同它的边界一起, 称为 **闭区域**.

对于点集 E , 如果存在正数 K , 使得

$$E \subset U(O, K),$$

其中 O 为坐标原点, 则称 E 为 **有界点集**; 否则, 称 E 为 **无界点集**.

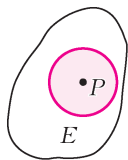


图 8-1

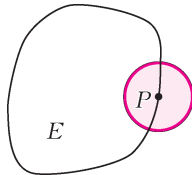


图 8-2

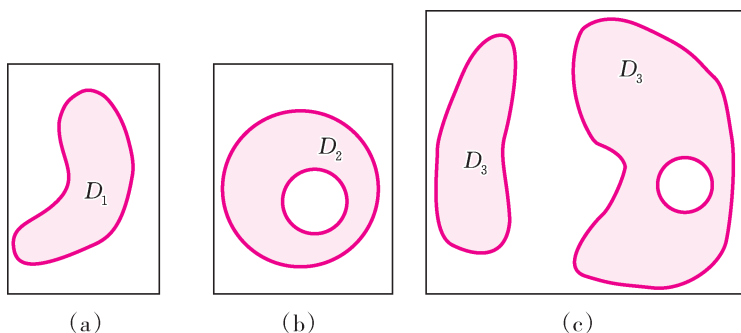


图 8-3

例如, $\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ 是有界闭区域, $\{(x, y) \mid x + y > 0\}$ 是无界开区域.

设 E 是平面上的一个点集, P 是平面上的一个点, 如果点 P 的任一邻域内总有无限多个点属于点集 E , 则称 P 为 E 的聚点.

显然, E 的内点一定是 E 的聚点. 此外, E 的边界点也可能是 E 的聚点. 例如, 设

$$E_1 = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\},$$

那么点 $(0, 0)$ 既是 E_1 的边界点, 又是 E_1 的聚点, 但这个聚点不属于 E_1 . 又如, 圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上的每个点既是 E_1 的边界点, 也是 E_1 的聚点, 而这些聚点都属于 E_1 . 所以, 点集 E 的聚点可以属于 E , 也可以不属于 E .

二、 n 维空间

我们知道, 数轴上的点和实数之间有一一对应关系, 即不但数轴上的每一点 P 确定唯一的一个实数 x , 而且倒转来, 每一个实数 x 显然也可确定唯一的一个点 P . 当引入平面直角坐标系后, 平面上的点和二元有序数组之间有一一对应关系, 即平面上的每一点 P 唯一确定一个二元有序数组 (x, y) , 并且每一个二元有序数组 (x, y) 也确定平面上唯一的一个点 P . 类似地, 当引入空间直角坐标系之后, 我们就构建了空间点和三元有序数组之间的一一对应关系. 如果称数轴上的点的全体为一维空间, 平面上的点的全体为二维空间, 空间中的点的全体为三维空间的话, 那么我们就可以用数或数组之间的关系来描述空间点之间的关系. 下面我们引入 n 维空间的概念.

设 n 为取定的一个正整数, 我们称 n 元数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的全体为 n 维空间, 而每个 n 元数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为 n 维空间中的一个点, 数 x_i 称为该点的第 i 个坐标, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 也称为该点的坐标. n 维空间记为 $\mathbf{R}^n$.

n 维空间中两点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 及 $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 间的距离规定为

$$|PQ| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2},$$

当 n 分别为 1, 2, 3 时, 上式便是解析几何中关于数轴、平面、空间的两点间的距离.

前面就平面点集所陈述的一系列概念, 可推广到 n 维空间中去. 例如, 设 $P_0 \in \mathbf{R}^n$, δ 是某一正数, 则 n 维空间内的点集

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta; P, P_0 \in \mathbf{R}^n\}$$

定义为 P_0 的 δ 邻域. 以邻域为基础, 可定义去心邻域、内点、边界点、区域、聚点等一系列概念.

三、多元函数定义

在许多实际问题和自然现象中, 经常会遇到多个变量之间的依赖关系, 如下所举:

例 1

锥体的体积 V 与锥体的底面积 A 和高 h 两个量之间存在如下关系:

$$V = \frac{1}{3}Ah.$$

例 2

物体运动的动能 W 与物体的质量 m 和运动的速度 v 之间的对应规律为

$$W = \frac{1}{2}mv^2.$$

以上都是二元函数的实例, 抽去它们的物理、几何等特性, 仅保留数量关系的共性, 可得到二元函数的定义.

定义 1

设 D 是平面上的一个非空点集. 如果对于每个点 $P(x, y) \in D$, 变量 z 按照一定法则总有唯一确定的值与它对应, 则称 z 是变量 x, y 的 **二元函数** (或点 P 的函数), 记为

$$z = f(x, y)$$

或

$$z = f(P).$$

点集 D 称为该函数的 **定义域**, x, y 称为 **自变量**, z 称为 **因变量**. 数集

$$\{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

称为该函数的 **值域**.

z 是 x, y 的函数, 也可记为 $z = z(x, y)$, $z = \phi(x, y)$ 等.

类似地, 可将二元函数的概念推广到 n 元函数.

定义 2

设 D 是 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集, $\mathbf{R}$ 是实数集. 如果对于每个点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$, 按照一定法则总有唯一确定的 $y \in \mathbf{R}$ 与它对应, 则称 y 是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 **n 元函数**, 记为

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

或

$$y = f(P).$$

当 $n = 1$ 时, n 元函数就是一元函数; 当 $n \geq 2$ 时, n 元函数统称为多元函数.

对于多元函数的定义域, 与一元函数类似, 我们约定: 在讨论用数学公式表达的多元函数 $y = f(P)$ 的定义域时, 就以使这个数学表达式有意义的自变量或点 P 所确定的点集为这个函数的定义域.

例 3 试确定二元函数 $z = \ln(x + y)$ 的定义域.

解 因为要使表达式 $\ln(x + y)$ 有意义, 则对数的真数必须大于零, 所以二元函数的定义域是

$$D = \{(x, y) \mid x + y > 0\},$$

即定义域 D 是直线 $x + y = 0$ 上方的无界区域, 如图 8-4 所示.

例 4 试确定函数 $z = \arcsin(x^2 + y^2)$ 的定义域.

解 由反正弦函数的定义可知, 此函数的定义域是

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$$

即定义域 D 是以原点为中心、1 为半径的圆的内部和边界. 这是一个有界闭区域, 如图 8-5 所示.

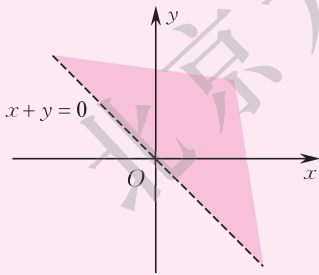


图 8-4

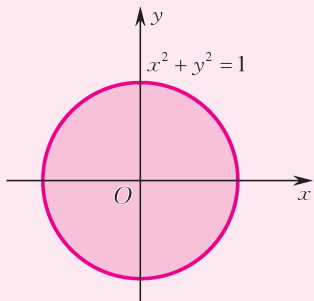


图 8-5

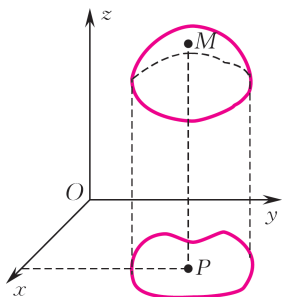


图 8-6

设函数 $z = f(x, y)$ 的定义域为 D . 对任意取定的点 $P(x, y) \in D$, 对应的函数值为 $z = f(x, y)$. 这样以 x 为横坐标、 y 为纵坐标、 $z = f(x, y)$ 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x, y, z)$. 当 (x, y) 遍取 D 上的一切点时, 得到一个空间点集 $\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$, 这个点集在几何上称为二元函数 $z = f(x, y)$ 的图形或图像 (见图 8-6). 通常, 我们也说二元函数的图形是一张空间曲面.

例如, 线性函数

$$z = ax + by + c$$

的图形是一平面; 函数 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ($a > 0$) 的图形就是以原点 O 为球心、 a 为半径的上半球面, 而函数 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ($a > 0$) 的图形就是下半球面. 将两者结合起来, 从代数的角度, 则有方程 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$), 因此该方程所确定的图形为以原点为球心、 a 为半径的球面. 一般地, 我们称该方程为 **球面方程**.

四、多元复合函数及隐函数

与一元函数的情形类似, 多元函数也有函数复合运算, 但情况复杂得多. 例如, $u = f(xy, x^2 + y^2, x - y)$ 是由 $u = f(v_1, v_2, v_3)$ 与三个二元函数 $v_1 = xy, v_2 = x^2 + y^2, v_3 = x - y$ 复合而成的二元函数, 也说成 u 是以 v_1, v_2, v_3 为中间变量, 以 x, y 为自变量的 **复合函数**.

如果 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 能表示为一个式子, n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 就是函数的方程表示, 这样的函数叫作 **显函数**. 如果方程 $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$ 能确定 u 是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的函数, 这也是函数的方程表示, 这时我们把 u 叫作 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 **隐函数**. 例如, $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 是显函数, 而 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 所确定的 x, y 的函数 z ($z > 0$ 或 $z \leq 0$) 是 x, y 的隐函数.



习 题 8-1

1. 判断下列平面点集哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集, 并分别指出它们的聚点集和边界:

- (1) $\{(x, y) \mid x \neq 0\}$;
- (2) $\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$;
- (3) $\{(x, y) \mid y < x^2\}$;
- (4) $\{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

2. 已知 $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y}$, 试求 $f(tx, ty)$.

3. 已知 $f(u, v, w) = u^w + w^{u+v}$, 试求 $f(x+y, x-y, xy)$.

4. 求下列各函数的定义域:

- (1) $z = \ln(y^2 - 2x + 1)$;
- (2) $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$;

$$(3) z = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)};$$

$$(4) u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}};$$

$$(5) z = \sqrt{x-\sqrt{y}};$$

$$(6) z = \ln(y-x) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}};$$

$$(7) u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

第二节 多元函数的极限与连续性

一、多元函数的极限

为叙述方便,我们总是用 $\dot{U}(P_0)$ 表示点 P_0 的某个去心邻域.

我们先讨论二元函数 $z = f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, 即 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ 时的极限.

在给出二元函数的极限定义之前,我们先作两点说明:首先, $P \rightarrow P_0$ 表示动点 P 以任何方式趋向于点 P_0 , 也就是说点 P 与 P_0 之间的距离趋于零,即

$$|PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \rightarrow 0,$$

而不管动点 P 沿何种路径趋向于点 P_0 ;其次,这里只需考虑使函数 $z = f(x, y)$ 有定义的点 P , 而不是 P_0 的去心邻域 $\dot{U}(P_0)$ 内的所有点. 因为 P_0 总是被假设为聚点, 所以 P 趋向于 P_0 总是有意义的.

与一元函数的极限概念相仿,如果在 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ 的过程中,对应的函数值 $f(x, y)$ 无限接近于一个确定的常数 A , 我们就说 A 是函数 $z = f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的极限. 用“ $\epsilon - \delta$ ”方式描述如下:

定义 1 设函数 $z = f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点. 如果存在常数 A , 对任意给定的正数 ϵ (无论多么小), 总存在正数 δ , 使得当点 $P(x, y) \in D \cap \dot{U}(P_0, \delta)$ 时, 总有

$$|f(x, y) - A| < \epsilon$$

成立, 则称 A 为函数 $z = f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ (或 $P \rightarrow P_0$) 时的**极限**, 记作

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$$

或

$$f(x, y) \rightarrow A \quad (\rho \rightarrow 0),$$

其中 $\rho = |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

这个定义与一元函数的极限定义几乎是一样的, 所不同的是在平面上 P 以任何方式趋于 P_0 . 在一维空间中, $x \rightarrow x_0$ 只能从它的左、右两边趋近于 x_0 , 所以在多维空间中, $P \rightarrow P_0$ 更具有“任意性”, 这也是考虑多元函数的极限时需要特别注意的问题. 为了区别于一元函数的极限, 我们把二元函数的极限称为**二重极限**.

由于多元函数的极限定义与一元函数的极限定义本质上是一样的, 因此一元函数的极限的一些性质和运算法则对于多元函数也是成立的. 例如, 如果极限存在, 其极限值是唯一的; 无穷小量 (在 $P \rightarrow P_0$ 的极限过程中, 极限为零的量 $u = f(P)$) 与有界函数的乘积仍是无穷小量; 若两个函数 f, g 的极限分别为 a, b , 则 $f \pm g, fg, \frac{f}{g}$ 的极限分别等于 $a \pm b, ab, \frac{a}{b} (b \neq 0)$; 等等. 这为我们计算二重极限带来了许多方便.

例 1 求下列二重极限:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{\sin xy}.$$

解 (1) 由于 $\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$, 所以 $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 为有界函数, 而 $x \rightarrow 0$, 因此有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

(2) 由于

$$\frac{2-\sqrt{xy+4}}{\sin xy} = -\frac{1}{2+\sqrt{xy+4}} \cdot \frac{xy}{\sin xy},$$

若将 xy 看成一个整体变量, 则当 $(x, y) \rightarrow (0, 1)$ 时, $xy \rightarrow 0$, 因此

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{\sin xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} -\frac{1}{2+\sqrt{xy+4}} \cdot \frac{xy}{\sin xy} = -\frac{1}{4}.$$

这里必须**强调**的是: 所谓极限存在, 是指点 $P(x, y)$ 沿任意路径趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 函数 $f(x, y)$ 都趋于常数 A . 只有这样, 才能说函数 $f(x, y)$ 当 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ 时的极限为 A . 如果点 $P(x, y)$ 沿某些特殊的路径趋于点 $P_0(x_0, y_0)$, 即使函数趋于某一个常数, 我们还不能断言函数的极限存在. 我们用下例来说明这种情形.

例 2 考察函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, 极限是否存在.

解 这个函数在原点 $O(0, 0)$ 的任何邻域内都有定义. 当点 $P(x, y)$ 沿 x 轴趋于点 $(0, 0)$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0;$$

又当点 $P(x, y)$ 沿 y 轴趋于点 $(0, 0)$ 时,

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0;$$

但当 $P(x, y)$ 沿 $y = kx$ 趋于点 $(0, 0)$ 时,

$$\lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

显然它随 k 值的不同而改变. 故当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $f(x, y)$ 的极限不存在.

在上例中, 当 $P(x, y)$ 沿不同的路径趋于点 $(0, 0)$ 时, 二元函数有不同的极限. 这一方法常用来证明二元函数极限不存在.

虽然多元函数与一元函数的极限概念本质上是一样的, 但从上述例题可见, 讨论多元函数(如二元函数)的极限比讨论一元函数的极限要复杂得多. 考察一元函数 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 只要考察其左、右极限是否存在且相等, 即可断定其极限是否存在. 而考察二元函数当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的极限, 要在二维空间中考察点 (x, y) 以任意方向和任意方式趋向于 (x_0, y_0) 的极限是否存在且相等. 这是多元函数的极限与一元函数的极限的重要区别.

我们可以将二元函数 $f(x, y)$ 关于极限过程 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 的极限定义推广到其他极限过程中去, 如极限过程 $(x, y) \rightarrow (\pm\infty, y_0)$, $(x, y) \rightarrow (x_0, \pm\infty)$, $(x, y) \rightarrow (\pm\infty, \pm\infty)$ 和 $(x, y) \rightarrow (\infty, \infty)$ 等, 这里不再赘述. 另外, 关于二元函数极限的定义、结论等也都可推广到一般 n 元函数上去, 这里也不再列举.

二、多元函数的连续性

有了多元函数的极限, 与一元函数连续的定义一样, 我们可以得到多元函数连续的定义.

定义 2 设二元函数 $f(P) = f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点, 且 $P_0 \in D$, 如果

$$\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ (P \in D)}} f(P) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) = f(P_0),$$

则称二元函数 $f(P)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处**连续**.

设 D 为开区域(闭区域), 如果函数 $f(P)$ 在 D 上各点处都连续, 就称函数 $f(P)$ 在 D 上**连续**; 若 $f(P)$ 在点 P_0 的任何去心邻域内存在有定义的点, 而 $f(P)$ 在点 P_0 处不连续, 则称 P_0 为函数 $f(P)$ 的**间断点**. 如例 2 所示, 因为 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时的极限不存在, 所以点 $(0, 0)$ 为 $f(x, y)$ 的间断点. 二元函数的间断点也可以充满一条曲线, 例如

$$z = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$$

在圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上没有定义, 但在平面上其他点处均有定义, 所以该圆周上的点都是间断点. 与闭区间上一元连续函数的性质相似, 在有界闭区域上多元函数也有如下性质:

性质 1 (最大最小值定理) 在有界闭区域 D 上的多元连续函数, 在 D 上至少取得它的最大值和最小值各一次, 即在 D 上至少有一点 P_1 和一点 P_2 , 使得 $f(P_1)$ 为最大值, $f(P_2)$ 为最小值.

性质 2 (介值定理) 在有界闭区域 D 上的多元连续函数, 如果在 D 上取得两个不同的函数值, 则它在 D 上可取得介于这两个值之间的任何值. 特别地, 如果 u 是函数在 D 上的最小值和最大值之间的一个数, 则在 D 上至少存在一点 P , 使 $f(P) = u$.

性质 3 (有界性定理) 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必有界.

前面已指出: 一元函数中关于极限的运算法则对多元函数仍适用. 据极限运算法则, 易证多元连续函数的和、差、积、商(分母不为零处)均为连续函数. 可以证明, **多元连续函数的复合函数也是连续函数**.

以 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为变量的基本初等函数, 经过有限次的四则运算和复合运算, 且可用一个式子表示的函数称为**多元初等函数**.

由基本初等函数的连续性, 我们可以得到下列结论:

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的, 所谓**定义区域**是指包含在定义域内的区域.

由多元初等函数的连续性, 如果它在点 P_0 有极限, 且点 P_0 在其定义区域内, 则极限值就等于函数在该点的函数值, 即

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

例 3 求 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{1 - xy}{x^2 + y^2}$.

解 因为函数 $f(x, y) = \frac{1 - xy}{x^2 + y^2}$ 在 $D = \{(x, y) \mid x \neq 0, y \neq 0\}$ 内连续, 又 $P_0(0, 1) \in D$, 所以

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{1 - xy}{x^2 + y^2} = f(0, 1) = 1.$$



习 题 8-2

1. 求下列各极限:

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy};$$

$$(5) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{x};$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 1}} \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right)^{2(x^2 + y^2)};$$

$$(4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy + 1} - 1};$$

$$(6) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2 + y^2}}.$$

2. 判断下列函数在原点 $O(0,0)$ 处是否连续:

$$(1) z = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$(2) z = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^3 + y^3}, & x^3 + y^3 \neq 0, \\ 0, & x^3 + y^3 = 0; \end{cases}$$

$$(3) z = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

3. 指出下列函数在何处间断:

$$(1) f(x, y) = \frac{x - y^2}{x^3 + y^3};$$

$$(2) f(x, y) = \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x};$$

$$(3) f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2).$$

第三节 偏 导 数

一、偏导数的定义及其算法

在研究一元函数时,我们从实际问题中的变化率引入了导数的概念.对于多元函数,同样需要讨论一些变化率问题.在这里,我们首先考虑多元函数关于其中一个自变量的变化率.以二元函数 $z = f(x, y)$ 为例,如果只有自变量 x 变化,而自变量 y 固定(看作常量),这时它就是 x 的一元函数,这函数对 x 的导数就称为二元函数 z 对 x 的偏导数.于是,有如下定义:

定义 1 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义, 当 y 固定在 y_0 , 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时, 相应的函数有增量

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (8-3-1)$$

存在, 则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的**偏导数**, 记作 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, z_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ 或 $f'_x(x_0, y_0)$. (这里符号 ∂ 为希腊字母 Δ (小写 δ) 的古典写法.)

极限(8-3-1)可表示为

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \quad (8-3-2)$$

类似地, 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}, \quad (8-3-3)$$

记作 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, z_y \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ 或 $f'_y(x_0, y_0)$.

如果函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内每一点 (x, y) 处对 x 的偏导数都存在, 那么这个偏导数就是 x, y 的函数, 称为函数 $z = f(x, y)$

对自变量 x 的**偏导函数**, 记作 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z_x$ 或 $f'_x(x, y)$.

类似地, 可以定义函数 $z = f(x, y)$ 对自变量 y 的偏导函数, 记作 $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, z_y$ 或 $f'_y(x, y)$.

今后在不至于混淆的情况下, 偏导函数简称为**偏导数**.

一般地, n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$

处对 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ (或 $f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$) 是极限

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}. \quad (8-3-4)$$

由偏导数的定义知, n 元函数的偏导数就是 n 元函数分别关于每个自变量的导数. 若这些偏导数存在, 则共有 n 个偏导数. 因此, 计算多元函数的偏导数并不是新的问题, 只需要将 n 个自变量中某一个看成变量, 其余 $n-1$ 个自变量全视为常量, 用一元函数的求导方法即可. 下面举例说明.

例 1 求 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点 $(1, 2)$ 处的偏导数.

解 把 y 看成常量, 利用一元函数求导法则, 关于 x 求导数, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y.$$

同理, 有

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y.$$

所以

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = 2 \times 1 + 3 \times 2 = 8,$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = 3 \times 1 + 2 \times 2 = 7.$$

例 2 设 $z = x^y (x > 0, x \neq 1)$, 求证:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

证 若将 y 看作常数, 则 $z = x^y$ 为幂函数; 若将 x 看作常数, 则 $z = x^y$ 为指数函数. 因此有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x,$$

于是

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} \cdot yx^{y-1} + \frac{1}{\ln x} \cdot x^y \ln x = x^y + x^y = 2z.$$

例 3 求 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 的偏导数.

解 把 y 和 z 看作常量, 得

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}.$$

类似地, 有

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

例 4 已知理想气体的状态方程 $pV = RT$ (R 是常数), 求证:

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -1.$$

证 因为

$$p = \frac{RT}{V}, \quad \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2},$$

$$V = \frac{RT}{p}, \quad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{p},$$

$$T = \frac{pV}{R}, \quad \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{R},$$

所以

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{V^2} \cdot \frac{R}{p} \cdot \frac{V}{R} = -\frac{RT}{pV} = -1.$$

例 4 的计算结果说明, 偏导数的记号是一个整体记号, 不能看作分子与分母之商. 这与一元函数 $y = f(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$ 是不同的, 后者可看成函数微分 dy 与自变量微分 dx 之商.

对二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的偏导数, 有下述几何意义.

设 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 上的一点, 过 M_0 作平面 $y = y_0$ 截此曲面得一空间曲线, 此曲线在平面 $y = y_0$ 上的方程为 $z = f(x, y_0)$, 则 $f'_x(x_0, y_0) = \left. \frac{d}{dx} f(x, y_0) \right|_{x=x_0}$ 就是这曲线在点 M_0 处的切线 $M_0 T_x$ 对 x 轴的斜率 (见图 8-7). 同样, 偏导数 $f'_y(x_0, y_0)$ 的几何意义是曲面被平面 $x = x_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 $M_0 T_y$ 对 y 轴的斜率.

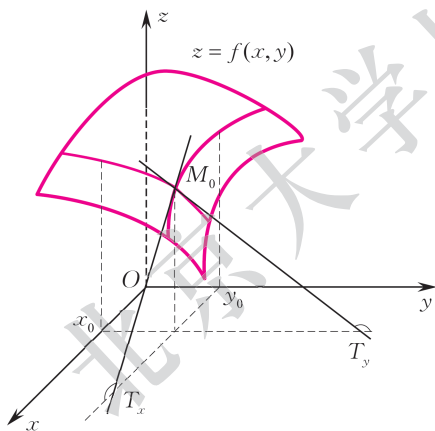


图 8-7

我们知道, 如果一元函数在某点的导数存在, 则它在该点必连续. 但对于多元函数来说, 即使在某一点处的各偏导数都存在, 也不能保证函数在该点连续. 这是因为各偏导数存在只能保证点 P 沿着平行于坐标轴的方向趋于 P_0 时, 函数值 $f(P)$ 趋于 $f(P_0)$, 而不能保证点 P 以任何方式趋于 P_0 时, 函数值 $f(P)$ 都趋于 $f(P_0)$. 例如,

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 的偏导数为

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0,$$



$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

但在本章第二节中已经知道,此函数在点 $(0,0)$ 处并不连续.

二、高阶偏导数

定义 2 设函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y),$$

那么在 D 内 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 都是 x, y 的函数. 如果它们的偏导数也存在, 则称它们是函数 $z = f(x, y)$ 的 **二阶偏导数**. 按照对变量求导次序的不同, 有下列四个二阶偏导数, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y), & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y), \end{aligned}$$

其中第二、第三两个偏导数称为 **混合偏导数**. 可类似地定义三阶, 四阶, $\dots, n$ 阶偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为 **高阶偏导数**.

例 5 设 $z = xy^3 + e^{xy}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$.

解

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= y^3 + ye^{xy}; & \frac{\partial z}{\partial y} &= 3xy^2 + xe^{xy}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= y^2 e^{xy}; & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= 3y^2 + xy e^{xy} + e^{xy}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 3y^2 + e^{xy} + xy e^{xy}; & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 6xy + x^2 e^{xy}; \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} &= y^3 e^{xy}. \end{aligned}$$

我们注意到, 本例中两个混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 相等. 但这个结论并不是普遍成立的, 它成立的一个充分条件是偏导数连续, 即有如下定理:

定理 如果 $z = f(x, y)$ 的二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在点 P_0 的某个邻域 $U(P_0)$ 内存在, 且在点 P_0 处连续, 那么在点 P_0 处这两个二阶混合偏导数相等.

证明从略.

对于二元以上的函数,也可以类似地定义高阶偏导数,而且高阶混合偏导数在偏导数连续的条件下也与求导次序无关.

例 6 验证:函数 $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

证 因为

$$z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2),$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{x}{x^2 + y^2}, & \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{y}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

于是有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

例 7 证明:函数 $u = \frac{1}{r}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

证 因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}, \end{aligned}$$

注意到函数关于自变量的对称性,我们有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5},$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} = 0.$$

例 6 和例 7 中的两个方程都叫作**拉普拉斯(Laplace)方程**,它是数学物理方程中一类很重要的方程.



习 题 8-3

1. 求下列函数的偏导数:

$$(1) z = x^2 y + \frac{x}{y^2};$$

$$(2) s = \frac{u^2 + v^2}{uv};$$

$$(3) z = x \ln \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$(4) z = \ln \tan \frac{x}{y};$$

$$(5) z = (1 + xy)^y;$$

$$(6) u = z^{xy};$$

$$(7) u = \arctan(x - y)^z;$$

$$(8) u = x^y + y^z + z^x.$$

2. 已知 $u = \frac{x^2 y^2}{x + y}$, 求证: $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3u$.

3. 设 $z = e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}$, 求证: $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

4. 设 $f(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$, 求 $f'_x(x, 1)$.

5. 求曲线 $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4}, \\ y = 4 \end{cases}$ 在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线与正向 x 轴所成的倾角.

6. 求下列函数的二阶偏导数:

$$(1) z = x^4 + y^4 - 4x^2 y^2;$$

$$(2) z = \arctan \frac{y}{x};$$

$$(3) z = y^x;$$

$$(4) z = e^{x^2 + y}.$$

* 7. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$ 求 $f''_{xy}(0, 0)$ 和 $f''_{yx}(0, 0)$.

第四节 全微分及其应用

一、全微分的定义

上节讨论的偏导数, 是函数仅有一个自变量变化时的瞬时变化率. 但在实际问题中, 经常要讨论各个自变量同时变化时, 所引起函数增量的变化.

设二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的某个邻域 $U(P)$ 内有

定义, 自变量 x, y 分别有增量 $\Delta x, \Delta y$, 并且 $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in U(P)$, 则函数 $f(x, y)$ 的改变量为

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

我们称 Δz 为函数 $f(x, y)$ 在 $P(x, y)$ 处的**全增量**. 全微分就是研究全增量变化的重要工具.

例如, 矩形金属薄片受热膨胀, 其长 x , 宽 y 分别增长 $\Delta x, \Delta y$, 如图 8-8 所示. 计算由此所引起的面积 z 的变化量.

矩形面积为 $z = xy$, 当 x, y 的增量分别为 $\Delta x, \Delta y$ 时, 面积 z 的增量为

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y.$$

Δz 可分解成两个部分:

第一部分(即图 8-8 中斜线阴影部分的面积)是关于 $\Delta x, \Delta y$ 的线性函数

$$y\Delta x + x\Delta y.$$

第二部分(即图 8-8 中右上角网格小矩形的面积)是 $\Delta x \cdot \Delta y$.

当 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ (或 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$) 时, $\Delta x \cdot \Delta y$ 是 ρ 的高阶无穷小量, 所以在计算 Δz 时, 第一部分是主要部分, 称为**线性主部**, 第二部分可以忽略不计. 我们称线性主部 $y\Delta x + x\Delta y$ 为函数 $z = xy$ 在点 (x, y) 处的**全微分**.

与一元函数的微分定义类似, 我们可给出二元函数的全微分定义如下:

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的某个邻域 $U(P)$ 内有定义, 如果函数在点 $P(x, y)$ 处的全增量可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad (8-4-1)$$

其中 A, B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处**可微**, 且 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处的**全微分**, 记为 dz 或 df , 即

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \quad (8-4-2)$$

相似地, 我们可以把二元函数的全微分定义推广到 n 元函数.

设 n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的某个邻域 $U(P)$ 内有定义, 如果函数 $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 处的全增量

$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 可表示为

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \dots + A_n\Delta x_n + o(\rho),$$

其中 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 不依赖于 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$,

$$\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2},$$

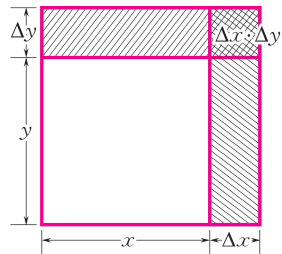


图 8-8



则称函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 处可微, 而 $A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_n \Delta x_n$ 称为函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 处的全微分, 记为 du , 即

$$du = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_n \Delta x_n. \quad (8-4-3)$$

如果函数在区域 D 内每点处都可微, 则称该函数在 D 内可微.

在第三节中曾指出, 多元函数在某点的偏导数存在, 并不能保证函数在该点连续. 下面我们将讨论二元函数 $z = f(x, y)$ 可微与连续、可微与偏导数存在的关系, 得到的结论对于一般的多元函数也是成立的.

定理 1 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微, 则 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续, 且各个偏导数存在, 并且有

$$f'_x(x_0, y_0) = A, \quad f'_y(x_0, y_0) = B.$$

证 因为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微, 所以

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + o(\rho),$$

其中 A, B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关, 仅依赖于 $x_0, y_0, \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

显然, 当 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时, 有 $\Delta z \rightarrow 0$. 故函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续.

对于上面全增量的表达式, 令 $\Delta y = 0$, 则有

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A \Delta x + o(\Delta x),$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A,$$

故有

$$f'_x(x_0, y_0) = A.$$

同理可证

$$f'_y(x_0, y_0) = B.$$

因此, $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的偏导数存在.

上述定理表明, 函数的偏导数存在与函数连续是函数可微的必要条件. 习惯上, 将自变量的增量 $\Delta x, \Delta y$ 分别记作 dx, dy , 并分别称为自变量 x, y 的微分. 这样, 函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处的全微分可表示为

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \quad (8-4-4)$$

其中 $\frac{\partial z}{\partial x}dx$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}dy$ 分别称为函数关于自变量 x, y 的偏微分, 于是二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和. 这表明二元函数的微分符合叠加原理. 叠加原理也适合于 n 元函数的情形. 一般来说, 如果 n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的全微分存在, 则有

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i.$$

在一元函数中,可导是可微的充要条件,但在多元函数里,偏导数存在不是可微的充分条件.例如,函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在原点处偏导数存在,但函数在原点处不连续,故函数在原点处不可微.然而,如果 n 元函数在点 P_0 处的 n 个偏导数连续,则能保证函数在点 P_0 处可微.下面我们仅就 $n=2$ 的情形作证明.

定理 2 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的偏导数 f'_x, f'_y 连续,则函数 f 在点 P_0 处可微.

证 由于 f'_x, f'_y 在点 P_0 处连续,因此在点 P_0 的某个邻域 $U(P_0)$ 内 f'_x, f'_y 都存在.设点 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 为这邻域内任意一点,考察函数的全增量

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] \\ &\quad + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]. \end{aligned}$$

在第一个方括号内的表达式,由于 $y_0 + \Delta y$ 不变,因而可以看作是 x 的一元函数 $f(x, y_0 + \Delta y)$ 的增量.由拉格朗日中值定理有

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) \\ = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x \quad (0 < \theta_1 < 1). \end{aligned}$$

又依假设 $f'_x(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续,所以上式可写为

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + \alpha \Delta x, \quad (8-4-5)$$

其中 α 为 $\Delta x, \Delta y$ 的函数,且当 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时, $\alpha \rightarrow 0$.

又由于 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处关于 y 的偏导数存在,则第二个方括号内的表达式可写为

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \beta \Delta y, \quad (8-4-6)$$

其中当 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时, $\beta \rightarrow 0$.

由式(8-4-5)、式(8-4-6)可见,在偏导数连续的假定下,全增量 Δz 可表示为

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y. \quad (8-4-7)$$

容易看出

$$\left| \frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\rho} \right| = \left| \frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

当 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 (\rho \rightarrow 0)$ 时,上不等式右端趋于零.

因此, $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微.

若 n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在区域 D 内每一点都可微,就称函数在 D 内可微分.

定理2也可以推广到 n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 对其证明时, 只需把 Δz 写成 n 个偏增量之和就行了. 因此, 如果 n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在开区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上有连续偏导数, 则 u 在 Ω 上处处可微.

例 1 计算函数 $z = e^{xy}$ 在点 $(2, 1)$ 处的全微分.

解 因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= ye^{xy}, & \frac{\partial z}{\partial y} &= xe^{xy}, \\ \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=2 \\ y=1}} &= e^2, & \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=2 \\ y=1}} &= 2e^2,\end{aligned}$$

所以

$$dz = e^2 dx + 2e^2 dy.$$

例 2 求 $u = xy^2 + \sin(y^2 z)$ 的全微分.

解 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + 2yz \cos(y^2 z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y^2 \cos(y^2 z),$$

所以

$$du = y^2 dx + 2y(x + z \cos(y^2 z)) dy + y^2 \cos(y^2 z) dz.$$

* 二、全微分的应用举例

我们以二元函数为例来说明全微分的应用.

当二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处的两个偏导数 f'_x, f'_y 连续, 且 $|\Delta x|, |\Delta y|$ 很小时, 有近似等式

$$\Delta z \approx dz = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y. \quad (8-4-8)$$

上式可改写成

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y. \quad (8-4-9)$$

与一元函数类似, 我们可用式(8-4-8)、式(8-4-9)对二元函数作近似计算和误差估计.

例 3 计算 $(1.04)^{2.02}$ 的近似值.

解 设函数 $f(x, y) = x^y$. 显然, 要计算的值为当 $x = 1.04, y = 2.02$ 时的函数值 $f(1.04, 2.02)$.

取 $x = 1, y = 2, \Delta x = 0.04, \Delta y = 0.02$. 由于

$$f'_x(1, 2) = 2, \quad f'_y(1, 2) = 0, \quad f(1, 2) = 1,$$

因此

$$(1.04)^{2.02} \approx 1 + 2 \times 0.04 + 0 \times 0.02 = 1.08.$$

例 4

如图 8-9 所示, 设有一无盖的薄壁圆桶, 其内半径为 $R = 5 \text{ cm}$, 高为 $H = 20 \text{ cm}$, 侧壁与底的厚均为 $h = 0.1 \text{ cm}$. 试求该圆桶的壳体体积的近似值.

解 圆桶壳体体积 $V = \pi(R+h)^2(H+h) - \pi R^2 H$ 是函数

$$z = f(R, H) = \pi R^2 H$$

当 $\Delta R = \Delta H = h$ 时的增量 Δz . 由于 h 很小, 因此可用微分近似增量计算, 即

$$\begin{aligned} V = \Delta z &\approx dz = f'_R(R, H)\Delta R + f'_H(R, H)\Delta H \\ &= 2\pi R H h + \pi R^2 h = 200\pi \times 0.1 + 25\pi \times 0.1 \\ &\approx 70.65(\text{cm}^3). \end{aligned}$$

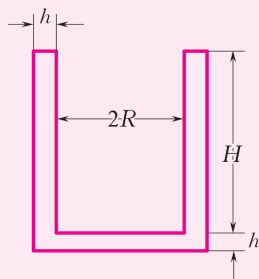


图 8-9

例 5

利用单摆摆动测定重力加速度 g 的公式是

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

现测得单摆摆长 l 与振动周期 T 分别为 $l = (100 \pm 0.1) \text{ cm}$, $T = (2 \pm 0.004) \text{ s}$. 问: 由于测量 l 与 T 的误差而引起 g 的绝对误差和相对误差各为多少? (注: 这里的绝对误差和相对误差各指相应的误差限.)

解 $dg = 4\pi^2 \left(\frac{1}{T^2} \Delta l - \frac{2l}{T^3} \Delta T \right)$.

现知 $|\Delta l| \leq 0.1$, $|\Delta T| \leq 0.004$. 因 $|\Delta l|$, $|\Delta T|$ 很小, 取 $l = 100 \text{ cm}$, $T = 2 \text{ s}$, 则

$$\begin{aligned} |\Delta g| &\approx |dg| = 4\pi^2 \left| \left(\frac{1}{T^2} \Delta l - \frac{2l}{T^3} \Delta T \right) \right| \\ &\leq 4\pi^2 \left(\frac{1}{T^2} |\Delta l| + \frac{2l}{T^3} |\Delta T| \right). \end{aligned}$$

从而, g 的绝对误差为

$$\delta_g \approx 4\pi^2 \left(\frac{0.1}{2^2} + \frac{2 \times 100}{2^3} \times 0.004 \right) = 0.5\pi^2 = 4.93(\text{cm/s}^2);$$

g 的相对误差为

$$\frac{\delta_g}{g} \approx 0.5\pi^2 / \frac{4\pi^2 \times 100}{2^2} = 0.5\%.$$

从上例可以看出, 对一般的二元函数 $z = f(x, y)$, 若自变量 x, y 的绝对误差分别为 δ_x, δ_y , 即

$$|\Delta x| \leq \delta_x, \quad |\Delta y| \leq \delta_y,$$

则 z 的误差

$$\begin{aligned} |\Delta z| &\approx |dz| = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \right| \leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| |\Delta y| \\ &\leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \delta_x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \delta_y. \end{aligned}$$

从而, 得 z 的绝对误差为

$$\delta_z \approx \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \delta_x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \delta_y; \quad (8-4-10)$$

z 的相对误差为

$$\frac{\delta_z}{|z|} \approx \left| \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z} \right| \delta_x + \left| \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{z} \right| \delta_y. \quad (8-4-11)$$



习 题 8-4

1. 求下列函数的全微分:

$$(1) z = e^{x^2+y^2};$$

$$(2) z = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$(3) u = x^{yz};$$

$$(4) u = x^{\frac{y}{z}}.$$

2. 求下列函数在给定点和自变量增量的条件下的全增量和全微分:

$$(1) z = x^2 - xy + 2y^2, x = 2, y = -1, \Delta x = 0.2, \Delta y = -0.1;$$

$$(2) z = e^{xy}, x = 1, y = 1, \Delta x = 0.15, \Delta y = 0.1.$$

* 3. 利用全微分代替全增量, 近似计算:

$$(1) (1.02)^3 \cdot (0.97)^2;$$

$$(2) \sqrt{(4.05)^2 + (2.93)^2};$$

$$(3) (1.97)^{1.05}.$$

4. 矩形一边长为 $a = 10$ cm, 另一边长为 $b = 24$ cm, 当 a 增加 4 mm 而 b 缩小 1 mm 时, 求对角线长的变化.

* 5. 当圆锥体形变时, 它的底半径 R 由 30 cm 增到 30.1 cm, 高 h 由 60 cm 减到 59.5 cm, 试求体积变化的近似值.

* 6. 用水泥做一个长方形无盖水池, 其外形长 5 m、宽 4 m、深 3 m, 侧面和底均厚 20 cm, 求所需水泥的精确值和近似值.

第五节 复合函数的微分法

一、复合函数的求导法则

实际问题中, 经常会遇到多元复合函数的偏导数. 因此, 我们需要建立多元复合函数的求导法则. 多元复合函数与一元函数有相似的链式法则, 它在多元函数微分学中起着重要作用.

定理 1 设函数 $u = u(t), v = v(t)$ 都在 t 处可导, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 处可微, 则复合函数 $z = f(u(t), v(t))$ 在 t 处可导, 且有

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}. \quad (8-5-1)$$

证 因为 $z = f(u, v)$ 在 (u, v) 处可微, 所以

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta v + o(\rho).$$

于是

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{o(\rho)}{\Delta t},$$

其中

$$\rho = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}.$$

因为 $u = u(t), v = v(t)$ 在 t 处可导, 所以

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

又

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} \sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2} \cdot \frac{|\Delta t|}{\Delta t} = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \right) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}, \end{aligned}$$

即

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

定理 1 中的复合函数 $z = f(u(t), v(t))$ 是只有一个变量 t 的函数, 所以它对 t 的导数不是偏导数, 而是一元函数 z 对 t 的导数. 因此, 公式 (8-5-1) 中的导数 $\frac{dz}{dt}$ 称为 **全导数**.

该定理可以推广到为 n 元函数的情形. 以三元函数为例, 我们有下面的法则.

若 $z = f(u, v, w)$ 在 (u, v, w) 处可微, 而 $u = u(t), v = v(t), w = w(t)$ 均为可导函数, 则

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dt}. \quad (8-5-2)$$

用与定理 1 类似的证明方法, 我们可得到复合函数有两个自变量的情形的求导法则.

定理 2 如果函数 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 在点 (x, y) 处的偏导数存在, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 处可微, 则复合函数 $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ 在点 (x, y) 处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 存在, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (8-5-3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (8-5-4)$$

事实上,在求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 时, y 被看作常量,因此中间变量 u, v 可以看成是 x 的一元函数,利用公式(8-5-1)即可得到公式(8-5-3),只需将 $\frac{du}{dx}$ 和 $\frac{dv}{dx}$ 分别改为 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$. 类似地,可得公式(8-5-4).

公式(8-5-3)、(8-5-4)称为求多元复合函数的偏导数的**链式法**.

类似地,设 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 及 $w = \omega(x, y)$ 都在点 (x, y) 具有对 x, y 的偏导数,函数 $z = f(u, v, w)$ 在对应点 (u, v, w) 具有连续偏导数,则复合函数

$$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y), \omega(x, y))$$

在点 (x, y) 的两个偏导数都存在,且可用下列公式计算:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (8-5-5)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (8-5-6)$$

作为上述问题的特殊情形,我们讨论下面的问题.

若 $z = f(u, x, y), u = \varphi(x, y)$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (8-5-7)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (8-5-8)$$

这里必须特别指出的是,在公式(8-5-7)中, $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 有不同的含义.左边的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 是把 u 看成 x 和 y 的函数,求复合函数 $z = f(u(x, y), x, y)$ 对 x 的偏导数;右边 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是把 $z = f(u, x, y)$ 作为三元函数对 x 的偏导数,即把 u 与 y 都看成常数,求函数 $z = f(u, x, y)$ 对 x 的导数.公式(8-5-8)中的 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 也有类似的区别.

复合函数的复合情形多种多样,不可能一一列举.如果我们把因变量、中间变量及自变量的依赖关系用形如图8-10中的图来表

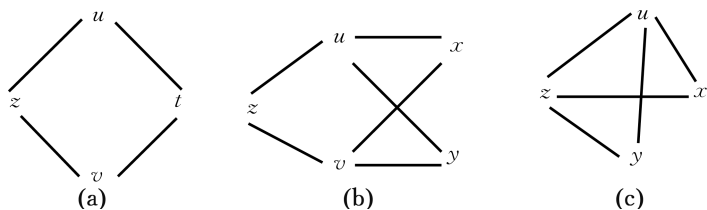


图 8-10

示,则链式法则体现为(以求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 为例):找出所有从 z 到 x 的“链”,先将同一链上前一变量对后一变量求偏导数(或导数),并相乘;再把不同链上所得的结果全部相加.

例 1 设 $z = e^u \sin v, u = xy, v = x + y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = e^u \sin v \cdot y + e^u \cos v \cdot 1 \\ &= e^{xy} (y \sin(x+y) + \cos(x+y)), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = e^u \sin v \cdot x + e^u \cos v \cdot 1 \\ &= e^{xy} (x \sin(x+y) + \cos(x+y)).\end{aligned}$$

例 2 设 $z = uv + \sin t, u = e^t, v = \cos t$, 求全导数 $\frac{dz}{dt}$.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} + \cos t = ve^t - u \sin t + \cos t \\ &= e^t (\cos t - \sin t) + \cos t.\end{aligned}$$

例 3 设 $z = y + F(u), u = x^2 - y^2, F(u)$ 可导, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, 并验证:

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = F'(u) \cdot 2x = 2xF'(u), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 1 + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 1 + F'(u) \cdot (-2y) = 1 - 2yF'(u),\end{aligned}$$

所以

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 2xyF'(u) + x(1 - 2yF'(u)) = x.$$

例 4 设 $w = f(x + y + z, xyz), f$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$.

解 令 $u = x + y + z, v = xyz$, 则 $w = f(u, v)$.

为表达简洁起见, 在不会引起混淆的情况下, 记

$$\frac{\partial w}{\partial u} = f'_1, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = f''_{12},$$

这里下标“1”表示对第一个变量 $u = x + y + z$ 求偏导数, 下标“2”表示对第二个变量 $v = xyz$ 求偏导数. 同理, 有 f'_2, f''_{21}, f''_{22} 等. 于是有

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1 + yzf'_2, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (f'_1 + yzf'_2) = \frac{\partial f'_1}{\partial z} + yf'_2 + yz \frac{\partial f'_2}{\partial z}.\end{aligned}$$

求 $\frac{\partial f'_1}{\partial z}$ 及 $\frac{\partial f'_2}{\partial z}$ 时, 注意 f'_1 及 f'_2 仍然是复合函数, 根据复合函数求导法则, 有

$$\frac{\partial f'_1}{\partial z} = \frac{\partial f'_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f'_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = f''_{11} + xyf''_{12},$$

$$\frac{\partial f'_2}{\partial z} = \frac{\partial f'_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f'_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = f''_{21} + xyf''_{22}.$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= f''_{11} + xyf''_{12} + yf'_2 + yzf''_{21} + xy^2zf''_{22} \\ &= f''_{11} + y(x+z)f''_{12} + xy^2zf''_{22} + yf'_2.\end{aligned}$$

例 5 设 $u = f(x, y)$ 的所有二阶偏导数连续, 试将下列表达式转换成极坐标系中的形式:

$$(1) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2; \quad (2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

解 由直角坐标系与极坐标系之间的关系, 有

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

现在要将 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 全部改用 r, θ 及 $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}$ 来表示. 为此, 视

$u = u(r, \theta)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan \frac{y}{x} + C$ (当点 (x, y) 在第一、第四象限时, $C = 0$; 当点 (x, y) 在第二、第三象限时, $C = \pi$).

注意到

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\theta, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin\theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin\theta}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos\theta}{r},\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin\theta}{r}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\cos\theta}{r}.\end{aligned}$$

两式平方后相加, 得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

再求二阶偏导数, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin\theta}{r}\right) \cos\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin\theta}{r}\right) \frac{\sin\theta}{r} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos^2\theta - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{\sin\theta \cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\sin^2\theta}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{2\sin\theta \cos\theta}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\sin^2\theta}{r}.\end{aligned}$$

同理,可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{r^2} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{r}.$$

两式相加,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right).$$

二、全微分形式不变性

下面以二元复合函数为例,讨论多元复合函数的全微分法. 设函数 $z = f(u, v)$ 具有连续偏导数,则

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \quad (8-5-9)$$

如果 u, v 又是 x, y 的函数: $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$, 且这两个函数也具有连续偏导数,则复合函数

$$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$$

的全微分为

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \end{aligned}$$

由此可见,对于函数 $z = f(u, v)$, 不论 u, v 是自变量还是中间变量,它们的全微分都可以写成(8-5-9)式的形式. 这就是二元函数的全微分形式不变性.

利用全微分形式不变性求偏导数或全微分,在许多情况下显得便捷,且不易出错. 复合关系越复杂,其优点越突出.

例 6 || 设 $z = f(u, v, x), u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$, 所有函数均有连续偏导数,试求 $dz, \frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解
$$\begin{aligned} dz &= f'_u du + f'_v dv + f'_x dx \\ &= f'_u (\varphi'_x dx + \varphi'_y dy) + f'_v (\psi'_x dx + \psi'_y dy) + f'_x dx \\ &= f'_u (\varphi'_x dx + \varphi'_y dy) + f'_v (\psi'_x (\varphi'_x dx + \varphi'_y dy) + \psi'_y dy) + f'_x dx \\ &= (f'_u \varphi'_x + f'_v \psi'_x \varphi'_x + f'_x) dx + (f'_u \varphi'_y + f'_v \psi'_x \varphi'_y + f'_v \psi'_y) dy. \end{aligned}$$

由此可知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_u \varphi'_x + f'_v \psi'_x \varphi'_x + f'_x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_u \varphi'_y + f'_v \psi'_x \varphi'_y + f'_v \psi'_y.$$



习 题 8-5

1. 求下列复合函数的偏导数或全导数:

(1) $z = x^2y - xy^2, x = u \cos v, y = u \sin v$, 求 $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$;

(2) $z = \arctan \frac{x}{y}, x = u + v, y = u - v$, 求 $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$;

(3) $u = \ln(e^x + e^y), y = x^3$, 求 $\frac{du}{dx}$;

(4) $u = x^2 + y^2 + z^2, x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$, 求 $\frac{du}{dt}$.

2. 设 f 具有一阶连续偏导数, 试求下列函数的一阶偏导数:

(1) $u = f(x^2 - y^2, e^{xy})$;

(2) $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$;

(3) $u = f(x, xy, xyz)$.

3. 设 $z = xy + xF(u), u = \frac{y}{x}, F(u)$ 为可导函数, 证明:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy.$$

4. 设 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$, 其中 $f(u)$ 为可导函数, 验证: $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

5. 设 $z = f(x^2 + y^2)$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

6. 设 f 具有二阶连续偏导函数, 求下列函数的二阶偏导数:

(1) $z = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$;

(2) $z = f(xy^2, x^2y)$;

(3) $z = f(\sin x, \cos y, e^{x+y})$.

第六节 隐函数的导数

一、一个方程的情形

我们知道, 用解析式(数学式子)表示一元函数时, 变量之间的函数关系有时不能或难以表示成显函数 $y = f(x)$ 的形式, 而不得不表示成隐函数 $F(x, y) = 0$ 的形式. 同样, n 元函数有时也要表示成隐函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$ 的形式.

我们熟悉的很多曲线和曲面的方程,如 $x^2 + y^2 = r^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 等,它们都可以在一定的区域内确定一个一元或二元函数.但是并不是任何方程都能确定一个函数关系,例如 $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中的任何区域内都不能确定一个二元函数.所以,关于隐函数的问题,首先要讨论,对于给定的一个方程 $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$,需要什么条件,在 $\mathbf{R}^n$ 的什么区域内能通过 $F = 0$ 确定一个 n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. 这就是说,首先要研究隐函数是否存在的问题,然后再研究隐函数的求导法则.

定理 1(隐函数存在定理 I) 设二元函数 $F(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域内有连续偏导数,如果

$$(1) F(x_0, y_0) = 0;$$

$$(2) \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{P_0} \neq 0,$$

则方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内确定唯一的连续函数 $y = f(x)$, 且具有连续导数,它满足 $y_0 = f(x_0)$, 并有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}. \quad (8-6-1)$$

定理的证明比较复杂,这里从略. 现仅就公式(8-6-1)做出如下推导:

事实上,设 $F(x, y) = 0$ 能确定函数 $y = f(x)$, 则

$$F(x, f(x)) \equiv 0,$$

其左端可以看成是 x 的一个复合函数. 现求这个函数的全导数. 由于恒等式两端求导后仍恒等,得

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

由于 F'_y 连续,且 $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, 因此存在 (x_0, y_0) 的一个邻域,在这个邻域内 $F'_y \neq 0$, 于是得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

如果 $F(x, y)$ 的二阶偏导数连续,我们把等式(8-6-1)两端看作 x 的复合函数,再求得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{F'_x}{F'_y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{F'_x}{F'_y} \right) \frac{dy}{dx} \\ &= -\frac{F''_{xx} F'_y - F''_{yx} F'_x}{F'^2_y} - \frac{F''_{xy} F'_y - F''_{yy} F'_x}{F'^2_y} \left(-\frac{F'_x}{F'_y} \right) \\ &= -\frac{F''_{xx} F'^2_y - 2F''_{xy} F'_x F'_y + F''_{yy} F'^2_x}{F'^3_y}. \end{aligned}$$

例 1 验证方程 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 在点 $(0, 1)$ 的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数, 且当 $x = 0$ 时 $y = 1$ 的隐函数 $y = f(x)$, 并求这个函数的一阶与二阶导数在 $x = 0$ 的值.

解 设 $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, 则

$$F'_x = 2x, \quad F'_y = 2y, \quad F(0, 1) = 0, \quad F'_y(0, 1) = 2 \neq 0,$$

由定理 1 可知, 方程 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 在点 $(0, 1)$ 的某邻域内能唯一确定一个单值可导, 且满足 $f(0) = 1$ 的函数 $y = f(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{x}{y}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} \\ &= -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = -1.$$

与定理 1 一样, 我们同样可以由三元函数 $F(x, y, z)$ 的性质来断定由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的二元函数 $z = f(x, y)$ 的存在, 以及这个函数的性质. 这就是下面的定理.

定理 2(隐函数存在定理 2) 设三元函数 $F(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数, 且 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, 则方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某一邻域内能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z = f(x, y)$, 它满足条件 $z_0 = f(x_0, y_0)$, 并有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \quad (8-6-2)$$

与定理 1 一样, 我们仅就公式(8-6-2) 做出推导. 由于

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0,$$

将上式两端分别对 x 和 y 求偏导数, 应用复合函数求导法则得

$$F'_x + F'_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad F'_y + F'_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

因为 F'_z 连续, 且 $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, 所以存在点 (x_0, y_0, z_0) 的一个邻域, 在这个邻域内 $F'_z \neq 0$, 于是得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

例 2 || 设 $x(1+yz) = 1 - e^{x+y+z}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解 设 $F(x, y, z) = x(1+yz) + e^{x+y+z} - 1 = 0$.

因为 $F(0, 0, 0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} = (1+yz) + e^{x+y+z}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = xz + e^{x+y+z}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = xy + e^{x+y+z}$ 都是连续函数, 且 $F'_z(0, 0, 0) = 1 \neq 0$, 则在原点 $O(0, 0, 0)$ 的某个邻域内确定了一个函数 $z = f(x, y)$. 故有

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1+yz + e^{x+y+z}}{xy + e^{x+y+z}}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{xz + e^{x+y+z}}{xy + e^{x+y+z}}.\end{aligned}$$

例 3 || 设 $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$, 则

$$F'_x = 2x, \quad F'_z = 2z - 4,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{x}{2-z}.$$

再对 x 求偏导数, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{(2-z) + x \frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2} = \frac{(2-z) + x \left(\frac{x}{2-z} \right)}{(2-z)^2} \\ &= \frac{(2-z)^2 + x^2}{(2-z)^3}.\end{aligned}$$

二、方程组的情形

设有方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0, \end{cases} \quad (8-6-3)$$

这时在四个变量中一般只有两个变量独立变化(不妨设为 x, y). 如果在某一范围内, 对每一组 x, y 的值, 由此方程组能确定唯一的 u, v 的值, 则此方程组就确定了 u 和 v 为 x, y 的函数. 下面给出隐函数存在, 以及它们连续、可导的定理.

定理 3 设 $F(x, y, u, v), G(x, y, u, v)$ 在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数, $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$, 且偏数组成的函数行列式(或称雅可比(Jacobi)行列式)

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}$$

在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 处不等于零, 则方程组 (8-6-3) 在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的某一邻域内能唯一确定两个二元连续函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$, 满足 $u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$, 且它们有连续偏导数

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} F'_x & F'_v \\ G'_x & G'_v \end{vmatrix}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} F'_u & F'_x \\ G'_u & G'_x \end{vmatrix}; \end{cases} \quad (8-6-4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} F'_y & F'_v \\ G'_y & G'_v \end{vmatrix}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} F'_u & F'_y \\ G'_u & G'_y \end{vmatrix}. \end{cases} \quad (8-6-5)$$

我们只推导公式 (8-6-4). 由于

$$F(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0,$$

$$G(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0,$$

将恒等式两边分别对 x 求偏导数, 得

$$\begin{cases} F'_x + F'_u \frac{\partial u}{\partial x} + F'_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ G'_x + G'_u \frac{\partial u}{\partial x} + G'_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

这是关于 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 的线性方程组, 由假设知在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的

一个邻域内, 系数行列式 $J \neq 0$, 从而可以解出 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}.$$

同理, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}.$$

例 4

试求由方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - uv = 0, \\ xy - u^2 + v^2 = 0 \end{cases}$$

确定的二元函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 的各个偏导数.

解 设 $F(x, y, u, v) = x^2 + y^2 - uv, G(x, y, u, v) = xy - u^2 + v^2$, 于是有

$$F'_x = 2x, \quad F'_y = 2y, \quad F'_u = -v, \quad F'_v = -u,$$

$$G'_x = y, \quad G'_y = x, \quad G'_u = -2u, \quad G'_v = 2v.$$

由此可得

$$J = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -v & -u \\ -2u & 2v \end{vmatrix} = -2(u^2 + v^2),$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = \begin{vmatrix} F'_x & F'_v \\ G'_x & G'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -u \\ y & 2v \end{vmatrix} = 4xv + uy,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = \begin{vmatrix} F'_u & F'_x \\ G'_u & G'_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -v & 2x \\ -2u & y \end{vmatrix} = 4xu - vy.$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = \frac{4xv + uy}{2(u^2 + v^2)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = \frac{4xu - vy}{2(u^2 + v^2)}.$$

同理,可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4yv + xu}{2(u^2 + v^2)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4yu - xv}{2(u^2 + v^2)}.$$

本例也可用推导公式(8-6-4)的方法求解.

例 5 || 设函数 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 在点 (u, v) 的某一邻域内连续,且有连续偏导数. 又

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0.$$

(1) 证明方程组

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (8-6-6)$$

在点 (x, y, u, v) 的某一邻域内唯一确定一组连续,且有连续偏导数的反函数

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y);$$

(2) 求反函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 对 x, y 的偏导数.

解 (1) 将方程组(8-6-6)改写成下面的形式,即

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) \equiv x - x(u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) \equiv y - y(u, v) = 0. \end{cases}$$

根据假设有

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0,$$

由定理 3 即得结论.

(2) 将方程组(8-6-6)所确定的反函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 代入(8-6-6)式,即得

$$\begin{cases} x \equiv x(u(x, y), v(x, y)), \\ y \equiv y(u(x, y), v(x, y)). \end{cases}$$

将上式两边分别对 x 求偏导数,得

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

由于 $J \neq 0$, 可解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}.$$

同理, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}.$$



习 题 8-6

1. 求下列隐函数的导数或偏导数:

(1) $\sin y + e^x - xy^2 = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$;

(2) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$;

(3) $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

(4) $z^3 - 3xyz = a^3$ (a 为常数), 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

2. 设 $F(x, y, z) = 0$ 可以确定函数 $x = x(y, z), y = y(x, z), z = z(x, y)$, 证明:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

3. 设 $F\left(y + \frac{1}{x}, z + \frac{1}{y}\right) = 0$ 确定了函数 $z = z(x, y)$, 其中 F 可微, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

4. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数:

(1) $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$;

(2) $\begin{cases} xu + yv = 1, \\ yu - xv = 0, \end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$;

(3) $\begin{cases} u = f(ux, v + y), \\ v = g(u - x, v^2 y), \end{cases}$ 其中 f, g 具有连续偏导函数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$;

(4) $\begin{cases} x = e^u + u \sin v, \\ y = e^u - u \cos v, \end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

5. 设 $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v, z = uv$, 试求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

* 第七节 二元函数的泰勒公式

对于一元函数 $y = f(x)$, 如果函数 $f(x)$ 在含 x_0 的某个开区间 (a, b) 内具有直至 $n+1$ 阶的导数, 则当 $x \in (a, b)$ 时,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

成立. 这就是一元函数的泰勒(Taylor)公式, 利用它可用 n 次多项式来近似表示函数 $f(x)$, 且误差是当 $x \rightarrow x_0$ 时比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小量. 对于多元函数, 为了理论研究和实际计算等目的, 有必要考虑用多个变量的多项式来近似表示一个给定的多元函数, 并具体估算出误差的大小. 这里就二元函数的情形进行讨论, 其结果可以推广到 n 元函数.

定理 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某个邻域 $U(P)$ 内具有直至 $n+1$ 阶的连续偏导数, 点 $(x_0 + h, y_0 + k) \in U(P)$, 则有

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) \\ + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots \\ + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) + R_n, \quad (8-7-1)$$

其中

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad (0 \leq \theta < 1), \\ \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) = hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0), \\ \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) = h^2 f''_{xx}(x_0, y_0) + 2hk f''_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f''_{yy}(x_0, y_0).$$

一般地, 记号 $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0, y_0)$ 表示

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0, y_0) = \sum_{p=0}^m C_m^p h^p k^{m-p} \frac{\partial^m f}{\partial x^p \partial y^{m-p}} \bigg|_{(x_0, y_0)}.$$

证 为了利用一元函数的泰勒公式进行证明, 我们引入函数(令 $x = x_0 + ht, y = y_0 + kt$)

$$\Phi(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

显然,

$$\Phi(0) = f(x_0, y_0), \quad \Phi(1) = f(x_0 + h, y_0 + k).$$

由一元函数的麦克劳林公式可得

$$\Phi(1) = \Phi(0) + \Phi'(0) + \frac{1}{2!} \Phi''(0) + \cdots + \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} \Phi^{(n+1)}(\theta) \\ (0 < \theta < 1). \quad (8-7-2)$$

又

$$\Phi'(t) = hf'_x(x_0 + ht, y_0 + kt) + kf'_y(x_0 + ht, y_0 + kt) \\ = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0 + ht, y_0 + kt), \\ \Phi''(t) = h^2 f''_{xx}(x_0 + ht, y_0 + kt) + 2hk f''_{xy}(x_0 + ht, y_0 + kt) \\ + k^2 f''_{yy}(x_0 + ht, y_0 + kt) \\ = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0 + ht, y_0 + kt), \\ \dots\dots$$

$$\Phi^{(n+1)}(t) = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p h^p k^{(n+1)-p} \frac{\partial^{(n+1)} f}{\partial x^p \partial y^{(n+1)-p}} \bigg|_{(x_0 + ht, y_0 + kt)}.$$

在上面结果中,令 $t = 0$,再代入式(8-7-2),即得式(8-7-1).

式(8-7-1)称为二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的 n 阶**泰勒公式**,其中 R_n 称为**拉格朗日余项**.泰勒公式中,

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &+ \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (8-7-3)$$

是 h, k 的多项式,称为 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的 n 阶**泰勒多项式**,记为 $P_n(h, k)$.

当 $|h|, |k|$ 适当小时,有

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \approx P_n(h, k),$$

其误差为 $|R_n|$.由假设,函数具有直到 $n+1$ 阶连续偏导数,故它们的绝对值在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内都不超过某一正数 M .记 $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$,则有 $(|h| + |k|)^2 \leq 2(h^2 + k^2) = 2\rho^2$,于是有下面的误差估计公式:

$$|R_n| \leq \frac{M}{(n+1)!} (|h| + |k|)^{n+1} \leq \frac{(\sqrt{2})^{n+1} M}{(n+1)!} \rho^{n+1},$$

即

$$R_n = o(\rho^n).$$

当 $n = 0$ 时,泰勒公式(8-7-1)成为

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + hf'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \\ &\quad + kf'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned} \quad (8-7-4)$$

此式称为 $z = f(x, y)$ 的**拉格朗日中值公式**.由此立刻可得下述结论:若函数 $f(x, y)$ 的偏导数 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 在某一区域内恒等于零,则函数 $f(x, y)$ 在此区域内必等于常数.

$x_0 = 0, y_0 = 0$ 时的泰勒公式,又称**麦克劳林公式**. $f(x, y)$ 的麦克劳林公式为

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(0, 0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0, 0) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0, 0) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(\theta x, \theta y) \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned} \quad (8-7-5)$$



数学家简介

例

试求函数 $z = f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 的三阶麦克劳林公式.

解 因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= \frac{1}{1+x+y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) &= \frac{-1}{(1+x+y)^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y), \\ \frac{\partial^3}{\partial x^p \partial y^{3-p}} f(x, y) &= \frac{2!}{(1+x+y)^3} \quad (p = 3, 2, 1, 0), \\ \frac{\partial^4}{\partial x^p \partial y^{4-p}} f(x, y) &= \frac{-3!}{(1+x+y)^4} \quad (p = 4, 3, 2, 1, 0), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(0,0) &= x + y, \\ \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0) &= -(x+y)^2, \\ \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(0,0) &= 2(x+y)^3, \\ \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f(\theta x, \theta y) &= \frac{-6(x+y)^4}{(1+\theta x+\theta y)^4}. \end{aligned}$$

又 $f(0,0) = 0$, 故

$$\ln(1+x+y) = (x+y) - \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{3}(x+y)^3 - \frac{1}{4} \cdot \frac{(x+y)^4}{(1+\theta x+\theta y)^4} \quad (0 < \theta < 1).$$



习 题 8-7

- * 1. 求函数 $f(x,y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4$ 在点 $(2, -1)$ 处的泰勒公式.
- * 2. 将函数 $f(x,y) = y^x$ 在点 $(1,1)$ 处展到泰勒公式的二次项.
- * 3. 求函数 $z = e^{x+y}$ 在点 $(1, -1)$ 处的泰勒公式.
- * 4. 求函数 $f(x,y) = e^x \ln(1+y)$ 的三阶麦克劳林公式.



习 题 八

1. 填空题:

(1) 函数 $z = 2x + \sin \frac{y}{x}$ 在点 $(1, \pi)$ 处的二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1, \pi)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 设 $z = \frac{x+y}{x-y}$, 则 $dz \Big|_{(1, -1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $z = f(x, xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 设函数 $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$, 则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 若 $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$, 则 $f'_1(1, 0)$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

2. 选择题:

(1) 在下列极限结果中, 正确的是 ().

A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$

B. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$

C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y} = 0$

D. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x+y} = 0$

- (2) 设函数 $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^2}$, 则().
- A. $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 都存在 B. $f'_x(0, 0)$ 不存在, $f'_y(0, 0)$ 存在
- C. $f'_x(0, 0)$ 存在, $f'_y(0, 0)$ 不存在 D. $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 都不存在
- (3) 如果函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是().
- A. 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微
- B. 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微
- C. 若 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在
- D. 若 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在
- (4) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F'_2 \neq 0$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = ()$.
- A. x B. z C. $-x$ D. $-z$
- (5) 设有三元方程 $xy - z \ln y + e^{xz} = 1$. 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0, 1, 1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程().
- A. 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x, y)$
- B. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x, z)$ 和 $z = z(x, y)$
- C. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $z = z(x, y)$
- D. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $y = y(x, z)$
3. 证明: 函数 $f(x, y) = |xy|$ 在点 $O(0, 0)$ 处可微.
4. 设函数 $z = xy + f\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 $f(u)$ 为可微函数, 求 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$.
5. 设函数 $z = \cos y + f(\sin x - \sin y)$, 其中 f 为可微的函数, 求当 $y = \pi + x$ 时 $\sec x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sec y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 的值.
6. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z = e^{2x-3z} + 2y$ 确定, 求 $3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$.
7. 设 F 具有一阶连续偏导数, $w = \varphi(x, y, z)$ 为方程 $F(x - aw, y - bw, z - cw) = 0$ (其中 a, b, c 为常数) 所确定的隐函数, 求 $a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y} + c \frac{\partial w}{\partial z}$ 的值.
8. 设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x=1}$.
9. 设 $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$, 求 $f''_{xx}(0, 0, 1), f''_{yz}(0, -1, 0), f'''_{xxx}(2, 0, 1)$.
10. 设 $z = x \ln(xy)$, 求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.
11. 试证明: 利用变量替换 $\xi = x - \frac{1}{3}y, \eta = x - y$, 可将方程

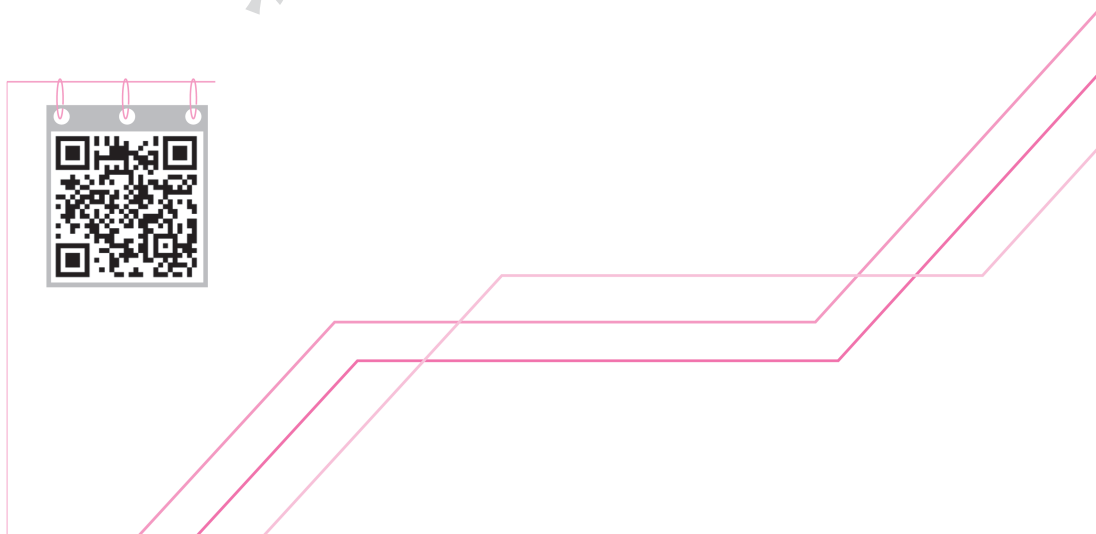
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

化简成 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

第九章

多元函数微分学的应用

北京大学出版社



第一节

空间曲线的切线与法平面

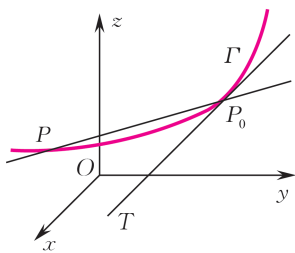


图 9-1

设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

其中 $t \in [\alpha, \beta]$, $x(t), y(t), z(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上可导.

考虑曲线 Γ 上对应于 $t = t_0$ 的一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 及对应于 $t = t_0 + \Delta t$ 的一点 $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$, 则曲线在 P_0 处的割线 P_0P 的直线方程为

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z}.$$

当 P 沿着 Γ 趋于 P_0 时, 割线 P_0P 的极限位置 P_0T 就是曲线 Γ 在点 P_0 处的切线(见图 9-1). 用 Δt 除上式的各分母, 得

$$\frac{x - x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y - y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{z - z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

令 $P \rightarrow P_0$ (这时有 $\Delta t \rightarrow 0$), 有

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \frac{dx}{dt}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} \rightarrow \frac{dy}{dt}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta t} \rightarrow \frac{dz}{dt},$$

则曲线在 P_0 处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \quad (9-1-1)$$

切线的方向向量 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 称为曲线在点 P_0 处的切向量, 通过点 P_0 而与切线垂直的平面称为曲线在 P_0 处的法平面. 由于 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 可作为法平面的法向量, 因此由平面的点法式方程可得法平面方程为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0. \quad (9-1-2)$$

设曲线的方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (9-1-3)$$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲线上一点. 如果 F, G 在 P_0 的某邻域内的各个偏导数存在且连续, 其雅可比行列式在点 P_0 的值不等于零, 即

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{P_0} \neq 0, \quad (9-1-4)$$

由第八章第六节定理 3 得, 方程组在此邻域内确定了一组函数 $y = y(x), z = z(x)$, 即以 x 为参数的形式, 满足 $y_0 = y(x_0), z_0 = z(x_0)$, 并且有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}.$$

因此, 曲线在 P_0 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{y'(x_0)} = \frac{z-z_0}{z'(x_0)}, \quad (9-1-5)$$

即

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}} = \frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}} = \frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}};$$

曲线在 P_0 处的法平面方程为

$$(x-x_0) + y'(x_0)(y-y_0) + z'(x_0)(z-z_0) = 0. \quad (9-1-6)$$

例 1 求螺旋线

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = amt$$

在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程与法平面方程.

解 $x' = -a \sin t, \quad y' = a \cos t, \quad z' = am,$

故曲线在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程为

$$\frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}a}{-1} = \frac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}a}{1} = \frac{z - \frac{am\pi}{4}}{\sqrt{2}m};$$

法平面方程为

$$-\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}a\right) + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}a\right) + \sqrt{2}m\left(z - \frac{am\pi}{4}\right) = 0,$$

即

$$-x + y + \sqrt{2}mz = \frac{\sqrt{2}}{4}am^2\pi.$$

例 2 求曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ z = xy \end{cases}$$

在点 $M_0(1, 2, 2)$ 处的切线方程与法平面方程.

解 令

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9,$$

$$G(x, y, z) = xy - z,$$

则有

$$\left. \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \right|_{M_0} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ x & -1 \end{vmatrix}_{M_0} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

还可求得

$$\left. \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} \right|_{M_0} = 10, \quad \left. \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \right|_{M_0} = -6.$$

故切线方程为

$$\frac{x-1}{-8} = \frac{y-2}{10} = \frac{z-2}{-6};$$

法平面方程为

$$-8(x-1) + 10(y-2) - 6(z-2) = 0,$$

即

$$4x - 5y + 3z = 0.$$



习 题 9-1

1. 求下列曲线在给定点的切线方程和法平面方程:

(1) $x = a \sin^2 t, y = b \sin t \cos t, z = c \cos^2 t$, 点 $t = \frac{\pi}{4}$;

(2) $x^2 + y^2 + z^2 = 6, x + y + z = 0$, 点 $M_0(1, -2, 1)$;

(3) $y^2 = 2mx, z^2 = m - x$, 点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

2. $t(0 < t < 2\pi)$ 为何值时, 曲线 $L: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \sin \frac{t}{2}$ 在相应点的切线垂直于平面 $x + y + \sqrt{2}z = 0$? 并求相应的切线方程和法平面方程.

3. 在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上求一点 M , 使曲线在点 M 处的切线与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行.

第二节

空间曲面的切平面与法线

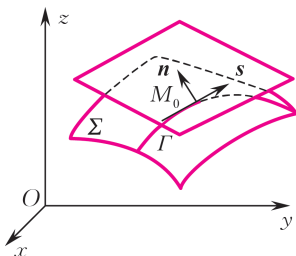


图 9-2

设曲面 Σ 的方程为

$$F(x, y, z) = 0,$$

如图 9-2 所示, 点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 在曲面 Σ 上. 过 M_0 在 Σ 上任作一条曲线 Γ , 设 Γ 的参数方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

且 M_0 对应于参数 t_0 , 假定在 $t = t_0$ 处, $x(t), y(t), z(t)$ 均可导, 且导

数不全为零,则

$$F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0.$$

在 t_0 处对上式关于 t 求导,得

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = 0.$$

引入向量

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)), \\ \mathbf{s} &= (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)). \end{aligned}$$

注意到 $\mathbf{s}$ 是曲线 Γ 在 M_0 处的切向量,而

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 0,$$

即说明不管 Γ 的选取方式如何,它在点 M_0 处的切向量 $\mathbf{s}$ 总垂直于定向量 $\mathbf{n}$. 所以,曲面 Σ 上通过 M_0 的一切曲线在点 M_0 的切线均在同一个平面内,这个平面称为曲面 Σ 在 M_0 处的切平面. 由平面的法式方程,可知此切平面的方程为

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (9-2-1)$$

通过点 M_0 且垂直于切平面的直线称为曲面 Σ 在该点的法线,而把 $\mathbf{n}$ 称为曲面的法向量. 由于 $\mathbf{n}$ 即为法线的方向向量,因此由直线的标准方程可得出法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (9-2-2)$$

若曲面 Σ 以显函数

$$z = f(x, y)$$

的形式给出,可记

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z,$$

则曲面在 M_0 处的法向量为

$$\mathbf{n} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1).$$

由此得出曲面在 M_0 处的切平面方程和法线方程分别为

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

例 1 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ 在点 $(1, 2, 3)$ 处的切平面方程及法线方程.

解 记 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$, 则

$$\mathbf{n} = (F'_x, F'_y, F'_z) \Big|_{(1, 2, 3)} = (2, 4, 6).$$

所以,在点 $(1, 2, 3)$ 处的切平面方程为

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + 6(z - 3) = 0,$$

即

$$x + 2y + 3z - 14 = 0;$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

空间曲面方程的形式是多种多样的. 下面我们讨论一种较为复杂的形式. 设曲面 Σ 以参数方程形式

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (9-2-3)$$

给出, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲面上一点, 现在我们要求曲面 Σ 在点 M_0 处的切平面方程和法线方程.

显然, 解决这一问题最直接的方法就是在式(9-2-3)中选择两个相对简单的方程组成方程组, 例如

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases}$$

解此方程组得 $u = u(x, y), v = v(x, y)$, 再将此方程组代入第三个方程, 如 $z = z(u, v) = z(u(x, y), v(x, y))$, 然后用前面的方法求得曲面 Σ 上过 M_0 的切平面方程和法线方程.

然而, 当式(9-2-3)中方程都比较复杂时, 上述做法是很难实现的. 下面我们将介绍一种一般的方法. 基于上面直接方法的思路, 我们现在来推导这一问题的一般公式. 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲面上一点, 且对应的参数点为 (u_0, v_0) , 首先选取方程组

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases} \quad (9-2-4)$$

这里需特别指出的是, 这个方程组中方程的选择要求其雅可比行列式不为零, 即

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} = \begin{vmatrix} x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

否则, 通过调换方程使得上述条件成立.

在方程组(9-2-4)中, 记

$$F(x, y, u, v) = x - x(u, v) = 0,$$

$$G(x, y, u, v) = y - y(u, v) = 0.$$

我们假设第八章第六节定理3的条件成立. 由此定理有

$$u'_x = \frac{1}{J} y'_v(u_0, v_0); \quad v'_x = -\frac{1}{J} y'_u(u_0, v_0);$$

$$u'_y = -\frac{1}{J} x'_v(u_0, v_0); \quad v'_y = \frac{1}{J} x'_u(u_0, v_0),$$

其中 J 为式(9-2-4)在参数点 (u_0, v_0) 处的雅可比行列式.

记

$$H(x, y, z) = z(u, v) - z,$$

则有

$$H'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)};$$

$$H'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)};$$

$$H'_z = -1.$$

将对应参数点 (u_0, v_0) 代入 H'_x, H'_y , 得曲面 Σ 在 M_0 处的切平面方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} (x - x_0) + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} (y - y_0) \\ & + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} (z - z_0) = 0, \end{aligned}$$

其行列式形式可表示为

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0; \quad (9-2-5)$$

法线方程为

$$\frac{x - x(u_0, v_0)}{\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}} = \frac{y - y(u_0, v_0)}{\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}} = \frac{z - z(u_0, v_0)}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}}. \quad (9-2-6)$$

注意 $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}$ 不能全为零.

例 2

曲面的参数方程为

$$\begin{cases} x = u + e^{u+v}, \\ y = u + v, \\ z = e^{u-v}, \end{cases}$$

求曲面在 $u = 1, v = -1$ 处的切平面方程及法线方程.

解

$$x_0 = 2, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = e^2,$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \Big|_{(1, -1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{u-v} & -e^{u-v} \end{vmatrix} \Big|_{(1, -1)} = -2e^2,$$

$$\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \Big|_{(1, -1)} = \begin{vmatrix} e^{u-v} & -e^{u-v} \\ 1 + e^{u+v} & e^{u+v} \end{vmatrix} \Big|_{(1, -1)} = 3e^2,$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(1, -1)} = \begin{vmatrix} 1 + e^{u+v} & e^{u+v} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Big|_{(1, -1)} = 1.$$

故在点 $M_0(2, 0, e^2)$ 处曲面的切平面方程为

$$-2e^2(x - 2) + 3e^2(y - 0) + (z - e^2) = 0,$$

即

$$-2e^2x + 3e^2y + z + 3e^2 = 0;$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{-2e^2} = \frac{y}{3e^2} = \frac{z-e^2}{1}.$$

注意 其实,在本例中我们只要选择好方程,构成方程组,用直接方法简单得多,因为将 $u+v=y$ 代入第一个方程得 $u=x-e^y$,将这一结果回代入第二个方程得 $v=y-x+e^y$,将 u, v 代入第三个方程得

$$\ln z = 2x - y - 2e^y,$$

再令 $F(x, y, z) = 2x - y - 2e^y - \ln z = 0$, 即可直接得到上述结果. 但用这种方法只能解决一些相对简单的问题.

习 题 9-2



1. 指出曲面 $z = xy$ 上何处的法线垂直于平面 $x-2y+z=6$, 并求出该点的法线方程与切平面方程.

2. 求下列曲面在给定点的切平面方程和法线方程:

(1) $z = x^2 + y^2$, 点 $M_0(1, 2, 5)$;

(2) $z = \arctan \frac{y}{x}$, 点 $M_0(1, 1, \frac{\pi}{4})$.

3. 证明: 曲面 $xyz = a^3$ 上任一点的切平面与坐标平面围成的四面体体积一定.

4. 设直线 $l: \begin{cases} x+y+b=0, \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 Π 上, 而平面 Π 与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切于点 $(1, -2, 5)$,

求 a 和 b 的值.

第三节 方向导数

我们称 $\mathbf{R}^n$ 空间中任一单位向量为**方向**. 当 $n=2$ 时, 任何方向可表示为 $\mathbf{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$, 其中 θ 为该方向与 x 轴正向的夹角; 当 $n=3$ 时, 任何方向可表示为 $\mathbf{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 其中 α, β, γ 为该方向的方向角. 函数 $u = f(x, y, z)$ 在 $M(x, y, z)$ 处的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ 分别表示函数沿三个坐标轴方向的变化率. 在许多实际问题中, 常常需要知道函数在此点沿某个特定方向的变化率, 即沿该方向的方向导数.

设函数 $u = f(x, y, z)$ 在开集 $D \subset \mathbf{R}^3$ 内有定义, 给定点 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ 及向量 $\boldsymbol{l}$, 记 $\boldsymbol{e}_l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 为与 $\boldsymbol{l}$ 同方向的单位向量, 则过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 、以 $\boldsymbol{e}_l$ 为方向向量的直线 L 的参数方程为

$$x = x_0 + t \cos \alpha, \quad y = y_0 + t \cos \beta, \quad z = z_0 + t \cos \gamma,$$

其中 t 为参数. 在直线 L 上任取一点 $P \in D$, 其坐标为

$$(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma),$$

即当 $t = 0$ 与 $t = \Delta l$ 时, 分别对应于 L 上的点 P_0 与 P (见图 9-3).

定义 如果极限

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta l \cos \alpha, y_0 + \Delta l \cos \beta, z_0 + \Delta l \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta l}$$

存在, 则称这个极限为函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 沿向

量 $\boldsymbol{l}$ 的**方向导数**, 并记作 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{P_0}$ 或 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{P_0}$ 或 $f'_l(P_0)$, 即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{P_0} =$$

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta l \cos \alpha, y_0 + \Delta l \cos \beta, z_0 + \Delta l \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta l},$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为向量 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦.

若用 $\boldsymbol{e}_x = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_y = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)$ 分别表示 x 轴、 y 轴、 z 轴的正向, 如果 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ 存在, 则函数 $u = f(x, y, z)$ 沿 x 轴、 y 轴、 z 轴的方向导数为 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$. 一般地, 我们可以推得以下方向导数的计算公式.

定理 若函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处可微, 则函数 f 在 P_0 处沿任意方向 $\boldsymbol{e}_l$ 的方向导数存在, 且有以下的求导公式:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{P_0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{P_0} \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{P_0} \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{P_0} \cos \gamma, \quad (9-3-1)$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为方向 $\boldsymbol{e}_l$ 的方向余弦.

证 当 $u = f(x, y, z)$ 在 P_0 处可微时, u 的全增量可表示成

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + o(\rho),$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$. 于是

$$\frac{\Delta u}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\Delta z}{\rho} + \frac{o(\rho)}{\rho}.$$

如果限制点 $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ 取在射线 L 上, 则

$$\frac{\Delta x}{\rho} = \cos \alpha, \quad \frac{\Delta y}{\rho} = \cos \beta, \quad \frac{\Delta z}{\rho} = \cos \gamma,$$

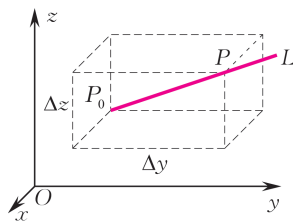


图 9-3

于是

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

在空间 $\mathbf{R}^2$ 中, 二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处沿任一给定方向 l 的方向导数可看作上述情形的特例. 此时, 如果 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 则成立如下公式:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \cos \beta,$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta$ 为方向 l 的方向余弦.

例

|| $u = x^2 + y^2 - z, l = 2i + j + 3k$, 试求 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{(1,1,1)}$.

解 先求出 l 的方向余弦:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}},$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}},$$

$$\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

再求出偏导数:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -1.$$

于是

$$e_l = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{(1,1,1)} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}.$$



习 题 9-3



1. 求函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处沿方向角为 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数.
2. 求函数 $u = xyz$ 在点 $(5, 1, 2)$ 处沿从点 $A(5, 1, 2)$ 到 $B(9, 4, 14)$ 方向的方向导数.
3. 求函数 $z = x^2 + y^2$ 在任意点 $M(x, y)$ 处沿向量 $e = (-1, -1)$ 所指方向的方向导数.
4. 求函数 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, 2)$ 处沿从该点到点 $(2, 2 + \sqrt{3})$ 方向的方向导数.

第四节

多元函数的极值及其求法

在第八章第二节中,我们说明了多元连续函数在有界闭区域上存在最大值和最小值.但在实际应用问题中却要求我们给出求多元函数最大值与最小值的方法.跟一元函数一样,多元函数的最大值与最小值是与多元函数的极值密切相关的.为此,我们先介绍二元函数的极值的定义以及判断极值的必要条件与充分条件,至于自变量多于两个的情形可以类似地加以解决.

一、多元函数的极值及最大值与最小值

定义 设二元函数 $u = f(x, y)$ 定义在开集 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 上,若存在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0) \subset \Omega$, 对任意 $P(x, y) \in U(P_0)$, 有

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0),$$

则称点 P_0 为 f 的**极小值点**, $f(x_0, y_0)$ 称为 f 的**极小值**; 若存在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0) \subset \Omega$, 使得对任意 $P(x, y) \in U(P_0)$, 有

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0),$$

则称点 P_0 为 f 的**极大值点**, $f(x_0, y_0)$ 称为 f 的**极大值**.

极大值与极小值统称为极值,极大值点与极小值点统称为极值点.

定理 1 (极值点的必要条件) 如果二元函数 $u = f(x, y)$ 在区域 D 内可微, 那么函数 $z = f(x, y)$ 在 D 内一点 $P_0(x_0, y_0)$ 取得极值的必要条件是 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$.

证 因为 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 取得极值, 于是一元函数 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处也取得极值, 由一元函数取得极值的必要条件, 有 $f'_x(x, y_0) \Big|_{x=x_0} = 0$, 即

$$f'_x(x_0, y_0) = 0.$$

同理可得

$$f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

与一元函数类似, 我们把 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的一阶偏导数全为 0 的点称为 f 的**驻点 (稳定点)**. 定理 1 告诉我们, 偏导数存在的函数其极值点必是驻点, 但其逆不成立. 有些函数偏导数不存在的点, 也可能是极值点. 一般地, 可根据下面定理来判断驻点是否为

函数的极值点.

定理 2(极值点的充分条件) 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在开区域 $G \subset \mathbf{R}^2$ 内有二阶连续偏导数, $(x_0, y_0) \in G$ 是 f 的驻点, 令

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A,$$

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = B,$$

$$f''_{yy}(x_0, y_0) = C,$$

则

(1) 当 $AC - B^2 > 0$ 时, $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极值, 且当 $A < 0$ 时取极大值, 当 $A > 0$ 时取极小值;

(2) 当 $AC - B^2 < 0$ 时, $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 不取极值;

(3) 当 $AC - B^2 = 0$ 时, $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可能有极值, 也可能没有极值.

例 1 求 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 先求 f 的驻点. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6x - 9 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 6y = 0, \end{cases}$$

得四个驻点 $P_1(1, 0), P_2(-3, 0), P_3(1, 2), P_4(-3, 2)$. 又

$$f''_{xx} = 6x + 6, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{yy} = -6y + 6.$$

对 $P_1(1, 0), AC - B^2 > 0$, 且 $A > 0$, 故 P_1 是 f 的极小值点;

对 $P_2(-3, 0), AC - B^2 < 0$, 故 P_2 不是极值点;

对 $P_3(1, 2), AC - B^2 < 0$, 故 P_3 不是极值点;

对 $P_4(-3, 2), AC - B^2 > 0$, 且 $A < 0$, 故 P_4 是 f 的极大值点.

与一元函数类似, 我们可以利用极值来求函数的最值. 如果函数 f 在有界闭集 D 上连续, 则最值必存在. 其一般求法是: 将 f 在 D 内的一切驻点及偏导数不存在的点处的函数值与 D 的边界上的函数值进行比较, 最大的即为最大值, 最小的即为最小值. 在实际问题中, 往往根据问题的实际意义来简化判断过程.

例 2 试在 x 轴、 y 轴与直线 $x + y = 2\pi$ 围成的三角形闭区域上求函数 $u = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ 的最大值.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x - \cos(x + y) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \cos y - \cos(x + y) = 0, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \pm x = x + y + 2k\pi, \\ \pm y = x + y + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbf{N}, \mathbf{N} \text{ 表示非负整数集}),$$

在区域内部的解只有 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, 此点处 $u = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 而在边界 $x = 0, y = 0, x + y = 2\pi$ 上均有 $u = 0$, 所以 u 在 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 处取得最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

* 许多工程问题, 常常需要根据两个变量的一些实际数值, 来找出这两个变量的函数关系的近似表达式. 这样的近似表达式称为 **经验公式**.

根据二元函数极值的一个实际应用, 下面介绍数据处理技术中的一种常见方法——**最小二乘法**.

设变量 x, y 之间存在某种关系, 通过实验找到 n 组相关的数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 这些数据在 xOy 平面上呈现一种直线分布状态. 于是, 我们设想应能找到一条直线

$$y = ax + b$$

来刻画变量 x, y 之间的函数关系. 当然, $y = ax + b$ 并不能满足所有的点 (x_i, y_i) , 最理想的就是使得 $y = ax + b$ 在 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 处的函数值与实际数据的偏差都很小. 记 $\delta_i = y_i - (ax_i + b)$. 显然, 用 $\sum_{i=1}^n \delta_i$ 来表示误差的总体

效果不妥, 因为 δ_i 有正、有负, 于是想到用 $\sum_{i=1}^n \delta_i^2$ 来表示总体误差. 我们的任务即为寻求 $y = ax + b$, 使

$$u = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

达到最小, 以保证每个偏差的绝对值都很小. 这种根据偏差平方和最小的条件来选择常数 a, b 的方法叫作 **最小二乘法**. 其过程实际上就是求 $u = \sum_{i=1}^n \delta_i^2$ 的最小值. 为此, 先求驻点:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b)(-1) = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

此方程组的唯一一组解即为 u 的最小值点.

例 3

为了测定刀具的磨损速度, 我们做这样的实验: 经过一定时间(每隔 1h), 测量 1 次刀具

的厚度,得到实验数据如下:

时间 t_i/h	0	1	2	3	4	5	6	7
刀具厚度 y_i/mm	27.0	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.8

试根据上面的数据建立 y 和 t 之间的函数关系.

解 首先,要确定 $y = f(t)$ 的类型.为此,在直角坐标系下描点.从图 9-4 中可以看出,这些点大致接近一条直线.因此,设 $f(t) =$

$at + b$, 求 $u = \sum_{i=0}^7 (y_i - (at_i + b))^2$ 的最小值.由上面的讨论,只需求解方程组

$$\begin{cases} a \sum_{i=0}^7 t_i^2 + b \sum_{i=0}^7 t_i = \sum_{i=0}^7 y_i t_i, \\ a \sum_{i=0}^7 t_i + 8b = \sum_{i=0}^7 y_i. \end{cases}$$

把 (t_i, y_i) 代入方程组,得

$$\begin{cases} 140a + 28b = 717, \\ 28a + 8b = 208.5, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a = -0.3036, \\ b = 27.125, \end{cases}$$

即

$$y = -0.3036t + 27.125.$$

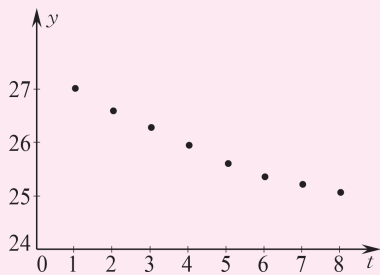


图 9-4

二、条件极值

以上讨论的多元函数极值问题,各自变量是相互独立变化的.然而,更为普遍的是,极值问题常常附加一些约束条件.附加某些条件的极值称为**条件极值**.相应地,前面讨论的极值问题叫作**无条件极值**或**普通极值**.有的条件极值可以化成无条件极值,但更多的条件极值无法化成无条件极值.条件极值常记作

$$\min(\text{或 } \max) u = u(x, y, z), \quad (9-4-1)$$

$$\text{s. t. } \varphi(x, y, z) = 0, \quad (9-4-2)$$

其中式(9-4-1)中的函数 $u(x, y, z)$ 称为**目标函数**,式(9-4-2)中的 $\varphi(x, y, z) = 0$ 称为**约束条件**.

求解条件极值问题通常都采用下述的**拉格朗日乘数法**.

定理 3 设 n 元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在开

区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 内有一阶连续偏导数,且 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (i = 1, 2, \dots, n)$ 不全为零,

则函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在条件 $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ 下的极值

点,必为拉格朗日函数

$$L = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (9-4-3)$$

的驻点,其中 λ 叫作拉格朗日乘数.

证 不妨设 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \neq 0$, 由隐函数存在定理, 方程 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 确定了一个函数 $x_n = g(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$. 于是, 函数 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在条件 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 下的条件极值问题, 就转化成为 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, g(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}))$ 的无条件极值问题. 由极值的必要条件, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1).$$

再对方程 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 用隐函数求导公式, 得

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_i} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} / \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}.$$

将其代入前式, 有

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} / \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0,$$

即

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} / \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_n} / \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1).$$

令其比值为 $-\lambda$, 即得 n 个方程

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

构造拉格朗日函数

$$L = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

定理 3 得证.

关于条件极值的充分条件, 我们不再深入讨论. 在实际问题中, 根据问题的实际意义, 拉格朗日乘数法求得的唯一驻点常常就是相应的最值点.

定理 3 的结论可以推广到多个约束条件下的条件极值问题, 如

$$\left. \begin{array}{l} \min(\text{或 } \max) u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \text{s. t. } \quad \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \quad \quad \quad \cdots \cdots \cdots \\ \quad \quad \quad \varphi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{array} \right\} \quad (m < n),$$

其中 $u, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ 在开区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 内有一阶连续偏导数, 约束条件中 m 个函数关于它的其中 m 个变量的雅可比行列式不等于零,

则函数 $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在条件 $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ 下的极值点必为拉格朗日函数

$$L = u(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

的驻点.

例 4

已知矩形的周长为 24 cm, 将它绕其一边旋转而构成一圆柱体, 试求所得圆柱体体积最大时的矩形面积.

解 设矩形相邻两边长为 x 和 y , 则问题归结为求目标函数 $V = \pi x^2 y (x > 0, y > 0)$ 在约束条件 $x + y = 12$ 下的极值. 构造拉格朗日函数

$$L = \pi x^2 y + \lambda(x + y - 12).$$

由方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2\pi xy + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \pi x^2 + \lambda = 0, \\ x + y = 12, \end{cases}$$

解得

$$x = 8, \quad y = 4.$$

由问题的实际意义, 最大体积必存在, 即在唯一驻点 $(8, 4)$ 处取得最大值, 因此矩形面积 $S = 32(\text{cm}^2)$.



习 题 9-4

1. 研究下列函数的极值:

(1) $z = x^3 + y^3 - 3(x^2 + y^2);$

(2) $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y);$

(3) $z = (6x - x^2)(4y - y^2);$

(4) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)};$

(5) $z = xy(a - x - y), a \neq 0.$

2. 设 $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$ 确定函数 $z = z(x, y)$, 研究其极值.

3. 在 xOy 平面上求一点, 使它到 $x = 0, y = 0$ 及 $x + 2y - 16 = 0$ 三直线距离的平方之和为最小.

4. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y - z = 1$ 之间的最短距离.

5. 抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 截成一椭圆, 求原点到这一椭圆的最长与最短距离.

6. 在第 I 卦限内作椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的切平面, 使切平面与三坐标面所围成的四面体体积最小, 求切点坐标.

* 7. 设空间有 n 个点, 坐标为 $(x_i, y_i, z_i) (i = 1, 2, \dots, n)$, 试在 xOy 平面上找一点, 使此点与这 n 个点的距离的平方和最小.

* 8. 已知过去几年产量和利润的数据如下:

产量 $x/(10^3 \text{ 件})$	40	47	55	70	90	100
利润 $y/(10^3 \text{ 元})$	32	34	43	54	72	85

试求产量和利润的函数关系, 并预测当产量达到 120 千件时工厂的利润.



习 题 九

1. 填空题:

(1) 设曲面 $\Sigma: F(x, y, z) = 0$, 则坐标原点到 Σ 上点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面的距离为_____.

(2) 设曲线 $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} P_0(x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, 则坐标原点到曲线 L 在点 P_0 的切线的距离为_____.

(3) 平面 $2x + 3y - z = \lambda$ 是曲面 $z = 2x^2 + 3y^2$ 在点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ 处的切平面, 则 λ 的值为_____.

(4) 函数 $z(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{t} dt$ 在点 $(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ 处沿方向 $u = i + j$ 的方向导数为_____.

(5) 若 $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$ 有极小值, 则其系数必须满足条件_____.

2. 选择题:

(1) 若曲面 $F(x, y, z) = 0$ 在 (x_0, y_0, z_0) 的切平面经过坐标原点, 那么在点 (x_0, y_0, z_0) 有().

A. $x_0 F'_x + y_0 F'_y + z_0 F'_z = 0$

B. $\frac{F'_x}{x_0} = \frac{F'_y}{y_0} = \frac{F'_z}{z_0}$

C. $\frac{F'_x}{x_0} + \frac{F'_y}{y_0} + \frac{F'_z}{z_0} = 1$

D. $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

(2) 若曲线 $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ 有经过坐标原点的切线, 那么().

A. $\frac{x(t)}{x'(t)} = \frac{y(t)}{y'(t)} = \frac{z(t)}{z'(t)}$ 有解

B. $x'(t)x(t) + y'(t)y(t) + z'(t)z(t) = 0$ 有解

C. $(x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0)$ 有解

D. L 只要不是直线就成立

(3) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 附近有定义, 且 $f'_x(0, 0) = 3, f'_y(0, 0) = 1$, 则().

A. $dz \Big|_{(0,0)} = 3dx + dy$

B. 曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的法向量为 $(3, 1, 1)$

C. 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的切向量为 $(1, 0, 3)$

D. 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的切向量为 $(3, 0, 1)$

(4) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x) > 0, f'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x) \ln f(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件是().

A. $f(0) > 1, f''(0) > 0$

B. $f(0) > 1, f''(0) < 0$

C. $f(0) < 1, f''(0) > 0$

D. $f(0) < 1, f''(0) < 0$

(5) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$. 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是().

A. 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$

B. 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

C. 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$

D. 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

3. 证明: 螺旋线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ 的切线与 z 轴形成定角.

4. 求曲面 $x + z = y \cos(x^2 - z^2)$ 在 $M_0(1, 2, 1)$ 处的切平面方程与法线方程.

5. 已知曲面 $z = x^2 + y^2 + z^2$ 上点 P 处的切平面与平面 $x - 2y + 2z = 0$ 平行, 求点 P 的坐标以及曲面在该点处的切平面方程.

6. 求函数 $z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处沿曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在这一点的内法线方向的方向导数.

7. 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 9y$ 的极值.

8. 求函数 $f(x, y) = \left(y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$ 的极值.

9. 求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

10. 设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值.

11. 已知曲线 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ x + y + 3z = 5, \end{cases}$ 求 C 上距离 xOy 平面最远的点和最近的点.

12. 在某一行星表面安装一个无线电望远镜. 为减少干扰, 要将望远镜安装在磁场最弱的位置. 假设该行星为一球体, 其半径为 6 个单位. 若以球心为坐标原点建立直角坐标系 $Oxyz$, 则行星表面上点 (x, y, z) 处的磁场强度为 $H(x, y, z) = 6x - y^2 + xz + 60$. 问: 应将望远镜安装在何处?

习题参考答案

习 题 7-1

1. 略.
2. $z = 0; \quad x = 0; \quad y = 0.$
3. $y = 0, z = 0; \quad x = 0, z = 0; \quad x = 0, y = 0.$
4. (1) $\sqrt{29}$; (2) $\sqrt{29}$; (3) $\sqrt{67}$; (4) $3\sqrt{5}$.
5. $5\sqrt{2}; \quad \sqrt{34}; \quad \sqrt{41}; \quad 5.$
6. $(0, 0, \frac{14}{9}).$
7. 略.

习 题 7-2

1. 略.
2. $5\mathbf{a} - 11\mathbf{b} + 7\mathbf{c}.$
3. $\overrightarrow{D_1A} = -(\mathbf{c} + \frac{1}{5}\mathbf{a}), \quad \overrightarrow{D_2A} = -(\mathbf{c} + \frac{2}{5}\mathbf{a}), \quad \overrightarrow{D_3A} = -(\mathbf{c} + \frac{3}{5}\mathbf{a}),$
 $\overrightarrow{D_4A} = -(\mathbf{c} + \frac{4}{5}\mathbf{a}).$
4. 2.
5. $(-2, 3, 0).$
6. (1) $a_x = 3, \quad a_y = 1, \quad a_z = -2;$ (2) $\sqrt{14};$
(3) $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{-2}{\sqrt{14}};$
(4) $\mathbf{e}_a = \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{j} - \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{k}.$
7. $|\mathbf{R}| = \sqrt{21}; \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{21}, \quad \cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{21}}.$
8. $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}, |\mathbf{b}| = \sqrt{38}, |\mathbf{c}| = 3; \quad \mathbf{a} = \sqrt{3}\mathbf{e}_a, \mathbf{b} = \sqrt{38}\mathbf{e}_b, \mathbf{c} = 3\mathbf{e}_c.$
9. $a_x = 13, \quad 7\mathbf{j}.$
10. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}).$
11. $(\frac{11}{4}, -\frac{1}{4}, 3).$
12. $(\frac{190}{49}, \frac{285}{49}, \frac{570}{49})$ 或 $(2, 3, 6).$

13. (1) -6 ; (2) -61 .
 14. (1) 38 ; (2) -113 ; (3) 9 .
 15. (1) $3i - 7j - 5k$; (2) $42i - 98j - 70k$;
 (3) $-42i + 98j + 70k$; (4) 0 .
 16. (1) 24 ; (2) 84 .

习 题 7-3

1. $3x - 2y + 6z + 2 = 0$.
 2. $x + 7y - 3z - 59 = 0$.
 3. $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$.
 4. $x - 3y - 2z = 0$.
 5. 略.
 6. $x - y = 0$.
 7. (1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$ 或 $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$;
 (2) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ 或 $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{3}$.
 8. $\frac{x}{1} = \frac{y-7}{-7} = \frac{z-17}{-19}; x = t, y = 7 - 7t, z = 17 - 19t$.
 9. (1) -4 ; (2) $\pm \frac{1}{2}\sqrt{70}$.
 10. (1) $18, -\frac{2}{3}$; (2) 6 .
 11. $2x - y - 3z = 0$.
 12. $\pm \frac{1}{\sqrt{30}}(5i + j - 2k)$.
 13. (1) $\frac{\pi}{2}$; (2) $78^\circ 5'$.
 14. (1) $(2, -3, 6)$; (2) $(-2, 1, 3)$.
 15. 1.

习 题 7-4

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z = 0$.
 2. $8x^2 + 8y^2 + 8z^2 - 68x + 108y - 114z + 779 = 0$.
 3. ~ 5 . 略.
 6. (1) $(3, 4, -2)$ 及 $(6, -2, 2)$; (2) $(4, -3, 2)$.
 7. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = \pm 5. \end{cases}$
 8. (1) $\begin{cases} -\frac{y^2}{\left(\frac{5\sqrt{5}}{3}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2} = 1, \\ x = 2; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, \\ y = 0; \end{cases}$

$$(3) \begin{cases} \frac{x^2}{(3\sqrt{2})^2} + \frac{z^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1, \\ y = 5; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 0, \\ z = 2. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}, \\ z = 0. \end{cases}$$

习 题 七

$$1. (1) x - y + z = -1;$$

$$(2) \sqrt{2};$$

$$(3) (-12, -4, 18);$$

$$(4) \begin{cases} 2x^2 + 5y^2 + 4xy = 1, \\ z = 0; \end{cases}$$

$$(5) x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

$$2. (1) B; \quad (2) A;$$

$$(3) B; \quad (4) B;$$

$$(5) D.$$

$$3. -\frac{4}{7}.$$

$$4. \frac{\pi}{3}.$$

$$5. \text{略}.$$

$$6. \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(-i - j + k), \quad \sin\theta = \frac{5\sqrt{13}}{26}.$$

$$7. \sin\theta = 1.$$

$$8. \sim 9. \text{略}.$$

$$10. \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

$$11. 2.$$

$$12. \text{略}.$$

$$13. 2x + 3y - 4z - 1 = 0.$$

$$14. (1) \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{2};$$

$$(2) \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{1};$$

$$(3) \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}.$$

$$15. (1) \text{平行}; \quad (2) \text{垂直};$$

$$(3) \text{重合}.$$

$$16. x + 2y + 3z = 0.$$

$$17. 2x + 15y + 7z + 7 = 0.$$

$$18. \left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

$$19. \frac{\sqrt{38}}{2}.$$

$$20. \begin{cases} 2x - y + 5z - 3 = 0, \\ x + 2y - 7 = 0. \end{cases}$$

21. $5x + 2y + z + 1 = 0.$

22. (1) $\begin{cases} 1 - 2x = y^2, \\ z = 0; \end{cases} \quad (2) 1 - 2x = y^2.$

习 题 8-1

- (1) 开集, 无界集, 聚点集: $\mathbf{R}^2$, 边界: $\{(x, y) \mid x = 0\}$;
 (2) 既非开集又非闭集, 有界集, 聚点集: $\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$,
 边界: $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$;
 (3) 开集, 区域, 无界集, 聚点集: $\{(x, y) \mid y \leq x^2\}$, 边界: $\{(x, y) \mid y = x^2\}$;
 (4) 闭集, 有界集, 聚点集: 本身, 边界:
 $\{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}.$
- $t^2 f(x, y).$
- $(x+y)^{xy} + (xy)^{2x}.$
- (1) $\{(x, y) \mid y^2 - 2x + 1 > 0\}$;
 (2) $\{(x, y) \mid x + y > 0, x - y > 0\}$;
 (3) $\{(x, y) \mid 4x - y^2 \geq 0, 1 - x^2 - y^2 > 0, x^2 + y^2 \neq 0\}$;
 (4) $\{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$;
 (5) $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 \geq y\}$;
 (6) $\{(x, y) \mid y - x > 0, x \geq 0, x^2 + y^2 < 1\}$;
 (7) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 \geq 0, x^2 + y^2 \neq 0\}.$

习 题 8-2

- (1) $\ln 2$; (2) e^2 ; (3) $-\frac{1}{4}$;
 (4) 2; (5) 0; (6) 0.
- (1) 连续; (2) 间断; (3) 不连续.
- (1) $\{(x, y) \mid y = -x\}$; (2) $\{(x, y) \mid y^2 = 2x\}$;
 (3) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$

习 题 8-3

- (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - \frac{2x}{y^3}; \quad (2) \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{1}{v} - \frac{v}{u^2}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{1}{u} - \frac{u}{v^2};$
 (3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xy}{x^2 + y^2};$
 (4) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{y} \csc \frac{2x}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2} \csc \frac{2x}{y};$
 (5) $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2(1+xy)^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (1+xy)^y \left(\ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy} \right);$
 (6) $\frac{\partial u}{\partial x} = yz^{xy} \ln z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz^{xy} \ln z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xyz^{xy-1};$
 (7) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(x-y)^z \ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}};$
 (8) $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1} + z^x \ln z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x + zy^{z-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y^z \ln y + xz^{z-1}.$

2. ~ 3. 略.

4. 1.

5. $\frac{\pi}{4}$.

$$6. (1) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -16xy, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2;$$

$$(2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$(3) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x \ln^2 y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y^{x-1}(1 + x \ln y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2};$$

$$(4) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2(1 + 2x^2)e^{x^2+y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xe^{x^2+y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x^2+y}.$$

$$7. f''_{xy}(0,0) = -1, \quad f''_{yx}(0,0) = 1.$$

习 题 8-4

$$1. (1) dz = e^{x^2+y^2}(2xdx + 2ydy);$$

$$(2) dz = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(ydx - xdy);$$

$$(3) du = yzx^{yz-1}dx + zx^{yz} \ln x dy + yx^{yz} \ln x dz;$$

$$(4) du = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}dx + \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}} \ln x dy - \frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}} \ln x dz.$$

$$2. (1) 1.68, 1.6;$$

$$(2) 0.30e, 0.25e.$$

$$3. (1) 1.00;$$

$$(2) 4.998;$$

$$(3) 2.039.$$

$$4. 0.062\text{cm}.$$

$$5. \text{体积减小 } 30\pi \text{ cm}^3.$$

$$6. \text{精确值为 } 13.632 \text{ m}^3, \text{近似值为 } 14.8 \text{ m}^3.$$

习 题 8-5

$$1. (1) \frac{\partial z}{\partial u} = 3u^2 \sin v \cos v (\cos v - \sin v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -2u^3 \sin v \cos v (\sin v + \cos v) + u^3 (\sin^3 v + \cos^3 v);$$

$$(2) \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{-v}{u^2 + v^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u}{u^2 + v^2};$$

$$(3) \frac{e^x + e^{x^3} 3x^2}{e^x + e^{x^3}};$$

$$(4) 4e^{2t}.$$

$$2. (1) \frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2;$$

$$(2) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}f'_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}f'_1 + \frac{1}{z}f'_2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}f'_2;$$

$$(3) \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + yf'_2 + yzf'_3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xf'_2 + xzf'_3, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xyf'_3.$$

3. ~ 4. 略.

$$5. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f' + 4x^2 f'', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy f'', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f' + 4y^2 f''.$$

$$6. (1) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{11} + \frac{2}{y} f''_{12} + \frac{1}{y^2} f''_{22}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{x}{y^2} (f''_{12} + \frac{1}{y} f''_{22}) - \frac{1}{y^2} f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3} f'_2 + \frac{x^2}{y^4} f''_{22};$$

$$(2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y f'_2 + y^4 f''_{11} + 4xy^3 f''_{12} + 4x^2 y^2 f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y f'_1 + 2x f'_2 + 2xy^3 f''_{11} + 2x^3 y f''_{22} + 5x^2 y^2 f''_{12},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x f'_1 + 4x^2 y^2 f''_{11} + 4x^3 y f''_{12} + x^4 f''_{22};$$

$$(3) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x+y} f'_3 - \sin x f'_1 + \cos^2 x f''_{11} + 2e^{x+y} \cos x f''_{13} + e^{2(x+y)} f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{x+y} f'_3 - \cos x \sin y f''_{12} + e^{x+y} \cos x f''_{13} - e^{x+y} \sin y f''_{32} + e^{2(x+y)} f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x+y} f'_3 - \cos y f'_2 + \sin^2 y f''_{22} - 2e^{x+y} \sin y f''_{23} + e^{2(x+y)} f''_{33}.$$

习 题 8-6

$$1. (1) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - e^x}{\cos y - 2xy};$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y};$$

$$(3) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy};$$

$$(4) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^3 yz}{(xy - z^2)^3}.$$

2. 略.

$$3. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'_1}{x^2 F'_2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F'_2 - y^2 F'_1}{y^2 F'_2}.$$

$$4. (1) \frac{dy}{dx} = -\frac{x(6z+1)}{2y(3z+1)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{x}{3z+1};$$

$$(2) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{vy - ux}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{uy + vx}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{ux + vy}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{ux - vy}{x^2 + y^2};$$

$$(3) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-uf'_1(2yvg'_2 - 1) - f'_2 \cdot g'_1}{(xf'_1 - 1)(2yvg'_2 - 1) - f'_2 \cdot g'_1}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g'_1(xf'_1 + uf'_1 - 1)}{(xf'_1 - 1)(2yvg'_2 - 1) - f'_2 \cdot g'_1};$$

$$(4) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\cos v - e^u}{u(e^u(\sin v - \cos v) + 1)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sin v + e^u}{u(e^u(\sin v - \cos v) + 1)}.$$

$$5. \frac{\partial z}{\partial x} = (v \cos v - u \sin v) e^{-u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (u \cos v + v \sin v) e^{-u}.$$

习 题 8-7

$$1. f(x, y) = 2 + 3(x-2) + (y+1) + (x-2)^2 - (x-2)(y+1) + (y+1)^2 + (x-2)^3.$$

$$2. y^x = 1 + (y-1) + (x-1)(y-1) + o(\rho^2).$$

$$3. e^{x+y} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} (x+y)^i + \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta(x+y)} \quad (0 < \theta < 1).$$

4. $f(x, y) = y + \frac{1}{2!}(2xy - y^2) + \frac{1}{3!}(3x^2y - 3xy^2 + y^3) + R_3$, 其中

$$R_3 = \frac{e^{\theta x}}{4!} \left(\frac{x^3 y}{1 + \theta y} - \frac{x^2 y^2}{(1 + \theta y)^2} + \frac{2xy^3}{(1 + \theta y)^3} - \frac{6y^4}{(1 + \theta y)^4} \right) \quad (0 < \theta < 1).$$

习 题 八

1. (1) 1; (2) $\frac{1}{2}(dx + dy)$;
 (3) $xf''_{uv}(x, xy) + f'_v(x, xy) + xyf''_{vw}(x, xy)$; (4) 4;
 (5) 2.
2. (1) B; (2) C; (3) B; (4) B;
 (5) D.
3. 略.
4. $2xy$.
5. -1 .
6. 2.
7. 1.
8. $f''_{11}(1, 1) + f''_{12}(1, 1) + f'_1(1, 1)$.
9. $f''_{xx}(0, 0, 1) = 2$, $f''_{yz}(0, -1, 0) = 0$, $f'''_{zzx}(2, 0, 1) = 0$.
10. $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$.
11. 略.

习 题 9-1

1. (1) $\begin{cases} \frac{x - \frac{a}{2}}{a} = \frac{z - \frac{c}{2}}{-c}, \\ y = \frac{b}{2}, \end{cases} \quad ax - cz - \frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} = 0;$
 (2) $\begin{cases} y = -2, \\ x + z - 2 = 0, \end{cases} \quad x - z = 0;$
 (3) $\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{\frac{m}{y_0}} = \frac{z - z_0}{-\frac{1}{2z_0}}, \quad (x - x_0) + \frac{m}{y_0}(y - y_0) - \frac{1}{2z_0}(z - z_0) = 0.$
2. $t = \frac{\pi}{2}$, $\frac{x - \frac{\pi}{2} + 1}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \quad x + y + \sqrt{2}z - \left(4 + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$
3. $(-1, 1, -1)$ 或 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right).$

习 题 9-2

1. $(2, -1, -2), \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1}, x - 2y + z - 2 = 0.$
2. (1) $2x + 4y - z = 5, \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1};$

$$(2) -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) - \left(z - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad \frac{x-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{\frac{1}{2}} = \frac{z - \frac{\pi}{4}}{-1}.$$

3. 略.

4. $a = -5, \quad b = -2.$

习 题 9-3

1. 5.

2. $\frac{98}{13}.$

3. $-\sqrt{2}x - \sqrt{2}y.$

4. $1 + 2\sqrt{3}.$

习 题 9-4

1. (1) 极小值: $f(2, 2) = -8$, 极大值: $f(0, 0) = 0.$

(2) 极小值: $f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{e}{2}.$

(3) 极大值: $f(3, 2) = 36.$

(4) 极小值: $z\Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0$, 极大值: $z\Big|_{x^2+y^2=1} = e^{-1}.$

(5) $a < 0$ 时, 有极小值: $f\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27};$

$a > 0$ 时, 有极大值: $f\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}.$

2. 极小值: $z(-2, 0) = 1$; 极大值: $z\left(\frac{16}{7}, 0\right) = -\frac{8}{7}.$

3. $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right).$

4. $\frac{\sqrt{3}}{6}.$

5. 最长为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$, 最短为 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}.$

6. $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$, 最小值: $\frac{\sqrt{3}}{2}abc.$

7. $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, 0\right).$

8. $y = 0.884x - 5.881, \quad L = 100.186.$

习 题 九

1. (1) $\frac{|x_0 F'_x + y_0 F'_y + z_0 F'_z|}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}};$

(3) $\frac{5}{4};$

(5) $ac - b^2 > 0, a > 0.$

(2) $\frac{|\overrightarrow{OP_0} \times \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}|}{\sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0)}};$

(4) $\frac{2}{\sqrt{\pi}};$

2. (1) A; (2) A; (3) C; (4) A;
(5) D.

3. 略.

4. 切平面方程: $x - y + z = 0$; 法线方程: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

5. $P(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ 或者 $P(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{6})$;

切平面方程分别为 $x - 2y + 2z + \frac{1}{2} = 0$ 及 $x - 2y + 2z - \frac{5}{2} = 0$.

6. $\frac{1}{ab} \sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

7. 在 $(0, 1)$ 处, 极大值为 5; 在 $(2, -3)$ 处, 极小值为 -31 .

8. $f(x, y)$ 仅有极小值 $f(1, -\frac{4}{3}) = -e^{-\frac{1}{3}}$, 无极大值.

9. $f(x, y)$ 有极小值 $f(0, \frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$, 无极大值.

10. 点 $(9, 3)$ 是 $z = z(x, y)$ 的极小值点, 极小值为 $z(9, 3) = 3$;

点 $(-9, -3)$ 是 $z = z(x, y)$ 的极大值点, 极大值为 $z(-9, -3) = -3$.

11. 最远点为 $(-5, -5, 5)$, 最近点为 $(1, 1, 1)$.

12. $(-4, \pm 4, 2)$.

习 题 10-1

1. (1) $\geq$; (2) $\leq$.

2. (1) $8 \leq I \leq 8\sqrt{2}$; (2) $0 \leq I \leq \pi^2$; (3) $36\pi \leq I \leq 100\pi$.

3. (1) $\frac{\pi}{3}a^3$; (2) $\frac{2}{3}\pi a^3$.

4. $f(x_0, y_0)$.

5. (1) $\int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} f(x, y) dx$; (2) $\int_{y^2}^{y^2+2} dy \int_{y^2}^{y^2+2} f(x, y) dx$; (3) $\int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x, y) dy$.

6. (1) $\int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$; (2) $\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$;

(3) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_{\frac{1}{2}(3-x)}^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x, y) dy$;

(4) $\int_{-1}^0 dy \int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$; (5) $\int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} f(x, y) dy$.

7. $xy + \frac{1}{8}$.

8. (1) $\frac{9}{4}$; (2) $\frac{1}{2}$; (3) $\frac{\pi}{6}$; (4) -2 .

9. (1) $1 - \sin 1$; (2) $\frac{3}{8}e - \frac{1}{2}\sqrt{e}$.

10. (1) $-6\pi^2$; (2) $\pi(1 - \frac{1}{e})$;

(3) $\frac{3}{64}\pi^2$; (4) $\frac{\pi}{2}$.

11. (1) $\frac{3}{4}\pi a^4$; (2) $\frac{1}{6}a^3(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$;

- (3) $\sqrt{2} - 1$; (4) $\frac{1}{8}\pi a^4$.
12. (1) $\frac{28}{3}\ln 3$; (2) $\frac{14}{45}$; (3) $\frac{3}{2}$;
- (4) $\frac{1}{2}ab\pi$; (5) $\frac{41}{2}\pi$; (6) 9π .

习 题 10-2

1. (1) $m > 1$ 时收敛; (2) $p > 1, q > 1$ 时收敛; (3) $p > \frac{1}{2}$ 时收敛.
2. $\frac{\pi}{2}$.
3. (1) $m < 1$ 时收敛, $m \geq 1$ 时发散; (2) $p < 1$ 时收敛, $p \geq 1$ 时发散.

习 题 10-3

1. (1) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz$; (2) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz$;
- (3) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{2-x^2} f(x, y, z) dz$; (4) $\int_0^a dx \int_0^b \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} dy \int_0^{xy/c} f(x, y, z) dz$.
2. (1) $\frac{1}{364}$; (2) $\frac{1}{2}(\ln 2 - \frac{5}{8})$; (3) $\frac{59}{480}\pi R^5$;
- (4) $\frac{1}{48}a^6$; (5) $3\pi(e^2 - 1)$; (6) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.
3. 略.
4. (1) $\frac{7\pi}{12}$; (2) $\frac{16}{3}\pi$.
5. (1) $\frac{4\pi}{5}$; (2) $\frac{7}{6}\pi a^4$.
6. (1) $\frac{1}{8}$; (2) $\frac{\pi}{10}$; (3) 8π ; (4) $\frac{4\pi}{15}(A^5 - a^5)$.

习 题 10-4

1. $k\pi R^4$.
2. $2a^2(\pi - 2)$.
3. $\sqrt{2}\pi$.
4. $16R^2$.
5. (1) $\bar{x} = \frac{3}{5}x_0, \bar{y} = \frac{3}{8}y_0$; (2) $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$; (3) $\bar{x} = \frac{a^2 + ab + b^2}{2(a+b)}, \bar{y} = 0$.
6. $\bar{x} = \frac{35}{48}, \bar{y} = \frac{35}{54}$.
7. $\bar{x} = \frac{2}{5}a, \bar{y} = \frac{2}{5}a$.
8. (1) $I_y = \frac{1}{4}\pi a^3 b$; (2) $I_x = \frac{72}{5}, I_y = \frac{96}{7}$; (3) $I_x = \frac{1}{3}ab^3, I_y = \frac{1}{3}a^3 b$.

9. $\frac{1}{12}Mh^2$, $\frac{1}{12}Mb^2$ ($M = bh\rho$ 为矩形板的质量).

10. $I_x = \frac{ab^3}{12}\rho$, $I_y = \frac{ab}{12}(a^2 + b^2)\rho$.

11. $I = \frac{368}{105}\rho$.

习 题 10-5

(1) $2\pi a^{2n+1}$; (2) $\sqrt{2}$; (3) $\frac{1}{12}(5\sqrt{5} + 6\sqrt{2} - 1)$;

(4) $e^a \left(2 + \frac{\pi}{4}a\right) - 2$; (5) $\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - e^{-2})$.

习 题 10-6

1. (1) $\frac{13}{3}\pi$; (2) $\frac{149}{30}\pi$; (3) $\frac{111}{10}\pi$.

2. (1) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi$; (2) 9π .

3. (1) $4\sqrt{61}$; (2) $-\frac{27}{4}$; (3) $\pi a(a^2 - h^2)$; (4) $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$; (5) πR^3 .

4. $\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3} + 1)$.

5. $\frac{4}{3}\rho_0\pi a^4$.

习 题 十

1. (1) $e^2 - 1$; (2) $\frac{\pi}{3}$; (3) $\frac{4}{15}\pi$; (4) $\frac{13}{6}$; (5) $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

2. (1) B; (2) A; (3) C; (4) C; (5) B.

3. $I = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

4. $\frac{1}{4}\ln 17$.

5. $\ln(1 + \sqrt{2})$.

6. a .

7. $\frac{3}{8}$.

8. (1) $\frac{1}{6}ab$; (2) $\frac{a^2}{2}\ln 2$.

9. 略.

10. $\frac{1}{4}\pi h^4$.

11. (1) $\frac{32}{3}\pi$; (2) πa^3 ; (3) $\frac{\pi}{6}$; (4) $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 4)$.

12. (1) $\frac{1}{4}\pi^2 abc$; (2) $4\pi abc(e - 2)$.

13. (1) $\frac{1}{12}(17\sqrt{17}-1)$; (2) $9-2\pi$.

14. (1) 9; (2) $\frac{256}{15}a^3$; (3) $2\pi^2 a^3(1+2\pi^3)$; (4) $\frac{\sqrt{2}}{3}a\pi^3$.

15. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

习 题 11-2

1. ~ 2. 略.

3. (1) $-\frac{56}{15}$; (2) $-\frac{\pi}{2}a^3$; (3) 0; (4) -2π ;

(5) $\frac{k^3\pi^3}{3}-a^2\pi$; (6) $-\frac{87}{4}$; (7) $\frac{1}{2}$; (8) $-\frac{14}{15}$.

4. (1) $\frac{34}{3}$; (2) 11; (3) 14; (4) $\frac{32}{3}$.

5. $\frac{k}{2}(b^2-a^2)$ (k 为比例系数).

6. (1) $\frac{\sqrt{2}}{16}\pi$; (2) -4 .

习 题 11-3

1. (1) 12; (2) 0; (3) $\frac{\pi^2}{4}$; (4) $\frac{\sin 2}{4}-\frac{7}{6}$; (5) $\frac{m\pi}{8}a^2$.

2. (1) $\frac{3}{8}\pi a^2$; (2) a^2 ; (3) πa^2 .

3. (1) 0; (2) 236; (3) -1 ; (4) 9.

4. (1) $\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2$; (2) x^2y ;

(3) $x^3y+4x^2y^2-12e^y+12ye^y$; (4) $y^2\sin x+x^2\cos y$.

5. $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

6. 略.

7. (1) $\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}=C$; (2) $x-y-\ln(x+y)=C$;

(3) $x\sin y+y\cos x=C$; (4) $\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3+x^2y=C$.

习 题 11-5

1. 略.

2. (1) $\frac{2}{105}\pi R^7$; (2) $\frac{3}{2}\pi$; (3) $\frac{1}{2}$;

(4) $\frac{1}{8}$; (5) 0; (6) a^4 .

习 题 11-6

1. $\frac{32}{3}\pi$.

$$2. (1) 3a^4; \quad (2) \frac{12}{5}\pi a^5; \quad (3) \frac{2}{5}\pi a^5; \quad (4) 81\pi.$$

$$3. (1) -\sqrt{3}\pi a^2; \quad (2) -\frac{9}{2}; \quad (3) -20\pi; \quad (4) 9\pi.$$

习 题 11-7

$$1. (1) \int_L \frac{P+Q}{\sqrt{2}} ds; \quad (2) \int_L \frac{P+2xQ}{\sqrt{1+4x^2}} ds; \quad (3) \int_L (\sqrt{2x-x^2}P + (1-x)Q) ds.$$

$$2. \int_r \frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}} ds.$$

$$3. (1) \iint_S \left(\frac{3}{5}P + \frac{2}{5}Q + \frac{2\sqrt{3}}{5}R \right) dS; \quad (2) \iint_S \frac{2xP+2yQ+R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS.$$

习 题 十 一

$$1. (1) 0; \quad (2) \pi; \quad (3) \frac{3\pi}{2}; \quad (4) 4\pi; \quad (5) 2\pi.$$

$$2. (1) B; \quad (2) A; \quad (3) D; \quad (4) B; \quad (5) C.$$

$$3. -\frac{33}{10}.$$

$$4. J = \frac{\pi}{2} - 4.$$

$$5. \text{略}.$$

$$6. -\frac{1}{2}\pi^2.$$

$$7. (1) \text{略}; \quad (2) \varphi(y) = -y^2.$$

$$8. 2\pi.$$

$$9. -\pi.$$

$$10. (1) \text{略}; \quad (2) \frac{\pi}{2e}.$$

$$11. -\frac{1}{y} + \frac{x^3}{y^3} = C.$$

$$12. \frac{8\pi}{3}.$$

$$13. I = -\pi.$$

$$14. I = 4\pi.$$

$$15. \frac{\pi}{3}.$$

$$16. -\frac{64}{3}\pi.$$

$$17. \frac{11}{20}\pi.$$

$$18. u(x, y) = y \ln x + \frac{x^2}{y} - 1.$$

$$19. \pi.$$

习 题 12-1

- (1) $\frac{1}{2n-1}$; (2) $\frac{x^{\frac{n}{2}}}{(2n)!!}$; (3) $(-1)^{n+1} \frac{a^{2n+1}}{2n+1}$.
- (1) $\frac{1}{4}$; (2) $\frac{1}{4}$; (3) $1-\sqrt{2}$.
- (1) 发散; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 发散.
- (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 发散.

习 题 12-2

- (1) 收敛; (2) 发散; (3) 收敛; (4) 收敛;
(5) 当 $a > 1$ 时收敛, 当 $0 < a \leq 1$ 时发散; (6) 发散.
- (1) 收敛; (2) 发散; (3) 发散; (4) 收敛.
- (1) 发散; (2) 收敛; (3) 收敛;
(4) 当 $b < a$ 时收敛, 当 $b > a$ 时发散, 当 $b = a$ 时不能判定.

习 题 12-3

- (1) 条件收敛; (2) 条件收敛; (3) 绝对收敛;
(4) 绝对收敛; (5) 条件收敛; (6) 绝对收敛.
- $\frac{1}{2^n(2n+3)(n+1)!}$.
- 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 u_n$ 存在, 所以 $\exists M > 0$, 使得对一切 n , 都有 $|n^2 u_n| \leq M$, 从而 $|u_n| \leq \frac{M}{n^2}$. 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2}$ 为收敛的正项级数, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.
- 因为 $\left| \frac{u_n}{n} \right| \leq \left| \frac{2u_n}{n} \right| \leq u_n^2 + \frac{1}{n^2}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛(据条件知), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n^2 + \frac{1}{n^2} \right)$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{u_n}{n} \right|$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 绝对收敛.

习 题 12-4

- (1) 当 $x > 1$ 时, 收敛, 当 $x \leq 1$ 时, 发散;
(2) 当 $x > 1$ 时, 级数绝对收敛; 当 $0 < x \leq 1$ 时, 级数条件收敛; 当 $x \leq 0$ 时, 级数发散.
- (1) $R = 1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$, 收敛域为 $(-1, 1)$;
(2) $R = e$, 收敛区间为 $(-e, e)$, 收敛域为 $(-e, e)$;
(3) $R = 1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$, 收敛域为 $(-1, 1)$;
(4) $R = 1$, 收敛区间 $(0, 2)$, 收敛域为 $[0, 2]$.
- (1) $\frac{1}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1)$; (2) $\frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1)$.

习 题 12-5

- (1) $\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2} \right)^n, \quad (-2, 2]$;

- (2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad (-\infty, +\infty);$
- (3) $x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}, \quad (-1, 1];$
- (4) $x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{2(n+1)}, \quad [-1, 1];$
- (5) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{n+1}}, (|x| < \sqrt{3}); \quad (6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, (-\infty, +\infty).$
2. $\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) (x+4)^n \quad (-6 < x < -2).$
3. $x^{\frac{3}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdots (5-2n)}{2^n \cdot n!} (x-1)^n.$
4. (1) 1.098 6; (2) 0.999 4.
5. $\int_0^x \frac{\arctan t}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, \quad |x| \leq 1.$
6. (1) $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1);$
- (2) $(1+x)e^x \quad (-\infty, +\infty).$
7. (1) $y = C_1 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdots (4n-1) \cdot 4n}\right) + C_2 \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdots 4n \cdot (4n+1)}\right);$
- (2) $y = C_1 \left(1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{3}{4!}x^4 - \frac{3 \cdot 5}{6!}x^6 + \cdots\right) + C_2 \left(x - \frac{2}{3!}x^3 + \frac{2 \cdot 4}{5!}x^5 + \cdots\right);$
- (3) $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + \left(-1 + x + \frac{1}{1 \cdot 3}x^3 + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} + \cdots\right);$
- (4) $y = C(1-x) + x^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{10}x^2 + \cdots + \frac{2}{(n+2)(n+3)}x^n + \cdots\right);$
- (5) $y = C(1+x) - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{15}x^6 + \cdots.$
8. (1) $y = 1 - x + x^2; \quad (2) y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots;$
- (3) $y = C\left(1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{2}{4!}t^4 - \frac{9}{6!}t^6 + \frac{55}{8!}t^8 - \cdots\right).$

习 题 12-6

1. $x = -\pi$ 为间断点, 在此点级数收敛于 $\frac{1}{2}(f(-\pi^-) + f(-\pi^+)) = \frac{1}{2}(\pi^3 + 2).$
2. $s(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ x^2, & 0 < x < \pi, \\ -\frac{1}{2}, & x = 0, \\ \frac{\pi^2 - 1}{2}, & x = \pm \pi. \end{cases}$
3. (1) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x \quad (x \neq n\pi);$

$$(2) f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$(3) f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2n} \right) \sin nx \quad (x \neq (2n+1)\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$(4) \cos \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} \cos nx \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

$$4. (1) f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \quad (-\pi < x < \pi);$$

$$(2) f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

$$5. f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n (1 + \pi)}{n} \sin nx \quad (0 < x < \pi);$$

$$f(x) = \frac{\pi + 2}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

$$6. 2 + |x| = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}, \quad x \in [-1, 1];$$

$$\text{取 } x = 0, \text{ 得 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \text{ 故}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

$$\text{由此 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$7. f(x) = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} \quad (0 \leq x \leq 2).$$

8. 先对 $f(x)$ 作偶延拓到 $[-1, 1]$, 再以 2 为周期延拓到 $(-\infty, +\infty)$, 并将 $f(x)$ 展开成余弦级数而得到 $s(x)$, 有

$$s\left(-\frac{5}{2}\right) = s\left(2 - \frac{5}{2}\right) = s\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{1}{2}^{-}\right) + f\left(\frac{1}{2}^{+}\right) \right) = \frac{3}{4}.$$

$$9. s\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

$$10. (1) f(x) = \frac{11}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos 2n\pi x \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$(2) f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1 - (-1)^n)6}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{3} + (-1)^{n+1} \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \right) \\ (x \neq 3(2k+1), k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

习 题 十 二

- (1) 发散; (2) 收敛; (3) $(1, 5]$; (4) 1;
(5) $-(2\pi - x)^2$.
- (1) C; (2) D; (3) A; (4) C;
(5) C.
- 略.
- 当 $0 < a \leq 1$ 时, 级数发散; 当 $a > 1$ 时, 级数绝对收敛.
- 当 $\lambda < 1$ 时, 收敛; 当 $\lambda \geq 1$ 时, 发散.

6. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n^2} x^{2n}$, 收敛域为 $-1 \leq x \leq 1$.

7. 收敛域为 $(-1, 1)$, 和函数为 $s(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \\ 3, & x = 0, \end{cases}$

8. (1) $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$, $-1 < x < 1$; (2) $\frac{80}{27}$.

9. 收敛域为 $[-1, 1]$, 和函数为 $x \arctan x$.

10. 收敛域为 $[-1, 1]$, 和函数为 $s(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x), & 0 < |x| < 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n} = 1 - \ln 2.$$

11. $(-1, 1)$; $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} + 2x \arctan x - \ln(1+x^2)$ ($-1 < x < 1$).

12. (1) $x \cos x^2 = x - \frac{x^5}{2!} + \frac{x^9}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$;

(2) $\frac{\sin 1}{2}$.

13. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n - (-1)^n \right) x^n, x \in (-1, 1)$.

14. $f(x) = 1 - \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4}{n^2} \cos nx$ ($0 \leq x \leq \pi$), $\frac{\pi^2}{12}$.

15. 略.