

空间解析几何与向量代数

练习三十七 向量及其线性运算

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、填空题

- 1、在空间直角坐标系中,点 $A(3,2,-4)$ 在第_____卦限; 点 $B(-8,-1,2)$ 在第_____卦限。
- 2、设有点 $M(-1,2,3)$, 则它关于坐标面 xOy 的对称点为_____, 关于坐标轴 x 的对称点为_____, 关于坐标原点的对称点为_____。
- 3、在 y 轴上,与两定点 $A(1,-2,1)$ 和 $B(2,1,-2)$ 等距离的点是_____。
- 4、已知 $A(-2,0,4), B(0,2,5)$ 和 $O(0,0,0)$ 则 $\triangle AOB$ 的周长是_____。
- 5、已知梯形 $OACB$, $\overrightarrow{CB} \parallel \overrightarrow{OA}$ 且 $|\overrightarrow{CB}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}|$, 若 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{AB} =$ _____。

二、 选择题

- 1、点 $M(3,0,2)$ 在空间直角坐标系的位置是()
(A.) y 轴上; (B) xOy 面上;
(C) xOz 面上; (D) 第一卦限内
- 2、点 $M(2,-2,1)$ 关于 xOy 平面的对称点是()
(A) $(-2,2,1)$; (B) $(-2,-2,-1)$;
(C) $(2,-2,-1)$; (D) $(-2,2,1)$
- 3、若 $\mathbf{a}$ $\mathbf{b}$ 为方向相同的两个非零向量,则必有()
(A) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ (B) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b})$

(C) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$

(D) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$

4、梯形 $OACB$ 中, $\overrightarrow{CB} \parallel \overrightarrow{OA}$ 且 $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, M, N 分别为 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 的中点, 若

$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OC} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{MN} = (\quad)$

(A) $\frac{\mathbf{a}}{2} - \mathbf{b}$ (B) $\frac{\mathbf{a}}{4} - \frac{\mathbf{b}}{2}$ (C) $\mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}}{4}$ (D) $\mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}}{2}$

三、计算题

1、在 zOy 面上, 求与三点 $A(3,1,2)$, $B(4,-2,-2)$ 和 $C(0, 5,1)$ 等距离的点。

2、把三角形 ABC 的 BC 边五等分,设分点依次为 D_1, D_2, D_3, D_4 再把各分点与 A 连接,试以 $\overrightarrow{AB} = c$, $\overrightarrow{BC} = a$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}, \overrightarrow{D_2A}, \overrightarrow{D_3A}, \overrightarrow{D_4A}$.

四、 证明题

试用向量方法证明：三角形两腰中点连线平行且等于第三边长度的一半。

练习三十八 向量的坐标

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、填空题

- 1、已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1), M_2(3, 0, 2)$, 则向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向角为_____。
- 2、设向量 $\mathbf{a}=(4,-3,2)$, 且设轴 u 的正向与三个坐标轴的正向构成相等的锐角, 则向量 $\mathbf{a}$ 在轴 u 上的投影为_____。
- 3、向量 $\mathbf{a}$ 的终点在点 $B(2, -1, 7)$, 它在 x 轴, y 轴和 z 轴上的投影依次为 4, -4, 7. 则向量 $\mathbf{a}$ 的起点 A 的坐标是_____。
- 4、平行于向量 $\mathbf{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量是_____。
- 5、设 $\vec{A}=(3,5,8), \vec{B}=(2,-4,-7), \vec{C}=(5,1,-4)$, 则向量 $\vec{p}=4\vec{A}+3\vec{B}-\vec{C}$ 在 Y 轴上的分量是_____。

二、选择题:

- 1、设 $\overrightarrow{AB}$ 与 u 轴交角为 α , 则 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上投影 $\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = (\quad)$ 。

(A) $\overrightarrow{AB} \cos \alpha$; (B) $\overrightarrow{AB} \sin \alpha$;

(C) $|\overrightarrow{AB}| \cos \alpha$; (D) $|\overrightarrow{AB}| \sin \alpha$ 。

- 2、向量 $\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 与三坐标轴正向夹角分别为 α, β, γ ,

则 $\mathbf{a}$ 的方向余弦中的 $\cos \alpha = (\quad)$ 。

(A) $\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$; (B) $\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$;

(C) $\frac{\pm a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$; (D) $\frac{\pm a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$;

- 3、力 $\overrightarrow{F_1}=(1, 2, 3), \overrightarrow{F_2}=(-2, 3, -4), \overrightarrow{F_3}=(3, -4, 5)$

同时作用于一点, 则其合力的大小是()

(A) $\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} + \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-4)^2} + \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}$ (B) $\sqrt{2+1+4}$

$$(C) \quad [1+(-2)+3]+[2+3+(-4)]+[3+(-4)+5] \quad (D)$$

$$\sqrt{2^2+1^2+4^2}$$

三、计算题

- 1、已知 $\mathbf{a}=(2,-3,6), \mathbf{b}=(-1,2,-2)$, 向量 $\mathbf{c}$ 在向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的角平分线上, 且 $|\mathbf{c}|=3\sqrt{42}$, 求 $\mathbf{c}$ 的坐标。

- 2、从点 $A(2, -1, 7)$ 沿向量 $\mathbf{a}=(8, 9, -12)$ 的方向作向量 $\overrightarrow{AB}$, 使 $|\overrightarrow{AB}|=34$, 求终点 B 的坐标。

3、一向量与 x 轴, y 轴成等角, 而与 z 轴所构成的角是它们的 2 倍, 试确定该向量的方向.

4、在边长为 1 的立方体中,OM 为对角线,OA 为棱,求: $\overrightarrow{OM}$ 在 $\overrightarrow{OA}$ 上的投影及 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 上的投影.

练习三十九 数量积

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、填空题.

- 1、设 $\mathbf{a} = (-2, 3, -6)$, $\mathbf{b} = (\lambda, 1, -1)$ 若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $\lambda =$ _____。
- 2、设 $\mathbf{a} = (-2, 3, \mu)$, $\mathbf{b} = (\lambda, -6, 2)$ 共线, 则 $\lambda =$ _____, $\mu =$ _____。
- 3、已知三个向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ 及 $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 1$, $|\mathbf{c}| = 4$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} =$ _____。
- 4、已知 $\vec{a} = (3, -1, 5)$, $\vec{b} = (1, 2, -3)$, 向量 $\vec{x}$ 垂直于 z 轴且 $\vec{x} \cdot \vec{a} = 9$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -4$, 则向量 $\vec{x} =$ _____。
- 5、向量 $\mathbf{a}$ $\mathbf{b}$ $\mathbf{c}$ 两两垂直. $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $|\mathbf{c}| = 3$, 则 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ 与 $\mathbf{c}$ 的夹角是_____。

二、 计算题.

- 1、设 $\triangle ABC$ 的顶点坐标为 $A(2, 3, 1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(1, -2, 3)$, 求 AC 边上的中线与 BC 边所夹的锐角。

2、已知 $|a|=13$, $|b|=19$, $|a+b|=24$,求 $|a-b|$.

- 3、设向量 $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ 垂直于向量 $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$, 且向量 $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ 垂直于向量 $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, 求向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角.

三、证明题.

1、设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为任意向量, 证明不等式 $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$

2、应用向量证明：直径所对的圆周角是直角.

练习四十 向量积 混合积

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、 填空题.

- 1、已知 $\mathbf{a} = (1, -1, 4)$ $\mathbf{b} = (3, 4, 0)$ 则以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为边的平行四边形的面积为_____。
- 2、已知 $\mathbf{a} = (2, 4, -1)$ $\mathbf{b} = (0, -2, 2)$, 则同时垂直于 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的单位向量是_____。
- 3、给定点 $A(-1, 2, 4)$, $B(6, 3, 2)$, $C(1, 4, -1)$ 和 $D(-1, -2, 3)$, 则四面体 $ABCD$ 的体积为_____。
- 4、已知 $|\mathbf{a}| = 10, |\mathbf{b}| = 2, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 12$, 则 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| =$ _____。
- 5、设 $\mathbf{a} = (1, -2, 2)$ $\mathbf{b} = (-2, 1, 2)$ 且 $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}$, 则 $\mathbf{c} =$ _____。

二、 计算题.

- 1、设平行四边形的两条对角线向量为: $\mathbf{c} = 3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$, $\mathbf{d} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$, 且

$$|\mathbf{m}| = 1, |\mathbf{n}| = 2, (\hat{\mathbf{m}}, \mathbf{n}) = \frac{\pi}{6}, \text{ 求平行四边形的面积}$$

2、求向量 $\mathbf{a} = (3, -12, 4)$, 在向量 $\mathbf{b} = (1, 0, -2) \times (1, 3, -4)$ 上的投影。

3、已知向量 $\mathbf{a}=\{3,1,2\}, \mathbf{b}=\{2,7,4\}, \mathbf{c}=\{1,2,1\}$, 计算:

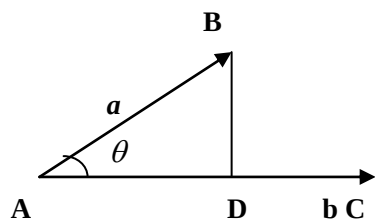
(1) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c};$

(2) $\mathbf{a}^2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c});$

(3) $\mathbf{a}^2\mathbf{b} + \mathbf{b}^2\mathbf{c} + \mathbf{c}^2\mathbf{a}$

4、已知向量 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$, 问当 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 间的夹角为

何值时, $S_{\triangle BAD}$ 为最大。



练习四十一 曲面与空间曲线

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、 填空题.

- 1、曲线 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周,则旋转曲面方程是_____。
- 2、动点 $M(x, y, z)$ 到 xOy 面与 M 到点 $(1, -1, 2)$ 的距离相等,则动点 M 的轨迹方程是_____。
- 3、方程组 $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 25 \\ y = -1 \end{cases}$ 所表示的曲线是_____。
- 4、曲线 $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ 化为参数方程是_____。
- 5、曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与 $z^2 = x^2 + y^2$ 的交线在 xOy 上的投影曲线方程是_____。

二、 选择题.

- 1、曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z^2 = 2xy \end{cases}$ 在 xOy 面上投影是 ()
(A) 圆 (B) 两平行直线段 (C) 两相交直线段 (D) 双曲线
- 2、曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 - z - 1 = 0 \\ x^2 - y^2 - z + 1 = 0 \end{cases}$ 与曲线 () 等价.
(A) $\begin{cases} y^2 = 1 \\ y^2 = z \end{cases}$ (B) $\begin{cases} y^2 = 1 \\ y^2 = x \end{cases}$
(C) $\begin{cases} y^2 = 1 \\ x^2 = z \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = z \end{cases}$
- 3、 xOy 平面上的双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 绕 x 轴旋转一周所生成的曲面方程是 ()
(A) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ (B) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
(C) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ (D) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

4、曲面 $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 与曲面 $x^2 + y^2 \leq ax \quad (a > 0)$

的公共部分在 xOy 面的投影是 () .

(A) $y^2 + z^2 \leq ay$

(B) $x^2 + z^2 \leq ax$

(C) $y^2 + z^2 \leq az$

(C) $x^2 + y^2 \leq ax$

5、方程 $z^2 - 1 = x^2 + y^2$ 的图形是 ()

(A) 球面

(B) 双叶双曲面

(C) 单叶双曲面

(D) 锥面

三、计算题.

1、求与坐标原点及点 $(2, 3, 4)$ 的距离之比为 1:2 的点的全体所组成的曲面方程, 它表示怎样的曲面.

2、求曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2; \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 在各坐标平面上的投影曲线。

3、求曲线 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ 分别绕 ox, oz 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程

4、求过点 $A(1,2,-4), B(1,-3,1), C(2,2,3)$ 而球心位于 xoy 面上的球面方程。

四、作出下列曲面所围成的立体的图形.

1、 $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + z^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

2、 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

练习四十二 平面及其方程

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、填空题.

1、过定点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 与 yoz 平面平行的平面方程是_____。

2、过点 $M(2, 9, -6)$ 且与连接坐标原点及点 M 的线段 OM 垂直的平面方程是_____。

3、当 $K=$ _____ 时, 平面 $3x + Ky - 3z = 9$ 与 $2x + 3y + 3 = 0$ 垂直。

4、平面 $2x - 2y + z + 5 = 0$ 与三个坐标面的夹角余弦是: $\cos\alpha =$ _____, $\cos\beta =$ _____, $\cos\gamma =$ _____。

5、过点 $(1, 0, -1)$ 且平行于向量 $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ 和 $\mathbf{b} = (1, -1, 0)$ 的平面方程是_____。

二、选择题.

1、在空间直角坐标系中, $x = 0$ 表示()

(A) x 轴 (B) 坐标原点 (C) yoz 平面 (D) 以上说法都不对

2、点 $(1, 1, 1)$ 关于平面 $x + y + z = 0$ 的对称点是 ()

(A) $(-1, -1, -1)$ (B) $(1/2, 1/2, 1/2)$
(C) $(0, 0, 0)$ (D) $(2, 2, 2)$

3、两平面 $2x - y + z = 7$ 与 $x + y + 2z = 11$ 的夹角是 ()

(A) $\frac{\pi}{6}$; (B) $\frac{\pi}{3}$; (C) $\frac{\pi}{2}$; (D) $\frac{2\pi}{3}$

4、点 $(2, 1, 1)$ 到平面 $x + y - z = 0$ 的距离是 ()

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (D) 3

5、点 $(-1, 2, 0)$ 在平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 上的投影坐标是 ()

(A) $(\frac{-5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$; (B) $(\frac{-13}{5}, \frac{6}{5}, \frac{4}{5})$

(C) $(\frac{-4}{3}, \frac{11}{6}, \frac{1}{6})$; (D) $(-1, 0, 0)$

三、 计算题.

1、 一平面平行 x 轴且经过两点 $A(4, 0, -2)$ 和 $B(5, 1, 7)$, 求该平面方程.

2、 求过三平面 $2x + y - z - 2 = 0, x - 3y + z + 1 = 0, x + y + z - 3 = 0$ 的交点, 且与平面 $x + y + 2z = 0$ 平行的平面方程。

3、求过点 $M(0, 1, 2)$ 且垂直于两平面 $x + 2y + z - 1 = 0$ 与 $x - z + 3 = 0$ 的平面方程。

4、求通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x + y + z = 0$ 的平面方程.

练习四十三 空间直线及其方程

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、填空题.

1、过原点并与平面 $m(x-a)+n(y-b)+p(z-c)=0$ 垂直的直线方程是_____。

2、设 (m,n,p) 与 (A,B,C) 不平行，则过点 (a,b,c) 与直线 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ 垂直且与平面 $Ax+By+Cz=0$ 平行的直线方程是_____。

3、两直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{-y}{2}=\frac{z+4}{7}$ 和 $\frac{x+6}{5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-1}$ 的夹角余弦是_____。

4、直线 $\frac{x}{1}=\frac{2y-3}{1}=\frac{2z-1}{5}$ 与平面 $x+y+5z=18$ 的交点是_____。

5、与直线 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ 关于原点对称的直线方程是_____。

二、选择题.

1、直线 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$ 和平面 $x+y+z=4$ 的关系 ()

- (A) 平行且直线在平面上； (B) 平行但直线不在平面上；
(C) 垂直相交； (D) 不垂直但相交

2、过点 $M_1(3,-2,1)$, $M_2(-1,0,2)$ 的直线方程是 ()

- (A) $-4(x-3)=2(y+2)=z-1$; (B) $\frac{1}{4}(x-3)=\frac{1}{4}(y+2)=z-1$
(C) $\frac{1}{4}(x+1)=\frac{y}{2}=z-1$ (D) $-\frac{1}{4}(x+1)=\frac{y}{2}=z-2$

3、过点 $(3,4,-4)$ 方向角为 $60^\circ, 45^\circ, 120^\circ$ 的直线方程是()

- (A) $x-3=\sqrt{2}(y-4)=z+4$ (B) $x+3=\frac{y+4}{\sqrt{2}}=\frac{z-4}{-1}$

$$(C) \quad x-3=\frac{y-4}{\sqrt{2}}=\frac{z+4}{-1} \quad (D) \quad \frac{x+3}{-1}=\frac{y+4}{\sqrt{2}}=z+4$$

4、点(2, 3, 1)在直线 $x=t-7, \quad y=2t-2, \quad z=3t-2$ 上的投影是()

(A) (5, 2, 4) (B) (-5, 2, 4) (C) (5, -2, 4) (D) (5, 2, -4)

5、直线 $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角是()

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 0

三、计算题.

1、一直线过点 $M(-1,0,1)$ 且垂直于直线 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-4}=z$, 又和直线

$x+1=y-3=\frac{z}{2}$ 相交, 求此直线方程.

2、设一平面垂直于 xOy 面,并通过从点 $(1, -1, 1)$ 到直线 $\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 的垂线,求此平面方程.

- 3、坐标面在平面 $3x - y + 4z - 12 = 0$ 上截得一个三角形 ABC, 从 oz 轴上的一个顶点 C 作此三角形对边 AB 的垂线, 求它的方程。

阶段自测题(八) 空间解析几何与向量代数

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、 填空题.

- 1、 向量 $\mathbf{a} = (1, \sqrt{2}, 1)$ 与坐标轴的夹角 $\alpha =$ _____, $\beta =$ _____, $\gamma =$ _____。
- 2、 平行于平面 $2x + 6y + 2z + 5 = 0$ 且与三坐标面所围的立体的体积为 1 的平面方程是_____。
- 3、 直线 $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ 绕 Z 轴旋转一周, 则旋转曲面方程是_____。
- 4、 平面通过点 $(5, -7, 4)$, 且在坐标轴上截距相等, 则平面方程为_____。
- 5、 过直线 $\begin{cases} 4x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + 5y - z + 2 = 0 \end{cases}$ 且与平面 $2x - y + 5z = -2$ 垂直的平面方程是_____。

二、 选择题.

- 1、 设 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 为非零向量, 则 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ 是 ()
(A) $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ 的充要条件,
(B) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 的充要条件,
(C) $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 的充要条件,
(D) $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ 的必要但不充分条件.
- 2、 平面 $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 与 $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 互相平行, 则()
(A) 充要条件是 $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
(B) 充要条件是 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$
(C) 必要而不充分条件是 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$
(D) 必要而不充分条件是 $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
- 3、 方程 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36 \\ y = 1 \end{cases}$ 表示 ()

(A) 椭球面

(B) 椭圆柱面

(C) 椭圆柱面在平面 $y=0$ 的投影曲线

(D) 平面 $y=1$ 上的椭圆

4、直线 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4}$ 与平面 $x+y+z=3$ 的关系是()

(A) 直线与平面垂直。

(B) 直线与平面平行,但直线不在平面上。

(C) 直线在平面上。

(D) 直线与平面相交,但不垂直。

5、当 k, λ 满足() 时,曲面 $x^2 + y^2 + \lambda z^2 = x + k$ 表示椭球面

(A) $-\infty < k < -1, \lambda > 0$ (B) $-1 < k < -\frac{1}{4}, \lambda > 0$

(C) $-\frac{1}{4} < k < +\infty, \lambda > 0$ (D) $k = \frac{1}{4}, \lambda \geq 0$

三、计算题.

1、求过平面 $x+5y+z=0$ 与 $x-z+4=0$ 的交线,且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 成

$\frac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

2、在平面 $2x+3y-z=1$ 上求一直线 ,此直线过点 $M(0 , 0 ,-1)$ 且与直线

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ z=2 \end{cases} \text{ 的夹角为 } \frac{\pi}{4}。$$

3、求直线 $\begin{cases} z=\sqrt{3}x \\ y=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所成的曲面方程。

四、综合题.

求通过直线 $\begin{cases} 3x-2y+2=0 \\ x-2y-z+6=0 \end{cases}$ 且与点 $(1,2,1)$ 的距离为1的平面方程。

练习四十四 二元函数概念、极限、连续性

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、填空题:

- 1、设 $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$, 则 $f[\varphi(x, y), y^2] =$ _____。
- 2、若 $f(x + y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$, 则 $f(x, y) =$ _____。
- 3、设 $z = x + y + f(x - y)$, 若当 $y = 0$ 时 $z = x^2$, 则函数 $z =$ _____。
- 4、函数 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 的定义域是_____。
- 5、函数 $u = \frac{1}{z - x^2 - y^2}$ 的间断点是_____。

二、计算题:

- 1、求下列函数的定义域:

(1) $[\ln(x^2 + y^2 - r^2)] \cdot \sqrt{x^2 - 2rx + y^2}$

$$(2) \quad u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

2、若 $f(u, v, w) = u^w + w^{u+v}$ ，试求 $f(x+y, x-y, xy)$ 。

3、若 $f(x+y, x-y) = xy + y^2$ ，求 $f(x, y)$ 。

4、计算极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin(2xy)}{y}$

三、证明题：

证明 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 不存在。

练习四十五 偏导数与高阶偏导数

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、设 $z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy} & xy \neq 0 \\ 1 & xy = 0 \end{cases}$ 试讨论 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续性，偏导数存在性。

二、求下列函数的偏导数

1. 设 $z = e^{xy} \cos(x + 2y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 $z = y^x \ln(xy)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设 $z = \arctan \frac{x+y}{x-y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设 $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

三、求下列函数的二阶偏导数

1. $z = xy \ln \frac{x}{y}$

2. $z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$

四、设 $u = e^{xyz}$, 求 $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ 。

五、设 $z = 2 \cos^2(x - \frac{t}{2})$, 试证: $2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = 0$

练习四十六 全微分及其应用

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、选择题：

1、 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处具有偏导数 $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ 是函数在该点可微分的 () .

- (A) 充分条件但非必要条件;
- (B) 必要条件但非充分条件;
- (C) 充分必要条件;
- (D) 既非充分条件也非必要条件.

2、 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微分, 则必有 () .

- (A) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有连续偏导数;
- (B) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处不一定连续;
- (C) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 存在;
- (D) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的任一邻域内有界.

3、 如果 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某一邻域内连续, 且 $f(0, 0) = 0$, 令

$g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} f(x, y)$, 则在点 $(0, 0)$ 处 () .

- (A) $g(x, y)$ 不可微分, 但 $g_x(0, 0), g_y(0, 0)$ 存在;
- (B) $g(x, y)$ 不可微分, 但 $g_x(0, 0), g_y(0, 0)$ 不存在;
- (C) $g(x, y)$ 可微分.

4、 设 $u = (\frac{x}{y})^z$, 则 $du|_{(1,1,1)}$ 等于 () .

- (A) $dx - dy$;
- (B) $dx + dy$;
- (C) $dy - dx$;
- (D) $dx + dy + dz$;

- 5、设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 可微分, $g(x, y) = f(x^2, y^2)$, 则 $g(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处对 x 的偏导数 ().
- (A) 等于 0; (B) 等于 1;
(C) 等于 $f'_x(0, 0)$ (D) 不存在.

二、计算题:

1、设 $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$, 求 dz

2、设 $z = e^x(\cos y + x \sin y)$, 求 $dz \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}}$

3、求函数 $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$, 当 $x = 2, y = 1, \Delta x = 0.01, \Delta y = 0.03$ 时的全微分.

4、设 $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$, 求 du 。

三、利用全微分近似计算公式,计算 $\sqrt{(3.97)^2 + (3.02)^2}$ 的近似值.

练习四十七 多元复合函数求导法则

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、设 $z = \ln(x^2 - y^2)$ ，其中 $y = e^x$ ，求 $\frac{dz}{dx}$

二、设 $z = \tan(3t + 2x^2 - y)$ ，而 $x = \frac{1}{t}$ ， $y = \sqrt{t}$ ，求 $\frac{dz}{dt}$

三、设 $z = \frac{u^2}{v}$ ，而 $u = x - 2y$ ， $v = y + 2x$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}$

四、(!) 设 $z = (2x + y)^{2x+y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

(2)、求 $z = x^2 y f(x^2 - y^2, xy)$ 的一阶偏导数, 其中 f 有一阶连续偏导数。

五、设 $z = f(x^2 + y^2)$, 其中 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

六、设 $z = xf(xy, e^y)$ ，其中 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

七、设 $z = \arctan \frac{x}{y}$ ，而 $x = u + v, y = u - v$ ，证明： $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 - v^2}$

八、设 $u=f(x,y)$ 的所有二阶偏导数连续，而 $x=\frac{s-\sqrt{3}t}{2}, y=\frac{\sqrt{3}s+t}{2}$ ，证明：

$$(1) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2;$$

$$(2) \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 s} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}$$

练习四十八 隐函数的求导法则

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、设 $2xz - 2xyz + \ln(xyz) = 0$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}$

二、设 $u = \sin(y + 3z)$ ，其中 z 是由方程 $z^2y - xz^3 - 1 = 0$ 所确定的隐函数，试求

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=0}}$$

三、设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ 确定的隐函数，求 $dz\big|_{\substack{x=1 \\ y=0}}$

四、设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = xyf(z^2)$ 所确定，其中 f 为可微函数，试计算

$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ ，并化简成最简形式。

五、设 $z^3 - 2xz + y = 0$ ，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

六、设 $e^z - xyz = 0$ ，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

七、设 $F(u,v)$ 有连续偏导数，且 $\frac{\partial F}{\partial v} \neq 0$ ，证明：由方程 $F(xy, z-2x)=0$ 所确定

的函数 $z = z(x, y)$ 满足 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 2x$

八、设
$$\begin{cases} z = x^2 + y \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases} \quad \text{求 } \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$$

练习四十九 偏导数在几何上的应用

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、填空题:

1、曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$, 上与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线有____条.

2、曲线 $\begin{cases} y=x^2 \\ z=x^3 \end{cases}$ 在点 $(0,0,0)$ 的法平面方程是_____

3、已知曲面 $z=xy$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的切平面平行于平面 $x+3y+z+9=0$,
则 $x_0=$ _____, $y_0=$ _____, $z_0=$ _____.

4、曲面 $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$ 在点 $(1,1,1)$ 的切平面方程为_____.

5、设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是曲线 $x=\cos t, y=\sin t, z=t$ 上一点, 则曲线在点 M_0 的切线与 xOy 平面的夹角 $\varphi=$ _____.

二、计算题：

1、设直线 L 过点 (3,2,3) 且与曲线 $x = t^2, y = t, z = 3(t-1)$ 相切，求 L 的方程.

2、求曲线 $\begin{cases} e^{z^2} + xy = 2 \\ z = x^2 - y^2 \end{cases}$ 在点 (1, 1, 0) 处的切线与法平面方程。

3、求曲面 $z = y + \ln \frac{x}{z}$ 在点 (1,1,1) 处的切平面方程和法线方程.

4、求椭球面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 的平行于平面 $x - y + 2z = 0$ 的切平面方程。

5、证明曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$ 在公共点处的切平面互相垂直.

6、试证：曲面 $z = x + f(y - x)$ 的所有切平面恒与一定直线平行。

练习五十 方向导数与梯度

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、 求函数 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1,2)$ 处沿从点 $(1,2)$ 到点 $(2, 2 + \sqrt{3})$ 的方向的方向导数.

二、 求函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $(1,2,1)$ 处沿从点 $(1,2,1)$ 到点 $(2,4,3)$ 的方向的方向导数.

三、求函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿方向角为

$\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数.

四、求函数 $u = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{xyz}$, 在点 $p(-1,3,-3)$ 处的梯度以及沿曲线

$x = -t^2, y = 3t^2, z = -3t^2$ 在点 p 参数增大的切线方向的方向导数。

五、 设 $f(x, y, z) = xyz$, 求 $\mathbf{grad} f(2,1,1)$.

六、 求 $\mathbf{grad} \frac{1}{x^2 + y^2}$

七、证明题：

设 u, v 都是 x, y, z 的函数，且 u, v 的所有偏导数都存在且连续，证明：

(1) $\mathbf{grad}(u+v) = \mathbf{grad}u + \mathbf{grad}v$

(2) $\mathbf{grad}(uv) = u\mathbf{grad}v + v\mathbf{grad}u$

练习五十一 多元函数极值及其求法

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、求函数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值.

二、求函数 $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ 在区域 $0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2}$ 内的极值.

三、将 12 分成三个正数 x, y, z 之和,问 x, y, z 各取何值时函数 $u = x^3 y^2 z$ 有最大值.

四、在 $y = x^2$ 的图象上找一点,使该点到直线 $y = x - 1$ 的距离最短.

五、在半径为 a 的半球内求一个体积为最大的内接长方体.

六、求函数 $z = x^2 + y^2 - 3$ 在条件 $x - y + 1 = 0$ 下的极值。

七、求椭圆 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 上的距坐标原点最远和最近的点.

阶段自测题（九） 多元函数微分学

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、填空题：

1、 设 $f(x+y, \frac{y}{2}) = x^2 - y^2$ ， 则 $f(x, y) =$ _____

2、 设 $z = y^x$ ， 则 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} =$ _____.

3、 由方程 $z^3 - 3xyz = -4$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(1, 2, 2)$ 处的全微分 $dz =$ _____

4、 曲面 $z = \sin x \cos y$ 在点 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$ 处的切平面方程是_____.

5、 设 $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ， L 是与 $\text{grad} f(3, 4)$ 方向一致的有向直线， 则

$$\left. \frac{\partial f}{\partial L} \right|_{\substack{x=3 \\ x=4}} = \text{_____}^\circ$$

二、选择题：

1、 当 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ ， 时， 函数 $\frac{xy}{3x^4 + y^2}$ 的极限 () .

(A) 等于 0; (B) 等于 $\frac{1}{3}$;

(C) 等于 $\frac{1}{4}$; (D) 不存在

2、 函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x_0, y_0)

连续是函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微分的 ()

(A) 充分条件但非必要条件;

(B) 必要条件但非充分条件;

(C) 充分必要条件;

(D) 既非充分条件也非必要条件。

3、设 $z = f(u, v)$ ，而 $u = x + y, v = xy$ ，其中 f 具有

一阶连续偏导数，则 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 等于 () .

- (A) $\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$; (B) $\frac{\partial f}{\partial u} + x \frac{\partial f}{\partial v}$;
(C) $\frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v}$; (D) $y \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$;

4、可使 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$ 成立的函数是 ()

- (A) $u = x^2 y + \frac{1}{2} xy^2$ (B) $u = x^2 y - \frac{1}{2} xy^2 + e^x + e^y - 5$
(C) $u = x^2 y - \frac{1}{2} xy^2 + e^{x+y} - 5$ (D) $u = x^2 - xy + e^y + x$

5、在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 的所有切线中，与平面 $x + 6y + 12z = 1$ 平行的切线 () .

- (A) 只有 1 条; (B) 只有 2 条;
(C) 至少有 3 条; (D) 不存在

6、设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续，

且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - 2}{1 - \cos(x^2 + y^2)} = 2$ ，则在点 $(0, 0)$ 处 $f(x, y)$ () .

- (A) 不可微分;
(B) 可微分，且 $f_x(0, 0) \neq 0, f_y(0, 0) \neq 0$;
(C) 取得极大值; (D) 取得极小值.

三、计算题:

1、设 $z = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

2、设 $z = f(x+y, xy)$ ，其中 f 具有二阶连续偏导数，求： $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

3、设 $z = z(x, y)$ 由方程 $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$ 所确定，求 dz

4、求函数 $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ 的极值。

5、求函数 $u = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$ 的全微分。

6、设 $u = x^2 y z^3$ ，其中 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$ 所确定，求 $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1 \\ z=1}}$

7、 $u = f(x, y, z)$ 由方程 $u^2 + z^2 + y^2 - x = 0$ 确定， 其中 $z = xy^2 + y \ln y - y$ ，

试求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

四、 求曲面 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3 = 0$ 上同时垂直平面 $z = 0$ 与 $x + y + 1 = 0$ 的切平面方程

五、 在旋转椭球面 $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ 上求距平面 $3x + 4y + 12z = 288$ 为最近和最远的点.

练习五十二 二重积分概念及性质

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、判断下列各题是否正确

1. 二重积分 $\iint_D f(x,y)dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$ 中的 $\Delta \sigma_i$ 一定是正的. ()

2. 对任何 $f(x,y)$, 二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 在几何上都表示曲顶柱体的体积. ()

3. 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续, 且 $f(x,y) = -f(-x,y)$, 则 $\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$. ()

4. 已知二元函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 当 $(x,y) \in D$ 时, 有 $(x,-y) \in D$, 即 D 关于 x 轴对称, 又 $f(x,-y) = -f(x,y)$, 则 $\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$. ()

5. 若 $f(x,y) + g(x,y)$ 在区域 D 上可积, 则有

$$\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]d\sigma = \iint_D f(x,y)d\sigma + \iint_D g(x,y)d\sigma. \quad ()$$

6. 设 m, M 分别是 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最小值和最大值,

且 σ 为 D 的面积, 则 $m\sigma \leq \iint_D f(x,y)d\sigma \leq M\sigma$. ()

二、填空题

1. 用不等号连接 $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$

(1) D 是由 x 轴, y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成, 则

$$\iint_D (x+y)^2 d\sigma \quad \text{_____} \quad \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

(2) D 是由圆周 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ 所围成, 则

$$\iint_D (x+y)^2 d\sigma \quad \text{_____} \quad \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

2. 估计下列二重积分的值

$$(1) \quad \text{_____} \leq \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma \leq \text{_____}$$

$$(2) \quad \text{_____} \leq \iint_{|x|+|y| \leq 10} \frac{1}{\cos^2 x + \cos^2 y + 100} d\sigma \leq \text{_____}$$

三、试确定二重积分 $\iint_D \ln(x^2 + y^2) d\sigma$ 的正负号, 其中 $D: |x| + |y| \leq 1$.

四、根据二重积分的几何意义，求下列二重积分的值。

(1) $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} d\sigma$ ，其中 D 为 $x^2 + y^2 \leq a^2$

(2) $\iint_D (b - \sqrt{x^2 + y^2}) d\sigma$ ，其中 D 为 $x^2 + y^2 \leq a^2$ ， $b > a > 0$

五、设函数 $f(x, y)$ 在平面区域 D 上连续，且恒为正，证明 $\iint_D f(x, y) d\sigma > 0$

练习五十三 利用直角坐标计算二重积分

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、填空题

1. 设 D 是由 $y = x^3, x = 1, y = 8$ 所围成的区域, 则 $\iint_D \frac{1}{x} dx dy =$ _____.

2. 设 D 是由 $x = 1, x = -1, y = 0, y = \frac{\pi}{2}$ 所围成的区域, 则 $\iint_D e^x \cos y dx dy =$ _____.

3. 设 D 是由 $x = 0, x = 1, y = 1, y = 2$ 所围成的区域, 则 $\iint_D \ln(1+x) dx dy$ _____.

4. $\iint_D (x \cos y + y \sin x) d\sigma =$ _____, 其中 D 是由 $y = x^2$ 及直线 $y = 2$ 围成的闭区域。

5. 平面 $2x + 3y - 6z + 6 = 0$ 与坐标面所围成的图形的体积之值为_____.

6. 交换累次积分的次序 $\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x, y) dx$

7. 交换累次积分的次序

$$\int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx =$$

二、设区域 D 是正方形区域: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$;

求二重积分 $\iint_D (\cos^2 x + \sin^2 y) dx dy$

三、设 D 是由曲线 $y = 2 - x^2$ 和 $y = 2x - 1$ 所围成的区域, 化二重积分

$\iint_D (x - y) dx dy$ 为二次积分并求其积分值。

四、计算： $\iint_D x\sqrt{y}d\sigma$ ， D 是由两条抛物线 $y = \sqrt{x}, y = x^2$ 围成的闭区域.

五、求由平面 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面

$x^2 + y^2 = 6 - z$ 截得的立体的体积.

练习五十四 利用极坐标计算二重积分

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、填空题

1、设 D 由 $y^2 + (x - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$ 及 $y^2 + (x - a)^2 = a^2$ 所围成，化成极坐标下累次积

分，有 $\iint_D f(x,y) dx dy =$ _____

2、设 D 是 $x^2 + y^2 \leq 1$ ，则 $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy =$ _____

3、设 D 是 $x^2 + y^2 = 9$ 和 $x^2 + y^2 = 25$ 间的圆环域，

则 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2 - 9^2} dx dy =$ _____

4、设 D 为扇形域 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ， $1 \leq r \leq 2$ ，

则 $\iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma =$ _____.

5、 D 是闭域 $x^2 + y^2 \leq a^2$ ，则 $I = \iint_D (x + y + 1) d\sigma =$ _____。

二、将 $\int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx \int_0^{Rx} f\left(\frac{y}{x}\right) dy + \int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) dy$ 化成极坐标形式下累次积分.

三、求抛物面 $x^2 + y^2 = 2az$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ 所围成的立体的体积. ($a > 0$)

四、利用极坐标计算下列各题

1. $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma, D: x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0, x \geq 0$

2. $\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=Rx$ 所围的闭区域.

3. $\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$ 及直线 $y = x, y = 0$ 所

围成的在第一象限的闭区域.

练习五十五 二重积分应用

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、求平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 被三坐标面所割出的有限部分的面积。

。

二、求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及 $x^2 + z^2 = R^2$ 所围立体的表面积。

三、设有一块薄板，它的周界为心形线， $r = a(1 + \cos\theta)$, ($a > 0$)

即 $x^2 + y^2 = a(x + \sqrt{x^2 + y^2})$. 薄板上任意质点 (x, y) 处的面密度为 $u = \frac{1}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$ ，求此薄板的质心坐标。

四、 $y^2 = ax$ 及直线 $x = a$ ($a > 0$) 所围图形关于直线 $y = -a$ 的转动惯量.

五、证明 $\int_a^b (\int_a^x f(t) dt) dx = \int_a^b (b-x) f(x) dx$

六、设 $f(u)$ 为可微函数，且 $f(0) = 0$. 求 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy}{\pi t^3}$

练习五十六 三重积分在直角坐标系下的计算

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、 $I = \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^2}$, 其中 Ω 为平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成

的四面体则 $I =$ _____

二、计算三重积分:

1. 求 $\iiint_{\Omega} xy dx dy dz$ 其中 Ω 由 $z = x^2 + y^2$, $z=1$ 所围成的区域.

2. 求 $\iiint_{\Omega} xy dx dy dz$, 其中 Ω 由 $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ 所围成的第一卦限内的区域.

3. 求 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 由 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ 所围成的第一卦限内的区域.

三、设区域 Ω 由不等式 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $x \leq y \leq 2x$, $0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 构成, 求 $I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$.

四、求由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = 6 - x^2 - y^2$ 所围成的立体的体积.

练习五十七 三重积分在柱坐标与球坐标系下的积分

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、填空题

1、设 $I = \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dv$ ，其中 Ω 是由

$$z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}, x^2 + y^2 - y = 0, z = 0 \text{ 所围成的区域,}$$

则在柱坐标系下的累次积分为 $I =$ _____

2. $I = \int_{-3}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^3 2\sqrt{x^2+y^2} dz$ 在球坐标下的

累次积分为 $I =$ _____

3. 三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$ 的值为_____.其中 Ω 是由

$$x^2 + y^2 = 2z \text{ 及 } z = 2 \text{ 所围成的区域.}$$

4. 设 $I = \iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dv$ ，其中 Ω 是由 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ，

则 I 之值为_____

5、已知 $F(t) = \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ ，其 Ω 为： $x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$ ，

且 f 为可微函数，则 $F'(t) =$ _____

6、由 xoy 平面以及抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和柱面 $x^2 + y^2 = 4$ 所围成的
区域的体积等于_____

二、设 Ω 是由 $x^2 + y^2 = 2x$ 和 $y = 0, z = 0, z = a (a > 0)$ 围成的区域，求

$$\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$$

三、计算 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ ，此处 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 所围成的区域.

四、计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$ ，其中 Ω 是由两个半球面

$$z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad (0 < a < A)$$

及平面 $z = 0$ 所围成的闭区域.

五、利用三重积分计算由曲面 $x^2 + y^2 = az$ 及 $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ ($a > 0$) 所围成的立体的体积.

阶段自测题（十） 重积分

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、判断下列各题是否正确：

1. 设 D 为由 $x^2 + y^2 = a^2$ 所围成的圆域，则

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \iint_D a^2 dx dy = a^2 \iint_D dx dy = \pi a^2 \quad (\quad)$$

2. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy. \quad (\quad)$

3. $\iint_D (y + y^3 x) d\sigma = 0$ ，其中 $D: x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0. \quad (\quad)$

4. 设 Ω 是球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$,

$$\text{则 } \iiint_D (x^2 + y^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r^3 dz. \quad (\quad)$$

二、填空题

1. 交换累次积分的次序 ($a > 0$),

(1) $I = \int_{-6}^2 dx \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} f(x, y) dy = \underline{\hspace{4cm}}.$

(2) $\int_a^{2a} dx \int_{2a-x}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy = \underline{\hspace{4cm}}.$

2. 积分 $I = \int_0^1 dy \int_{-y}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx$ 化成极坐标下的二次积分 $I = \underline{\hspace{4cm}}.$

3. 由 $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x$ 及 $z = 0$ 所围成的立体的体积之值为

4. 设 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所成曲面与 $z = 2, z = 8$ 所围成的区域,

$$\text{则 } \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \underline{\hspace{4cm}}$$

5. 曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 包含在圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 内部的那部分面积为 .

三、选择题

1、设 $I = \iint_D |xy| dx dy$ ，其中 D 是以 a 为半径以原点为圆心的圆，则 I 之值为 ()

- (A) $\frac{a^4}{4}$ (B) $\frac{a^4}{3}$ (C) $\frac{a^4}{2}$ (D) a^4

2、 $I = \iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma$ ，其中 $D: a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 (0 < a < b)$ ，则积分 $I =$ ()

- (A) $\pi(e^{b^2} - e^{a^2})$ (B) $2\pi(e^{b^2} - e^{a^2})$
(C) $\pi(e^b - e^a)$ (D) $2\pi(e^b - e^a)$

3、由曲线 $y^2 = 4x + 4, y^2 = -2x + 4$ 所围成平面图形的重心坐标为 ()。

- (A) $(1, 0)$ (B) $(\frac{3}{2}, 0)$
(C) $(0, \frac{2}{5})$ (D) $(\frac{2}{5}, 0)$

4、 $I = \iiint_{\Omega} ze^{x^2+y^2} dv$ ，其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = h (h > 0)$ 所围成的区域，则 I 之值为 ()。

- (A) $\frac{\pi}{2}(e^{h^2} - h^2 - 1)$ (B) $\frac{\pi}{2}e^{h^2}$
(C) $\frac{\pi}{2}(e^{h^2} - h^2)$ (D) $\frac{\pi}{2}$

5、设 $F(t) = \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dv$ ，其中 f 为连续函数， Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$ ，

又 $f'(0)$ 存在，而 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ ，则 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^5}$ 之值为 ()

- (A) π (B) $\frac{4}{5}\pi$ (C) $\frac{3}{5}\pi$ (D) $\frac{2}{5}\pi$

6、质量为 M ，半径为 R 的均匀球体，关于它的一条切线的转动惯量为 ()

- (A) MR^2 (B) $\frac{1}{5}MR^2$ (C) $\frac{7}{5}MR^2$ (D) $\frac{5}{7}MR^2$

四、计算二重积分

(1)、 $\iint_D \frac{x dx dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ 其中 D: $y^2 \leq 2x, 0 \leq x \leq 2$

(2)、 $\iint_D \frac{y}{x} dx dy$ 其中 D 是由抛物线 $x = y^2$ ，直线 $y = x$ 所围成的平面闭区域。

(3)、计算 $I = \iint_D e^{\frac{x}{x+y}} dx dy$ 其中 D 是由 $x=0, y=0$, 以及 $x+y=1$ 所围成的平面区域。

(4)、求由半球面 $z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$ 及旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 2az$ 所围立体的表面面积.

五、设有一个由 $y = \ln x, y = 0, x = e$ 所围成的均匀薄片，其面密度为 $\rho = 1$ ，若设此薄片绕 $x = t$ 旋转的转动惯量为 $I(t)$ ，问 t 为何值时， $I(t)$ 最小？

六、计算 $\iiint_{\Omega} \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$ ， $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\pi^2, x^2 + y^2 + z^2 \geq \pi^2$ 。

七、计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (3x^2 + 5y^2 + 7z^2) dv$, $\Omega: 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

八、求椭圆抛物面 $z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ 与 xoy 平面所围成的立体的体积.

九、三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是曲面 $2z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 2$ 所围成的闭区域。

十、计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{1}{x^2+y^2+z^2}) dv$ 其中 Ω 由曲面

$z^2 = x^2 + y^2$ $z \geq x^2 + y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域。

练习五十八 对弧长的曲线积分

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、填空。

1. 平面 xOy 上曲线弧 L 在 (x, y) 处的线密度为 $f(x, y)$, 则其总质量为_____.

2. 当函数 $f(x, y) \equiv 1$ 时, $\int_L f(x, y)ds = \int_L ds$ 表示曲线 L 的_____.

3. 设 $L: x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$, 则 $\int_L e^{x^2+y^2} \arctan \sqrt{x^2 + y^2} ds =$ _____.

二、计算下列对弧长的曲线积分

1. $\int_L yds$; 其中 $L: y^2 = 4x$ 自点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 2)$ 的一段弧。

2. $\oint_L (x^2 + y^2)^n ds$, 其中 L 为圆周 $x = a \cos t, y = a \sin t$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$

3. $\int_L (x + 2y) ds$, 其中 L 为连接 $(2, 0)$ 及 $(0, 4)$ 两点的直线段.

4. $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 Γ 是点 $(1, -1, 2)$ 到点 $(2, 1, 3)$ 的直线段.

5. $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, 其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 与直线 $x=0, y=0$ 在第一象限所围区域的边界。

6. $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, 其中 L 为曲线 $x^2 + y^2 = -2y$

7. $\int_L \sqrt{y} ds$, 其中 L 为摆线的一拱 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

8. $\oint_{\Gamma} x^2 ds$, 其中 Γ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 相交的圆周.

练习五十九 对坐标的曲线积分

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

- 一、 力场由常力 $\vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ 所构成，试求当一质量为 M 的质点，沿圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 按逆时针方向移动过位于第一象限那一段弧时，场力所做的功。

二、计算下列对坐标的曲线积分。

1. $\int_L (x^2 - y)dx$ ，其中 L 是抛物线 $y = 2x^2$ 上以点 $(0,0)$ 到 $(1,2)$ 的一段弧。

2. $\int_L ydx + xdy$, 其中 L 为圆周 $x = R\cos t, y = R\sin t$ 上由 $t_0 = 0$ 到 $t_1 = \frac{\pi}{2}$ 的一段弧.

3. $\oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ (取逆时针方向) .

4. $\int_{\Gamma} x^2 dx + zdy - ydz$, 其中 Γ 为点 $(1,0,2)$ 到点 $(2,1,4)$ 直线。

5. $\int_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, 其中 L 由 $A(0,-1)$ 到 $B(1,0)$ 再到 $C(0,1)$ 的折线组成.

6. $\oint_L xyzdz$, L 为圆周 $x^2+y^2+z^2=1, z=y$, 面对 z 轴的正向看去, L 的方向依逆时针方向.

三、计算 $\int_L (x+y)dx + (y-x)dy$ ，其中 L 是

1. 抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧；
2. 从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的直线段；
3. 先沿直线从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$ ，然后再沿直线到 $(4,2)$ 的折线.

四、计算 $\int_L (1+y^3)dx + (2x+y)dy$ ，其中 L 为由曲线 $y = a \sin x$ ($a>0$) 从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的弧段，并求 a 的值使得积分值最小。

练习六十 格林公式及其应用

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、计算 $\oint_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ ，其中 L 是由抛物线 $y = x^2$ 和 $y^2 = x$ 所围成的区域的正向边界曲线，并验证格林公式的正确性.

二、利用曲线积分，求星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ 所围成的图形的面积.

三、利用格林公式，计算下列曲线积分

1. $\oint_L (x^3 - 3y)dx + (x + \sin y)dy$ ，其中 L 是以点 $(0,0)$ ， $(1,0)$ 和 $(0,2)$ 为顶点的三角形的正向边界.

2. $\oint_L x^2 y dx + y dy$ ，其中 L 是由 $y^2 = x$, $y = x$ 所组成的正向闭曲线.

3. $\int_L (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$ ，其中 L 是从 $A(a,0)$ 沿 $x^2 + y^2 = ax$ 上半圆到 $B(0,0)$ 的圆弧， m 为常数. (要求作图)

四、利用曲线积分与路径无关的条件，计算下列积分.

1. $\int_L (x^3 + xy^2)dx + (y^3 + x^2y)dy$, 其中 L 是 $O(0,0)$ 经 $A(1,1)$ 到 $B(2,0)$ 的折线.

2. $\int_L (1 + xe^{2y})dx + (x^2e^{2y} - y)dy$, 其中 L 为 $O(0,0)$ 经 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 的上半圆周
到 $A(2,2)$ 的弧段.

五、求微分方程 $(2xy+y^2)dx+(2xy+x^2)dy=0$ 的通解.

六、验证 $(2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)dy$ 是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分，
并求这样一个 $u(x, y)$.

练习六十一 对面积的曲面积分

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、填空题

1. $\iint_{\Sigma} \sqrt{z} ds =$ _____, 其中 Σ 为曲面 $z^2 = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$

2. 设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 则

(1) $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) ds =$ _____.

(2) $\iint_{\Sigma} (x + y + z) ds =$ _____.

二、化曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) ds$ 为二重积分, 其中 Σ 为曲面 $z^2 = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$ 。

三、计算下列对面积的曲面积分

1. $\iint_{\Sigma} (z + 2x + \frac{4}{3}y) ds$, 其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一卦限中的部分.

2. $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) ds$, 其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 被平面 $z = 3$ 所截的部分.

3. $\iint_{\Sigma} \sqrt{1+4z} ds$, 其中 Σ 为 $z = x^2 + y^2$ 上 $z \leq 1$ 的部分.

4. 计算 $\iint_{\Sigma} (x + y + z) ds$, 其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 界于平面 $z = 1$ 及 $z = 2$ 之间的部分.

5. 计算 $\iint_{\Sigma} (ax^2 + by^2 + cz^2) ds$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

练习六十二 对坐标的曲面积分

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、 填空题

1. 曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dx dy =$ _____

(化为二重积分), 其中 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2 (z \leq 1)$ 的上侧, 化为二次积分用极坐标表示为_____.

2. 曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dx dz =$ _____

(化为二重积分), 其中其中 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2 (y \geq 0, z \leq 1)$, 法向量与 Y 轴成钝角。

二、 计算下列对坐标的曲面积分

1. $\iint_{\Sigma} z dx dy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的上半部分的下侧.

2. $\iint_{\Sigma} z dx dy + x dy dz + y dz dx$, 其中 Σ 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 $z = 0$ 及 $z = 3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧.

3. $\iint_{\Sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dz dx$, 其中 Σ 是平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

4. $\iint_{\Sigma} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) ds$, 其中 Σ 是锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$),

而 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是此锥面的外法线的方向余弦.

三、把对坐标的曲面积分 $\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$ 化成对面积的曲面积分，其中

Σ 为： 1. $3x + 2y + 2\sqrt{3}z = 6$ 在第一卦限部分的上侧；

2. $z = 8 - (x^2 + y^2)$ 在 xoy 面上方的部分的上侧.

练习六十三 高斯公式、通量与散度

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

利用高斯公式计算下列曲面部分

1. $\iint_{\Sigma} (x+1)dydz + ydzdx + dx dy$, 其中 Σ 为以 $(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ 为顶点的四面体表的外侧.

2. $\iint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dx dy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

3. $\iint_{\Sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dz dx$, 其中 Σ 为 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 与 $z = 2$ 所围成立体边界的外侧.

4. $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中 Σ 为 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

5.. $\iint_{\Sigma} (2x+z)dydz + zdx dy$, 其中 Σ 为有向曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$, 其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

6. $\iint_{\Sigma} (8y+1)x dydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy$, 其中 Σ 是由曲线

$\begin{cases} z = \sqrt{y-1} \\ x = 0 \end{cases} \quad (1 \leq y \leq 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面, 它的法向量与 y 轴正向的

夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.

阶段自测题（十一）曲线积分、曲面积分

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一. 填空题

1. 已知曲线 L 为 $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, 则 $ds =$ _____.

2. 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, 则使得格林公式 $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_L Pdx + Qdy$ 成立的充分条件是_____.

3. 已知 Σ 为抛物面 $z = 2 - (x^2 + y^2)$ 在 xoy 面上方的部分, 则将曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) ds$ 化为二重积分后的式子应为 $\iint_D$ _____, 其中 D 为_____;

4. 已知 Σ 为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则曲面面积元素 $dS =$ _____ $dx dy$.

二. 计算下列各题

1. $\int_L x ds$, 其中 L 是 $x = 0, y = 0, x + y = 1$ 所围成的平面图形的边界.

2. $\int_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, 其中 L 为 $y = 1 - |1 - x|$ ($0 \leq x \leq 2$) 沿 x 增大方向.

三、计算下列曲面积分.

1. $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2)ds$, 其中 Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被 $z = h$ ($h > 0$) 所截部分.

2. $\iint_{\Sigma} y^2 dzdx + z dx dy$, 其中 Σ 是曲面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

3. $\iint_{\Sigma} xz^2 dydz + x^2 ydzdx + y^2 zdx dy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的上半部分的上侧.

四、已知函数 $u = u(x, y)$ 有 $du = \frac{ax+y}{x^2+y^2} dx - \frac{x-y+b}{x^2+y^2} dy$

(1) 求 a, b 的值;

(2) 计算 $I = \oint_L \frac{ax+y}{x^2+y^2} dx - \frac{x-y+b}{x^2+y^2} dy$, 其中 L 为 $x^2 + y^2 = 1$, 取正向.

五、 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面 $(y > 0)$ 内的有向分段光滑曲线, 其起点为 (a, b) , 终点为 (c, d) 。记

$$I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy$$

- (1). 证明曲线积分 I 与路径无关;
- (2). 当 $ab = cd$ 时, 求 I 的值。

练习六十四 常数项级数概念及其性质

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、选择题

1. 下列说法正确的是 ()

(A) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则必有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ 。

(B) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty$ 。

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛。

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散。

2. 下列级数收敛的是 ()

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

二、填空题

1. 级数 $\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x}{2 \cdot 4} + \frac{x\sqrt{x}}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{x^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots$ 的一般项 $u_n =$ _____。

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}$ 的第五项为_____。

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 3^n}{7^n}$ 的和 $S =$ _____。

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + 0.1)$ 的敛散性为_____。

三、计算题：

判别下列级数的敛散性

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$(2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \cdots$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)}$$

$$(4) \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{3}} + \cdots$$

$$(5) \quad \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$$

$$(6) \quad \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{6} + \sin \frac{3\pi}{6} + \cdots \sin \frac{n\pi}{6} + \cdots$$

练习六十五 正项级数及其收敛的充分判定法

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、选择题

1. 下列说法正确的是 ()

(A). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(B). 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k < 1$.

(C). 设 $u_n \leq v_n (n=1, 2, \dots)$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

(D). 设 $0 \leq u_n \leq v_n (n=1, 2, \dots)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

2. 下列级数收敛的是 ()

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2}$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$

二、填空题

1. 若将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2n^2}$ 比较, 即可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$ 一定是

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2} (a > 0)$, 当 a 满足不等式_____时收敛, 在_____时发散.

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1}}{n^a}$, 当 a 满足_____时收敛, 在_____时发散.

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} (a > 0)$, 当 a 满足_____时收敛, 在_____时发散.

三、计算题

判定下列正项级数的敛散性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3-3n+4}}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(1+n)}$$

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$$

$$(6) \quad \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2^2} + \cdots + \sin \frac{\pi}{2^n} + \cdots$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} (a>0)$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n)^{n^2}}{3^n n^{n^2}}$$

练习六十六 任意项级数、交错级数及其审敛法

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、选择题

1. 若 $k > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$

- (A) 发散; (B) 绝对收敛; (C) 条件收敛 (D) 敛散性与 k 有关

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 必发散; (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 必发散;
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)$ 必发散; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + v_n^2)$ 必发散.

3. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$

- (A) 可能发散; (B) 一定绝对收敛;
(C) 一定条件收敛; (D) 可能绝对收敛也可能条件收敛。

4. 下列说法正确的是 ()

(A) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 又 $|v_n| \leq |u_n|$, $n = 1, 2, \dots$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛.

(B) 若 $u_n \geq 0$, $u_n \geq u_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = k > 1$.

(D) 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 必发散.

二、计算题

判定下列级数是否收敛，若收敛是条件收敛还是绝对收敛？

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{n+1}} \sin \frac{\pi}{n+1}$$

$$(2) \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

三、指出下列级数中哪些是正项级数，哪些是交错级数，哪些是任意项级数，再判断各级数的敛散性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (1+(-1)^{n-1}) \frac{\sin \frac{1}{n}}{n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{4}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n^2}$$

四、证明题

1、已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

2、设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛, 且 $a_n \leq c_n \leq b_n$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

练习六十七 幂级数

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一 填空题:

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径为_____

2. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 3^n x^n$ 的收敛区间是_____

3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ 的收敛区间是_____

4. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1}$ 的和函数 $S(x)$ 为_____

并由此可求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}$ 的和为_____

二 选择题:

1 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $[-R, R]$, 则 $x = R$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的是()

(A) 收敛点; (B) 发散点; (C) 可能是收敛点, 也可能是发散点

2 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n + 4^n} (x-1)^{2n}$ 的收敛半径 R 等于 ()

(A) 1 (B) 2 (C) 1/2 (D) 4

3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处收敛, 则此级数在 $x = 2$ 处 ()

(A) 条件收敛 (B) 绝对收敛 (C) 发散 (D) 收敛性不定

4 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^n (x-1)^n$ 的收敛半径 R 等于 ()

(A) 1 (B) e (C) e^{-1} (D) e^{-2}

三 计算题:

1. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} (x^2 + x + 1)^n$ 的收敛半径及收敛域

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} (-1 < x < 1)$ 的和函数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^{n+1}}$ 的和

3. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)}$ 在收敛域内的和函数 $S(x)$.

4. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ 的和。

练习六十八 函数展开成幂级数

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一 填空题:

1. 设 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____

2. $\frac{d(e^x - 1)}{dx}$ 的幂级数表示式为 _____, 且由此可得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} =$$

3. $y = \frac{x}{x-1}$ 在 $x_0 = 2$ 处的二阶泰勒公式为 _____

4. 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $x = -1$ 处的泰勒级数为 _____, 其收敛区间为 _____。

5. 若 $y = \arctan x$, 则 $y^{(2n)}(0) =$ _____ $y^{(2n+1)}(0) =$ _____

二 计算题:

1. 将下列函数在指定处展开成幂级数, 并求其收敛域

(1) $f(x) = \ln(2+x)$, $x_0 = 0$

$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 7}, \quad x_0 = -2$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad x_0 = 0$$

2. 展开 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 为 x 幂级数。

三 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 求 $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$ 的幂级数展开式.

练习六十九 函数的级数展开式的应用

挂牌班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一、计算题：

1. 求 $\sqrt[5]{245}$ 的近似值，要求精确到 10^{-4}

2. 用 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ 计算 $\sin 18^\circ$ 近似值，并估计误差。

3. 计算 $\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ 误差小于 10^{-4} 的近似值

二、证明题:

1. 试证 $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \cdots$

2. 利用幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 的和函数计算 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{2^{n-1}}$ 的和。

练习七十 傅立叶级数

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一 填空

1. 设 $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x \leq 0 \\ 1+x^2 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$, 则其以 2π 为周期的傅立叶级数

在点 $x = \pi$ 处收敛于_____

2. 设函数 $f(x) = \pi x + x^2, (-\pi < x < \pi)$ 的傅立叶级数展式为

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则其中系数 b_3 的值为_____

二 计算题

1. 下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π ，试将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数， $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为：

$$(1) \quad f(x) = 3x^2 + 1 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

2. 将函数 $f(x) = 2\sin\frac{x}{3} (-\pi \leq x \leq \pi)$ 展开成傅立叶级数

练习七十一 正弦级数和余弦级数

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

1. 将函数 $f(x) = \cos \frac{x}{2} (-\pi \leq x \leq \pi)$ 展开成傅立叶级数。

2. 将函数 $f(x) = x(\pi - x)$ ($0 \leq x \leq \pi$) 展开成正弦级数。

3. 函数 $f(x) = e^{2x}, (0 \leq x \leq \pi)$ 展开成余弦级数

4. 设 $f(x)$ 为以 2π 为周期的函数，证明：

(1) 若 $f(x-\pi) = f(x)$, 则傅立叶系数, $a_{2k+1} = 0, b_{2k+1} = 0, k = 0, 1, 2, \dots$

(2) 若 $f(x-\pi) = -f(x)$, 则傅立叶系数, $a_0 = 0, a_{2k} = 0, b_{2k} = 0, k = 0, 1, 2, \dots$

练习七十二 以 $2l$ 为周期函数的傅立叶级数

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

1. 将周期函数 $f(x) = 1 - x^2$ ($-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$) 展开成傅立叶级数。

2. 将函数 $\begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ l-x, & \frac{l}{2} \leq x < l \end{cases}$ 分别展开成正弦级数和余弦级数。

3. 将 $f(x) = x$ 在 $[0,3]$ 上展开为傅氏余弦级数

4. 将 $f(x) = 2 + |x|$ ($-1 \leq x \leq 1$) 函数展开成以 2 为周期的傅立叶级数，并由此

证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

阶段自测题（十二） 无穷级数

挂牌班_____ 自然班_____ 姓名_____ 学号_____ 序号_____

一 填空题:

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2}$ ($a > 2$) 当 a 满足不等式时_____收敛, 在_____时发散。

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^a+1} - \sqrt{n^a})$ ($a > 0$) 当 a 满足不等式_____时收敛, 当_____时发散。

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$ 的收敛区间是_____

4. $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ 关于 x 的幂级数展开式中 x^3 系数为_____。

5. $f(x) = e^x \cos x$ 在 $x=0$ 的幂级数中 x^2 系数为_____。

二 选择题:

1. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收敛时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ()

(A) 必同时收敛

(B) 绝对收敛的

(C) 可能不同时收敛

(D) 不可能同时收敛

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 是 ()

(A) 条件收敛的

(B) 绝对收敛的

(C) 不可能发散的

(D) 可能不发散的

3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ ()

(A) 是条件收敛的

(B) 是绝对收敛的

(C) 可能收敛也可能发散

(D) 以上都不对

4. 当常数 $p > 0$ 时, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^p}$ 在其收敛区间的右端点处是 ()

(A) 条件收敛的 (B) 绝对收敛的

(C) 当 $0 < p \leq 1$ 为条件收敛, $p > 1$ 为绝对收敛

(D) 当 $0 < p \leq 1$ 为绝对收敛, $p > 1$ 为条件收敛

5. 幂级数 $1 - \frac{x-1}{3\sqrt{2}} + \frac{(x-1)^2}{3^2\sqrt{3}} - \frac{(x-1)^3}{3^3\sqrt{4}} + \frac{(x-1)^4}{3^4\sqrt{5}} - \dots$ 在其收敛区间的两个端点处 ()

(A) 全是发散 (B) 全是收敛

(C) 左端点收敛, 右端点发散 (D) 左端点发散, 右端点收敛

6. 下列说法正确的是 ()

(A) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 也发散

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n v_n)$ 也发散

(C) 设 $u_n \leq v_n (n=1, 2, \dots)$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ 也收敛

三 计算题:

1. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$ 的敛散性。

2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ 的绝对收敛和条件收敛性

3. 求级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)2^n}$ 的和

4. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 。

(1) 确定其收敛区间； (2) 设 $S(x)$ 是幂级数在收敛区间上的和函数，求 $[e^x S(x)]'$ ； (3) 利用 (2) 的结果求 $S(x)$ 。

5 . 将函数 $\sin^2 x$ 展开为关于 x 的幂级数

6 . 将函数 $f(x) = \frac{x}{2+x}$ 展成 x 的幂级数。

四 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (a_n > 0)$ 收敛, 试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛