

第 7 章 向量代数与空间解析几何

7.1 向量及其运算

主要知识与方法

1. 空间直角坐标系

过空间一点 O ，作三条互相垂直的数轴，三条数轴按右手规则确定方向，这样确定的坐标系称为空间直角坐标系.

注：在空间直角坐标系中，空间一点可用三个坐标表示，即 $M(x, y, z)$.

2. 向量

既有大小又有方向的量称为向量.

3. 向量运算

(1) 加法：在空间取一点 O ，作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ，以 OA ， OB 为边构成一个平行四边形 $OACB$ ，则称向量 $\overrightarrow{OC}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，记为 $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$.

(2) 减法：在上述加法定义中，向量 $\overrightarrow{BA}$ 称为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差，即 $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$.

(3) 数乘： $\lambda\vec{a}$ 定义为：(1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$ ，(2) 当 $\lambda > 0$ 时 $\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 相同，当 $\lambda < 0$ 时 $\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 相反.

注： $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a}$.

(4) 运算规律：

$$\textcircled{1} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}; \quad \textcircled{2} \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c});$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}; \quad \textcircled{4} \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0};$$

$$\textcircled{5} \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}; \quad \textcircled{6} \quad \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a};$$

$$\textcircled{7} (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} ; \quad \textcircled{8} \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

4. 向量夹角

在空间取一点 O ，作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ，则不超过 π 的 $\angle AOB$ 称为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角.

5. 投影

(1) 投影：数 $|\vec{a}|\cos\varphi$ 称为向量 $\vec{a}$ 在有向轴 u 上的投影(其中 φ 为向量 $\vec{a}$ 与轴 u 的夹角)，记为 $\text{Prj}_u \vec{a}$ ，即 $\text{Prj}_u \vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$.

(2) 投影性质

$$\textcircled{1} \text{Prj}_u(\vec{a} + \vec{b}) = \text{Prj}_u \vec{a} + \text{Prj}_u \vec{b}; \quad \textcircled{2} \text{Prj}_u(\lambda\vec{a}) = \lambda\text{Prj}_u \vec{a}.$$

6. 向量坐标

设向量 $\vec{a}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 a_x, a_y, a_z ，则向量 $\vec{a}$ 表示为 $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ，投影 a_x, a_y, a_z 称为向量 $\vec{a}$ 的坐标，记为 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

注：设空间两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ ， $B(x_2, y_2, z_2)$ ，则 $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

7. 模的计算公式

设 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ ，则 $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

注：空间两点距离 $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

8. 方向角余弦的计算公式

设 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ ，则

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

9. 数量积

(1) 数量积：数 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 称为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积(其中 θ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角)，记为 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

(2) 规律:

$$\textcircled{1} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}; \textcircled{2} (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}); \textcircled{3} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

(3) 有关结论:

$$\textcircled{1} \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2; \quad \textcircled{2} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{Prj}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a};$$

$$\textcircled{3} \text{ 设 } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \text{ 则 } \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

(4) 计算公式: 设 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

$$(4) \text{ 夹角余弦的计算公式: } \cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

$$(5) \text{ 投影计算公式: } \text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

10. 向量积

(1) 向量积: 设向量 $\vec{c}$ 满足 $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ (其中 θ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角), 且 $\vec{c}$ 垂直 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 确定的平面, 方向按右手规则从 $\vec{a}$ 转向 $\vec{b}$, 则称向量 $\vec{c}$ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的向量积, 记为 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

(2) 规律:

$$\textcircled{1} \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}; \textcircled{2} (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b});$$

$$\textcircled{3} (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

(3) 有关结论:

$$\textcircled{1} \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}; \quad \textcircled{2} \text{ 以向量 } \vec{a}, \vec{b} \text{ 为边的平行四边形面积 } S = |\vec{a} \times \vec{b}|;$$

$$\textcircled{3} \text{ 设 } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \text{ 则 } \vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

(3) 计算公式: 设 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \{a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x\}.$$

11. 混合积

(1) 混合积：数 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ 称为向量 $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$ 的混合积，记为 $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$.

(2) 规律： $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = [\vec{b} \vec{c} \vec{a}] = [\vec{c} \vec{a} \vec{b}]$.

(3) 计算公式：设 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, 则

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

(4) 三个向量共面的条件：

设 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, 则

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} \text{ 共面} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

(5) 体积计算公式：

① 以 $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积 $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$.

② 以 $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ 为棱的四面体的体积 $V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$.

练习题

一、填空题

1. 设 $\vec{a} = \{1, -2, 3\}$, $\vec{b} = \{-1, 1, 2\}$, 则 $3\vec{a} - 2\vec{b} =$ _____.
2. 已知向量 $\vec{a} = \{1, -1, 2\}$ 与 $\vec{b} = \{2, 3, \lambda\}$ 垂直, 则 $\lambda =$ _____.
3. 向量 $\vec{a} = \{4, -3, 4\}$, $\vec{b} = \{2, 2, 1\}$, 则 $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} =$ _____.
4. 设 $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 1, 5)$, 则与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的单位向量为 _____.

二、计算题

1. 求与向量 $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ 共线且满足 $\vec{a} \cdot \vec{x} = -18$ 的向量 $\vec{x}$.

2. 设 $\vec{a} = \{2, -3, 1\}$, $\vec{b} = \{1, -1, 3\}$, $\vec{c} = \{1, -2, 0\}$, 求: (1) $-(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$;

(2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

3. 设 $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$, 求以 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为边的平行四边形对角线的长度.

4. 指出非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 应分别满足什么条件才能使下列各式成立.

(1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, (2) $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$, (3) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

5. 已知向量 $\vec{a}$ 同时垂直向量 $\vec{b} = \{3, 6, 8\}$ 及 x 轴, 且 $|\vec{a}| = 2$, 求 $\vec{a}$.

6. 已知 $\overrightarrow{AB}$ 的终点坐标为 $(2, -1, 4)$ ，且 $\overrightarrow{AB}$ 在 x, y, z 轴上的投影分别为 $-1, 3, 2$ ，求点 A 的坐标.

7. 已知 $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 3\vec{k}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{j} + 3\vec{k}$ ，求 $\triangle OAB$ 的面积.

8. 设 $\vec{a} + 3\vec{b}$ 与 $7\vec{a} - 5\vec{b}$ 垂直， $\vec{a} - 4\vec{b}$ 与 $7\vec{a} - 2\vec{b}$ 垂直，求向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角.

9. 设 $\vec{a} = \{1, -1, 1\}$, $\vec{b} = \{3, -4, 5\}$, $\vec{c} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$, 问 λ 取何值时, $|\vec{c}|$ 最小? 并证明当 $|\vec{c}|$ 最小时, $\vec{c} \perp \vec{b}$.

10. 已知 $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, 求 $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

三、证明题

试证 $\vec{p} = \vec{b} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}}{|\vec{a}|^2}$ 垂直 $\vec{a}$.

7.2 曲面与空间曲线

主要知识与方法

1. 曲面方程

空间曲面的一般方程: $F(x, y, z) = 0$.

2. 球面方程

设球面的球心为 (x_0, y_0, z_0) , 半径为 R , 则球面方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

3. 旋转曲面方程

(1) yOz 平面上曲线 $f(y, z) = 0$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

yOz 平面上曲线 $f(y, z) = 0$ 绕 y 轴旋转一周所形成的曲面方程为

$$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

(2) zOx 平面上曲线 $f(z, x) = 0$ 绕 x 轴旋转一周所形成的曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{y^2 + z^2}, x) = 0.$$

zOx 平面上曲线 $f(z, x) = 0$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面方程为

$$f(z, \pm\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$$

(3) xOy 平面上曲线 $f(x, y) = 0$ 绕 y 轴旋转一周所形成的曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0.$$

xOy 平面上曲线 $f(x, y) = 0$ 绕 x 轴旋转一周所形成的曲面方程为

$$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0.$$

特别地, 有

旋转抛物面方程: $z = x^2 + y^2$.

圆锥面方程: $z^2 = x^2 + y^2$.

4. 柱面方程

(1) 准线为 xOy 平面上曲线 $f(x, y) = 0$, 母线平行 z 轴的柱面方程为

$$f(x, y) = 0.$$

(2) 准线为 yOz 平面上曲线 $f(y, z) = 0$, 母线平行 x 轴的柱面方程为

$$f(y, z) = 0.$$

(3) 准线为 zOx 平面上曲线 $f(z, x) = 0$, 母线平行 y 轴的柱面方程为

$$f(z, x) = 0.$$

特别地, 有

圆柱面方程: $x^2 + y^2 = R^2$.

5. 空间曲线方程

(1) 空间曲线的一般方程: $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$.

(2) 空间曲线的参数方程: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$.

6. 投影曲线方程

(1) 设空间曲线 L 的一般方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 且从方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 消去 z 得 $H(x, y) = 0$, 则曲线 L 在 xOy 平面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

(2) 设空间曲线 L 的一般方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 且从方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 消去 x 得 $R(y, z) = 0$, 则曲线 L 在 yOz 平面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} R(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

(3) 设空间曲线 L 的一般方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 且从方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 消去 y 得 $T(z, x) = 0$, 则曲线 L 在 zOx 平面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} T(z, x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

练习题

一、填空题

1. 球心为 $(2, 3, 1)$ ，半径为 3 的球面方程为_____.
2. 双曲线 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面方程为_____.
3. 圆心在原点，半径为 2 的圆的方程为_____.
4. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ y + z = 1 \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线方程为_____.

二、解答题

1. 求到点 $A(1, -1, 2)$ 和 $B(3, 1, 4)$ 距离相等的点的轨迹方程.
2. 求母线分别平行 x 轴， y 轴且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$ 的柱面方程.

3. 说明旋转曲面 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$ 是怎样形成的.

4. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与平面 $x + z = 1$ 的交线在 xOy 平面上的投影曲线方程.

5. 将曲线的一般方程 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ y + z = 0 \end{cases}$ 化为参数方程.

7.3 平面及其方程

主要知识与方法

1. 法向量

设非零向量 $\vec{n}$ 垂直平面 Π ，则称向量 $\vec{n}$ 为平面 Π 的法向量.

注：(1) 法向量 $\vec{n}$ 垂直平面 Π 内任何向量.

(2) 设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为平面 Π 内两个相交向量，则法向量可取为 $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.

2. 平面的点法式方程

设平面 Π 过点 $M(x_0, y_0, z_0)$ ，且法向量 $\vec{n} = \{A, B, C\}$ ，则平面 Π 的方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

上述方程称为平面的点法式方程.

3. 平面的一般方程

方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 称为平面的一般方程.

这时，平面的法向量 $\vec{n} = \{A, B, C\}$.

4. 几种特殊平面

- (1) 当 $D = 0$ 时，平面过原点.
- (2) 当 $A = 0$ 时，平面平行 x 轴.
- (3) 当 $A = D = 0$ 时，平面过 x 轴.
- (4) 当 $A = B = 0$ 时，平面平行 xOy 平面.

类似可得其它情况.

5. 平面夹角

(1) 定义：两个平面法向量的夹角称为两个平面的夹角.

(2) 计算公式：设两个平面的法向量分别为 $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ ，则夹角 θ 的余弦为

$$\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}.$$

特别地, 有

$$\textcircled{1} \text{ 平面}\Pi_1 // \text{平面}\Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 ;$$

$$\textcircled{2} \text{ 平面}\Pi_1 \perp \text{平面}\Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 .$$

6. 距离

(1) 平面外一点到平面的距离:

平面外一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

(2) 两个平行平面的距离:

平行平面 $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ 与 $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

练习题

一、填空题

1. 点 $M(1, 2, 1)$ 到平面 $x + 2y + 2z - 10 = 0$ 的距离为_____.
2. 设平面 $x - 2y + z - 1 = 0$ 与平面 $2x + \lambda y - 4z + 3 = 0$ 垂直, 则 $\lambda =$ _____.
3. 平面 $2x - y + z - 7 = 0$ 与平面 $x + y + 2z - 11 = 0$ 的夹角是_____.
4. 过点 $(1, -1, 2)$ 且平行平面 $x - y + 3z - 4 = 0$ 的平面方程为_____.

二、计算题

1. 求过点 $A(2, 1, -1)$ 、 $B(3, 2, 1)$ 、 $C(1, -2, 3)$ 的平面方程.

2. 设一平面与平面 $x - 2y + 2z = 1$ 平行, 且点 $(2, -1, 1)$ 到该平面的距离为 1, 求该平面方程.

3. 已知平面过点 $M(3, -2, 5)$ 、 $N(2, 3, 1)$, 且平行 z 轴, 求其方程.

4. 已知两点 $A(-7, 2, -1)$ 和 $B(3, 4, 10)$ ，一平面通过点 B 且垂直于 AB ，求其方程.

5. 连接两点 $M(3, 10, -5)$ 和 $N(0, 12, z)$ 的线段平行平面 $7x + 4y + z - 1 = 0$ ，确定 N 点的未知坐标.

6. 自点 $P(2, 3, -5)$ 分别向各坐标面作垂线，求过三个垂足的平面方程.

7. 确定 k , 使点 $M(1, -2, 1)$ 到平面 $2x - y + 2z + k = 0$ 的距离为 3.

8. 一平面经过原点及点 $A(6, -3, 2)$, 且与平面 $4x - y + 2z = 8$ 垂直, 求其方程.

7.4 空间直线及其方程

主要知识与方法

1. 方向向量

设非零向量 $\vec{s}$ 平行直线 L ，则称向量 $\vec{s}$ 为空间直线 L 的方向向量.

2. 直线的标准式方程

设直线 L 过点 $P(x_0, y_0, z_0)$ ，且方向向量 $\vec{s} = \{l, m, n\}$ ，则直线 L 的方程为

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}.$$

上述方程称为直线 L 的标准式方程或对称式方程.

由标准式方程可得，过点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

3. 直线的参数方程

$$\text{方程} \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \text{称为直线 } L \text{ 的参数方程.}$$

这时，直线的方向向量 $\vec{s} = \{l, m, n\}$ ，且过点 $P(x_0, y_0, z_0)$.

4. 直线的一般方程

$$\text{方程} \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \text{称为直线的一般方程.}$$

这时，直线的方向向量 $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ ，其中 $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ ， $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$.

而直线上点的坐标为方程组的一个解.

5. 直线夹角

(1) 定义：两条直线方向向量的夹角称为两条直线的夹角

(2) 计算公式：设两条直线的方向向量分别为 $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ ，则夹角 θ 的余弦为

$$\cos \theta = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|}.$$

特别地, 有

$$\textcircled{1} \text{ 直线 } L_1 // \text{ 直线 } L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 // \vec{s}_2;$$

$$\textcircled{2} \text{ 直线 } L_1 \perp \text{ 直线 } L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2.$$

6. 直线与平面夹角

(1) 定义: 直线与它在平面内投影的夹角称为直线与平面的夹角.

(2) 计算公式: 设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}$, 平面 Π 的法向量为 $\vec{n}$, 则直线 L 与平面 Π 夹角 φ 的正弦为

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|}.$$

特别地, 有

$$\textcircled{1} \text{ 直线 } L // \text{ 平面 } \Pi \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n};$$

$$\textcircled{2} \text{ 直线 } L \perp \text{ 平面 } \Pi \Leftrightarrow \vec{s} // \vec{n}.$$

7. 点到直线距离

直线外一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到直线 $L: \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ 的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}.$$

其中 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 为直线 L 上一点, $\vec{s} = \{l, m, n\}$ 为直线 L 的方向向量.

8. 两条直线的距离

(1) 两条平行直线的距离

设有两条平行直线 $L_1: \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ 与 $L_2:$

$\frac{x-x_2}{l} = \frac{y-y_2}{m} = \frac{z-z_2}{n}$, 则直线 L_1 与 L_2 的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

其中 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 为直线 L_1 上一点, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 为直线 L_2 上一点, $\vec{s} = \{l, m, n\}$ 为直线 L_1 或 L_2 的方向向量.

(2) 两条异面直线的距离

设有两条异面直线 L_1 : $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ 与 L_2 :

$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$, 则直线 L_1 与 L_2 的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2)|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$

其中 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 为直线 L_1 上一点, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 为直线 L_2 上一点,

$\vec{s}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$ 为直线 L_1 的方向向量, $\vec{s}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$ 为直线 L_2 的方向向量.

9. 平面束及其方程

(1) 定义: 过一直线的所有平面称为平面束.

(2) 方程: 过直线 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 的平面束方程为

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

说明: (1) 上述平面束方程不包含第二个平面.

(2) 当一平面过一直线求其方程时可采用平面束方程.

练习题

一、填空题

1. 过点 $A(3, -2, 1)$ 、 $B(-1, 0, 2)$ 的直线方程为_____.
2. 直线 $\begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \\ 3x + y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$ 的方向向量 $\vec{s} =$ _____.
3. 过点 $M(4, -1, 2)$ 且平行直线 $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z-1}{3}$ 的直线方程为_____.
4. 直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{1}$ 与平面 $y - z + 4 = 0$ 的夹角为_____.

二、解答题

1. 一直线过点 $M(-1, 1, 2)$ 且方向向量 $\vec{s}$ 垂直向量 $\vec{a} = \{2, 1, 3\}$ 、 $\vec{b} = \{1, -2, 1\}$, 求其方程.
2. 一直线求过点 $A(2, -1, 3)$ 且平行于直线 $\begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ 2x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$, 求其标准式方程及参数方程.

3. 求空间直线 $\begin{cases} x = 2z + 5 \\ y = 6z - 7 \end{cases}$ 的标准式方程.

4. 求直线 $l_1: \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ 与直线 $l_2: \begin{cases} y + 3z = 4 \\ 3y - 5z = 1 \end{cases}$ 的夹角.

5. 一平面过点 $M(3, 1, -2)$ 及直线 $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$, 求其方程.

6. 一平面过直线 $\begin{cases} x+4y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$, 且原点到该平面的距离为 2, 求其方程.

7. 求点 $P_0(1, -1, 1)$ 到直线 $l: \begin{cases} x=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$ 的距离.

8. 求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线方程.

9. 求过点 $(2, 1, 3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

10. 一直线过点 $P(1, 1, 1)$, 且与直线 $l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$ 垂直, 与直线

$l_2: x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ 相交, 求其方程.

11. 求两直线 $l_1: \begin{cases} x+2y+5=0 \\ 2y-z-4=0 \end{cases}$ 及 $l_2: \begin{cases} y=0 \\ x+2z+4=0 \end{cases}$ 的公垂线方程.

12. 设一直线过点 $P(2,1,3)$ 并与 z 轴相交, 且垂直于直线 $\frac{z-1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$, 求其参数方程.

13. 求直线 $L_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{1}$ 与 $L_2: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{1}$ 的距离.

14. 求直线 $L_1: \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 与直线 $L_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ 的距离.

第 8 章 多元函数及其应用

8.1 多元函数极限与连续

主要知识与方法

1. 二元函数的概念

(1) 定义: 设 D 是一个非空平面点集, 如果对任意 $P(x, y) \in D$, 按照对应法则 f , 存在唯一 $z \in \mathbb{R}$ 与 (x, y) 对应, 则称 f 为定义在 D 上的函数, 记为 $z = f(x, y)$ 或 $z = f(P)$, 其中平面点集 D 称为函数的定义域, 记为 $D(f)$.

而集合 $Z(f) = \{z | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ 称为函数的值域.

(2) 图形: 空间点集 $\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D(f)\}$ 称为函数 $z = f(x, y)$ 的图形.

函数 $z = f(x, y)$ 的图形通常为一个曲面.

(3) 定义域的求法: 先根据表达式有意义列出不等式(组), 再解不等式(组)得定义域.

类似可定义 $n(n \geq 3)$ 元函数概念.

2. 二元函数极限

设二元函数 $f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的一个聚点, 若任意的

$\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $(x, y) \in D \cap \overset{\circ}{U}(P_0, \delta)$, 有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

则称 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ 时的极限, 记为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \text{ 或 } \lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = A.$$

说明: 定义中 $P \rightarrow P_0$ 的方式是任意的, 且二元函数极限具有与一元函数极限类似的性质与运算法则.

3. 判断二元函数极限不存在的方法

(1) 选取 $P \rightarrow P_0$ 的两种方式, 通常取 P 沿两条过点 P_0 的直线或曲线无限趋于 P_0 , 使得按此两种方式函数 $z = f(x, y)$ 的极限不同;

(2) 选取 $P \rightarrow P_0$ 的一种方式, 通常取 P 沿某条过点 P_0 的直线或曲线无限趋于 P_0 , 使得按此方式 $z = f(x, y)$ 的极限不存在.

4. 连续

设 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续.

否则称函数 $f(x, y)$ 在点 P_0 处不连续, 而点 P_0 称为函数 $f(x, y)$ 的间断点.

注: (1) 一切多元初等函数在其定义区域内连续.

(2) 二元函数的间断点有可能为一条曲线.

5. 有界闭区域上多元连续函数的性质

(1) 有界定理: 设多元函数 $u = f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $u = f(P)$ 在 D 上有界, 即存在 $M > 0$, 使得 $|f(P)| \leq M$.

(2) 最大值与最小值定理: 设多元函数 $u = f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $u = f(P)$ 在 D 上存在最大值与最小值, 即存在 $P_1, P_2 \in D$, 使得

$$f(P_1) = \max_{P \in D} f(P), \quad f(P_2) = \min_{P \in D} f(P).$$

(3) 介值定理: 设多元函数 $u = f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $u = f(P)$ 在 D 上必取得介于最小值 m 和最大值 M 之间的任何值, 即对任意 $\mu \in (m, M)$, 存在 $P_0 \in D$, 使得 $f(P_0) = \mu$

6. 求二元函数极限的常用方法

(1) 极限运算法则.

(2) 夹逼准则.

(3) 两个重要极限.

(4) 无穷小量乘有界函数为无穷小量.

(5) 等价无穷小替代.

(6) 初等函数的连续性.

练习题

一、填空题

1. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow 0}} \frac{\arctan(xy)}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (\frac{1}{x} \sin y + \frac{1}{y} \sin x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\cos(\pi x + y)}{\ln(x + e^y)} = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 函数 $z = \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x}$ 的间断点为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、解答题

1. 求极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{xy+4}-2}{xy}$.
2. 求极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

3. 求极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow 0}} (1 + \frac{2}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$.

4. 判断极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy + y^2}{x^2 + y^2}$ 是否存在.

三、证明题

证明极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$ 不存在.

8.2 偏导数与全微分

主要知识与方法

1. 偏导数

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

$$\text{也可记为 } z'_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}、z'_y \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}、\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}、\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

2. 偏导数的几何意义

二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的偏导数为 $f'_x(x_0, y_0)$ 表示曲面

$z = f(x, y)$ 被平面 $y = y_0$ 截得的空间曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

处切线对 x 轴的斜率; $f'_y(x_0, y_0)$ 表示曲面 $z = f(x, y)$ 被平面 $x = x_0$ 所截得的空间

曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处切线对 y 轴的斜率.

3. 偏导函数

如果函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内任一点 $P(x, y)$ 处对 x , 对 y 的偏导数都存在,

分别称为函数 $z = f(x, y)$ 对 x, y 的偏导函数, 并分别记为 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 或 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial f}{\partial y}$,

$$z'_x、z'_y, \quad f'_x(x, y)、f'_y(x, y).$$

注: 二元函数的偏导数可以推广到 $n(n > 2)$ 元函数的偏导数.

4. 偏导数求法

将其余自变量看成常数, 利用一元函数的求导方法对该自变量求导.

5. 二阶偏导数

偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 的偏导数 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ 称为二阶偏

导数, 记为 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 或 $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy}$.

其中 z''_{yx}, z''_{xy} 称为混合偏导数.

注: 混合偏导数求导顺序从左到右.

同理可定义其它高阶偏导数, 例如 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$.

6. 混合偏导数的关系

如果函数 $z = f(x, y)$ 的二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在区域 D 内连续, 则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

7. 全微分

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义, 若

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中 A, B 为常数, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则称 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微, 且

$A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的微分, 记为 $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

同理可定义若函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内任意一点处的微分, 即函数微分.

8. 可微的条件

(1) 若 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处可微, 则 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的连续.

(2) 若 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处可微, 则 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的偏导数 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 存在, 且 $A = f'_x(x_0, y_0), B = f'_y(x_0, y_0)$.

(3) 若 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处连续, 则 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处可微.

9. 微分计算公式:

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y} \mathrm{d}y .$$

说明: 上述公式可推广到 n 元函数的微分, 例如 $u = f(x, y, z)$, 则

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathrm{d}z .$$

练习题

一、填空题

1. 设 $z = e^{x^2y}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.
2. 设 $f(x, y) = x \ln(xy)$, 则 $f'_x(1, e) =$ _____.
3. 设 $z = \sin(xy)$, 则 $dz =$ _____.
4. 设 $z = x^3y - xy^3$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

二、计算题

1. 求曲线 $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{2} \\ y = 1 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线对于 x 轴正向所成的倾角 α .
2. 设 $z = 2\cos^2(x - \frac{y}{2})$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设 $z = x \ln(x + y)$, 求其二阶偏导数.

4. 设 $z = x^3 \sin y - ye^x$, 求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

5. 设 $z = \arctan \frac{y}{x}$, 求 dz .

6. 设 $u = a^{x+yz} - \ln x^a (a > 0)$, 求 du .

7. 设 $f(t)$ 为连续函数, $u = xyz + \int_{yz}^{xy} f(t)dt$, 求 du .

8. 设 $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$, 求 $df(1, 1, 1)$

9. 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处的可微性.

三、证明题

1. 设 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$, 其中 $f(u)$ 可导, 证明: $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

2. 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 证明: $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$.

8.3 多元复合函数求导与隐函数求导

主要知识与方法

1. 多元复合函数的求导法则

(1) 设 $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$, $z = f(u, v)$, 则 $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}$.

上述导数称为全导数.

(2) 设 $u = \varphi(x, y)$ 及 $v = \psi(x, y)$, $z = f(u, v)$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

(3) 设 $u = \varphi(x, y)$, $z = f(x, y, u)$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}.$$

2. 全微分的形式不变性

设函数 $z = f(u, v)$ 可微, 则 $dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$.

3. 隐函数的求导法则

(1) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $F(x, y) = 0$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

(2) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$.

(3) 设函数 $y = y(x)$, $z = z(x)$ 由方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 确定, 则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} F'_y & F'_x \\ G'_y & G'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}}$$

(4) 设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 由方程组 $\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ 确定, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_v \\ G'_x & G'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F'_u & F'_x \\ G'_u & G'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} F'_y & F'_v \\ G'_y & G'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} F'_u & F'_y \\ G'_u & G'_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}}.$$

说明：由于上述(3)与(4)中的隐函数求导或偏导公式其本质是求解以导数或偏导数为未知量的线性方程组，所以先对每个方程求导或偏导再解方程组.

4. 求隐函数二阶导数或偏导数的步骤

- (1) 求一阶导数或偏导数.
- (2) 利用导数的运算法则将一阶导数或偏导数求导或偏导得到二阶导数或偏导数的表达式.

- (3) 把一阶导数或偏导数代入二阶导数或偏导数的表达式.

5. 抽象复合函数求二阶偏导数的步骤

- (1) 求一阶偏导数.
- (2) 利用导数的运算法则求二阶偏导数的表达式.
- (3) 求一阶偏导数 f'_1 、 f'_2 等对自变量的偏导数(类似(1)).
- (4) 整理并合并混合偏导数.

练习题

一、填空题

1. 设 $z = \frac{y}{x}$, 而 $x = e^t$, $y = 1 - \cos t$, 则 $\frac{dz}{dt} = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设 $u = e^{x^2+y^2+z^2}$, 而 $z = x^2 \sin y$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin y + e^x = xy^2$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$ 确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、解答题

1. 设 $z = \arctan(xy)$, 且 $y = e^x$, 求 $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$.
2. 设 $z = u^2 \ln v$, 且 $u = \frac{x}{y}$, $v = 4x - 3y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设 $z = f(x, u, v)$, 且 $u = 2x + y, v = xy$, 其中 f 具有一阶连续偏导数, 求 dz .

4. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $xz = \sin y + f(xy, z + y)$ 确定, 其中 f 具有一阶连续偏导数, 求 dz .

5. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z^5 - xz^4 + yz^3 = 1$ 确定, 求 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}}, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$.

6. 设 $u = f(x, y, z)$ 具有一阶连续偏导, $y = y(x)$ 及 $z = z(x)$ 分别由方程 $e^{xy} - xy = 2$ 及 $e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$ 确定, 求 $\frac{du}{dx}$.

7. 设 $z = x^3 f(xy, \frac{y}{x})$, 而 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

8. 设函数 $y = y(x)$, $z = z(x)$ 由方程组 $\begin{cases} z = xf(x+y) \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dz}{dx}$.

9. 设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 由方程组 $\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ 及

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}.$$

三、证明题

1. 设函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $F(x - y, y - z, z - x) = 0$ 确定, $F(u, v, \omega)$ 具有连续偏导数, 且 $F'_v - F'_\omega \neq 0$, 证明: $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

2. 设函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $\phi(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$ 确定, 其中 $\phi(u, v)$ 具有连续偏导数, 证明: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

8.4 几何应用与方向导数

主要知识与方法

1. 空间曲线的切线与法平面

- (1) 设空间曲线 C 的方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$, 则切向量为 $\vec{T} = \{\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)\}$.

曲线 C 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$

曲线 C 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0) + \psi'(t_0)(y-y_0) + \omega'(t_0)(z-z_0) = 0.$$

- (2) 设曲线 C 的方程为 $\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$, 则切向量为 $\vec{T} = \{1, \varphi'(x_0), \psi'(x_0)\}$.

曲线 C 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)} = \frac{z-z_0}{\psi'(x_0)}.$$

曲线 C 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法平面方程为

$$(x-x_0) + \varphi'(x_0)(y-y_0) + \psi'(x_0)(z-z_0) = 0.$$

- (3) 设空间曲线 C 的方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 则切向量为

$$\vec{T} = \left\{ \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{M_0}, \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{M_0}, \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{M_0} \right\}$$

曲线 C 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{M_0}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{M_0}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{M_0}}.$$

曲线 C 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法平面方程为

$$\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{M_0} (x-x_0) + \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{M_0} (y-y_0) + \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{M_0} (z-z_0) = 0.$$

说明: 将每个方程两边对 x 求导 $y'(x_0), z'(x_0)$ 化为情况(2).

2. 曲面的切平面与法线

(1) 设曲面 Σ 的方程为 $F(x, y, z) = 0$, 则法向量为

$$\vec{n} = \{F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)\}.$$

曲面 Σ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

曲面 Σ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

(2) 设曲面 Σ 的方程为 $z = f(x, y)$, 则法向量为

$$\vec{n} = \{f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1\}.$$

曲面 Σ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

曲面 Σ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

3. 方向导数

(1) 定义: 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的某一邻域内有定义, 自点 P 引射线 l , 当 P' 沿着 l 趋于 P 时, 若极限 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\rho}$ 存在, 则称该

极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 沿方向 l 的方向导数, 其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

记为 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_P$, 即 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_P = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\rho}$.

类似地, 可定义 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_P = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\rho}$.

(2) 计算公式: 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处可微, 则

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta$$

其中 α, β 分别为方向 l 与 x 轴正向、 y 轴正向的夹角.

类似地, 有

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma.$$

其中 α, β, γ 分别为方向 l 与 x 轴正向、 y 轴正向、 z 轴正向的夹角.

4. 梯度

向量 $\{f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)\}$ 称为函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的梯度, 记为 $\text{grad} f(x_0, y_0)$, 即 $\text{grad} f(x_0, y_0) = \{f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)\}$.

类似地, 有 $\text{grad} f(x_0, y_0, z_0) = \{f'_x(x_0, y_0, z_0), f'_y(x_0, y_0, z_0), f'_z(x_0, y_0, z_0)\}$.

练习题

一、填空题

1. 曲线 $x = \cos t, y = \sin 2t, z = \cos 3t$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程为_____.
2. 曲面 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(1, 2, -3)$ 处的切平面方程为_____.
3. 函数 $f(x, y) = xe^{2y}$ 在点 $(1, 0)$ 处沿方向 $\vec{l} = \{-3, 4\}$ 的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l} =$ _____.
4. 函数 $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$ 在点 $(1, 1)$ 处的梯度 $\text{grad}f =$ _____.

二、解答题

1. 求曲线 $\begin{cases} y = 2x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$ 在点 $(1, 2, 1)$ 处的切线与法平面方程.
2. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$ 在点 $(1, 1, \sqrt{2})$ 处的切线与法平面方程.

3. 在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 上求一点, 使得曲线在该点处的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

4. 求曲面 $e^z + xy = z + 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面与法线方程.

5. 在曲面 $z = x^2 + \frac{y^2}{2}$ 求一点, 使得曲面在该点处的切平面平行于平面 $2x + 2y - z = 0$, 并求切平面方程.

6. 设直线 $l: \begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 π 上, 而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1, -2, 5)$, 求 a, b .

7. 求曲面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点 $(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角.

8. 求函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1, 0, 1)$ 处沿 A 指向点 $B(2, -2, 3)$ 的方向导数.

9. 求函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处沿曲面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 在点 P 处外法向量方向的方向导数.

10. 求函数 $u = xy^2z$ 在点 $P(1, -1, 2)$ 处的梯度.

三、证明题

证明曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($x, y, z, a > 0$) 上任一点的切平面在坐标轴上截距之和为常数.

8.5 多元函数极值

主要知识与方法

1. 二元函数极值

(1) 极大值: 设函数 $f(x, y)$ 点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0)$ 内有定义, 若对任意 $(x, y) \in \overset{\circ}{U}(P_0)$ 内, 有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$

则称 $f(x_0, y_0)$ 为函数 $f(x, y)$ 的极大值, (x_0, y_0) 称为函数 $f(x, y)$ 的极大值点.

(2) 极小值: 设函数 $f(x, y)$ 点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0)$ 内有定义, 若对任意 $(x, y) \in \overset{\circ}{U}(P_0)$ 内, 有

$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$

则称 $f(x_0, y_0)$ 为函数 $f(x, y)$ 的极小值, (x_0, y_0) 称为函数 $f(x, y)$ 的极小值点.

函数的极大值与极小值统称为函数的极值.

2. 取极值的必要条件

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微分, 且在点 (x_0, y_0) 处取极值, 则

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

3. 驻点

方程组 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 的解称为函数 $z = f(x, y)$ 的驻点.

注: 对具有偏导函数 $f(x, y)$, 极值点一定为驻点. 反过来不成立, 即驻点不一定为极值点.

4. 取极值的充分条件

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内连续且具有一阶和二阶连续偏

导数, 又 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$. 令

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0),$$

则 (1) 当 $\Delta = B^2 - AC < 0$ 时, 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取极值, 且 $A < 0$ 时 $f(x_0, y_0)$ 为极大值, $A > 0$ 时 $f(x_0, y_0)$ 为极小值;

(2) 当 $\Delta = B^2 - AC > 0$ 时, 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处不取极值;

(3) 当 $B^2 - AC = 0$, 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可能取极值, 也可能不取极值, 需另作讨论.

5. 求具有二阶连续偏导数的函数 $f(x, y)$ 极值的步骤

(1) 求 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$,

(2) 解方程组 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得驻点;

(3) 求 $f''_{xx}(x, y), f''_{xy}(x, y), f''_{yy}(x, y)$;

(4) 在每个驻点上判断 $\Delta = B^2 - AC$ 的符号, 确定极值点, 并确定是极大值点还是极小值点;

(5) 求 $f(x, y)$ 在每个极值点的函数值得 $f(x, y)$ 的极值..

6. 求连续函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上最值的步骤

(1) 求函数 $f(x, y)$ 在 D 内的所有驻点处的函数值;

(2) 求函数 $f(x, y)$ 在 D 的边界上的最大值和最小值;

注: 转化为求一元函数在闭区间上的最大值与最小值或条件极值.

(3) 将上述值进行比较, 其中最大的就是最大值, 最小的就是最小值.

特别地, 在通常遇到的实际问题中, 根据问题的性质, 知道函数 $f(x, y)$ 的最大值(最小值)一定在区域 D 的内部取得, 而函数 $f(x, y)$ 在 D 内只有一个驻点, 那么可以肯定该驻点处的函数值就是函数 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值(最小值).

7. 条件极值 (拉格朗日乘数法)

(1) 求函数 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的条件极值方法:

① 构造函数 $F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$;

② 求 $F'_x = f'_x(x, y) + \lambda\phi'_x(x, y), F'_y = f'_y(x, y) + \lambda\phi'_y(x, y)$;

③ 解方程组 $\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda\phi'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda\phi'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$ 得可能极值点;

④ 确定条件极值(类似于确定最值).

(2) 求函数 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\phi(x, y, z) = 0, \psi(x, y, z) = 0$ 下的条件极值方法:

① 构造函数 $F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda\phi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z)$;

② 求 $F'_x = f'_x(x, y, z) + \lambda\phi'_x(x, y, z) + \mu\psi'_x(x, y, z)$,

$$F'_y = f'_y(x, y, z) + \lambda \phi'_y(x, y, z) + \mu \psi'_y(x, y, z),$$

$$F'_z = f'_z(x, y, z) + \lambda \phi'_z(x, y, z) + \mu \psi'_z(x, y, z);$$

$$\textcircled{3} \text{ 解方程组 } \begin{cases} f'_x(x, y, z) + \lambda \phi'_x(x, y, z) + \mu \psi'_x(x, y, z) = 0 \\ f'_y(x, y, z) + \lambda \phi'_y(x, y, z) + \mu \psi'_y(x, y, z) = 0 \\ f'_z(x, y, z) + \lambda \phi'_z(x, y, z) + \mu \psi'_z(x, y, z) = 0 \\ \phi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases} \text{ 得可能极值点;}$$

④ 确定条件极值(类似于确定最值).

练习题

一、填空题

1. 函数 $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$ 的极大值为_____.
2. 函数 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x$ 的极小值为_____.
3. 函数 $z = xy$ 在条件 $x + y = 1$ 下的极大值为_____..

二、解答题

1. 求函数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4$ 的极值.

2. 求函数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2$ 的极值.

3. 求函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

4. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定, 求函数 $z = z(x, y)$ 的极值.

5. 求二元函数 $f(x, y) = x^2y(4 - x - y)$ 在直线 $x + y = 6$, x 轴和 y 轴所围成的区域 D 上的最大值和最小值.

6. 在曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 上求一点, 使它到点 $(1, \sqrt{2}, 3\sqrt{3})$ 的距离最短, 并求最短距离.

7. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大值与最小值.

8. 求函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 上的最大值和最小值.

第9章 重积分

9.1 二重积分的概念与计算

主要知识与方法

1. 二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

特别, 在直角坐标系下, 有 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy$.

2. 可积的条件

(1) 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的二重积分存在, 则 $f(x, y)$ 在 D 上有界.

(2) 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上可积.

3. 几何意义

$\iint_D f(x, y) d\sigma$ 表示以连续曲面 $z = f(x, y) \geq 0$ 为顶, 以 xOy 平面上的区域 D 为

底的曲顶柱体体积.

4. 二重积分的基本性质

$$(1) \iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

$$(2) \iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

$$(3) \text{ 设 } D \text{ 由 } D_1 \text{ 与 } D_2 \text{ 构成, 则 } \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

性质 3 称为二重积分的可加性.

$$(4) \iint_D d\sigma = \sigma, \text{ 其中 } \sigma \text{ 为区域 } D \text{ 的面积.}$$

$$(5) \text{ 设在 } D \text{ 上有 } f(x, y) \leq g(x, y), \text{ 则 } \iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

(6) 设 M 、 m 分别是 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值, 则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma, \text{ 其中 } \sigma \text{ 为区域 } D \text{ 的面积.}$$

(7) 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, 则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) , 使

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \sigma, \text{ 其中 } \sigma \text{ 为区域 } D \text{ 的面积.}$$

5. 二重积分的对称性质

(1) 设积分区域 D 关于 y 轴对称, 且 D_1 为右半区域, 则

① 当 $f(-x, y) = -f(x, y)$ 时, 有 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$;

② 当 $f(-x, y) = f(x, y)$ 时, 有 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma$.

(2) 设积分区域 D 关于 x 轴对称, 且 D_1 为上半区域, 则

① 当 $f(x, -y) = -f(x, y)$ 时, 有 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$;

② 当 $f(x, -y) = f(x, y)$ 时, 有 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma$.

(2) 设积分区域 D 关于直线 $y = x$ 对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma.$$

6. 利用直角坐标计算二重积分

(1) 设区域 $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$ (X 型区域), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

(2) 设区域 $D = \{(x, y) | \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y), c \leq y \leq d\}$ (Y 型区域), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx.$$

注: (1) 先画区域 D 的图形, 再选择积分次序.

(2) 上述二次积分的积分次序从右到左.

(3) 若区域 D 既不是 X 型区域也不是 Y 型区域, 则把区域 D 分成 X 型区域或 Y 型区域, 利用二重积分的可加性求.

7. 利用直角坐标计算二重积分的步骤

(1) 根据积分区域 D 的图形化为二次积分.

(2) 计算右边定积分(第一个定积分).

说明: 可以只写结果, 不写过程.

(3) 计算左边定积分(第二个定积分)的原函数.

(4) 计算原函数在上限与下限的函数值的差.

8. 利用极坐标计算二重积分

(1) 变换公式: $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$.

(2) 积分方法: 一般化为先对 r , 再对 θ 的二次积分. 特别, 有

① 当极点在区域 D 的外部时, 即 $D = \{(\theta, r) | (\varphi_1(\theta) \leq r \leq \varphi_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta)\}$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

② 当极点在区域 D 的边界上时, 即 $D = \{(\theta, r) | 0 \leq r \leq \varphi(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

③ 当极点在区域 D 的内部时, 即 $D = \{(\theta, r) | 0 \leq r \leq \varphi(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

注: 当被积函数 $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$ 或 $f(x, y) = g(\frac{y}{x})$ 且 D 为圆域时采用极

坐标计算二重积分.

9. 利用极坐标计算二重积分的步骤

(1) 化为先对 r 再对 θ 的二次积分.

(2) 计算关于 r 的定积分(第一个定积分).

说明: 可以只写结果, 不写过程.

(3) 计算关于 θ 定积分的原函数(第二个定积分).

(4) 计算原函数在上限与下限的函数值的差.

练习题

一、填空题

1. 设 D 是由坐标轴与直线 $x + y = 2$ 围成的区域, 则 $\iint_D (3x + 2y) d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设函数 $f(x, y)$ 连续, 交换积分次序 $\int_1^e dy \int_0^{\ln y} f(x, y) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 二次积分 $\int_0^1 dx \int_0^x y dy = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设 $D = \{(x, y) | 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$, 则 $\iint_D d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$, 则 $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、解答题

1. 求二重积分 $\iint_D \frac{2x}{y} d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | y \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.

2. 求二重积分 $\iint_D (x + y) dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = |x|$, $y = |2x|$, $y = 1$ 围成的区域.

3. 求二重积分 $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy$, 其中 D 是由直线 $y=x$, $y=1$ 及 y 轴围成的区域.

4. 求二重积分 $\iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy$, 其中 D 是由直线 $y=x$, $y=\frac{x}{2}$, $x=2$ 围成的区域.

5. 求二重积分 $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=x$, $y=x+a$, $y=a$ 及 $y=3a(a>0)$ 围成的区域.

6. 求二重积分 $\iint_D |xy| d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

7. 交换积分次序 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$

8. 求二次积分 $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} x dx$.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 求 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy$.

10. 求二重积分 $\iint_D e^{-x^2-y^2} d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

11. 求二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

12. 求二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 4| d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 9\}$.

13. 求二重积分 $\iint_D \frac{x^2}{x^2 + y^2} d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

14. 求二重积分 $\iint_D e^x xy dx dy$, 其中 D 以曲线 $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的

无界区域.

15. 求二重积分 $\iint_D xy d\sigma$, 其中区域 D 由曲线 $r=1+\cos\theta$ ($0\leq\theta\leq\pi$) 与极轴围成.

16. 求二重积分 $\iint_D r^2 \sin\theta \sqrt{1-r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$,

其中 $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$.

三、证明题

证明: $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} e^y f(x) dx = \int_0^1 (e - e^{x^2}) f(x) dx$.

9.2 三重积分的概念与计算

主要知识与方法

1. 三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i.$$

注: (1) 三重积分具有与二重积分类似的基本性质.

(2) $\iiint_{\Omega} dv$ 表示区域 Ω 的体积.

(3) 在直角坐标下, 有 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$.

2. 利用直角坐标计算三重积分

(1) 设 $\Omega = \{(x, y, z) | z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}$, 其中 D_{xy} 为区域 Ω 在坐标面 xOy 上的投影区域, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

进一步, 若 $D_{xy} = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

注: ① 上述三次积分的积分次序从右到左.

② 类似可将三重积分化为其它形式的三次积分.

(2) 设 $\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_z, c_1 \leq z \leq c_2\}$, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy.$$

上述方法称为截面法.

注: 当 $f(x, y, z) = g(z)$ 或 $f(x, y, z) = g(x^2 + y^2)$ 且 D_z 为圆域时可采用截面法计算三重积分.

3. 利用直角坐标计算三重积分的步骤

(1) 一般化为先对 z 再对 y 最后对 x 的三次积分.

(2) 计算关于 z 的定积分(第一个定积分).

说明: 可以只写结果, 不写过程.

(3) 计算关于 y 的定积分(第二个定积分).

说明: 可以只写结果, 不写过程.

- (4) 计算关于 x 定积分(第三个定积分)的原函数.
- (5) 计算原函数在上限与下限的函数值的差.

4. 利用柱面坐标计算三重积分

(1) 变换公式:
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

- (2) 计算方法: 一般化为先对 z , 再对 r , 最后对 θ 的三次积分.

注: 当被积函数或围成 Ω 边界曲面方程中含 $x^2 + y^2$ 或 $x^2 + y^2 + z^2$ 时采用柱面坐标计算其三重积分, 特别 Ω 由圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及平面 $z = a, z = b$ 围成时可采用柱面坐标计算三重积分.

5. 利用柱面坐标计算三重积分的步骤

- (1) 一般化为先对 z 再对 r 最后对 θ 的三次积分.
- (2) 计算关于 z 的定积分(第一个定积分).
说明: 可以只写结果, 不写过程.
- (3) 计算关于 r 的定积分(第二个定积分).
说明: 可以只写结果, 不写过程.
- (4) 计算关于 θ 定积分(第三个定积分)的原函数.
- (5) 计算原函数在上限与下限的函数值的差.

6. 利用球面坐标计算三重积分

- (1) 变换公式:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega^*} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

- (2) 计算方法: 一般化为先对 ρ , 再对 φ , 最后对 θ 的三次积分.

注: 当被积函数或围成 Ω 边界曲面方程中含 $x^2 + y^2 + z^2$ 或 $x^2 + y^2$ 时采用球面坐标计算其三重积分, 特别 Ω 由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 围成时可采用球面坐标计算三重积分.

7. 利用球面坐标计算三重积分的步骤

- (1) 一般化为先对 ρ 再对 φ 最后对 θ 的三次积分.
- (2) 计算关于 ρ 的定积分(第一个定积分).
说明: 可以只写结果, 不写过程.
- (3) 计算关于 φ 的定积分(第二个定积分).
说明: 可以只写结果, 不写过程.
- (4) 计算关于 θ 定积分(第三个定积分)的原函数.
- (5) 计算原函数在上限与下限的函数值的差.

练习题

一、填空题

1. 三次积分 $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 及平面 $z = 2$ 围成的区域, 则 $\iiint_{\Omega} z dv = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$, 则 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dv = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、解答题

1. 求三重积分 $\iiint_{\Omega} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dv$, 其中 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成的区域.

2. 求三重积分 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2} dv$, 其中 Ω 是由曲面 $y = -\sqrt{1-x^2-z^2}$, $x^2 + z^2 = 1$ 及平面 $y=1$ 围成的区域.

3. 求三重积分 $\iiint_{\Omega} z^2 \mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 围成.

4. 求三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 及平面 $z = a$ 围成的区域.

5. 求三重积分 $\iiint_{\Omega} r \cos \theta \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$, 其中 $\Omega = \{(\theta, r, z) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$.

6. 求三重积分 $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 及旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 3z$ 围成的区域.

7. 求三重积分 $\iiint_{\Omega} (y+z)dv$, 其中 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z=1$ 围成的区域.

8. 求三重积分 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dv$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 及平面 $z=2$ 围成的区域.

9. 求三重积分 $\iiint_{\Omega} |z - x^2 - y^2| dv$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

10. 求三重积分 $\iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 围成的区域.

11. 求三重积分 $\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)}\}$.

12. 求由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 与 $z = 6 - 2x^2 - y^2$ 围成的立体体积.

13. 求三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而形成的曲面与平面 $z = 4$ 围成的区域.

三、证明题

设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(0) = 0, f'(0) = 2$, 证明:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^4} \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dv = 2\pi$$

9.3 重积分应用

主要知识与方法

1. 曲面面积

设曲面 Σ 的方程为 $z = f(x, y)$ ，且曲面 Σ 在 xOy 面上投影区域为 D_{xy} ，则曲面 Σ 的面积为

$$S = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} \, dx dy.$$

类似地，(1) 设曲面 Σ 的方程为 $x = g(y, z)$ ，且曲面 Σ 在 yOz 面上投影区域为 D_{yz} ，则曲面 Σ 的面积为

$$S = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} \, dy dz.$$

(2) 设曲面 Σ 的方程为 $y = h(z, x)$ ，且曲面 Σ 在 zOx 面上投影区域为 D_{zx} ，则曲面 Σ 的面积为

$$S = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + y_z'^2 + y_x'^2} \, dz dx.$$

2. 质量

设平面薄片占有平面区域 D ，密度函数为 $\rho(x, y)$ ，则该平面薄片的质量为

$$M = \iint_D \rho(x, y) \, dx dy.$$

类似地，设物体占有空间区域 Ω ，密度函数为 $\rho(x, y, z)$ ，则该物体的质量为

$$M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dv.$$

3. 质心坐标

设平面薄片占有平面区域 D ，密度函数为 $\rho(x, y)$ ，则该平面薄片的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) \, d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) \, d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) \, d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) \, d\sigma}.$$

类似地，设物体占有空间区域 Ω ，密度函数为 $\rho(x, y, z)$ ，则该物体的质心为

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z)dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)dv}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_{\Omega} y\rho(x, y, z)dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)dv}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z\rho(x, y, z)dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)dv}.$$

说明：当物体为均匀时，质心称为形心. 这时形心坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} xdv, \quad \bar{y} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} ydv, \quad \bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} zdv.$$

其中 V 为物体的体积.

4. 转动惯量

设平面薄片占有平面区域 D ，密度函数为 $\rho(x, y)$ ，则该平面薄片对于 x 轴. y 轴及原点的转动惯量分别为

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) d\sigma, \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) d\sigma, \quad I_O = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) d\sigma.$$

类似地，设物体占有空间区域 Ω ，密度函数为 $\rho(x, y, z)$ ，则该物体对于 x 轴. xOy 平面及原点的转动惯量分别为

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv, \quad I_{xOy} = \iiint_{\Omega} z^2 \rho(x, y, z) dv,$$

$$I_O = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv.$$

类似可得物体对于其它坐标轴及坐标平面的转动惯量.

练习题

1. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 所割下部分的曲面面积.

2. 求曲面 $x = yz$ 被柱面 $y^2 + z^2 = 1$ 所割下部分的曲面面积.

3. 设球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ 上各点的密度等于该点到坐标原点的距离平方, 求该球体的质量.

4. 设均匀物体占有空间区域 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$, 求其形心.

5. 设有一等腰直角三角形薄片, 腰长为 4, 各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离平方, 求该薄片的质心.

6. 求高为 h , 半顶角为 $\frac{\pi}{4}$ 的均匀正圆锥体绕其对称轴旋转的转动惯量.

第 10 章 曲线积分与曲面积分

10.1 曲线积分的概念与计算

主要知识与方法

1. 第一类曲线积分

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

类似地, 有 $\int_L f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i$.

注: 第一类曲线积分也称为对弧长的曲线积分.

2. 第一类曲线积分的性质

(1) $\int_C [f(x, y) \pm g(x, y)] ds = \int_C f(x, y) ds \pm \int_C g(x, y) ds$.

(2) $\int_C k f(x, y) ds = k \int_C f(x, y) ds$.

(3) 设 $C = C_1 + C_2$, 则 $\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds$.

(4) 设在曲线 C 上 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则 $\int_C f(x, y) ds \leq \int_C g(x, y) ds$.

(5) $\int_C f(x, y) ds = \int_{C^-} f(x, y) ds$, 其中曲线 C^- 是 C 的反向曲线弧.

3. 计算方法

(1) 设平面曲线 C 的方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$, 则

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

(2) 设平面曲线 C 的方程为 $y = \varphi(x) (a \leq x \leq b)$, 则

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f[x, \varphi(x)] \sqrt{1 + \varphi'^2(x)} dx$$

(3) 设平面曲线 C 的方程为 $x = \psi(y) (c \leq y \leq d)$, 则

$$\int_C f(x, y) ds = \int_c^d f[\psi(y), y] \sqrt{1 + \psi'^2(y)} dy.$$

(4) 设空间曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$, 则

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)} dt.$$

注: 以上方法是把第一类曲线积分化为定积分, 且定积分的下限小于上限.

4. 第二类曲线积分

$$\int_C P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i.$$

$$\int_C Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i.$$

类似地, 有 $\int_L P(x, y, z) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i.$

$$\int_L Q(x, y, z) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i.$$

$$\int_L R(x, y, z) dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i.$$

注: (1) 第二类曲线积分也称为对坐标的曲线积分.

(2) $\int_C P dx + \int_C Q dy = \int_C P dx + Q dy = \int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}$

其中 $\vec{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$, $d\vec{r} = \{dx, dy\}$.

类似地, 有 $\int_L P dx + \int_L Q dy + \int_L R dz = \int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r}$

其中 $\vec{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$, $d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$.

(3) 变力 $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ 沿曲线 L 移动所做的功为

$$W = \int_L P dx + Q dy + R dz.$$

5. 第二类曲线积分的性质

(1) $\int_C [\vec{F}(x, y) \pm \vec{G}(x, y)] \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} \pm \int_C \vec{G}(x, y) \cdot d\vec{r}.$

(2) $\int_C k \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = k \int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}.$

(3) 设 $C = C_1 + C_2$, 则 $\int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}.$

(4) $\int_{C^-} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}$, 其中曲线 C^- 是 C 的反向曲线弧.

6. 计算方法

(1) 设平面曲线 C 的方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, 且 α 对应曲线的起点. β 对应曲线的终

点, 则

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^\beta \{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\}dt.$$

(2) 设平面曲线 C 的方程为 $y = \varphi(x)$, 且 a 对应曲线的起点. b 对应曲线的终点, 则

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b \{P[x, \varphi(x)] + Q[x, \varphi(x)]\varphi'(x)\}dx.$$

(3) 设平面曲线 C 的方程为 $x = \psi(y)$, 且 c 对应曲线的起点. d 对应曲线的终点, 则

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_c^d \{P[\psi(y), y]\psi'(y) + Q[\psi(y), y]\}dy.$$

(4) 设空间曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$, 且 α 对应曲线的起点. β 对应曲线的

终点, 则

$$\begin{aligned} \int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_\alpha^\beta \{ & P[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]\psi'(t) \\ & + R[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]\omega'(t)\}dt \end{aligned}$$

注: 以上方法是把第二类曲线积分化为定积分, 且定积分的下限对应曲线的起点, 上限对应曲线的终点.

7. 两类曲线积分的关系

(1) 设平面曲线 C 在点 (x, y) 处的切向量的方向角为 α, β , 则

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_C (P \cos \alpha + Q \cos \beta)ds.$$

(2) 设空间曲线 L 在点 (x, y, z) 处的切向量的方向角为 α, β, γ , 则

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma)ds.$$

8. 质心坐标

(1) 平面曲线弧的质心坐标

$$\bar{x} = \frac{\int_C x\rho(x, y)ds}{\int_C \rho(x, y)ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int_C y\rho(x, y)ds}{\int_C \rho(x, y)ds}.$$

(2) 空间曲线弧的质心坐标

$$\bar{x} = \frac{\int_L x\rho(x, y, z)ds}{\int_L \rho(x, y, z)ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int_L y\rho(x, y, z)ds}{\int_L \rho(x, y, z)ds}, \quad \bar{z} = \frac{\int_L z\rho(x, y, z)ds}{\int_L \rho(x, y, z)ds}.$$

9. 转动惯量

(1) 平面曲线弧对于 x 轴. y 轴及原点的转动惯量分别为

$$I_x = \int_C y^2 \rho(x, y)ds, \quad I_y = \int_C x^2 \rho(x, y)ds, \quad I_O = \int_C (x^2 + y^2) \rho(x, y)ds.$$

(2) 空间曲线弧对于 x 轴. xOy 平面及原点的转动惯量分别为

$$I_x = \int_L (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds, \quad I_{xOy} = \int_C z^2 \rho(x, y, z) ds,$$

$$I_O = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds.$$

类似可得空间曲线弧对于其它坐标轴及坐标平面的转动惯量.

练习题

一、填空题

1. 设 C 是曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 上从点 $(1, 0)$ 到点 $(0, 1)$ 的弧段, 则 $\int_C x ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 L 是曲线 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$ 上对应 $t = 0$ 到 $t = 2$ 的弧段, 则 $\int_L \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 C 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $O(0, 0)$ 到点 $A(1, 1)$ 的弧段, 则 $\int_C x^2 dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 L 是曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上对应 $t = 0$ 到 $t = 1$ 的弧段, 则 $\int_L (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、解答题

1. 求 $\int_C (x^3 + y^2) ds$, 其中 C 是连接点 $A(2, 0), O(0, 0)$ 到 $B(0, 3)$ 的折线段.

2. 求 $\int_L (x + y - z) ds$, 其中 L 是连接点 $A(1, 2, 1), B(2, 4, 3)$ 直线段.

3. 求 $\oint_C \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$, 其中 C 是圆周 $x^2 + y^2 = ax (a > 0)$.

4. 求 $\oint_L \sqrt{2y^2 + z^2} \, ds$, 其中 L 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $y = x$ 的交线.

5. 求 $\int_C 2\sqrt{y} \, dx + (x^2 - y) \, dy$, 其中 C 是抛物线 $y = x^2$ 从点 $A(1, 1)$ 到点 $B(2, 4)$ 的弧段.

6. 求 $\int_C (x+y-3)(y-x)\mathrm{d}x - (x-y+1)(x+y)\mathrm{d}y$, 其中 C 是从点 $A(-1, 0)$ 沿直线 $y=x+1$ 到点 $B(1, 2)$, 再沿直线 $x+y=3$ 到点 $D(3, 0)$ 的折线段.

7. 求 $\int_C x \sin(xy)\mathrm{d}x - y \cos(xy)\mathrm{d}y$, 其中 C 是从点 $O(0, 0)$ 到点 $A(1, \pi)$ 的线段.

8. 求 $\int_C (x^2 + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\mathrm{d}y$, 其中 C 是曲线 $y=1-|1-x|$ 上从对应于 $x=0$ 的点到 $x=2$ 的点.

9. 求 $\int_L x^3 dx + 3zy^2 dy - x^2 y dz$, 其中 L 是从点 $A(3, 2, 1)$ 到点 $O(0, 0, 0)$ 的线段.

10. 一质点沿曲线 $L: x=0, y=t, z=t^2$ 从点 $O(0, 0, 0)$ 移动到点 $A(0, 1, 1)$, 求此过程力 $\vec{F} = \{\sqrt{1+x^4}, -y, 1\}$ 所做的功.

11. 把第二类曲线积分 $\int_C Pdx + Qdy$ 化为第一类曲线积分, 其中 C 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $O(0, 0)$ 到点 $A(2, 4)$ 的弧段.

12. 设 L 是曲线 $x=t, y=t, z=1-\sqrt{1-2t^2}$ 从对应于 $t=0$ 的点到 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的弧段, 将第二类曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$ 化为第一类曲线积分.

13. 求半径为 2, 中心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的均匀圆弧 ($\rho=1$) 的质心.

14. 设空间曲线的方程为 $x=2\cos t, y=2\sin t, z=3t$, 其中 $0 \leq t \leq 2\pi$, 且线密度为 $\rho=x^2+y^2+z^2$, 求该曲线对于 x 轴的转动惯量.

10.2 格林公式及其应用

主要知识与方法

1. 格林公式

设函数 $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 在有界闭区域 D 上具有一阶连续偏导数, 则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy$$

其中 L 是有界闭区域 D 的边界曲线, 且取正向.

注: ① 利用格林公式可以把复杂的曲线积分化为较简单的曲线积分.

② 利用格林公式可以把曲线积分转为二重积分, 这时曲线 L 必须为封闭能够围成区域 D , 且为区域 D 的边界曲线的正向.

2. 平面上第二类曲线积分与路径无关的条件

(1) 设函数 $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 在单连通区域 D 上具有一阶连续偏导数, 则

$\int_C P dx + Q dy$ 与路径无关 $\Leftrightarrow \oint_{C'} P dx + Q dy = 0$, 其中 C' 为 D 内任意封闭曲线.

(2) 设函数 $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 在单连通区域 D 上具有一阶连续偏导数, 则

$$\int_C P dx + Q dy \text{ 与路径无关} \Leftrightarrow \text{在区域 } D \text{ 内, 有 } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

注: ① 当 $\int_C P dx + Q dy$ 与路径无关时, 曲线积分可记为 $\int_{M_0}^M P dx + Q dy$.

② 当 $\int_C P dx + Q dy$ 与路径无关时, 可采用平行坐标轴的折线段求其曲线积分,

即

$$\int_C P dx + Q dy = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y) dy.$$

或 $\int_C P dx + Q dy = \int_{y_0}^{y_1} Q(x_0, y) dy + \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_1) dx.$

3. 二元函数全微分求积

(1) 二元函数 $u(x, y)$ 存在的条件: $P dx + Q dy$ 在区域 D 内是一个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分 (即 $P dx + Q dy = du$) 的充分必要条件是

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

在 D 内恒成立.

(2) 二元函数 $u(x, y)$ 的求法:

$$\textcircled{1} u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy.$$

$$\textcircled{2} \quad u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + \int_{x_0}^x P(x, y) dx .$$

其中点 (x_0, y_0) 是区域 D 内一点.

4. 平面上第二类曲线积分计算时注意的问题

(1) 当 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 时, 可选取简单的平行于 x 轴或 y 轴的折线段代替原积分曲线,

直接化为定积分计算, 但要注意折线方向.

(2) 当 $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$ 时, 可考虑用格林公式, 但要注意积分曲线方向.

说明: ① 当曲线积分的积分路线封闭时, 可考虑利用格林公式将其化为二重积分求其曲线积分.

② 当曲线积分的积分路线不封闭时, 可添加一些平行于 x 轴或 y 轴的直线段, 使得积分路线封闭, 再用格林公式将其化为二重积分进行计算, 最后要注意减去添加的线段上的曲线积分.

练习题

一、填空题

1. 设曲线 C 是圆 $x^2 + y^2 = 1$, 取逆时针方向, 则 $\oint_C -ydx + xdy = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设曲线 C 是正向椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 则 $\oint_C (3x + 2y)dx - (x - 4y)dy = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 设曲线 C 是圆 $x^2 + y^2 = a^2$, 取逆时针方向, 则 $\oint_C -xy^2dy + x^2ydx = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设曲线 C 是圆 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 从点 $A(2, 0)$ 到点 $O(0, 0)$ 的一段弧, 则

$$\int_C (e^x \sin y + x)dx + (e^x \cos y + 5y)dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二、解答题

1. 求 $\oint_C \frac{1}{x} \arctan \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} \arctan \frac{x}{y} dy$, 其中 C 是曲线 $x^2 + y^2 = 1$. $x^2 + y^2 = 4$.
 $y = x$. $y = \sqrt{3}x$ 在第一象限围成区域 D 的正向边界曲线.

2. 求 $\oint_C \frac{ydx - xdy}{4(x^2 + y^2)}$, 其中 C 是圆 $(x-1)^2 + y^2 = 2$, 取逆时针方向.

3. 求 $\oint_C (e^y + 3x^2)dx + (xe^y + 2y)dy$, 其中 C 是过点 $O(0, 0)$. $A(0, 1)$. $B(1, 2)$ 的圆弧, 从点 O 到点 B .

4. 求 $\int_C (x^2 - e^x \cos y)dx + (e^x \sin y + 3x)dy$, 其中 C 是圆 $x = \sqrt{2y - y^2}$ 从点 $O(0, 0)$ 到点 $A(0, 2)$ 的一段弧.

5. 求 $\oint_C (x + y)^2 dx + (x^2 - y^2)dy$, 其中 C 是以 $A(1, 1)$. $B(3, 2)$ 、 $D(3, 5)$ 为顶点的三角形正向边界曲线.

6. 求 $\int_C (x^2 + 2xy)dx + (x^2 + y^4)dy$, 其中 C 是曲线 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 从点 $O(0, 0)$ 到点 $A(2, 0)$ 的一段弧.

7. 求 $\int_C (x + e^{\sin y})dy - (y - \frac{1}{2})dx$, 其中 C 为从点 $A(1, 0)$ 沿 $x + y = 1$ 到点从点 $B(0, 1)$, 再沿 $x^2 + y^2 = 1$ 到点 $D(-1, 0)$ 的曲线段.

8. 求 $\int_{(0,0)}^{(1,2)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$.

9. 求函数 $u(x, y)$, 使得 $du = (2x \cos y + y^2 \cos x)dx + (2y \sin x - x^2 \sin y)dy$.

10. 求 $\int_C (x + y)dy - dx$, 其中 C 是曲线 $\rho = \sin 2\theta$ 上从点 $\theta = 0$ 到点 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的弧段.

11. 求 $\int_C [e^x \sin y - b(x + y)]dx + (e^x \cos y - ax)dy$, 其中 a, b 为常数, C 是圆 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 上从点 $A(2a, 0)$ 到点 $O(0, 0)$ 的一段弧.

10.3 曲面积分的概念与计算

主要知识与方法

1. 第一类曲面积分

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S.$$

注：① 第一类曲面积分也称为对面积的曲面积分.

② 第一类曲面积分有类似于第一类曲线积分的性质.

2. 计算方法

(1) 设光滑曲面 S 的方程为 $z = z(x, y)$ ，其中 $(x, y) \in D_{xy}$ ，则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy.$$

(2) 设光滑曲面 S 的方程为 $y = y(z, x)$ ，其中 $(z, x) \in D_{zx}$ ，则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{zx}} f[x, y(z, x), z] \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dz dx.$$

(3) 设光滑曲面 S 的方程为 $x = x(y, z)$ ，其中 $(y, z) \in D_{yz}$ ，则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f[x(y, z), y, z] \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dy dz.$$

其中积分区域是曲面 S 在相应坐标平面上的投影区域.

3. 第二类曲面积分

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz}.$$

类似地，可定义 $\iint_S Q(x, y, z) dz dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{zx}.$

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}.$$

其中 (ΔS_i) 为有向光滑曲面 S 在相应坐标平面上的投影区域代数面积.

注：① 第二类曲面积分也称为对坐标的曲面积分.

$$\textcircled{2} \quad \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

③ 第二类曲面积分有类似于第二类曲线积分的性质.

例如, $\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{S^-} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$

(4) 流体以 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ 的速度单位时间内从曲面 S 负侧流向正侧的总流量为

$$\Phi = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

4. 计算方法

(1) 设光滑曲面 S 的方程为 $z = z(x, y)$, 其中 $(x, y) \in D_{xy}$, 若 S 取上侧, 则

$$\iint_S R(x, y, z) dxdy = \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dxdy.$$

若 S 取下侧, 则 $\iint_S R(x, y, z) dxdy = -\iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dxdy.$

(2) 设光滑曲面 S 的方程为 $x = x(y, z)$, 其中 $(y, z) \in D_{yz}$, 若 S 取前侧, 则

$$\iint_S P(x, y, z) dydz = \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dydz.$$

若 S 取后侧, 则 $\iint_S P(x, y, z) dydz = -\iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dydz.$

(3) 设光滑曲面 S 的方程为 $y = y(z, x)$, 其中 $(z, x) \in D_{zx}$, 若 S 取右侧, 则

$$\iint_S Q(x, y, z) dzdx = \iint_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z] dzdx.$$

若 S 取左侧, 则 $\iint_S Q(x, y, z) dzdx = -\iint_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z] dzdx.$

其中积分区域是曲面 S 在相应坐标平面上的投影区域.

5. 两类曲面积分的关系

设光滑曲面 S 在点 (x, y, z) 处的法向量的方向角为 α, β, γ , 则

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

练习题

一、填空题

1. 设 S 是平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成四面体的表面, 则 $\oiint_S dS = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设 S 是平面 $2x+2y+z=6$ 在第一卦限部分平面, 则 $\iint_S x^2 dS = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 设 S 是平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分平面的上侧, 则 $\iint_S z dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设 S 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分平面的左侧, 则 $\iint_S y dz dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、解答题

1. 求 $\iint_S (x+y+z) dS$, 其中 S 是平面 $y+z=5$ 被曲面 $x^2+y^2=25$ 所截得部分平面.

2. 求 $\iint_S (x^2+y^2+z^2) dS$, 其中 S 是平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分平面.

3. 设 S 是椭球面 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ 的上半部分, 点 $P(x, y, z) \in S$, Π 为 S 在点 P 的切平面, $\rho(x, y, z)$ 为点 $O(0, 0, 0)$ 到平面 Π 的距离, 求 $\iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS$.

4. 求 $\iint_S xyz dx dy$, 其中 S 是抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x=0$ 、 $x=1$ 、 $y=0$ 、 $y=1$ 所截得部分曲面的上侧.

5. 求 $\oint_S x^2 dy dz$, 其中 S 是球面 $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ 的外侧.

6. 求 $\oiint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, 其中 S 是长方体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ 表面的外侧.

7. 求 $\oiint_S xydydz + yzdzdx + zx dxdy$, 其中 S 是 $x + y + z = 1$ 与三个坐标面围成四面体表面的外侧.

8. 将第二类曲面积分 $\iint_S Pdydz + Qdzdx + R dxdy$ 化为第一类曲面积分, 其中 S 是平面 $3x + 2y + 2\sqrt{3}z = 6$ 在第一卦限部分平面的外侧.

10.4 高斯公式与斯托克斯公式

主要知识与方法

1. 高斯公式

设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 S 所围成, 函数 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在 Ω 上有一阶连续偏导数, 则

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy.$$

或
$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

其中曲面 S 是 Ω 的整个边界曲面的外侧, 且 α, β, γ 是曲面 S 在点 (x, y, z) 处的法向量的方向角.

2. 斯托克斯公式

设 L 是空间分段光滑的闭曲线, 曲面 S 是以 L 为边界的分片光滑的有向曲面, 且 L 的正向与 S 的侧符合右手原则, 若函数 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在 S 上有一阶连续偏导数, 则

$$\oint_L R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

为方便起见, 把上述公式记为

$$\oint_L R dz = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

练习题

1. 求 $\oiint_S (x-y)dxdy + (y-z)dydz$, 其中 S 是由柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 0$, $z = 3$ 围成的空间闭区域表面的外侧.
2. 求 $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, 其中 S 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ 的外侧.
3. 求 $\oiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^2 dxdy$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的内侧.

4. 求 $\oint_L (2-y)dx + (x-2)dy + (y-x)dz$, 其中 L 是以点 $A(a, 0, 0)$. $B(0, a, 0)$. $C(0, 0, a)$ 为顶点的三角形沿 $ABCA$ 的方向的闭曲线.

5. 求 $\oint_L 2ydx + 3xdy - z^2dz$, 其中 L 是圆周 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$, 且从 z 轴正向看下去时取逆时针方向.

6. 求 $\oiint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 S 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

第 11 章 无穷级数

11.1 常数项级数的概念与判别

主要知识与方法

1. 常数项级数收敛

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项和为 $S_n = \sum_{i=1}^n u_i$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且其和为 S . 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

注: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

2. 收敛级数的基本性质

(1) 当 $k \neq 0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 具有相同的敛散性.

(2) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

(3) 在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中删去、增加、改变有限项, 不改变其敛散性. 但在收敛时, 其和一般会改变.

(4) 收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 加括号后(不改变各项顺序)所得到的新级数仍收敛, 且其和不变.

3. 级数收敛的必要条件

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

注: ① 反过来不成立, 即由 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 推不出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

② 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

4. 两个重要级数的敛散性

(1) 几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$: 当 $|q| < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 收敛且其和 $S = \frac{a}{1-q}$; 当 $|q| \geq 1$

时, $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 发散.

(2) p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$: 当 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛; 当 $p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散.

5. 正项级数的审敛法

(1) 收敛的充要条件: 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

(2) 比较审敛法: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数, 且 $u_n \leq v_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 则

① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

注: 上述结论反过来不成立, 即若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 未必收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 未必发散.

(3) 比较审敛法的极限形式: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则

① 当 $0 < l < +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性;

② 当 $l = 0$ 时, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

③ 当 $l = +\infty$ 时, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

说明: 比较审敛法的参考级数一般为几何级数与 p -级数.

(4) 比值审敛法: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则

① 当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛;

② 当 $\rho > 1$ (或 $\rho = +\infty$) 时, 级数发散;

③ 当 $\rho = 1$ 时, 级数可能收敛也可能发散.

(5) 根值审敛法: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则

- ① 当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛;
- ② 当 $\rho > 1$ (或 $\rho = +\infty$) 时, 级数发散;
- ③ 当 $\rho = 1$ 时, 级数可能收敛也可能发散.

6. 交错级数的审敛法

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ ($u_n > 0$) 满足:

- (1) $u_n \geq u_{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$); (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛, 且其和 $S \leq u_1$, 其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

注: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

7. 任意项级数的敛散性

(1) 绝对收敛: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

(2) 条件收敛: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为条件收敛.

(3) 绝对收敛的性质:

① 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

② 任意交换绝对收敛级数的各项次序所得的新级数仍然绝对收敛, 且其和不变.

练习题

一、填空题

1. 当 p 满足_____时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$ 收敛.
2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$ 是_____ (填收敛或发散).
3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ 是_____ (填绝对收敛或条件收敛).
4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 是_____ (填绝对收敛或条件收敛).
5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{100}{n(n+1)} - \frac{100}{3^n})$ 的和 $S =$ _____.

二、解答题

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $S_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}}$, (1) 求 u_n , (2) 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性, 若收敛求其和.

2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n-1}$ 的敛散性.

3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$ 的敛散性, 若收敛求其和.

4. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ ($a > 0$) 的敛散性.

5. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n n!}$ ($a > 0, a \neq e$) 的敛散性.

6. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \arcsin \frac{1}{n}$ 的敛散性，若收敛是绝对收敛还是条件收敛.

7. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}$ 的敛散性，若收敛是绝对收敛还是条件收敛.

8. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdots (4n-3)}$ 的敛散性.

9. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 的敛散性.

10. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 的敛散性, 若其收敛求其和.

11. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}$ 的敛散性.

12. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n > 0)$ 的部分和 S_n , 记 $v_n = \frac{1}{S_n}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

13. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 的敛散性.

14. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 的敛散性.

15. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1!)^2 + (2!)^2 + \cdots + (n!)^2}{(2n)!}$ 的敛散性.

三、证明题

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛.

2. 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) (n=1, 2, \cdots)$, 证明: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在; (2) 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ 收敛.

11.2 幂级数及其展开

主要知识与方法

1. 函数项级数的收敛域

设函数列 $\{u_n(x)\}$ 的定义域为 I , 取 $x_0 \in I$, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称点 x_0 为

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点, 收敛点的全体称为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散, 则称点 x_0 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的发散点, 发散点的全体称为

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的发散域.

2. 和函数

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 D , 则对任意 $x \in D$, 存在唯一的数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 与 x 对应,

即在 D 上定义了一个函数, 称之为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数, 记为 $S(x)$.

显然, 设 $S_n(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 前 n 项和, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$.

3. 幂级数的敛散性 (Abel 定理)

(1) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$) 处收敛, 则当 $|x| < |x_0|$ 时, 幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛;

(2) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_1$ 处发散, 则当 $|x| > |x_1|$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

说明: 由幂级数的敛散性可知, 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不是仅在 $x = 0$ 一点收敛, 也

不是在整个数轴上收敛, 则存在唯一正数 R , 使得当 $|x| < R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 当

$|x| > R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散. 正数 R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.

4. 收敛半径的求法

给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, 则

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ +\infty, & \rho = 0. \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}$$

5. 收敛域(收敛区间)的求法

区间 $(-R, R)$ 加上端点的收敛点.

6. 幂级数和函数的性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内的和函数为 $S(x)$, 则

(1) $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内连续, 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=R$ (或 $x=-R$) 收敛, 则 $S(x)$ 在点 $x=R$ 处左连续(或在点 $x=-R$ 处右连续).

(2) $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内可导, 且有逐项求导公式

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

注: 逐项求导后所得的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径 R , 但收敛域可能不同, 即端点的敛散性可能不同.

(3) $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内可积, 且有逐项积分公式

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

注: 逐项积分后所得的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径 R , 但收敛域可能不同, 即端点的敛散性可能不同.

说明: 利用幂级数的逐项求导或逐项求积可求幂级数的和函数.

8. 几个常见函数的幂级数展开式

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$(2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$(4) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \quad \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1).$$

$$(5) \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1).$$

$$(6) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < x \leq 1).$$

$$(7) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (-1 < x < 1).$$

8. 函数展开成幂级数的间接展开法

利用常见函数的展开式, 通过幂级数的四则运算、逐项求导、逐项求积、变量代换、恒等变形等将所给函数展开成幂级数.

说明: 利用幂级数的和函数或函数的幂级数展开式可以求常数项级数的和.

练习题

一、填空题

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n} x^n$ 的收敛半径 $R = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ 的收敛区间 $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 函数 $f(x) = \sin^2 x$ 展开成 x 的幂级数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 函数 $f(x) = \frac{1}{2+x}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、解答题

1. 判别级数 $\frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3}(\frac{4-x}{7x+2})^2 + \frac{1}{5}(\frac{4-x}{7x+2})^3 + \cdots$ 在 $x=0$ 与 $x=1$ 处的敛散性.
2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^n} x^n$ 的收敛半径与收敛域.

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} (x-2)^n$ 的收敛区间.

4. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n} x^{2n}$ 的收敛域.

5. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x}\right)^n$ 的收敛域.

6. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ 的和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$ 的和.

7. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ 的和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ 的和.

8. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$ 的收敛域及和函数.

9. 将函数 $f(x) = \operatorname{arccot} x$ 展开成 x 的幂级数.

10. 将函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.

11. 将 $f(x) = \frac{1}{6-5x+x^2}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

12. 利用幂级数展开式求 $\frac{1 + \frac{\pi^4}{5!} + \frac{\pi^8}{9!} + \frac{\pi^{12}}{14!} + \cdots}{\frac{1}{3!} + \frac{\pi^4}{7!} + \frac{\pi^8}{11!} + \frac{\pi^{12}}{15!} + \cdots}$.

13. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

三、证明题

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x_1 = 3$ 处发散, 在 $x_2 = -1$ 处收敛, 指出该级数的收敛半径, 并证明之.

11.3 傅立叶级数及其展开

主要知识与方法

1. 傅立叶级数

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 则级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

称为 $f(x)$ 的傅立叶级数. 记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

其中 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$ ($n=0, 1, 2, \dots$), $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$ ($n=1, 2, \dots$) 称为傅立叶系数.

2. 傅立叶级数收敛定理(狄利希莱(Dirichlet)收敛定理)

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 且 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上满足如下狄利希莱条件:

- (1) 连续或者只有有限个第一类间断点;
- (2) 只有有限个极值点.

则 $f(x)$ 的傅立叶级数在区间 $[-\pi, \pi]$ 上收敛, 且

- (1) 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时, 级数收敛于 $f(x)$;
- (2) 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时, 级数收敛于 $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$;
- (3) 当 $x = \pm\pi$ 时, 级数收敛于 $\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$.

3. 正弦级数

设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上是奇函数, 则称 $f(x)$ 的傅立叶级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 为正弦级数.

4. 余弦级数

设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上是偶函数, 则称 $f(x)$ 的傅立叶级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 为余弦级数.

5. 周期为 $2l$ 函数的傅立叶级数

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数, 则 $f(x)$ 的傅立叶系数为

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1, 2, \dots).$$

且对应的傅立叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right).$$

设 $f(x)$ 在区间 $[-l, l]$ 上满足狄利希莱收敛定理条件, 则有

- (1) 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时, 级数收敛于 $f(x)$;
- (2) 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时, 级数收敛于 $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$;
- (3) 当 $x = \pm l$ 时, 级数收敛于 $\frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}$.

特别地, 若 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上是奇函数, 则 $f(x)$ 的傅立叶级数为正弦级数

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$, 若 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上是偶函数, 则 $f(x)$ 的傅立叶级数为余弦级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x.$$

6. 定义在 $[0, l]$ 上的函数的傅立叶级数

(1) 偶延拓: 在 $[-l, 0]$ 上对函数作补充, 使得 $f(-x) = f(x)$, 即得到一个偶函数, 于是将 $f(x)$ 在 $[0, l]$ 上展开为余弦级数.

(2) 奇延拓: 在 $[-l, 0]$ 上对函数作补充, 使得 $f(-x) = -f(x)$, 即得到一个奇函数, 于是将 $f(x)$ 在 $[0, l]$ 上展开为正弦级数.

练习题

一、填空题

1. 以 2π 为周期的函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0 \\ 1+x^2, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ 的傅立叶级数在 $x = \pi$ 处收敛于_____.
2. 设函数 $f(x) = \pi x + x^2$ ($-\pi < x < \pi$) 的傅立叶级数展开式为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则 $b_3 =$ _____.
3. 以 2 为周期的函数 $f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ 的傅立叶级数在 $x = 1$ 处收敛于_____.
4. 函数 $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, 设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$, $-\infty < x < +\infty$, 其中 $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx$ ($n = 1, 2, \dots$), 则 $S(-\frac{1}{2}) =$ _____.

二、解答题

1. 将以 2π 为周期的函数 $f(x) = x$ ($-\pi \leq x < \pi$) 展开成傅立叶级数.
2. 将函数 $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ 在 $[0, \pi]$ 上展开成余弦级数.

3. 将函数 $f(x) = -\sin \frac{x}{2} + 1$, $x \in [0, \pi]$ 展开成正弦级数.

4. 将函数 $f(x) = x^2$ ($-\pi < x < \pi$) 展开成傅立叶级数, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 的和.

5. 将函数 $f(x) = 2 + |x|$ ($-1 \leq x \leq 1$) 展开成傅立叶级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

参考答案

第 7 章

7.1

一、1. $\{5, -8, 5\}$. 2. $\frac{1}{2}$. 3. 2. 4. $\pm\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$.

二、1. $\{-4, 2, -4\}$. 2. (1) $\{2, 1, 2\}$ 、(2) $\{2, 1, 2\}$. 3. $\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$.

4. (1) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$; (2) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角; (3) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 π .

5. $\{0, \mp\frac{8}{5}, \pm\frac{6}{5}\}$. 6. $(3, -4, 2)$. 7. $\frac{\sqrt{19}}{2}$. 8. $\frac{\pi}{3}$.

9. $-\frac{6}{25}$. 10. ± 27 .

三、提示：垂直的条件.

7.2

一、1. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$. 2. $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$. 4. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2y = 8 \\ z = 0 \end{cases}$.

二、1. $x + y + z - 5 = 0$.

2. 母线平行 x 轴的柱面方程为 $3y^2 - z^2 = 16$,

母线平行 y 轴的柱面方程为 $3x^2 + 2z^2 = 16$.

3. xOy 平面上的椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 绕 x 轴旋转一周.

4. $\begin{cases} 2x^2 - 2x + y^2 = 3 \\ z = 0 \end{cases}$. 5. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \\ z = -\sqrt{2}\sin t \end{cases}$.

7.3

一、1. 1. 2. -1 . 3. $\frac{\pi}{3}$. 4. $x - y + 3z - 8 = 0$.

二、1. $5x - 3y - z - 8 = 0$. 2. $x - 2y + 2z - 3 = 0$ 或 $x - 2y + 2z - 9 = 0$.

3. $5x + y - 13 = 0$. 4. $10x + 2y + 11z - 148 = 0$.

5. $z = 8$. 6. $15x + 10y - 6z - 60 = 0$.

7. $k = 3$ 或 $k = -15$. 8. $2x + 2y - 3z = 0$.

7.4

一、1. $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$. 2. $\{1, 7, 5\}$. 3. $\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$. 4. $\frac{\pi}{4}$.

二、1. $\frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-5}$.

2. 标准式方程 $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{3}$, 参数方程 $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$.

3. $\frac{x-5}{2} = \frac{y+7}{6} = \frac{z-0}{1}$. 4. $\frac{3\pi}{4}$. 5. $2x - 3y + 3z + 3 = 0$.

6. $2x + 2y - z + 6 = 0$ 或 $x - 2y - 2z + 6 = 0$. 7. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

8. $\begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$. 9. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}$.

10. $\frac{x-1}{9} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-5}$. 11. $\begin{cases} 2x + 2y + z + 14 = 0 \\ 2x + 5y + 4z + 8 = 0 \end{cases}$.

12. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$. 13. $\frac{\sqrt{29}}{3}$ 14. $\frac{\sqrt{38}}{2}$.

第8章

8.1

一、1. a . 2. 0. 3. $-\frac{1}{\ln 2}$. 4. $y^2 = 2x$.

二、1. $\frac{1}{4}$. 2. 0. 3. e^2 . 4. 不存在, 令 $x = ky$.

三、提示：取 $y = x^2 - x$ 及 $y = x$.

8.2

一、1. $2xye^{x^2y}$. 2. 2. 3. $\cos(xy)[ydx + xdy]$. 4. $3x^2 - 3y^2$.

二、1. $\alpha = \frac{\pi}{4}$. 2. $\frac{\partial z}{\partial x} = -2\sin(2x - y)$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y} = \sin(2x - y)$.

3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{x+y} + \frac{y}{(x+y)^2}$ 、 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y}{(x+y)^2}$ 、 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-x}{(x+y)^2}$.

4. $6x \cos y - e^x$. 5. $\frac{1}{x^2 + y^2}(-ydx + xdy)$.

6. $(a^{x+yz} \ln a - \frac{a}{x})dx + za^{x+yz} \ln a dy + ya^{x+yz} \ln a dz$.

7. $[yz + yf(xy)]dx + [xz + xf(xy) - zf(yz)]dy + [xy - yf(yz)]dz$.

8. $dx - dy$. 9. 不可微.

三、提示：1. 先求两个偏导数.再代入左边表达式.

2. 先求三个二阶偏导数.再代入左边表达式.

8.3

一、1. $(\sin t + \cos t - 1)e^{-t}$. 2. $2x(1 + 2z \sin y)e^{x^2+y^2+z^2}$.

3. $\frac{e^x - y^2}{2xy - \cos y}$. 4. $\frac{z}{x+z}$.

二、1. $\frac{dz}{dx} = \frac{(1+x)e^x}{1+(xe^x)^2}$, $\frac{dz}{dy} = \frac{1+\ln y}{1+(y \ln y)^2}$.

2. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x \ln(4x-3y)}{y^2} + \frac{4x^2}{(4x-3y)y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x^2 \ln(4x-3y)}{y^3} - \frac{3x^2}{(4x-3y)y^2}$.

3. $(f' + 2f'_2 + yf'_3)dx + (f'_2 + xf'_3)dy$.

4. $\frac{1}{x-f'_2}[(yf'_1 - z)dx + (\cos y + xf'_1 + f'_2)dy]$.

5. $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \frac{1}{5}$, $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -\frac{1}{5}$.

6. $f'_x - \frac{y}{x} f'_y + [1 - \frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}]f'_z$.

$$7. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^5 f''_{11} + 2x^3 f'_{12} + x f''_{22}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4x^3 f'_1 + 2x f'_2 + x^4 y f''_{11} - y f''_{22}.$$

$$8. \frac{(f + x f') F'_y - x f F'_x}{F'_y + x f F'_z}.$$

$$9. \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}.$$

三、提示：1. 先求两个偏导数.再代入左边表达式.

2. 先求两个偏导数.再代入左边表达式.

8.4

一、1. $\frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z + \frac{\sqrt{2}}{2}}{3}.$ 2. $2x - 4y - z + 3 = 0.$ 3. 1. 4. $\{1, 1\}.$

二、1. 切线方程： $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{3},$ 法平面方程： $x + 4y + 3z - 12 = 0.$

2. 切线方程： $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-\sqrt{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}},$ 法平面方程： $2x - \sqrt{2}z = 0.$

3. $(1, -1, 1)$ 或 $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}).$

4. 切平面方程： $x + 2y - 4 = 0,$ 法线方程： $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}.$

5. 点的坐标： $(1, 2, 3),$ 切平面方程： $2x + 2y - z - 3 = 0.$

6. $a = -5, b = -2.$ 7. $\arccos \frac{3}{\sqrt{22}}.$ 8. $\frac{1}{2}.$

9. $\frac{2}{3}\sqrt{6}.$ 10. $\{2, -4, 1\}$

三、提示：由切平面方程得到三个截距，然后相加得常数 $a.$

8.5

一、1. 8. 2. -3. 3. $\frac{1}{4}.$

二、1. 极小值 $f(1, 1) = 3.$ 2. 极大值 $f(0, 0) = 0,$ 极小值 $f(2, 2) = -8.$

3. 极小值 $f(0, e^{-1}) = -e^{-1}.$ 4. 极大值 $z(-9, -3) = -3,$ 极小值 $z(9, 3) = 3.$

5. 最大值 $f(2, 1) = 4,$ 最小值 $f(4, 2) = -64.$

6. $(2, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$, 最短距离 $\sqrt{6}$.

7. 最大值为 $u(-2, -2, 8) = 72$, 最小值为 $u(1, 1, 2) = 6$.

8. 最大值 $f(0, 2) = 8$, 最小值 $f(0, 0) = 0$.

第9章

9.1

一、1. $\frac{20}{3}$. 2. $\int_0^1 dx \int_{e^y}^e f(x, y) dy$. 3. $\frac{1}{6}$. 4. 5π . 5. $\frac{\pi}{4}$.

二、1. $4\ln 2 - \frac{3}{2}$. 2. $\frac{1}{3}$. 3. $\frac{1}{6} - \frac{1}{3e}$. 4. $\frac{1}{2}(1 - \cos 2)$.

5. $14a^4$. 6. $\frac{1}{6}$. 7. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy$. 8. π .

9. $\frac{1}{2}A^2$. 10. $\pi(1 - e^{-a^2})$. 11. $\frac{10\sqrt{2}}{9}$. 12. $\frac{41}{2}\pi$.

13. $\frac{\pi}{2}$. 14. $\frac{1}{2}$. 15. $\frac{16}{15}$. 16. $\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}$.

三、提示：交换积分次序.

9.2

一、1. $\frac{1}{6}$. 2. $\frac{16}{3}\pi$. 3. $\frac{4}{3}\pi$. 4. $\frac{4}{5}\pi$.

二、1. $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$. 2. $\frac{28}{45}$. 3. $\frac{4}{15}\pi abc^3$. 4. $\frac{\pi}{10}a^5$.

5. $\frac{3}{2}$. 6. $\frac{13}{4}\pi$. 7. $\frac{\pi}{4}$. 8. $\frac{4}{15}\pi$.

9. $\frac{\pi}{3}$. 10. $\frac{4}{3}\pi$. 11. $\frac{\pi}{20}$. 12. 6π .

13. $\frac{512}{3}\pi$.

三、提示：球面坐标、积分中值定理或罗必达法则与导数定义.

9.3

1. $\sqrt{2}\pi$. 2. $\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$. 3. $\frac{32}{15}\pi$.

4. $(0, 0, \frac{2}{3})$. 5. $(\frac{8}{5}, \frac{8}{5})$. 6. $\frac{\pi}{10}h^5\rho$.

参考答案

第9章

9.1

一、1. $\frac{20}{3}$. 2. $\int_0^1 dx \int_{e^y}^e f(x, y) dy$. 3. $\frac{1}{6}$. 4. 5π . 5. $\frac{\pi}{4}$.

二、1. $4\ln 2 - \frac{3}{2}$. 2. $\frac{1}{3}$. 3. $\frac{1}{6} - \frac{1}{3e}$. 4. $\frac{1}{2}(1 - \cos 2)$.

5. $14a^4$. 6. $\frac{1}{6}$. 7. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy$. 8. π .

9. $\frac{1}{2}A^2$. 10. $\pi(1 - e^{-a^2})$. 11. $\frac{10\sqrt{2}}{9}$. 12. $\frac{41}{2}\pi$.

13. $\frac{\pi}{2}$. 14. $\frac{1}{2}$. 15. $\frac{16}{15}$. 16. $\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}$.

三、提示：交换积分次序.

9.2

一、1. $\frac{1}{6}$. 2. $\frac{16}{3}\pi$. 3. $\frac{4}{3}\pi$. 4. $\frac{4}{5}\pi$.

二、1. $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$. 2. $\frac{28}{45}$. 3. $\frac{4}{15}\pi abc^3$. 4. $\frac{\pi}{10}a^5$.

5. $\frac{3}{2}$. 6. $\frac{13}{4}\pi$. 7. $\frac{\pi}{4}$. 8. $\frac{4}{15}\pi$.

9. $\frac{\pi}{3}$. 10. $\frac{4}{3}\pi$. 11. $\frac{\pi}{20}$. 12. 6π .

13. $\frac{512}{3}\pi$.

三、提示：球面坐标、积分中值定理或罗必达法则与导数定义.

9.3

1. $\sqrt{2}\pi$. 2. $\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$. 3. $\frac{32}{15}\pi$.

4. $(0, 0, \frac{2}{3})$. 5. $(\frac{8}{5}, \frac{8}{5})$. 6. $\frac{\pi}{10}h^5\rho$.

第10章

10.1

一、 1. 1. 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2})$. 3. $\frac{1}{2}$. 4. $\frac{1}{35}$.

二、 1. 13. 2. $\frac{15}{2}$. 3. $2a^2$. 4. $2\pi a^2$.

5. 3. 6. 8. 7. $\frac{1}{\pi}$. 8. $\frac{4}{3}$.

9. $-\frac{87}{4}$. 10. $\frac{1}{2}$. 11. $\int_C \frac{P+2xQ}{\sqrt{1+4x^2}} ds$.

12. $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\Gamma} \frac{(1-z)P + (1-z)Q + 2xR}{\sqrt{2}} ds$.

13. $(\frac{6}{\pi}, 0)$. 14. $\frac{8\sqrt{13}}{3}\pi(12+36\pi^2)$.

10.2

一、 1. 2π . 2. $-3ab\pi$. 3. $-\frac{\pi}{2}a^4$. 4. -2 .

二、 1. $\frac{\pi}{12}\ln 2$. 2. $-\frac{\pi}{2}$. 3. $e^2 + 5$. 4. $\frac{3\pi}{2} - \cos 2 + 1$.

5. -16 . 6. $\frac{23}{15}$. 7. $\frac{\pi}{2}$. 8. $-\frac{79}{5}$.

9. $u(x, y) = y^2 \sin x + x^2 \cos y$. 10. $\frac{\pi}{4}$. 11. $(\frac{\pi}{2} + 2)a^2b - \frac{\pi}{2}a^3$.

10.3

一、 1. $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. 2. $\frac{81}{4}$. 3. $\frac{1}{6}$. 4. $\frac{1}{6}$.

二、 1. $125\sqrt{2}\pi$. 2. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 3. $\frac{3}{2}\pi$. 4. $\frac{1}{4}$.

5. $\frac{8}{3}\pi a^4$. 6. $(a+b+c)abc$. 7. $\frac{1}{8}$. 8. $\iint_S (\frac{3}{5}P + \frac{2}{5}Q + \frac{2\sqrt{3}}{5}R) dS$.

10.4

1. $-\frac{9}{2}\pi$. 2. $2\pi a^3$. 3. $-\frac{12}{5}\pi a^5$. 4. $3a^3$.

5. 9π . 6. 4π .

第 11 章

11.1

一、1. $p > 0$. 2. 发散. 3. 条件收敛. 4. 绝对收敛. 5. 50.

二、1. (1) $\frac{2}{3^{n-1}}$; (2) 收敛, 和 $S=3$. 2. 发散. 3. 收敛, 和 $S=\frac{1}{5}$.

4. 当 $a > 1$ 时收敛; 当 $0 < a \leq 1$ 时发散.

5. 当 $0 < a < e$ 时发散; 当 $a > e$ 时收敛.

6. 条件收敛. 7. 绝对收敛.

8. 收敛. 9. 收敛. 10. 收敛, 且和 $S=1$. 11. 发散.

12. 发散. 13. 发散. 14. 收敛. 15. 收敛.

三、提示: 1. 比较审敛法.

2. (1) 存在准则 II; (2) 比较审敛法.

11.2

一、1. 4. 2. $(-1, 1]$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$. 4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-1)^n$.

二、1. 在 $x=0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2n-1}$ 发散; 在 $x=1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)3^n}$ 收敛.

2. 收敛半径 $R=2$; 收敛域 $[-2, 2]$. 3. $[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}]$. 4. $(-2, 2)$. 5. $[\frac{1}{2}, +\infty)$.

6. 和函数 $S(x) = -\ln(1-x)$ 和 $S = \ln \frac{3}{2}$. 7. 和函数 $S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; 和 $S=4$.

8. 收敛域 $(-1, 1)$; 和函数 $S(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$. 9. $\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{2n+1}$, $x \in [-1, 1]$.

10. $\ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)3^{n+1}} (x-2)^{n+1}$, $x \in (-1, 5]$.

11. $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{2^{n+1}}) (x-1)^n$, $x \in (0, 2)$. 12. π^2 .

13. 收敛域 $(-1, 1)$, 和函数 $S(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 3, & x=0 \end{cases}$.

三、收敛半径 $R=2$, 提示: Abel 定理.

11.3

一、1. $\frac{\pi^2}{2}$. 2. $\frac{2}{3}\pi$. 3. $\frac{3}{2}$. 4. $-\frac{1}{4}$.

二、1. $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\pi} \sin nx$.

$$2. \quad \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \cos nx .$$

$$3. \quad \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n 4n}{4n^2 - 1} \right] \sin nx .$$

$$4. \quad \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx , \quad -\frac{\pi^2}{12} .$$

$$5. \quad \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)\pi x , \quad \frac{\pi^2}{6} .$$