

四、综合题(每题 10 分, 共 20 分)

得分

1. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1-x^{1n}}{1+x^{1n}})$, (1) 求 $f(x)$; (2) 求 $f(x)$ 的间断点并分类.

得分

2. 设 $f(x)$ 可导且满足 $\int_0^x f(t)dt = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$.

五、证明题(每题 8 分, 共 8 分)

得分

设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 在 $(a, +\infty)$ 内 $f''(x) > 0$,

证明: $F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 在 $(a, +\infty)$ 内单调增加.

华东交通大学 2021—2022 学年第一学期期末考试卷

(B) 卷

课程名称: 高等数学(A) I 考试时间: 120 分钟 考试方式: 闭卷:

题号	一	二	三						四		五	总分
			1	2	3	4	5	6	1	2		
得分												
阅卷人	钟卫稼	万络简	刘梦可	王睿媛	宋庆华	叶晓峰	朱旭生	杨忠选	廖维川	任飞正	盛梅波	

一、填空题(每题 3 分, 共 15 分)

得分

1. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3^n + 5^n)^{\frac{1}{n}} =$

2. 设 $y = x \cos x - \sin x$, 则 $dy =$

3. 函数 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的最大值 $M =$

4. 无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx =$

5. 曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x$ 围成图形绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 $V =$

二、选择题(每题 3 分, 共 15 分)

得分

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin 2x}{x} + x \sin \frac{2}{x}) =$ ().

A. 4 B. 0 C. 2 D. ∞

2. 设 $y = \cos x$, 则 $y^{(50)} =$ ().

A. $-\cos x$ B. $\cos x$ C. $-\sin x$ D. $\sin x$

3. 设 e^{-x^2} 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int f(2x)dx =$ ().

A. $e^{-x^2} + C$ B. $\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$ C. $-e^{-x^2} + C$ D. $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

4. 定积分 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx =$ ().

A. 0 B. $-\frac{4}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

5. 微分方程 $y'' = e^{-2x} + 2$ 的通解为 ().

A. $y = \frac{1}{2}e^{-2x} + x^2 + C_1x + C_2$ B. $y = -\frac{1}{2}e^{-2x} + x^2 + C_1x + C_2$
C. $y = \frac{1}{4}e^{-2x} + x^2 + C_1x + C_2$ D. $y = -\frac{1}{4}e^{-2x} + x^2 + C_1x + C_2$



扫描全能王 创建

三、解答题(每题 7 分, 共 42 分)

得分

1、设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1 \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}$.

得分

2、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} + x^2 - 1}{x^2 \sin^2 x}$.

得分

3、求不定积分 $\int \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}} dx$.

4、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n \frac{l}{n^2} \sin \frac{l}{n}$.

得分

5、过原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 求曲线 $y = \ln x$ 与切线及 x 轴围成图形的面积.

得分

6、求方程 $y'' - 4y = 4xe^{2x}$ 的特解 y^* .

得分



四、综合题(每题 10 分, 共 20 分)

1. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}})$, (1) 求 $f(x)$; (2) 求 $f(x)$ 的间断点并分类.

得分

$$\text{解 } |x| < 1 \text{ 时 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$|x| > 1 \text{ 时 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{-2n}}{1+x^{-2n}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$|x| = 1 \text{ 时 } f(x) = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| = 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 = 1$$

2. 设 $f(x)$ 可导且满足 $\int_0^x f(t) dt = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$.

得分

$$\text{解 } f(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^x f(t) dt \right) = x f(x) - x f(x) - e^{-x}$$

$$f(x) = -e^{-x}$$

$$y' - y = e^{-x}$$

$$y = e^{-x} \left(\int e^x e^{-x} dx + C \right) = e^{-x} \left(\int 1 dx + C \right) = e^{-x} (x + C)$$

五、证明题(每题 8 分, 共 8 分)

得分

设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 在 $(a, +\infty)$ 内 $f'(x) > 0$.

证明: $F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 在 $(a, +\infty)$ 内单调增加.

$$F'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - (f(x) - f(a))}{(x-a)^2} = \frac{f'(x)(x-a) - f(x) + f(a)}{(x-a)^2}$$

$$\text{在 } (a, +\infty) \text{ 内 } f'(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(x) > \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\therefore F'(x) > 0$$

$$\therefore F(x) \uparrow$$

华东交通大学 2021—2022 学年第一学期期末考试卷

(B) 卷

课程名称: 高等数学(A) I 考试时间: 120 分钟 考试方式: 闭卷:

题号	一	二	三						四		五	总分
			1	2	3	4	5	6	1	2		
得分												
阅卷人	钟卫稼	万洛简	刘梦可	王睿媛	宋庆华	叶晚峰	朱旭生	杨忠选	廖维川	任飞正	盛梅波	

一、填空题(每题 3 分, 共 15 分)

得分

1. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3^n + 5^n)^{\frac{1}{n}} = 5$

2. 设 $y = x \cos x - \sin x$, 则 $dy = -x \sin x dx$

3. 函数 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的最大值 $M = 11$

4. 无穷积分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \ln 2$

5. 曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x$ 围成图形绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 $V = \frac{8}{3}\pi$

二、选择题(每题 3 分, 共 15 分)

得分

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} + x \sin \frac{2}{x} \right) = (C)$

A. 4 B. 0 C. 2 D. ∞

2. 设 $y = \cos x$, 则 $y^{(50)} = (A)$

A. $-\cos x$ B. $\cos x$ C. $-\sin x$ D. $\sin x$

3. 设 e^{-x} 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int_0^1 f(2x) dx = (B)$

A. $e^{-1} + C$ B. $\frac{1}{2} e^{-1} + C$ C. $-e^{-1} + C$ D. $-\frac{1}{2} e^{-1} + C$

4. 定积分 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx = (D)$

A. 0 B. $-\frac{4}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

5. 微分方程 $y'' = e^{-2x} + 2$ 的通解为 (C)

A. $y = \frac{1}{2} e^{-2x} + x^2 + C_1 x + C_2$ B. $y = -\frac{1}{2} e^{-2x} + x^2 + C_1 x + C_2$

C. $y = \frac{1}{4} e^{-2x} + x^2 + C_1 x + C_2$ D. $y = -\frac{1}{4} e^{-2x} + x^2 + C_1 x + C_2$



扫描全能王 创建

三、解答题(每题 7 分, 共 42 分)

得分

1. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1 \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0}$.

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{4e^t + 2t}{2e^t + 1} = 2t$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt} = \frac{2}{2e^t + 1}$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0} = \frac{2}{2e^0 + 1} = \frac{2}{3}$

得分

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} + x^2 - 1}{x^2 \sin^2 x}$.

解: $f(x) = \frac{e^{-x^2} + x^2 - 1}{x^4}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} + x^2 - 1}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x + 2}{4x^3} = \frac{1}{2}$

$\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} + x^2 - 1}{4x^3} = \frac{1}{2}$

得分

3. 求不定积分 $\int \frac{1}{(2x^2 + 1)\sqrt{1 + x^2}} dx$.

解: $\frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \arctan x + C$

$\overline{f(x)} = \int \frac{1}{(2x^2 + 1)\sqrt{1 + x^2}} dx = \arctan x + C$



$= \int \frac{\sec t}{2\sqrt{1+t^2}} dt = \int \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{\sec t}{\sqrt{1+t^2}} dt$
 $= \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan t + C = \arctan x + C$

4. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \sin \frac{k}{n}$.

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \sin \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sin \frac{k}{n}$

$= \int_0^1 x \sin x dx$

$= \int_0^1 -x d \cos x$

$= -x \cos x \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos x dx$

5. 过原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 求曲线 $y = \ln x$ 与切线及 x 轴围成图形的面积.

解:



切线 $y = kx$ $k = \frac{1}{e}$

$\therefore y = \ln x$ $y - \ln x = \frac{1}{e}(x - x_0)$

$\therefore y = \ln x$ $y = \frac{1}{e}x$

$\therefore dS = (e^x - e^y) dy$

$\therefore S = \int_0^1 (e^x - e^y) dy = (e^x - e^y) \Big|_0^1 = e - \frac{e}{2} - 1 = \frac{e}{2} - 1$

6. 求方程 $y'' - 4y = 4xe^{2x}$ 的特解 y^* .

解: $y'' - 4y = 4xe^{2x}$

$\lambda = 2$ 为单根 $\therefore y^* = x(Ax + B)e^{2x}$

$y^* = Ax^2 + Bx$ $y'' = 2Ax + B$ $y'' - 4y = 4xe^{2x}$

$2A + 4(14x - 15) + (14 - 4)B = 4x$

$2A + 4B = 0$

$8A = 4 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ $B = -\frac{1}{4}$

$\therefore y^* = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x e^{2x}$

得分

得分

$y^* = Ax^2 + Bx$ $y'' = 2Ax + B$ $y'' - 4y = 4xe^{2x}$

$2A + 4(14x - 15) + (14 - 4)B = 4x$

$2A + 4B = 0$

$8A = 4 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$\therefore y^* = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x e^{2x}$

