

高等数学(A)I 期末考试试卷(一)

一、填空题(每题 3 分, 共 15 分)

1、极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x} - 2x) =$ _____

2、曲线 $y = x \ln x$ 在点 (e, e) 处的切线方程为 _____

3、曲线 $y = \frac{x^2}{x+2}$ 的斜渐近线方程为 _____

4、不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx =$ _____

5、定积分 $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx =$ _____

二、选择题(每题 3 分, 共 15 分)

1、设方程 $\begin{cases} x = 3 \sin t \\ y = 2 \cos t \end{cases}$ 确定函数 $y = y(x)$, 则 $dy =$ ()

A. $-\frac{2}{3} \tan t dx$ B. $-\frac{2}{3} \tan t$ C. $-\frac{3}{2} \cot t dx$ D. $-\frac{3}{2} \cot t$

2、当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 $\sec x - 1$ 是 $\frac{1}{2}x^2$ 的 ()

A. 高阶无穷小 B. 低阶无穷小 C. 同阶不等价无穷小 D. 等价无穷小

3、函数 $y = x^3 - 3x$ 的极小值点为 ()

A. $x = -1$ B. $y = 2$ C. $x = 1$ D. $y = -2$

4、下列结论错误的是 ()

A. $\int f'(x) dx = f(x) + C$

B. $\int e^x f'(e^x) dx = f(e^x) + C$

C. $\int \cos x f'(\sin x) dx = f(\sin x) + C$

D. $\int \sin x f'(\cos x) dx = f(\cos x) + C$

5、下列反常积分收敛的是 ()

A. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ B. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ C. $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ D. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$

三、解答题(每题 7 分, 共 42 分)

1、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right)$.

2、设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x \ln(\cos t) dt}{x^3}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续, 求常数 a .

3、设方程 $y = f(x + y)$ 确定 $y = y(x)$, 其中 f 具有二阶导数且 $f' \neq 1$, 求 y' 及 y'' .

4、求不定积分 $\int \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} dx$.

5、求定积分 $\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$.

6、求微分方程 $y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x}$ 满足 $y|_{x=\pi} = 1$ 的特解.

四、综合题(每题 10 分, 共 20 分)

1、求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = xe^{-x}$ 的通解.

2、求由曲线 $x = y^2$ 及 $x = \frac{y^2 + 1}{2}$ 围成平面图形的面积
及该平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

五、证明题(每题 8 分, 共 8 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 连续, 在 $(0, 2)$ 内可导且 $f(1)f(2) < 0$,

证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 2)$, 使 $f(\xi) = -\frac{\xi f'(\xi)}{2}$.

高等数学(A)I 期末考试试卷(二)

一、填空题(每题 3 分, 共 15 分)

- 1、设当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $\sqrt{1+x^2} - 1$ 与 ax^2 等价, 则 $a =$ _____
- 2、设 $f'(1) = 3$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1-2x)}{x} =$ _____
- 3、曲线 $xy = 4$ 在点 $(2,2)$ 处的曲率为 $K =$ _____ (本次不作要求)
- 4、曲线 $r = 2 \cos \theta$ 及射线 $\theta = 0$ 、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 围成平面图形的面积 $S =$ _____
- 5、函数 $y = x^2 + 1$ 在区间 $[1,3]$ 上的平均值 _____ (本次不作要求)

二、选择题(每题 3 分, 共 15 分)

- 1、曲线 $\begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$ 上在对应 $t = \frac{\pi}{4}$ 点处的法线斜率为()
A. $-(1 + \sqrt{2})$ B. $1 + \sqrt{2}$ C. $-\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$ D. $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$
- 2、设 $\int \frac{f(x)}{x} dx = \arcsin x + C$, 则 $\int f(x) dx =$ ()
A. $-\sqrt{1-x^2} + C$ B. $\sqrt{1-x^2} + C$ C. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$ D. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$
- 3、定积分 $\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx =$ ()
A. 2 B. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{17}{6}$ D. $\frac{11}{6}$
- 4、由曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 及直线 $y = 1$ 、 $x = 0$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所形成立体的体积为 ()
A. $\frac{\pi}{7}$ B. $\frac{6\pi}{7}$ C. $\frac{3\pi}{5}$ D. $\frac{2\pi}{5}$
- 5、微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{3x}$ 的特解 y^* 可设为 ()
A. $y^* = (ax + b)e^{3x}$ B. $y^* = x(ax + b)e^{3x}$ C. $y^* = x^2(ax + b)e^{3x}$ D. $y^* = ax^2 e^{3x}$

三、解答题(每题 7 分, 共 42 分)

- 1、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}]$.
- 2、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2})$.
- 3、设 $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$, 求微分 dy .

4、求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$.

5、设 $f(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^3} dt$, 求定积分 $\int_0^1 xf(x)dx$.

6、求微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ 满足 $y|_{x=1} = \frac{\pi}{4}$ 的特解.

四、综合题(每题 10 分, 共 20 分)

1、设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, (1)求函数 $f(x)$ 的极值; (2)求曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

2、设函数 $y = y(x)$ 满足条件 $\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 2, y'(0) = -6 \end{cases}$, 求反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$.

五、证明题(每题 8 分, 共 8 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且 $f(x) < 1$, 证明: 方程 $2x - \int_0^x f(t)dt = 1$ 在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个实根.

高等数学(A)I 期末考试试卷(三)

一、填空题(每题 3 分, 共 15 分)

1、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3^n + 5^n)^{\frac{1}{n}} =$ _____

2、设 $y = x \cos x - \sin x$, 则 $dy =$ _____

3、函数 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的最大值 $M =$ _____

4、无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx =$ _____

5、曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x$ 围成图形绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 $V =$ _____

二、选择题(每题 3 分, 共 15 分)

1、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} + x \sin \frac{2}{x} \right) = (\quad)$.

A. 4 B. 0 C. 2 D. ∞

2、设 $y = \cos x$, 则 $y^{(50)} = (\quad)$

A. $-\cos x$ B. $\cos x$ C. $-\sin x$ D. $\sin x$

3、设 e^{-x^2} 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int f(2x) dx = (\quad)$

A. $e^{-4x^2} + C$ B. $\frac{1}{2}e^{-4x^2} + C$ C. $-e^{-4x^2} + C$ D. $-\frac{1}{2}e^{-4x^2} + C$

4、定积分 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx = (\quad)$

A. 0 B. $-\frac{4}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

5、微分方程 $y'' = e^{-2x} + 2$ 的通解为()

A. $y = \frac{1}{2}e^{-2x} + x^2 + C_1x + C_2$ B. $y = -\frac{1}{2}e^{-2x} + x^2 + C_1x + C_2$
C. $y = \frac{1}{4}e^{-2x} + x^2 + C_1x + C_2$ D. $y = -\frac{1}{4}e^{-2x} + x^2 + C_1x + C_2$

三、解答题(每题 7 分, 共 42 分)

1、设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1 \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0}$.

2、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} + x^2 - 1}{x^2 \sin^2 x}$.

3、求不定积分 $\int \frac{1}{(2x^2 + 1)\sqrt{1 + x^2}} dx$.

4、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} \sin \frac{i}{n}$.

5、过原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线，求曲线 $y = \ln x$ 与切线及 x 轴围成图形的面积

6、求方程 $y'' - 4y = 4xe^{2x}$ 的特解 y^* .

四、综合题(每题 10 分, 共 20 分)

1、设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}} x \right)$, (1) 求 $f(x)$; (2) 求 $f(x)$ 的间断点并分类.

2、设 $f(x)$ 可导且满足 $\int_0^x f(t) dt = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$.

五、证明题(每题 8 分, 共 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 在 $(a, +\infty)$ 内 $f''(x) > 0$,

证明: $F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 在 $(a, +\infty)$ 内单调增加

高等数学(A)I 期末考试试卷(四)

一、填空题(每题 4 分, 共 28 分)

1、函数 $f(x) = \begin{cases} (1-2x)^{\frac{1}{3x}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ _____

2、曲线 $xy=6$ 在点 $(2,3)$ 处的切线方程为 _____

3、设方程 $\begin{cases} x = t + \arctan t \\ y = t^3 + 6t \end{cases}$ 确定函数 $y = y(x)$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____

4、曲线 $y = \frac{x^2}{x+2}$ 的斜渐近线方程为 _____

5、不定积分 $\int \frac{x}{x-1} dx =$ _____

6、定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x dx =$ _____

7、无穷积分 $\int_0^{+\infty} e^{-5x} dx =$ _____

二解答题(每题 8 分, 共 40 分)

1、求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 3})$.

2、设 $y = \arctan \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$, 求 dy .

3、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

4、求不定积分 $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$.

5、求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$.

三、综合题(每题 12 分, 共 24 分)

1、设 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$, (1) 求函数 $f(x)$ 的极值 (2) 求曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

2、求由曲线 $x = y^2$, $y = \frac{1}{x}$ 及直线 $x = 4$ 围成平面图形的面积及该平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

四、证明题(8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$,

证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使 $4f(\xi) + f'(\xi) = 0$.