

高等数学 (A)II 的考试重点

上页

下页

返回

第七章 向量与空间解析几何

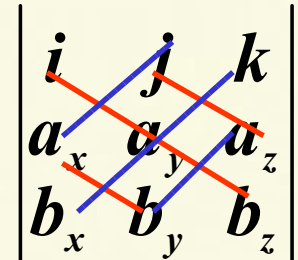
1、求向量的模、数量积、向量积、投影

方法： 设 $a = (a_x, a_y, a_z)$, $b = (b_x, b_y, b_z)$, 则

(1)模: $|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$

(2)数量积: $a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$

(3)向量积: $a \times b = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$


$$= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x).$$

(4)向量 a 在 b 上的投影: $\text{Pr } \vec{j}_b a = \frac{a \cdot b}{|b|}.$

例、 设 $a = (2, 3, 1)$, $b = (1, -2, -2)$,

求(1) $|b|$, (2) $a \cdot b$, (3) $a \times b$, (4) $\text{Pr } \vec{j}_b a$.

例、设 $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (1, -2, -2)$,

求(1) $|\vec{b}|$, (2) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, (3) $\vec{a} \times \vec{b}$, (4) $\text{Pr } \vec{j}_b \vec{a}$.

解:(1) $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 3$.

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + 3 \times (-2) + 1 \times (-2) = -6$.

$$(3) \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (-4, 5, -7). \quad \begin{matrix} -6\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k} \\ 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k} \end{matrix}$$

$$(4) \text{Pr } \vec{j}_b \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-6}{3} = -2.$$

2、利用平面平行及点到平面的距离求平面方程。
方法：

(1) 平面 $\Pi_1 //$ 平面 $\Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2$, 即 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

(2) 点到平面的距离: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

(3) 平面的一般方程: $Ax + By + Cz + D = 0$.

例、一平面 Π 与平面 $2x - y + 2z + 1 = 0$ 平行, 且点 $M(4, -1, -5)$ 到平面 Π 的距离为 2, 求平面 Π 的方程.

解: 由已知设平面 Π 的方程为 $2x - y + 2z + D = 0$,

则
$$\frac{|2 \times 4 - (-1) + 2 \times (-5) + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 2,$$

例、一平面 Π 与平面 $2x - y + 2z + 1 = 0$ 平行, 且点 $M(4, -1, -5)$ 到平面 Π 的距离为2, 求平面 Π 的方程.

解: 由已知设平面 Π 的方程为 $2x - y + 2z + D = 0$,

$$\text{则 } \frac{|2 \times 4 - (-1) + 2 \times (-5) + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 2,$$

即 $|D - 1| = 6$, 解之得 $D = 7$ 或 -5 ,

故平面 Π 的方程为

$$2x - y + 2z + 7 = 0 \text{ 或 } 2x - y + 2z - 5 = 0.$$

3、利用直线平行求直线的对称式方程及参数方程。
方法：

(1) 直线 $L_1 //$ 直线 $L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 // \vec{s}_2$, 即 $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

(2) 直线的对称式方程: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

(3) 直线的参数方程:
$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

例、一直线 L 过点 $(-3, 1, 2)$ 且平行直线 $\begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$

求直线 L 的对称式方程及参数方程.

例、一直线 L 过点 $(-3, 1, 2)$ 且平行直线 $\begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$

求直线 L 的对称式方程及参数方程.

解：由已知得直线 L 的方向向量为

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (0, 3, 3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &i + 2j + k \\ &-i + j + 2k \end{aligned}$$

故直线 L 的对称式方程为

$$\frac{x+3}{0} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{3}.$$

$$\text{参数方程为} \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

第八章 多元函数微分法

1、求二元函数的极限

方法：有理化与连续性.

例、求 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解：原式 $= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

2、求全微分

方法：先求偏导数再套公式

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

例、求函数 $z = (x + 3y)e^{xy}$ 在点 $(1, -1)$ 处的全微分.

$$\text{解: } \frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} + (x + 3y)ye^{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3e^{xy} + (x + 3y)xe^{xy}.$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1, -1)} = 3e^{-1}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1, -1)} = e^{-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } dz \Big|_{(1, -1)} &= \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1, -1)} dx + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1, -1)} dy. \\ &= 3e^{-1} dx + e^{-1} dy. \end{aligned}$$

3、方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定的隐函数求偏导

方法：先构造三元函数然后求偏导数再套公式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

例、设方程 $x + y^2 = e^z + z$ 确定 $z = f(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：令 $F(x, y, z) = x + y^2 - e^z - z$,

则 $F'_x = 1$, $F'_y = 2y$, $F'_z = -e^z - 1$,

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{1}{e^z + 1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{2y}{e^z + 1}.$$

第九章 多元函数微分法的应用

1、求曲面的切平面方程与法线方程

方法: 先求偏导数得法向量 $n = (F'_x, F'_y, F'_z)$ 再写方程.

(1) 切平面方程: $F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0$.

(2) 法线方程: $\frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y} = \frac{z - z_0}{F'_z}$.

例、求曲面 $e^z + xy = 2z + 3$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处的切平面与法线方程.

解: 令 $F(x, y, z) = e^z + xy - 2z - 3$,

则 $F'_x = y, F'_y = x, F'_z = e^z - 2, \Rightarrow$ 法向量 $n = (2, 1, -1)$.

切平面方程为 $2 \times (x - 1) + 1 \times (y - 2) + (-1) \times (z - 0) = 0$

即 $2x + y - z - 4 = 0$.

法线方程为 $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 0}{-1}$.

2、求二元函数极值

方法：设 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$,

且 $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$.

则当 $\Delta = B^2 - AC < 0$ 且 $A < (>) 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 为极大(小)值.

当 $\Delta = B^2 - AC > 0$ 时, $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处不取极值.

例、求 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值.

解： $f'_x(x, y) = 3x^2 - 3y$, $f'_y(x, y) = 3y^2 - 3x$,

解方程组 $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$.

又 $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = -3$, $f''_{yy} = 6y$,

在点 $(0, 0)$ 处, $\Delta = B^2 - AC = 9 > 0$,

故 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不取极值.

例、求 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值.

解: $f'_x(x, y) = 3x^2 - 3y$, $f'_y(x, y) = 3y^2 - 3x$,

解方程组 $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$.

又 $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = -3$, $f''_{yy} = 6y$,

在点 $(0, 0)$ 处, $\Delta = B^2 - AC = 9 > 0$,

故 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不取极值.

在点 $(1, 1)$ 处, $\Delta = B^2 - AC = -27 < 0$, 且 $A = 6 > 0$,

故 $f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处取极小值,

且极小值为 $f(1, 1) = -1$.

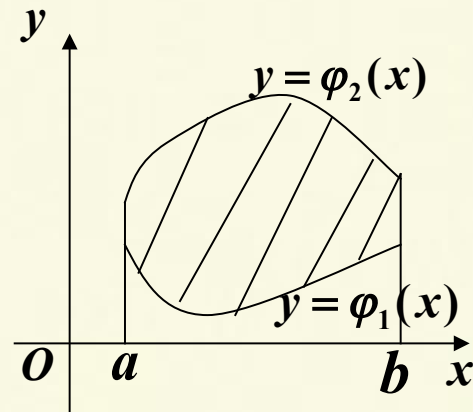
第十章 多元函数积分学 (I)

1、利用直角坐标求二重积分

方法：设区域 $D: \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b$,

则
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

注：(1) 先画 D 的图形，再写二次积分，
(2) 积分顺序从右到左。



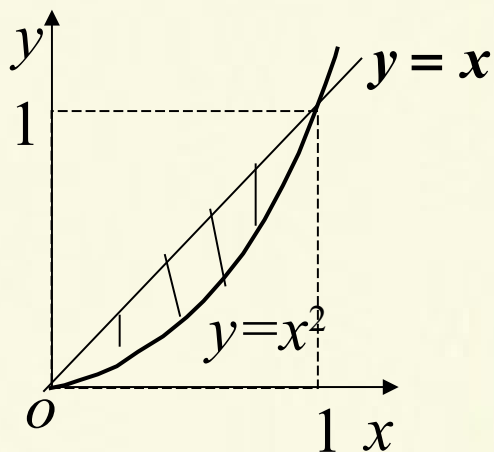
例、求 $\iint_D xy dx dy$ ，其中 D 由曲线 $y = x^2$ 及直线 $y = x$ 围成

解：原式 $= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy dy$

$$\frac{x}{2} y^2 \Big|_{x^2}^x$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - x^5) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{6} x^6 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$$



2、利用极坐标求二重积分

方法：设区域 D 为圆域 $x^2 + y^2 \leq R^2$ ，即

$$D = \{(r, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R\}.$$

则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

例、求二重积分 $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$,

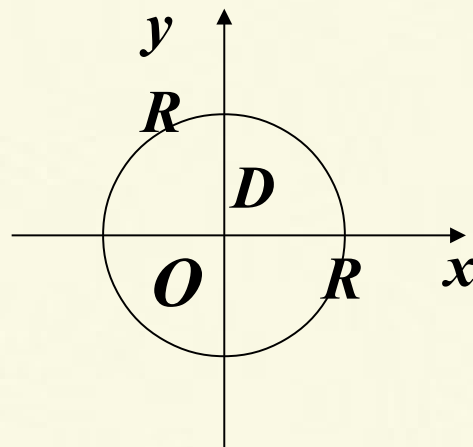
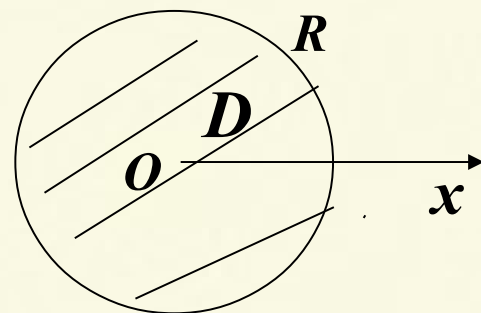
其中区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

解： $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 \cdot r dr$

$$\left. \frac{1}{4} r^4 \right|_0^R$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\theta$$

$$= \frac{\pi R^4}{2}.$$



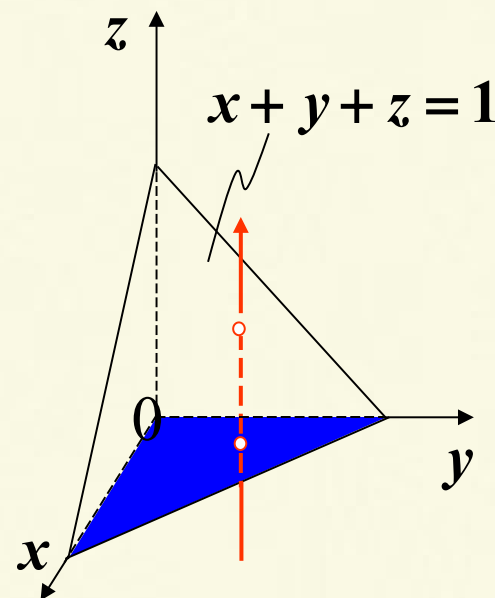
3、利用直角坐标求三重积分 方法：

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

例、求 $\iiint_{\Omega} e^{x+y+z} dv,$

其中 Ω 由平面 $x + y + z = 1$ 与三个坐标面围成.

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} e^{x+y+z} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (e - e^{x+y}) dy \\ &= \int_0^1 (e^x - ex) dx \\ &= \left(e^x - \frac{e}{2} x^2 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{e}{2} - 1. \end{aligned}$$



4、利用球面坐标求三重积分

方法：设 Ω 由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 围成，则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho.$$

例、计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} z dv$,

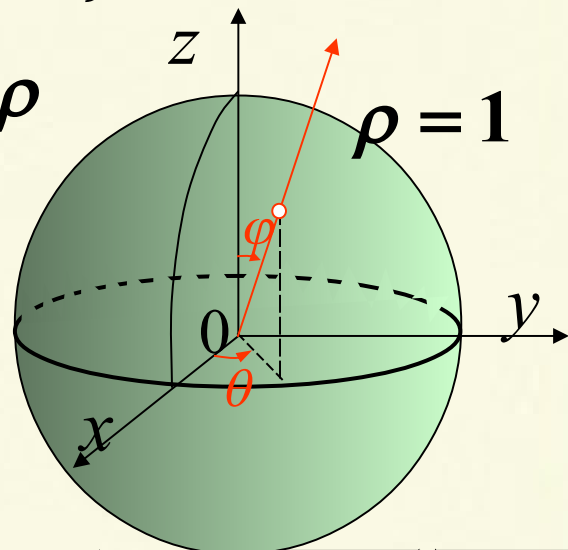
$$\left. \frac{1}{4} \rho^4 \right|_0^1$$

其中 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

$$\text{解: } I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho \cos \varphi \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} d\theta = \frac{\pi}{4}. \quad \left. \frac{1}{8} \sin^2 \varphi \right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$



5、求对弧长的曲线积分

方法:

(1) 设曲线 L 方程为: $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$),

$$\text{则 } \int_L f(x, y) ds = \int_a^b f[x, y(x)] \sqrt{1 + y_x'^2} dx.$$

(2) 设曲线 L 方程为: $x = x(y)$ ($c \leq y \leq d$),

$$\text{则 } \int_L f(x, y) ds = \int_c^d f[x(y), y] \sqrt{1 + x_y'^2} dy.$$

例、求 $\int_L x ds$, 其中 L 为曲线 $y = x^2$ 从点 $(0, 0)$ 到 $(1, 1)$.

解: 因为 $y' = 2x$,

$$\text{所以原式} = \int_0^1 x \sqrt{1 + (2x)^2} dx$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} d(1 + 4x^2)$$

$$= \frac{1}{12} (1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}.$$

第十一章 多元函数积分学 (II)

1、求对坐标的曲线积分

方法:

(1) 设曲线 L 的方程为 $y = y_0$, $a(b)$ 对应曲线 L 的起点(终点), 则 $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b P(x, y_0)dx$.

(2) 设曲线 L 的方程为 $x = x_0$, $c(d)$ 对应曲线 L 的起点(终点), 则 $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_c^d Q(x_0, y)dy$.

例、求 $\int_L (x \sin y + x^2)dx + (y^2 \cos x - xy)dy$,

其中 L 沿直线 $y = 0$ 从点 $O(0, 0)$ 到 $B(1, 0)$.

解: 原式 $= \int_0^1 x^2 dx$

$$= \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2、利用格林公式求对坐标的曲线积分

方法: ~~求~~ $\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$

说明: 曲线 L 一定是封闭且为 D 的正向.

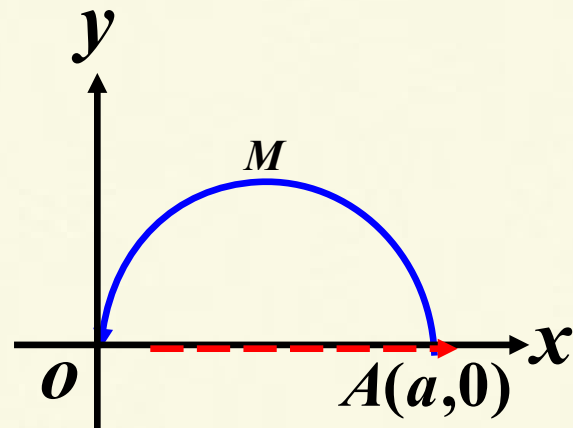
例、求 $I = \int_L (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy,$

其中 L 是由点 $A(a, 0)$ 沿 $y = \sqrt{ax - x^2}$ 到点 $O(0, 0)$.

解: 令 $P = e^x \sin y - my, Q = e^x \cos y - m,$

则 $\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - m, \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y,$

故 $I + \int_{OA} Pdx + Qdy = \iint_D m dx dy$
 $= m \iint_D dx dy = \frac{\pi a^2 m}{8}.$

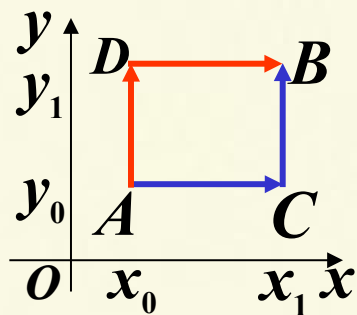


又 $\int_{OA} Pdx + Qdy = \int_0^a 0 \cdot dx = 0,$ 故 $I = \frac{\pi a^2 m}{8} - 0 = \frac{\pi a^2 m}{8}$

3、利用与路径无关求对坐标的曲线积分方法：

$$(1) \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y)dy.$$

$$(2) \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy = \int_{y_0}^{y_1} Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_1)dx.$$



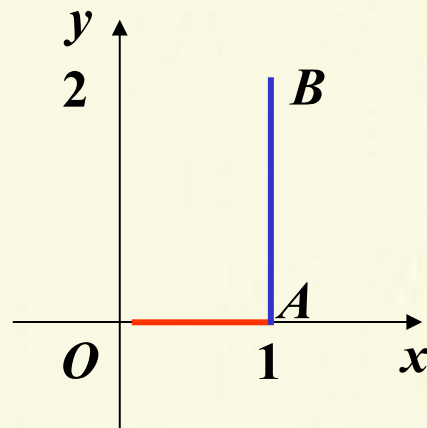
例、求 $\int_{(0,0)}^{(1,2)} (2x \cos y + y^3)dx + (-x^2 \sin y + 3xy^2)dy$.

解：原式 $= \int_0^1 2x dx + \int_0^2 (-\sin y + 3y^2)dy$

$$= x^2 \Big|_0^1 + (\cos y + y^3) \Big|_0^2$$

$$= 1 + \cos 2 + 7$$

$$= 8 + \cos 2.$$



第十二章 无穷级数

1、利用级数收敛定义求级数的和

方法：先求部分和 S_n ，再求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

例、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ 的和.

$$\begin{aligned}\text{解：} \because S_n &= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right),\end{aligned}$$

$$\therefore \text{所求和 } S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4}.$$

2、利用比值判别法判断级数的敛散性

方法：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ，则

当 $\rho < 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，当 $\rho > 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例、判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n} (a \neq e)$ 的敛散性.

$$\begin{aligned} \text{解：} \quad \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} (n+1)! / (n+1)^{n+1}}{a^n n! / n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e}, \end{aligned}$$

当 $0 < a < e$ 时 $\rho < 1$ ，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ 收敛.

方法：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ，则

当 $\rho < 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，当 $\rho > 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例、判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ ($a > 0$ 且 $a \neq e$) 的敛散性.

$$\begin{aligned} \text{解：} \quad \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} (n+1)! / (n+1)^{n+1}}{a^n n! / n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e}, \end{aligned}$$

当 $0 < a < e$ 时 $\rho < 1$ ，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ 收敛.

当 $a > e$ 时 $\rho > 1$ ，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ 发散.

3、求幂级数的收敛半径及收敛域 方法:

(1)收敛半径: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 则 $R = \frac{1}{\rho}$.

(2)收敛域: $(-R, R)$ 加上端点的收敛点.

例、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n} x^n$ 的收敛半径及收敛域.

解: $\because \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1}/(n+1)}{e^n/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{en}{n+1} = e,$

$\therefore R = \frac{1}{e}.$

当 $x = -\frac{1}{e}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛; 当 $x = \frac{1}{e}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

故收敛域为 $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.

4、求函数展开成幂级数并指出收敛域

方法：先对函数作恒等变形再套已知函数展开式.

例、将 $f(x) = \frac{1}{2+x}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数并指出收敛域.

解： $\because f(x) = \frac{1}{5+x-3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-3}{5}}$

又 $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1, 1).$

$\therefore f(x) = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-3}{5}\right)^n, \frac{x-3}{5} \in (-1, 1).$

故 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} (x-3)^n, x \in (-2, 8).$

且收敛域为 $(-2, 8).$

最后希望同学们在后面复习中围绕上述重点好好复习，把相关例题弄懂，力争考出好成绩。