

# 线性代数考试卷

## 一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

- 行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$  中的代数余子式  $A_{11} + A_{32} =$  \_\_\_\_\_.
- 向量空间  $V = \{x = (x_1, 0, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$  的维数  $\dim V =$  \_\_\_\_\_.
- 设矩阵  $A \simeq B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  (即矩阵  $A$  与  $B$  等价), 则矩阵  $A$  的秩  $R(A) =$  \_\_\_\_\_.
- 矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  的逆矩阵  $A^{-1} =$  \_\_\_\_\_.
- 若  $A$  是秩为 2 的三阶方阵, 非齐次线性方程组  $Ax = b$  有两个不相等的解  $\eta_1, \eta_2$ , 则  $Ax = 0$  的通解可表示为  $x =$  \_\_\_\_\_.

## 二、单选题 (每小题 3 分, 共 15 分)

- 设  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $C = [1 \ 2 \ 3]$ , 则下列矩阵运算中有意义的是 ( )  
A.  $ABC$                       B.  $BCA$                       C.  $BAC$                       D.  $CBA$ .
- 若二阶行列式  $\begin{vmatrix} k-2 & 3 \\ 3 & k-2 \end{vmatrix} \neq 0$ , 则有 ( )  
A.  $k \neq -1$                       B.  $k \neq 5$                       C.  $k \neq -1$  或  $k \neq 5$   
D.  $k \neq -1$  且  $k \neq 5$ .
- 设  $A$ 、 $B$  是同阶方阵, 则下列结论正确的是 ( )  
A.  $|AB| = |A||B|$                       B.  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$                       C.  $|A+B| = |A|+|B|$   
D.  $(A-B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ .
- 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ , 则  $A$  中的 ( )  
A. 所有 2 阶子式都不为零                      B. 所有 2 阶子式都为零  
C. 所有 3 阶子式都不为零                      D. 存在一个 3 阶子式不为零.
- 设 3 阶方阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 则  $AA^* =$  ( )  
A.  $-1$                       B.  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$                       C.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$                       D.  $1$ .

## 三、解答题 (每小题 10 分, 共 60 分)

- 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 123 & 23 & 3 \\ 249 & 49 & 9 \\ 367 & 67 & 7 \end{vmatrix}$ .

2. 已知  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ , 求矩阵  $X$  使得  $AX = B + 2X$ .

3. 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ , 求  $(A + E)^{-1}(A^2 - E)$ .

4. 求矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  的特征值与特征向量.

5. 求向量组  $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)$ ,  $\alpha_2 = (1, 0, 2, 2)$ ,  $\alpha_3 = (0, 3, 2, -2)$ ,  $\alpha_4 = (1, 3, 4, 0)$ ,  $\alpha_5 = (2, 3, 4, -2)$  一个最大线性无关组, 并用该最大无关组表示其余向量.

6. 求方程组  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 = -2 \end{cases}$  的通解(要求用其一个特解和对应的齐次线性方程组的基础解系表示出的通解).

性方程组的基础解系表示出的通解).

#### 四、证明题 (共 10 分)

设  $m \times n$  阶矩阵  $A$ ,  $\alpha$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的非零解,  $\beta$  是非齐次线性方程组  $Ax = b \neq 0$  的解, 证明: 向量组  $\alpha, \beta$  线性无关.

## 线性代数考试卷

### 一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 2 阶方阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ , 则行列式  $|AA^T| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 设 3 维向量  $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\beta = (b_1, b_2, b_3)$ , 且  $a_i b_i \neq 0, (i = 1, 2, 3)$ , 则行列式  $|\alpha^T \beta| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = A - E$ , 则矩阵  $B$  的秩  $R(B) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4. 设  $A$  是  $4 \times 3$  矩阵, 若方程组  $Ax = 0$  只有零解, 则矩阵  $A$  的秩  $R(A) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 设 4 阶方阵  $A$  满足  $|A| = 3$ , 则  $|3A^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

### 二、单选题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 2 阶方阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ , 则  $A^{-1} = (\quad)$ .

A.  $-\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$       B.  $-\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$       C.  $-\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$       D.  $-\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ .

2. 下列能由向量组  $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 0, -1)$  线性表示的向量  $\beta =$  ( ).
- A.  $(2, 1, 0)$       B.  $(-2, 1, -3)$       C.  $(-5, 0, 6)$       D.  $(0, 1, -1)$ .
3. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的秩不为  $m$  的充分必要条件是 ( ). (其中  $m \geq 2$ )
- A.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中至少有一个零向量      B.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中至少有一向量由其余向量线性表示
- C.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  全是非零向量      D.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  全是零向量.
4. 设  $A$  是  $n$  阶正交矩阵, 则行列式  $|A^2| =$  ( ).
- A.  $-1$       B.  $-2$       C.  $2$       D.  $1$ .
5. 设方阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  的非零特征值为 ( ).
- A.  $1$       B.  $2$       C.  $3$       D.  $4$ .

### 三、解答题 (每小题 10 分, 共 60 分)

1. 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 16 & 9 & 4 \\ 1 & 256 & 81 & 16 \end{vmatrix}$ .
2. 已知  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ , 求矩阵  $X$  使得  $AX = A + 2X$ .
3. 设  $n$  阶矩阵  $A$  满足  $A^2 - A - 3E = 0$ , 证明求  $A, A - 2E$  都可逆, 并求  $A^{-1}, (A - 2E)^{-1}$ .
4. 求矩阵  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  的特征值, 并求其对应于最大特征值的特征向量.
5. 求向量组  $\alpha_1 = (-1, 1, 1), \alpha_2 = (-2, 4, 5), \alpha_3 = (1, 3, 5), \alpha_4 = (6, 2, 6)$  秩以及一个最大线性无关组, 并用该最大无关组表示其余向量.
6. 已知方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \end{cases}$ ,
- (1)  $\lambda$  为何值时, 方程组无解、有唯一解、有无穷多组解;
- (2) 在方程组有无穷多组解时, 求出其的通解(要求用其一个特解和导出组的基础解系表示).

### 四、证明题 (共 10 分)

设  $\beta$  是非齐次线性方程组  $Ax = b \neq 0$  的解,  $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}$  是其对应齐次线性方程组

$Ax=0$  的一个基础解系, 证明: 向量组  $\beta, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$  线性无关.

## 线性代数考试卷

### 一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 3 阶方阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵, 则行列式  $|AA^*| =$  \_\_\_\_\_.

2. 已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  则  $AB - BA =$  \_\_\_\_\_.

3. 设  $4 \times 3$  阶矩阵  $A$  的秩  $R(A) = 2$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 则  $R(AB) =$  \_\_\_\_\_.

4. 设 3 阶方阵  $A$  的列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 则  $|A| =$  \_\_\_\_\_.

5. 设 3 阶方阵  $A$  的特征值为  $-1, 2, 3$ , 则  $|2A| =$  \_\_\_\_\_.

### 二、单选题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设  $5 \times 4$  阶矩阵  $A$  的秩  $R(A) = 3$ , 则秩  $R(2A^T) =$  ( ).

A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4.

2. 设 2 阶方阵  $A$  是满秩矩阵, 则下列矩阵中与  $A$  等价的矩阵是 ( ).

A.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$               B.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$               C.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$               D.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

3. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  中  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 则 ( ).

A.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关              B.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关

C.  $\alpha_1$  可由  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性表示              D.  $\alpha_3, \alpha_4$  线性无关.

4. 设  $n$  阶可逆方阵  $A$  与  $B$ , 则下列等式中错误的是 ( ).

A.  $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$       B.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$       C.  $|AB| = |A||B|$

D.  $(AB)^T = B^T A^T$ .

5. 设  $4 \times 3$  阶矩阵  $A$  的秩  $R(A) = 2$ , 且  $x_1, x_2$  齐次线性方程组  $Ax=0$  两个不同的解, 则方程组  $Ax=0$  的通解为 ( ).

A.  $kx_1, k \in R$               B.  $kx_2, k \in R$       C.  $k(x_1 + x_2), k \in R$       D.  $k(x_1 - x_2), k \in R$ .

### 三、解答题 (每小题 10 分, 共 60 分)

1. 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ .

2. 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 且  $B = A^2 + 2A + E$ , 求矩阵  $B$  的特征值.

3. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  无关, 试判别向量组  $\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + 2\alpha_1$  的线性相关性. (要求说明理由)

4. 求向量组  $\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (1, 3, 5), \alpha_4 = (1, 1, 1), \alpha_5 = (1, 2, 3)$  的秩以及其一个最大线性无关组, 并用该最大无关组表示其余向量.

5. 已知  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  又  $AX = B + X$ , 求矩阵  $X$ .

6. 求方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$  的通解(要求用其一个特解和其导出组的基础解系表示).

#### 四、证明题 (共 10 分)

若  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^T A = E$ , 则称  $A$  是正交矩阵.

设  $A$  是  $n$  阶正交矩阵, 证明:  $A^T, A^{-1}$  均是正交矩阵.

## 线性代数考试卷

### 一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & a \end{bmatrix}$ ,  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ , 若方程  $AX = 0$  有非零解, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

2. 设 3 阶方阵  $A, B$  且  $|A| = 2, |B| = -3$ , 则  $|2BA^{-1}| =$  \_\_\_\_\_.

3. 矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  的秩  $R(A) =$  \_\_\_\_\_.

4. 已知  $\beta = (4, 2, 3)$  在基底  $\alpha_1 = (0, 0, 1), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (1, 1, 0)$  下的坐标是 \_\_\_\_\_.

5. 设 3 阶方阵  $A$  的特征值分别为  $-2, 1, 6$ , 则方阵  $A$  的行列式  $|A| =$  \_\_\_\_\_.

### 二、解答题 (每小题 14 分, 共 70 分)

1. 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ .

2. 已知  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ , 且矩阵  $X$  满足  $AX = A + X$ , 求  $X$ .

3. 求向量组  $\alpha_1 = (1, 2, 1)$ ,  $\alpha_2 = (1, 1, 1)$ ,  $\alpha_3 = (2, 3, 0)$ ,  $\alpha_4 = (2, -1, 4)$ ,  $\alpha_5 = (1, 3, -1)$  的秩以及一个最大线性无关组, 并用该最大无关组表示其余向量.

4. 求矩阵  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  的特征值和特征向量.

5. 求方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$  的通解(要求用其一个特解和导出组的基础解系表示).

### 三、证明题 (共 10 分)

设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 证明: 向量组  $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$  也线性无关.

## 线性代数考试卷

### 一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & x \end{vmatrix} = 0$ , 则  $x =$  \_\_\_\_\_.

2. 设  $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 2, 3), \alpha_3 = (1, 3, t)$ , 则当  $t =$  \_\_\_\_\_ 时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关.

3. 设  $A$  为三阶方阵, 且  $|A| = 3$ , 则  $|-2A| =$  \_\_\_\_\_.

4. 若  $A$  是秩为 3 的四阶方阵, 则齐次线性方程组  $AX = 0$  的基础解系所包含向量的  
个数 = \_\_\_\_\_.

5、设  $\alpha = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ a \end{bmatrix}$ , 且  $\alpha$  和  $\beta$  正交, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

## 二、选择题(每题 3 分, 共 15 分)

1、设  $x, y \in R^n$ ,  $[x, y]$  表示向量  $x$  与  $y$  的内积, 则下列不正确的是( )

A.  $[x, y] = [y, x]$     B.  $[\lambda x, y] = \lambda[y, x]$     C.  $[x, y+z] = [x, y] + [x, z]$     D.  $[x, x] > 0$

2、设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则下列向量组线性无关的是( )

A.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2$

B.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2$

C.  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

D.  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

3、 $A, B$  为  $n$  阶方阵, 则下列各式中成立的是( )

A.  $|A^2| = |A|^2$

B.  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

C.  $(A - B)A = A^2 - AB$

D.  $(AB)^T = A^T B^T$

4、设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 如果  $m < n$ , 则( )

A.  $Ax = b$  必有无穷多解

B.  $Ax = b$  必有唯一解

C.  $Ax = 0$  必有非零解

D.  $Ax = 0$  必有唯一解

5、若  $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ , 则  $D$  中第四行元素的余子式之和为( )

A. -1

B. -2

C. -3

D. 0

## 三、综合题(每题 14 分, 共 70 分)

1、计算行列式  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

2、求向量组  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$  的秩和一个最大无关组, 并用最大无

关组表示其余向量.

3、用初等变换求矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$  的逆矩阵.

4、求非齐次线性方程组  $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$  的通解.

5、求矩阵  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  的特征值和特征向量.

## 线性代数考试卷

### 一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若多项式  $f(x) = \begin{vmatrix} 0 & x & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = a_0 + a_1x$ , 则  $a_0 =$  \_\_\_\_\_.

2. 若行列式  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  中元素  $a_{ij}$  的代数余子式为  $A_{ij} (i, j=1,2)$ , 则  $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} =$  \_\_\_\_\_.

3. 方阵  $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  的伴随矩阵  $A^* =$  \_\_\_\_\_.

4. 若矩阵  $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ , 矩阵  $A$  满足  $AP = B$ , 则矩阵  $A =$  \_\_\_\_\_.

5. 若 4 阶方阵  $A$  的特征值为 1, -2, 4, 6, 则  $\left| \frac{1}{2}A \right| =$  \_\_\_\_\_.

### 二、单选题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若  $n$  阶方阵  $A, B$  满足  $|A| = 6, |B| = -2$ , 则  $|A'B^{-1}| =$  ( ).

- A. -12                      B. -3                      C.  $-\frac{1}{3}$                       D. 3.

2. 若  $n$  阶方阵  $A$  与  $B$  是等价矩阵, 则必有 ( ).

- A.  $R(A) = R(B)$               B.  $|A| = |B|$               C.  $A' = B'$   
D.  $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ .

3. 若矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ , 则方程组  $Ax = 0$  的基础解系所含向量的个数为 ( ).

- A. 4                      B. 3                      C. 2                      D. 1.

4. 已知  $W = \{(x, y, z, 0) \mid x + z = 0, x, y, z \in \mathbb{R}\}$  是向量空间, 则  $W$  的维数是 ( ).

- A. 4                      B. 3                      C. 2                      D. 1.

5. 若  $A$  是  $n(n \geq 2)$  阶方阵, 且  $A^2 = E$ , 则必有 ( ).

- A.  $|A| = 1$               B.  $A^{-1} = E$               C.  $R(A) = n$               D.  $A$  的特征值

均为1.

### 三、解答题 (每小题 12 分, 共 60 分)

1. 设  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{bmatrix}$ , 计算矩阵  $A$  的行列式  $|A|$ .

2. 判断  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$  是否可逆, 若可逆, 求  $A^{-1}$ .

3. 求矩阵  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  的特征值, 并求  $A$  对应于最小特征值的特征向量.

4. 求向量组  $\alpha_1 = (1, -2, 0, 3)$ ,  $\alpha_2 = (2, -5, -3, 6)$ ,  $\alpha_3 = (0, 1, 3, 0)$ ,  $\alpha_4 = (2, -1, 4, -7)$   
 $\alpha_5 = (5, -8, 1, 2)$  的秩和其中一个最大无关组, 并用该最大无关组表示其余向量.

5. 求方程组  $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$  的通解(要求用其一个特解和其导出组的基础解系表示).

### 四、证明题 (共 10 分)

设  $A, B, A - B$  均为  $n$  阶正交矩阵, 证明:  $(A - B)^{-1} = A^{-1} - B^{-1}$ .