

1	第一章 行列式
	§ 1 行列式的概念 1
	§ 2 行列式的基本性质与计算 8
	§ 3 克莱姆法则 21
	习 题 一 27
31	第二章 n 维向量
	§ 1 n 维向量的概念 31
	§ 2 向量组的线性相关性 34
	§ 3 向量组的秩 44
	§ 4 向量空间 48
	习 题 二 53
55	第三章 矩 阵
	§ 1 矩阵的概念与运算 55
	§ 2 方 阵 64

§ 3	逆矩阵及其求法	69
§ 4	分块矩阵	75
§ 5	矩阵的秩	81
§ 6	矩阵的初等变换	87
§ 7	初等方阵	93
习 题 三		101

107

第四章

线性方程组

§ 1	消元法	107
§ 2	齐次线性方程组	112
§ 3	非齐次线性方程组	123
习 题 四		131

134

第五章

相似矩阵及二次型

§ 1	向量的内积	134
§ 2	特征值与特征向量	142
§ 3	相似矩阵	148
§ 4	实对称矩阵的相似矩阵	153
§ 5	二次型及其标准形	158
§ 6	正定二次型	163
习 题 五		167

	第六章
170	线性空间与线性变换

	§ 1 线性空间及其子空间 170
	§ 2 维数、基与坐标 174
	§ 3 基变换与坐标变换 177
	§ 4 线性变换 179
	§ 5 线性变换的矩阵 182
	习 题 六 187

	附录一
190	n 阶行列式另一种定义

	附录二
196	怎样用 MATLAB 解线性代数问题

215	习题参考答案

第一章



行列式



行列式是从解线性方程组的问题引进的. 行列式不但是研究线性方程组和矩阵的有力工具, 而且在解决许多理论和实际应用问题中, 也发挥着重要作用. 本章主要介绍行列式的定义、性质及计算, 最后介绍行列式的一个应用, 即用行列式解 n 元线性方程组的克莱姆法则.



§ 1 行列式的概念

在给出 n 阶行列式的定义之前, 让我们先回顾中学代数解线性方程组, 从而引出的二阶和三阶行列式的定义.

为了解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (1)$$

我们可以采用消元法, 用 a_{22} 去乘第一个方程, a_{12} 去乘第二个方程, 然后两个方程相减, 得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 则可得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (2)$$



类似地可以求得

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (3)$$

表达式(2)和(3)提供了线性方程组(1)解的一般公式. 为了便于记忆和讨论, 我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

用它表示数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (4)$$

我们称之为二阶行列式. 其中横写的叫作行, 竖写的叫作列, 一共有二行二列, $a_{ij} (i, j = 1, 2)$ 称为它的元素.

根据上面二阶行列式的定义, (2) 式和(3) 式的分子分别可以写为

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

可见二阶行列式是这样两项的代数和: 一项是位于第一行第一列的元素与划去第一行和第一列后剩下的一个元素的乘积, 取正号; 另一项是位于第一行第二列的元素与划去第一行和第二列后剩下的一个元素的乘积, 取负号. 例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \times 9 - 7 \times 3 = -3.$$

利用二阶行列式的定义, 方程组(1) 的解可写成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (5)$$

我们通过消元法得到了求解线性方程组(1) 的公式(2)、(3), 这个公式用行列式来表示就是(5) 式. 虽然用消元法可以求得二元线性方程组解的公式, 但是随着未知数的增多, 这个公式越来越复杂, 其规律也不易掌握. 而在用行列式表示解的公式(5) 中, 解的表达有一定规律可循:

(1) x_1 与 x_2 的分母都是将原方程组未知数前的系数按原顺序排成的一个行列式.

(2) x_1 的分子行列式是将分母行列式的第一列换成常数项 b_1 与 b_2 而得到, x_2 的分子



行列式是将分母行列式的第二列换成常数项所得.

正因为用行列式来表示二元线性方程组的解有简单明了的优点,我们希望也能用它来将一般的线性方程组的解表示出来. 为此我们来讨论三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (6)$$

从方程组(6)的前两个方程消去 x_3 ,后两个方程也消去 x_3 ,再从所得到的两个方程中消去 x_2 ,就得到

$$\begin{aligned} & (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ & = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3. \end{aligned} \quad (7)$$

注意到上式中 x_1 的系数是由方程组(6)中未知数的9个系数 $a_{ij}(i, j=1, 2, 3)$ 按照一定的规律构成的,借助二阶行列式的定义,该系数可表示为

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

我们把此式记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

称为三阶行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

上式的规律是:把第一行每一元素乘以划去该元素所在的行列之后剩下的二阶行列式,前面再冠以正、负相间的符号,最后求它们的代数和.

同样地,(7)式等号右端正是三阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

若(7)式 x_1 的系数不为零,则可写成



$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \quad (9)$$

类似地可以求得

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \quad (10)$$

我们注意到在 x_1, x_2, x_3 的表达式中, 它们的分母都相同. 分子行列式都是由分母行列式去掉对应于 x_i 的第 i 列, 再换上常数列 b_1, b_2, b_3 组成. 这些特点与二元线性方程组解的表达式是一样的. 如果我们引进 n 阶行列式的概念, 当然希望也能用 n 阶行列式表示 n 元线性方程组的解, 本章第 3 节讨论的就是这个问题.

如果定义一阶行列式 $|a| = a$, 则我们发现(4)式和(8)式的规律是一样的. 我们把此规律进一步推广, 便引进 n 阶行列式的概念.

定义 1 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

它由 n 行 n 列元素 (共 n^2 个元素) 组成, 又记 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式, 即由 D 中划去第 i 行第 j 列后剩下的 $n-1$ 行 $n-1$ 列元素所组成的, 即



$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

称 D 为 n 阶行列式, 它的值由下面的归纳法来定义.

当 $n=1$ 时, (11) 式定义 $D=a_{11}$, 假定对 $n-1$ 阶行列式已经定义, 那么对任意的 i, j , M_{ij} 是一个 $n-1$ 阶行列式, 它的值由归纳假定是已经定义好的, 既然如此, 我们就可以借助于 M_{ij} 按下面的方式来定义 n 阶行列式 D 的值:

$$\begin{aligned} D &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}. \end{aligned} \quad (12)$$

显然, 对于任何自然数 n , (12) 式给出了一个计算 n 阶行列式的方法: 将 n 阶行列式化为 $n-1$ 阶, 再化为 $n-2$ 阶, …… 最后便可求出 D 的值. (12) 式又称为 D 按第一行的展开式.

为了使 (12) 式的形状更好一些, 我们再引进代数余子式的概念.

定义 2 在行列式 D (11) 式中, 第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 的代数余子式定义为

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},$$

其中 M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式.

例如, 对行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 3 = 1, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 4 \times 2 = -7.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = -7.$$

由定义 2, (12) 式可化为

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}. \quad (13)$$

例 1 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 7 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 9 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$



[解]

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 7 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 6 \times \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \times (-3) - 6 \times 7 + 0 = -45.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \times 3 - (-1) \times (-6) + 3 \times (-9) \\
 &= -27.
 \end{aligned}$$

例 2 用定义证明下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注:主对角线(即从左上角到右下角这条对角线)上方所有元素全为零的行列式称为下三角行列式,类似地,可定义上三角行列式.上三角行列式和下三角行列式统称为三角行列式.

[证] 这是一个 n 阶行列式,但它的第一行除 a_{11} 外均为零,因此利用(12)式展开时只有一项不为零,于是

$$D = a_{11}M_{11} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

容易看出 a_{11} 的余子式仍是一个下三角行列式,只是阶数比 D 的阶数小1.因此又可用同样的方法求得

$$M_{11} = a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$



这样一直下去,则可得

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即下三角行列式的值正好等于主对角线上元素的乘积.

由例2,易知对角行列式(即主对角线以外的元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例3 证明

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

[证] 由定义,按第一行反复展开

$$\begin{aligned} D &= a_{1n}(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-2} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (n-1 \text{ 阶}) \\ &= a_{1n}(-1)^{1+n} a_{2,n-1}(-1)^{1+n-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{3,n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{4,n-3} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (n-2 \text{ 阶}) \\ &\cdots \\ &= (-1)^{1+n}(-1)^{1+n-1}\cdots(-1)^{1+2} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} \\ &= (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}. \end{aligned}$$



§2 行列式的基本性质与计算

1. 行列式的基本性质

行列式的基本性质不仅对理解行列式的概念是必要的,而且是计算行列式的基础. 下面我们来研究行列式的基本性质,在此先介绍一个概念.

定义 3 设 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

如果把 D 的行列互换而不改变各行、各列的顺序,得到一个新的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为行列式 D 的转置行列式,记为 D' 或 D^T .

例如,在例 1(1) 中该行列式的转置行列式为

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

由行列式的定义,知

$$D' = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 7 \times \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + 8 \times \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -45.$$

此行列式和原来的行列式恰好相等,即 $D' = D$.

事实上,对一般的 n 阶行列式,我们也有同样的结论.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D = D'$.

由性质 1 及例 2 知上三角行列式也等于主对角线上元素的乘积.



即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

根据性质 1 可知,行列式中行与列具有同等地位,行列式的性质凡是对行成立的,对列也同样成立,反之也成立.

对于例 1(1) 中的行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 7 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 9 \end{vmatrix},$$

将 D 的任意两行(列)交换,例如交换第一行、第三行得到

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 9 \\ 7 & 2 & 7 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix},$$

由行列式的定义,容易算得 $D_1 = 45 = -D$.

一般地,我们也有下面的结论:

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式改变符号.

由于性质 1 和性质 2 的证明比较复杂,我们只不加证明地给出来.

由性质 2 可得下面的推论.

推论 1 若行列式 D 中某一行(列)的所有元素均为零,则

$$D = 0.$$

[证] 当第一行元素全为零时,则由行列式的定义显然有

$$D = 0.$$

若第 i 行($i > 1$) 的元素全为零时,则交换第 i 行和第一行后所得到的行列式应等于零,从而由性质 2 知 $D = 0$. 证毕.

推论 2 若行列式 D 中有两行(列)相同,则 $D = 0$.

只要将相同的两行互换就有 $-D = D$,故 $D = 0$.

性质 3 如果行列式 D 中某行(列)的所有元素是两个数的和,那么 D 可表示成两个新行列式之和,即



$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \text{ (第 } i \text{ 行)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

[证] 当 $i = 1$ 时, 由行列式的定义知

$$\begin{vmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} & \cdots & b_{1n} + c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} (b_{1j} + c_{1j}) M_{1j}$$

$$= \sum_{j=1}^n [(-1)^{1+j} b_{1j} M_{1j} + (-1)^{1+j} c_{1j} M_{1j}]$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} b_{1j} M_{1j} + \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} c_{1j} M_{1j}$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

当 $i > 1$ 时, 把第 i 行与第一行互换, 再按上面方法把行列式拆成两个行列式之和, 然后再把这两个行列式的第 i 行与第一行互换即得该命题成立. 证毕.

性质 4 行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

[证] 当 $i = 1$ 时, 由行列式的定义知



$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} (ka_{1j}) M_{1j} \\
 = k \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} \right) = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

当 $i > 1$ 时,把 i 行与第一行互换,根据上面的结论,可把第一行的公因子提到行列式外,然后再互换第一行和第 i 行,即得该命题成立. 证毕.

由性质 4 及推论 2 易得

推论 3 如果行列式 D 的某两行(列)对应元素成比例,则

$$D = 0.$$

由性质 3、性质 4 及推论 2 可以得到下面的性质.

性质 5 把行列式中某一行(列)的各元素乘以常数 k 后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式保持不变,即

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行,以 c_i 表示第 i 列. 交换 i, j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$, 交换 i, j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$. 第 i 行(列)提出公因子 k 记作 $r_i \div k (c_i \div k)$. 以数 k 乘第 j 行(列)加到第 i 行(列)上去,记作 $r_i + kr_j (c_i + kc_j)$.

一般来说,计算行列式主要利用上述性质和推论把行列式化为上三角(或下三角)行列式来计算. 下面计算几个行列式.

例 4 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$



[解]

$$\begin{aligned}
 D & \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 + 5r_1]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - 8r_2]{r_3 + 4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow[r_4 + \frac{5}{4}r_3]{r_4 - 8r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40.
 \end{aligned}$$

例5 计算

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}.$$

[解] 从第四行开始,后行减前行:

$$\begin{aligned}
 D & \xrightarrow[r_2 - r_1]{r_3 - r_2, r_4 - r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_4 - r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow[r_4 - r_3]{r_4 - r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4.
 \end{aligned}$$

例6 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

〔解法1〕 这个行列式的特点是各行 n 个数之和都是 $a + (n-1)b$, 故把第二列至第 n 列均加到第一列上去, 然后各行均减去第一行:

$$D \xrightarrow{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a + (n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ \cdots \\ r_n - r_1}} \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

〔解法2〕 镶边法.

由行列式的定义知, D 等于下面 $n+1$ 阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & b & \cdots & b \\ b & b & a & b & \cdots & b \\ b & b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} c_2 - c_1 \\ c_3 - c_1 \\ \cdots \\ c_{n+1} - c_1 \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ b & a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{array} \right| \\
 & \begin{array}{c} r_1 + \frac{1}{a-b}r_2 \\ r_1 + \frac{1}{a-b}r_3 \\ \cdots \\ r_1 + \frac{1}{a-b}r_{n+1} \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} 1 + \frac{nb}{a-b} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{array} \right| \quad (a \neq b) \\
 & = \left(1 + \frac{nb}{a-b}\right) (a-b)^n = [a + (n-1)b] (a-b)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

例7 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明: $D = D_1 D_2$.

[证] 由行列式性质5, 对 D_1 做运算 $r_i + \lambda r_j$, 把 D_1 化为下三角形行列式, 设为

$$D_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm} \end{vmatrix} = p_{11} \cdots p_{mm}.$$

同理, 对 D_2 做运算 $c_i + \lambda c_j$, 把 D_2 化为下三角形行列式, 设为



$$D_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} = q_{11} \cdots q_{nn}.$$

所以对 D 的前 m 行做运算 $r_i + \lambda r_j$, 再对后 n 列做运算 $c_i + \lambda c_j$, 把 D 化为下三角形行列式, 得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & q_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} \\ &= p_{11} \cdots p_{mm} q_{11} \cdots q_{nn} \\ &= D_1 D_2. \end{aligned}$$

2. 行列式按任一行(列)展开

根据行列式的定义和性质 1, 行列式等于它的第一行(列)的各元素与它们对应的代数余子式乘积之和. 事实上, 我们可以证明更一般的结论.

定理一 行列式等于它的任一行(列)的各元素与它们对应的代数余子式乘积之和, 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

为证上述定理, 先证下面的引理.

引理 一个 n 阶行列式 D , 如果其中第 i 行(或第 j 行)所有元素除 a_{ij} 外都为零, 则这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积, 即

$$D = a_{ij}A_{ij}.$$

[证] 以行为例进行证明.

(1) 先证 a_{ij} 位于第一行第一列的情形, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$



由行列式的定义,按第一行展开

$$D = a_{11}M_{11} = a_{11}A_{11}.$$

(2) 再证一般情形(第 i 行除 a_{ij} 外,其他元素全为零),此时

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 D 的第 i 行依次和第 $i-1, i-2, \cdots, 1$ 行交换,然后将第 j 列依次和第 $j-1, j-2, \cdots, 1$ 列交换,这样得到一个新的 n 阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

易知此行列式第一行第一列的元素的余子式就是 D 中第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} ,故由(1)的证明知

$$D_1 = a_{ij}M_{ij}.$$

又由行列式的性质 2 知

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{i+j-2} D_1 = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \\ &= a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}. \end{aligned}$$

证毕.

定理一的证明:

将行列式 D 的第 i 行的所有元素按下面的方式拆成 n 个数的和,然后由性质 3 将 D 表示为 n 个行列式之和.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + 0 + \cdots + 0 & 0 + a_{i2} + \cdots + 0 & \cdots & 0 + \cdots + 0 + a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$



$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由引理,即得

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

同理,若按列进行证明,可得

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n). \quad \text{证毕.}$$

这个定理称为行列式按行(列)展开定理. 利用这一定理并结合行列式的性质,可以简化行列式的计算.

由这一定理,我们还得到下列重要推论.

推论 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j);$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j).$$

[证] 不妨设 $i < j$, 把行列式 D 中第 j 行的元素换成第 i 行的元素, 则得行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \quad (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \quad (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由行列式性质 2 的推论 2 知 $D_1 = 0$. 现把 D_1 按第 j 行展开, 有

$$D_1 = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}.$$

所以

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j).$$

同理也可得到

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j).$$

证毕.



综合定理一及推论,我们得到

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D & (i=j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} D & (i=j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

下面我们利用定理一计算行列式,先计算前面的例4:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

我们保留 a_{33} ,把第三行其余元素变为0,然后按第三行展开:

$$D \xrightarrow[c_4 + c_3]{c_1 - 2c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 + r_1]{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_1 - c_2]{c_1 - c_2} \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 40.$$

例8 计算4阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$[\text{解}] \quad D \xrightarrow[r_4 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3 + 2c_2]{c_1 + 2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = -(-1)^{2+2} \times (-1) \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 27.$$



例9 计算

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & a & & 0 & b \\ & & \ddots & & \ddots \\ & 0 & & a & b \\ & & & c & d \\ & & \ddots & & \ddots \\ c & & & 0 & d \\ & c & & & d \end{vmatrix}.$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{2n}$

[解] 按第一行展开,有

$$\begin{aligned} D_{2n} &= a \cdot \begin{vmatrix} & & & b & 0 \\ & \ddots & & 0 & \ddots \\ & & a & b & 0 \\ & & c & d & \\ & \ddots & & 0 & \ddots \\ c & & & d & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & d \end{vmatrix} \\ &\quad + b(-1)^{1+2n} \begin{vmatrix} 0 & a & & & b \\ \vdots & & \ddots & & 0 & \ddots \\ \vdots & & & a & b & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 & \ddots \\ 0 & c & & & & d \\ c & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} \\ &= adD_{2(n-1)} - bc(-1)^{2n-1+1}D_{2(n-1)} \\ &= (ad - bc)D_{2(n-1)}. \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{2(n-1)}$

以此做递推公式,即可得

$$D_{2n} = (ad - bc)D_{2(n-1)} = (ad - bc)^2D_{2(n-2)} = \dots$$



$$\begin{aligned}
 &= (ad - bc)^{n-1} D_2 = (ad - bc)^{n-1} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\
 &= (ad - bc)^n.
 \end{aligned}$$

例 10 证明范德蒙 (Vandermonde) 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

其中记号“ $\prod$ ”表示全体同类因子的乘积.

[证] 用数学归纳法. 因为

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2 \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

所以当 $n=2$ 时命题成立. 现在假设命题对于 $n-1$ 阶范德蒙行列式成立, 要证对 n 阶范德蒙行列式也成立.

为此, 设法把 D_n 降阶: 从第 n 行开始, 后行减去前行的 x_1 倍, 有

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第一列展开, 并把每列的公因子 $(x_i - x_1)$ ($i=2, 3, \cdots, n$) 提出, 就有

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙行列式, 按归纳法假设, 它等于所有 $(x_i - x_j)$ 因子的乘积, 其中 $n \geq i > j \geq 2$. 故

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \prod_{n \geq i > j \geq 2} (x_i - x_j) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}.$$
$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 9 & 4 \\ 1 & -1 & 27 & -8 \end{vmatrix} \\ &= [(-1-1)(3-1)(-2-1)] \\ &\quad \times \{[3-(-1)][-2-(-1)]\} \times (-2-3) \\ &= 12 \times (-4) \times (-5) \\ &= 240. \end{aligned}$$

§ 3 克莱姆法则

在中学代数里,我们研究过应用二阶(或三阶)行列式解二元(或三元)线性方程组的问题.我们已经知道,在一定的条件下,它的解可以用二阶(或三阶)行列式表示出来.那么,对于含有 n 个未知量的 n 个线性方程的方程组,它的解是否也可以用 n 阶行列式来表示呢?下面的定理给出了明确的回答.

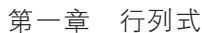
定理二(克莱姆法则) 设线性方程组

[illegible]

的系数行列式



22





列式,计算量相当大.所以在实际问题中,超过四个未知数的线性方程组一般不采用克莱姆法则求解,通常是采用在第四章里将介绍的方法,那里将对更一般的线性方程组,用更有效的方法来求解.尽管如此,克莱姆法则在理论上仍然是相当重要的,因为它清楚地告诉我们,当方程组(14)的系数行列式不等于零时,方程组(14)有唯一解,又从求解公式中可看到方程组(14)的解与它们的系数、常数项的依赖关系,而且以后将会看到,克莱姆法则还可用于一般线性方程组的研究和讨论.所以,对克莱姆法则的条件、结论及其求解公式必须正确掌握和运用.

例 12 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

[解] 因为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0, \end{aligned}$$

所以方程组有唯一解. 又因为

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 18, & D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 36, \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 36, & D_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -18. \end{aligned}$$



所以 $x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 2, \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = -1.$

例 13 求一个二次多项式 $f(x)$, 使得 $f(1) = -1, f(-1) = 9, f(2) = 3.$

[解] 设 $f(x) = ax^2 + bx + c,$

由
$$\begin{cases} f(1) = -1, \\ f(-1) = 9, \\ f(2) = 3. \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} a + b + c = -1, \\ a - b + c = 9, \\ 4a + 2b + c = 3. \end{cases}$$

因为
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

所以方程组有唯一解. 又因为

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 18,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -30,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 9 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

所以 $a = \frac{D_1}{D} = 3, \quad b = \frac{D_2}{D} = -5, \quad c = \frac{D_3}{D} = 1.$

故所求多项式为

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 1.$$

2. 齐次线性方程组有非零解的充要条件

下面讨论方程组(14)的特殊情形, 即 $b_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n).$ 我们称方程组





习题一

1. 写出下列行列式中元素 a_{12}, a_{31}, a_{33} 的余子式及代数余子式.

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

2. 用定义计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

3. 计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(6) \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix};$$

$$(7) \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{vmatrix};$$



$$(8) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}.$$

4. 计算下列 n 阶行列式.

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}; \quad (2) D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix};$$

$$(3) D_n = \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{vmatrix} \quad (n \geq 2);$$

$$(4) D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \end{vmatrix};$$

$$(5) D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & b \\ & \ddots & & \ddots \\ & & a & b \\ & & b & a \\ & \ddots & & \ddots \\ b & & & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} a \\ \ddots \\ a \end{matrix}} \right\} n \text{ 行} \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} a \\ \ddots \\ a \end{matrix}} \right\} n \text{ 行} \end{matrix}.$$

行列式中未写出的元素都是0.

5. 证明:

$$(1) \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ 2x & x+y & 2y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-y)^3; \quad (2) \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix};$$



$$(3) \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(4) \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d);$$

$$(6) D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$= x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n;$$

$$(7) D_n = \begin{vmatrix} 2\cos \theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos \theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos \theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos \theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos \theta \end{vmatrix} \quad (\theta \neq k\pi)$$

$$= \frac{\sin (n+1) \theta}{\sin \theta};$$



$$\begin{aligned}
 (8) D_n &= \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} \quad (a \neq b) \\
 &= \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.
 \end{aligned}$$

提示:(7)、(8) 两题应用数学归纳法证明.

6. 用克莱姆法则解下列各线性方程组.

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 5; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + y + z = a + b + c, \\ ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2, \\ bcx + cay + abz = 3abc. \end{cases}$$

(a, b, c 为互不相等的数)

7. 求一个三次多项式 $f(x)$, 使得 $f(-1) = 0, f(1) = 4, f(2) = 3, f(3) = 16$.

8. 试问 λ 取何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + \lambda y + z = 0, \\ x + y + \lambda^2 z = 0 \end{cases}$$

有非零解.

第二章



n 维向量



在第一章我们介绍了线性方程组的克莱姆法则,可是用克莱姆法则解线性方程组是有条件的,如果条件不满足,解的存在性和唯一性需要做进一步的讨论,为了研究一般线性方程组的解的情况,还需引入 n 维向量的概念. 本章介绍的主要内容有: n 维向量的概念、向量组的线性相关性、向量组的秩、向量空间.



§ 1 n 维向量的概念

关于二维、三维向量的概念,在解析几何中已经建立起来了.

在平面上建立起平面直角坐标系,以坐标原点 $O(0,0)$ 为始点,以点 $A(x,y)$ 为终点的向量可以表示成

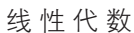
$$\overrightarrow{OA} = \alpha = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

其中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 分别表示沿 Ox, Oy 轴正方向的单位向量, x, y 称为向量 α 的分量或坐标.

显然,在给定的平面直角坐标系中,向量 α 与两个有顺序的数所组成的数组 (x, y) 之间是一一对应关系,于是,向量 α 也可以表示成如下的形式:

$$\alpha = (x, y) \text{ 或 } \alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

同理,当我们在空间建立起空间直角坐标系,以坐标原点 $O(0,0,0)$ 为起点,以点 $P(x, y, z)$ 为终点的向量可以表示成



$$\boldsymbol{\alpha} = (x, y, z) \text{ 或 } \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

类似地,我们可以用由 n 个有序的数所组成的数组来定义一种向量,这种向量就是所谓的 n 维向量.

定义 1 由 n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成的 n 元有序数组 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 称为 n 维向量, 其中数 $a_i (1, 2, \dots, n)$ 称为 n 维向量 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 的第 i 个分量 (或坐标), 分量是实数的向量, 称为实向量, 分量是复数的向量, 称为复向量.

以后我们用小写希腊字母 $\alpha, \beta, \dots$ 表示向量, 用小写拉丁字母 $a, b, \dots$ 表示向量的分量.

通常,定义中 n 维向量 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 用 α 表示时,记作

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

有时,向量也可以写成一行:

$$\alpha' = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

称为列向量.

上面所讲的平面向量 $\alpha = (x, y)$ 就是二维向量, 空间向量 $\alpha = (x, y, z)$ 就是三维向量, n 维向量正是二维、三维向量的推广. 当 $n > 3$ 时, n 维向量就没有直观的几何意义, 但仍沿用几何术语, 称为向量, 这是因为, 一方面它是二维、三维向量的推广, 另一方面它与二维、三维向量确实有许多相同的性质.

对于齐次线性方程组

[illegible]

中的每一个方程都是由它的系数完全决定,而与未知数的记号无关,如果我们把一个线



性方程中各未知数的系数顺序记下来,这样就得到由 n 个有顺序的数组所组成的数组,也就是一个 n 维向量. 如上面的方程组中第 i 个方程就对应于一个 n 维向量为

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

于是,线性方程和向量之间有一一对应关系,向量也可以看成是线性方程的简化形式. 因此,我们可以通过对向量组的研究来研究线性方程组.

定义 2 把分量全是零的向量,称为零向量,记作 $\mathbf{0}$,即

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0).$$

把向量 $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ 称为向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 的负向量,记作 $-\alpha$,即

$$-\alpha = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n).$$

定义 3 设向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 和向量 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 如果它们对应的分量均相等,即

$$a_i = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

则称这两个向量相等,记作 $\alpha = \beta$.

n 维向量之间的基本关系是以向量的加法和数量乘法来表示的.

定义 4 设向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 向量 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 则向量 $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ 称为向量 α 与向量 β 的和,记作 $\alpha + \beta$,即

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

由上述定义,可立即推出如下运算规律:

- (1) 交换律: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
- (2) 结合律: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;
- (3) $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$;
- (4) $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$.

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{0}$ 都是 n 维向量.

利用负向量定义,我们可以定义向量的减法:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n).$$

定义 5 设向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, 则向量 $(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$ 称为数 λ 与向量 α 的数量乘积,简称数乘,记作 $\lambda\alpha$,即

$$\lambda\alpha = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

由定义立即推出如下运算规律:

- (1) $1 \cdot \alpha = \alpha$;
- (2) $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha$;



$$(3) \lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta;$$

$$(4) (\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha.$$

其中 α, β 是 n 维向量, λ, μ 是常数.

由数乘定义及运算规律, 可得: 若 $\lambda\alpha = 0$, 则 $\lambda = 0$ 或 $\alpha = 0$.

向量的和、差及数乘运算统称为线性运算.

注: 两个向量只有维数相同时才有相等或不等的概念, 它们才能有加法或减法运算. 换句话说, 维数不同的两个向量不能进行比较, 也不能进行和或差的运算. 例如, 维数不同的零向量是不相等的.



§2 向量组的线性相关性

在这一节里我们介绍 n 维向量中两个基本概念, 即向量组的线性相关与线性无关, 为此我们引入线性组合的概念.

定义 6 设 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 都是 n 维向量, 如果存在一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 使得

$$\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_m\alpha_m,$$

那么向量 α 称为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合. 或者说, α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示.

例 1 任意一个 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 都可由向量组

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$\varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

.....

$$\varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1)$$

线性表示.

事实上, 因为

$$\begin{aligned} & a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n \\ &= a_1(1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + a_n(0, 0, \dots, 1) \\ &= (a_1, 0, \dots, 0) + (0, a_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, a_n) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= \alpha, \end{aligned}$$

即

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n.$$



故任意一个 n 维向量 α 均可由向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性表示,或者说,任意一个 n 维向量 α 都是向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 的一个线性组合.

向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 称为 n 维单位向量组.

例 2 已知向量 $\alpha_1 = (0, 0, 1), \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (3, 3, 0)$, 试问 α_3 是否可由 α_1, α_2 线性表示?

[解] 显然

$$\alpha_3 = 0 \cdot \alpha_1 + 3\alpha_2,$$

故 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示.

例 3 已知向量 $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 2, 0), \alpha_3 = (0, 0, -\frac{1}{2}), \alpha_4 = (3, 2, 1)$, 试问 α_4 是否可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

[解] 若有 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使

$$\alpha_4 = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3,$$

下面来求 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. 把 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned} (3, 2, 1) &= \lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 2, 0) + \lambda_3(0, 0, -\frac{1}{2}) \\ &= (\lambda_1, 2\lambda_2, -\frac{1}{2}\lambda_3), \end{aligned}$$

于是

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3, \\ 2\lambda_2 = 2, \\ -\frac{1}{2}\lambda_3 = 1. \end{cases}$$

解得

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -2.$$

故 α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 即

$$\alpha_4 = 3\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3.$$

换个说法, 即存在一组不全为零的数 $3, 1, -2, -1$, 使得

$$3\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 - \alpha_4 = \mathbf{0}$$

成立.

例 4 对于向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1, 0), \alpha_4 = (0, 0, 0, 1)$, 易知这四个向量中, 任何一个向量均不能被其余的三个向量线性表示. 换个说法, 即不存在一组不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, 使得



$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3 + \lambda_4 \alpha_4 = 0$$

成立,只有当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ 时,才有

$$0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 + 0 \cdot \alpha_4 = 0$$

成立.

一般来说,在一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中,是否有某个向量能被其余向量线性表示,这是向量组的一种重要特性,我们称之为向量组的线性相关性,为此给出如下定义.

定义 7 设有 n 维向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m,$$

如果存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$,使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0$$

成立,则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关;如果上式仅当 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ 时才成立,则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

注意:

(1) 在向量组的线性相关定义中,只要求存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$,使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0$$

成立,并不要求 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 都不等于零.

(2) 在向量组的线性无关定义中,要特别注意“仅当”这个词.例如,向量 $\alpha_1 = (2, 0), \alpha_2 = (4, 0)$,当 $k_1 = k_2 = 0$ 时,有 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = 0$,但是由此不能判断出向量组 α_1, α_2 线性无关.这是因为并没有证明仅当 $k_1 = k_2 = 0$ 时,等式 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = 0$ 才成立.事实上,当 $k_1 = 2, k_2 = -1$ 时,等式 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = 0$ 也成立,因此向量组 α_1, α_2 线性相关.

(3) 一个向量组不是线性无关,就必然是线性相关.

(4) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关,且 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0$,则

$$k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0.$$

根据定义 7,可以直接得出以下结论.

(1) 只包含一个向量 α 的向量组线性相关,当且仅当 $\alpha = 0$.

事实上,因 α 线性相关,由定义 7 知,存在 $k \neq 0$,使

$$k\alpha = 0,$$

由数乘的性质,有

$$\frac{1}{k}(k\alpha) = 0,$$

从而 $\alpha = 0$.



反之,如果 $\alpha = 0$, 取 $k = 1$, 则 $1 \cdot \alpha = 0$, 故向量组 α 线性相关.

(2) 由一个非零向量 α 构成的向量组必线性无关.

事实上, 对任意不为零的数 k , 由数乘的性质, 有

$$k\alpha \neq 0.$$

所以只有当 $k = 0$ 时, 才有 $k\alpha = 0$, 故一个非零向量构成的向量组是线性无关的.

(3) 在二维与三维的情况下:

两个向量 α_1, α_2 线性相关, 就表示向量 α_1 与 α_2 共线; 两个向量 α_1, α_2 线性无关, 就表示向量 α_1 与 α_2 不共线.

三个三维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 就表示向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 共面; 三个三维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 就表示 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不共面.

为了加深对定义的理解, 下面举几个例子.

例 5 试判断 n 维单位向量组

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \cdots, 0),$$

$$\varepsilon_2 = (0, 1, \cdots, 0),$$

.....

$$\varepsilon_n = (0, 0, \cdots, 1)$$

是否线性无关?

[解] 若

$$k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n = 0,$$

也就是

$$\begin{aligned} k_1(1, 0, \cdots, 0) + k_2(0, 1, \cdots, 0) + \cdots + k_n(0, 0, \cdots, 1) &= (k_1, k_2, \cdots, k_n) \\ &= (0, 0, \cdots, 0), \end{aligned}$$

只有

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0.$$

故 n 维单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是线性无关的.

例 6 判断下列向量组是否线性相关?

$$(1) \alpha_1 = (1, 1, 2), \alpha_2 = (3, 4, 5, 6);$$

$$(2) \alpha_1 = (1, -2, 3), \alpha_2 = (0, 2, -5), \alpha_3 = (-1, 0, 2);$$

$$(3) \alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (3, 2, 1), \alpha_3 = (1, 3, 1).$$

[解] (1) 由于向量 α_1 与 α_2 的维数不同, 因此无法讨论它们的线性相关性.

(2) 设存在三个数 k_1, k_2, k_3 , 使得



$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0},$$

即

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(0, 2, -5) + k_3(-1, 0, 2) = (0, 0, 0).$$

从而有

$$\begin{cases} k_1 - k_3 = 0, \\ -2k_1 + 2k_2 = 0, \\ 3k_1 - 5k_2 + 2k_3 = 0. \end{cases}$$

而系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

由于齐次线性方程组的系数行列式等于零, 因此方程组有非零解, 即存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3 , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}$ 成立, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(3) 设存在三个数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1(1, 2, 3) + k_2(3, 2, 1) + k_3(1, 3, 1) = (0, 0, 0).$$

即

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 + k_3 = 0, \\ 2k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0, \\ 3k_1 + k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

而系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0,$$

由于齐次线性方程组的系数行列式不等于零, 因而方程组只有零解: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

例 7 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明: 向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也线性无关.

[证] 设存在三个数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_1) = \mathbf{0},$$

于是

$$(k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = \mathbf{0}.$$



由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 根据定义必有

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

而系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

由于齐次线性方程组的系数行列式不等于零, 因此方程组只有零解, 即

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0,$$

故向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

注: 一般地, 设 n 个 n 维向量所组成的向量组为

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}),$$

$$\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}),$$

.....

$$\alpha_n = (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}).$$

且

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关的充分必要条件是 $D = 0$;

(2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是 $D \neq 0$.

下面介绍向量组的线性相关性的几种判别方法.

定理一 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ ($m \geq 2$) 线性相关的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m - 1$ 个向量线性表示.

[证] 充分性: 由已知, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m - 1$ 个向量线性表示, 不妨设 α_m 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 因此存在数 $k_1, k_2, \cdots, k_{m-1}$, 使得

$$\alpha_m = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_{m-1} \alpha_{m-1},$$



即

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + (-1)\alpha_m = 0.$$

由于 $k_1, k_2, \cdots, k_{m-1}, -1$ 不全为零, 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关.

必要性: 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关, 即有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$$

不失一般性, 设 $k_m \neq 0$, 于是

$$\alpha_m = -\frac{k_1}{k_m}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_m}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{m-1}}{k_m}\alpha_{m-1},$$

这表明向量 α_m 可被其余 $m-1$ 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$ 线性表示.

证毕.

注: 读者可进一步证明, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ (其中 $\alpha_1 \neq 0$) 线性相关的充分必要条件是至少有一向量 α_i ($1 < i \leq r$) 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表示.

性质 1 任意一个包含零向量的向量组必线性相关.

[证] 设所给向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, 其中有一个零向量, 不妨设 $\alpha_1 = 0$. 现在取 $k_1 = 1, k_2 = k_3 = \cdots = k_m = 0$, 于是 $1, k_2, \cdots, k_m$ 是一组不全为 0 的数, 从而有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \cdots + 0 \cdot \alpha_m = 0,$$

因此向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关.

证毕.

性质 2 两个向量线性相关的充分必要条件是它们的各对应分量成比例.

[证] 设两个向量 α_1, α_2 的各对应分量成比例, 比例系数为 k , 则

$$\alpha_2 = k\alpha_1,$$

即

$$k_1\alpha_1 + (-1)\alpha_2 = 0.$$

由于系数 $k, -1$ 不全为 0, 所以向量 α_1, α_2 线性相关. 设 α_1, α_2 线性相关, 即有不全为零的数 k_1, k_2 , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0,$$

不妨设 $k_1 \neq 0$, 则

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2,$$

这说明向量 α_1 与 α_2 的各对应分量成比例.

证毕.

此性质表明, 由两个成比例的向量构成的向量组是线性相关的; 换个说法, 由两个不成比例的向量构成的向量组必线性无关.

例如, 向量 $\alpha_1 = (1, 1, 2), \alpha_2 = (3, 3, 6)$, 由于 $\alpha_2 = 3\alpha_1$, 所以向量 α_1 与 α_2 线性相关;



又如, 向量 $\alpha_1 = (2, 0)$, $\alpha_2 = (1, 4)$, 因为 α_1 与 α_2 的对应分量不成比例, 故向量 α_1, α_2 线性无关.

性质 3 如果一个向量组的一部分向量线性相关, 则整个向量组就线性相关.

[证] 设向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_m (s \leq m)$, 不失一般性, 假定其中的一部分向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 即有不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}.$$

由上式, 显然有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s + 0 \cdot \alpha_{s+1} + \dots + 0 \cdot \alpha_m = \mathbf{0}.$$

由于 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 不全为零, 因而 $k_1, k_2, \dots, k_s, 0, \dots, 0$ 也不全为零, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_m$ 线性相关. 证毕.

在一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中, 任取若干个向量后组成的向量组, 称为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的部分向量组, 简称部分组.

性质 4 如果一个向量组线性无关, 那么它的任意一个部分向量组也线性无关.

[证] 用反证法.

若存在部分向量组线性相关, 则由性质 3 可知, 整个向量组也线性相关, 这与假设整个向量组线性无关相矛盾, 所以任意一个部分向量组也线性无关. 证毕.

定理二 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 若添加向量 β 后所得向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示.

[证] 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 所以存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m, k$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m + k\beta = \mathbf{0}.$$

下面证明 $k \neq 0$ (用反证法). 假设 $k = 0$, 则 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 不全为零, 且有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0},$$

于是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 与已知条件相矛盾, 因此, $k \neq 0$, 从而

$$\beta = \left(-\frac{k_1}{k}\right)\alpha_1 + \left(-\frac{k_2}{k}\right)\alpha_2 + \dots + \left(-\frac{k_m}{k}\right)\alpha_m,$$

即 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示. 证毕.

例 8 判别下列各向量组的线性相关性.

(1) $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\alpha_2 = (4, -2, 1, 1)$, $\alpha_3 = (0, 0, 0, 0)$;

(2) $\alpha_1 = (1, -1, 0)$, $\alpha_2 = (-2, 5, 1)$, $\alpha_3 = (-4, 10, 2)$.

[解] (1) 由于 $\alpha_3 = (0, 0, 0, 0)$ 是零向量, 根据性质 1 可知, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性





从这 $r+1$ 个等式的前 r 个等式可得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}.$$

由假设知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关, 所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$, 故 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性无关.

证毕.

该定理说明, 线性无关的向量组, 在每一个向量上添一个分量所得到的新向量组仍线性无关. 这个定理可以推广到添加若干个分量的情形.

推论 在 r 维向量组的每个向量上添加 $n-r$ 个分量, 使之成为 n 维向量组. 如果 r 维向量组线性无关, 则 n 维向量组也线性无关.

注:

(1) 定理三及其推论表明: 一个向量组线性无关, 则每个向量添加相同个数的分量后得到的向量组仍线性无关; 一个向量组线性相关, 则每个向量减少相同个数的分量后得到的新向量组也线性相关.

为了便于记忆, 这两个结论可简单地叙述为: 无关组增加分量仍无关, 相关组减少分量仍相关.

(2) 一个向量组线性无关, 则每个向量减少相同个数的分量后得到的向量组不一定线性无关.

例如, 向量组 $\alpha_1 = (2, 4, 1)$, $\alpha_2 = (4, 8, 5)$, 显然向量组 α_1, α_2 线性无关, 当 α_1, α_2 都减少一个分量后, 得到新向量组 $\beta_1 = (2, 4)$, $\beta_2 = (4, 8)$, 而 β_1, β_2 是线性相关的.

(3) 一个向量组线性相关, 则每个向量增加相同个数的分量后得到的新向量组不一定仍线性相关.

例如, 向量组 $\alpha_1 = (1, 2)$, $\alpha_2 = (2, 4)$, 显然 $\alpha_2 = 2\alpha_1$, 向量组 α_1, α_2 线性相关, 当 α_1, α_2 均增加一个分量后, 得到向量组 $\beta_1 = (1, 2, 1)$, $\beta_2 = (2, 4, 0)$, 显然 β_1, β_2 是线性无关的.

例 11 设 a, b, c 两两互不相同, $\alpha_1 = (1, a, a^2, a^3)$, $\alpha_2 = (1, b, b^2, b^3)$, $\alpha_3 = (1, c, c^2, c^3)$, 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

[解] 令 $\beta_1 = (1, a, a^2)$, $\beta_2 = (1, b, b^2)$, $\beta_3 = (1, c, c^2)$, 则

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b),$$

因为 a, b, c 两两互不相同, 所以 $D \neq 0$.

因此向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 由定理三, 得向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.



定理四 任意 $n+1$ 个 n 维向量都是线性相关的.

[证] 设 $n+1$ 个 n 维向量为

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}), \\ \alpha_2 &= (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}), \\ &\cdots \cdots \cdots \\ \alpha_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}), \\ \alpha_{n+1} &= (a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, \cdots, a_{n+1,n}).\end{aligned}$$

在这 $n+1$ 个向量中同时增加一个分量 0, 得到下列 $n+1$ 个 $n+1$ 维向量

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, 0), \\ \beta_2 &= (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, 0), \\ &\cdots \cdots \cdots \\ \beta_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}, 0), \\ \beta_{n+1} &= (a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, \cdots, a_{n+1,n}, 0).\end{aligned}$$

由这 $n+1$ 个向量构成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \cdots \cdots \cdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

故 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n, \beta_{n+1}$ 线性相关, 由定理三注(1) 知, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 也线性相关.

推论 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 都是 n 维向量, 如果 $m > n$, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 必线性相关.

定理四及其推论可简单地叙述为: 向量个数大于维数的向量组是线性相关的.



§ 3 向量组的秩

现在我们来研究向量组之间的一些关系.

定义 8 设有两个 n 维向量组

$$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r;$$

$$B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s.$$

如果向量组 A 中的每个向量都可由向量组 B 中的向量线性表示, 则称向量组 A 可由



向量组 B 线性表示. 如果向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 并且向量组 B 也可由向量组 A 线性表示, 则称向量组 A 与向量组 B 等价.

由定义 8 不难证明, 每一个向量组都可由它自身线性表示. 还容易推出, 如果向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 向量组 B 又可由向量组 C 线性表示, 那么向量组 A 可由向量组 C 线性表示.

根据上述结论, 可以得出等价向量组之间有如下的性质:

- (1) 反身性: 每一个向量组都与它自身等价;
- (2) 对称性: 如果向量组 A 与向量组 B 等价, 则向量组 B 也与向量组 A 等价;
- (3) 传递性: 如果向量组 A 与向量组 B 等价, 向量组 B 与向量组 C 等价, 则向量组 A 与向量组 C 等价.

例 12 验证向量组

$$\alpha_1 = (1, 2, 3), \quad \alpha_2 = (1, 0, 2)$$

与向量组

$$\beta_1 = (3, 4, 8), \quad \beta_2 = (2, 2, 5), \quad \beta_3 = (0, 2, 1)$$

等价.

[解] 事实上, 可以验证它们之间有如下关系:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1 - \beta_2, & \alpha_2 &= 2\beta_2 - \beta_1; \\ \beta_1 &= 2\alpha_1 + \alpha_2, & \beta_2 &= \alpha_1 + \alpha_2, & \beta_3 &= \alpha_1 - \alpha_2. \end{aligned}$$

故两个向量组等价.

例 13 判定以下两个向量组是否等价.

$$A: \alpha_1 = (-1, 1, 0), \quad \alpha_2 = (-1, 2, 1),$$

$$B: \beta_1 = (0, 1, 1), \quad \beta_2 = (1, 0, 1), \quad \beta_3 = (2, 1, 2).$$

[解] 容易求出

$$\alpha_1 = \beta_1 - \beta_2 + 0 \cdot \beta_3, \quad \alpha_2 = 2\beta_1 - \beta_2 + 0 \cdot \beta_3.$$

即向量组 A 可用向量组 B 线性表示.

我们考虑 β_3 能否用 α_1, α_2 线性表示.

设

$$\beta_3 = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2,$$

即

$$(2, 1, 2) = \lambda_1(-1, 1, 0) + \lambda_2(-1, 2, 1).$$

于是

$$\begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 = 2, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1, \\ \lambda_2 = 2. \end{cases}$$



此方程组无解,故 β_3 不能用 α_1, α_2 线性表示,因而向量组 B 不能用向量组 A 线性表示,也即向量组 A 与 B 不等价.

为了进一步讨论向量组的一些重要性质,我们引入最大线性无关向量组和向量组的秩等概念.

定义 9 若一个向量组中的部分向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 满足:

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关;
- (2) 向量组中任一向量都是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合.

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是该向量组的一个最大线性无关向量组或极大线性无关向量组,简称最大无关组或极大无关组.

例 14 设有向量组

$$\alpha_1 = (1, 0, 0), \quad \alpha_2 = (0, 1, 0), \quad \alpha_3 = (1, 1, 0),$$

试求向量组的一个最大线性无关组.

[解] 显然 α_1, α_2 线性无关,而 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$,所以 α_1, α_2 是一个最大线性无关组. 另一方面,容易看出, α_1, α_3 或 α_2, α_3 也都是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的最大无关组.

注意:

- (1) 一般来说,一个向量组的最大线性无关组不是唯一的.
- (2) 由定义 9 可得到一个基本性质:一个向量组与它的最大线性无关组是等价的.
- (3) 由(2)及等价的传递性可知,一个向量组的任意两个最大线性无关组都是等价的.
- (4) 一个线性无关向量组的最大线性无关组就是这个向量组本身.
- (5) 当一个向量组的向量都是零向量时,那么这个向量组的最大无关组是空集.

例 15 全体 n 维向量所构成的向量组记作 $\mathbf{R}^n$. 设 n 维向量组 E 为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$,则 E 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个最大线性无关组.

[证] 在例 5 中,我们已经证明了 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是线性无关的,而由例 1 又得知,对任一 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 均有

$$\alpha = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \dots + a_n \varepsilon_n.$$

即 $\mathbf{R}^n$ 中任一向量都可被 n 维单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性表示. 因此 n 维单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个最大线性无关组.

例 16 设 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}^n$ 且线性无关,则 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个最大线性无关组.

[证] 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关,对任意一个 n 维向量 α ,由定理四知,这 $n+1$ 个 n 维向量 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关,再由定理二可知, α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示,故 n



<



$$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r; \quad B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s.$$

因向量组 A 是线性无关的向量组,且可由向量组 B 线性表示,由定理五,则有 $r \leq s$. 同理,由定理五可得 $s \leq r$,所以 $r = s$,即两个向量组所含的向量个数相同. 证毕.

推论 2 在一个向量组中,它的任意两个最大无关组所含向量的个数相同.

[证] 设 A 与 B 都是向量组 T 的最大线性无关组,因为 A 与 T 等价, B 与 T 等价,因此 A 与 B 等价,由推论 1 可知,向量组 A 与向量组 B 所含向量的个数相同. 证毕.

由此可见,一个向量组的最大无关组虽然可以不是唯一的,但最大无关组所含向量的个数总是确定的,根据这个结论,我们引出向量组秩的概念.

定义 10 向量组的最大无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩.

说明:向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的秩记为 $R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$.

例如,由例 15 可知,单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是向量组 $\mathbf{R}^n$ 的一个最大无关组,所以 $R(\mathbf{R}^n) = n$.

对向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (1, 1, 0)$,由例 14 可知, α_1, α_2 为其一个最大无关组,所以 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$.

显然,当向量组所含向量个数较多时,通过找最大无关组得到向量组的秩不是很理想,我们将在第三章介绍求向量组的秩与最大无关组的一个比较实用的方法.

由定义 10 容易证明,一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关的充要条件是:这个向量组的秩等于它所含向量的个数 r .

推论 3 等价的向量组有相同的秩.

[证] 设两个等价的向量组为

$$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l; \quad B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m.$$

且向量组 A 的秩为 r ,向量组 B 的秩为 s ,并各取它们的一个最大无关组:

$$A_1: \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}; \quad B_1: \beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_s}.$$

由于向量组 A 可由向量组 B 线性表示,显然它的部分向量组 A_1 可由向量组 B 线性表示,而 B 可由 B_1 线性表示,于是 A_1 可由 B_1 线性表示,且向量组 A_1 线性无关,根据定理五得 $r \leq s$. 同理可证 $s \leq r$,因此有 $r = s$. 证毕.



§ 4 向量空间

在本章第 1 节中,我们把 n 元有序数组

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$



称为 n 维向量,并且对它规定了加法及数乘两种运算,这两种运算满足以下八条运算规律(设 α, β, γ 都是 n 维向量, λ, μ 是实数):

- (1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
- (2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
- (3) $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$;
- (4) $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$;
- (5) $1 \cdot \alpha = \alpha$;
- (6) $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha$;
- (7) $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$;
- (8) $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$.

下面介绍向量空间的概念.

定义 11 设 V 为 n 维向量的集合,若 V 非空,且对任意 $\alpha, \beta \in V, \lambda \in \mathbf{R}$, 有 $\alpha + \beta \in V, \lambda\alpha \in V$, 即 V 对于加法及乘数两种运算封闭,则称集合 V 为向量空间.

所谓封闭,是指对于集合 V , 若 $\alpha \in V, \beta \in V$, 则 $\alpha + \beta \in V$; 若 $\alpha \in V, \lambda \in \mathbf{R}$, 则 $\lambda\alpha \in V$.

检验一个 n 维向量集合是否构成向量空间,只需检验对运算的封闭性,因为 n 维向量规定的加法及数乘两种运算显然满足八条线性运算规律.

例 17 n 维向量的全体 $\mathbf{R}^n$ 就是一个向量空间,因为任意两个 n 维向量之和仍然是 n 维向量,数 λ 乘 n 维向量也仍然是 n 维向量,它们都属于 $\mathbf{R}^n$. 特别地,二维向量全体组成的向量空间记作 $\mathbf{R}^2$, 三维向量全体组成的向量空间记作 $\mathbf{R}^3$.

例 18 集合

$$V_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1 + 2x_2 = 0, x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$$

是一个向量空间.

因为若 $\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2) \in V_1$,

则 $a_1 + 2a_2 = 0, b_1 + 2b_2 = 0$,

又 $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \lambda\alpha = (\lambda a_1, \lambda a_2) (\lambda \in \mathbf{R})$,

从而 $(a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2) = (a_1 + 2a_2) + (b_1 + 2b_2) = 0 + 0 = 0$,

$$\lambda a_1 + 2(\lambda a_2) = \lambda(a_1 + 2a_2) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

于是 $\alpha + \beta \in V_1, \lambda\alpha \in V_1$.

故 V_1 是一个向量空间.

例 19 集合



$$V_2 = \{\mathbf{x} = (1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_2, x_3, \cdots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

不是向量空间.

因为若 $\alpha = (1, a_2, \cdots, a_n) \in V_2$, 则 $2\alpha = (2, 2a_2, \cdots, 2a_n) \notin V_2$, 对数乘运算不满足封闭性.

定义 12 设 V_2 是一个向量空间, V_1 是 V_2 的一个非空子集, 若 V_1 对于 V_2 中所定义加法及数乘两种运算也构成一个向量空间, 则称 V_1 为 V_2 的子空间.

在向量空间 V 中, 只由零向量组成的子集是 V 的一个子空间, 称为零空间; 向量空间本身也是 V 的一个子空间; 任何由 n 维向量所组成的向量空间 V , 总有 $V \subset \mathbf{R}^n$, 所以这样的向量空间总是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.

例 20 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为 n 维向量, 集合

$$V = \{\mathbf{x} = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_m \alpha_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbf{R}\}$$

是一个向量空间.

因为 (1) 若 $x_1, x_2 \in V$, 则

$$x_1 = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \cdots + a_m \alpha_m \quad (a_i \in \mathbf{R}),$$

$$x_2 = b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + \cdots + b_m \alpha_m \quad (b_i \in \mathbf{R}).$$

于是

$$x_1 + x_2 = (a_1 + b_1) \alpha_1 + (a_2 + b_2) \alpha_2 + \cdots + (a_m + b_m) \alpha_m \in V.$$

(2) 若 $x_1 \in V, \lambda \in \mathbf{R}$, 则

$$\lambda x_1 = \lambda a_1 \alpha_1 + \lambda a_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda a_m \alpha_m \in V.$$

这个向量空间称为由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 所生成的向量空间.

定义 13 在向量空间 V 中, 如果存在 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 满足:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关;

(2) V 中任一向量总可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示, 则称向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$$

为向量空间 V 的一组基, r 称为向量空间的维数.

维数为 r 的向量空间, 称为 r 维向量空间. 在 r 维向量空间中, 任意 r 个线性无关的向量均可取作向量空间的基. 一个向量空间的维数是唯一的, 但它的基不是唯一的.

零空间没有线性无关的向量, 所以它没有基, 它的维数是零.

若把向量空间看作向量组, 则 V 的基就是向量组的最大无关组, V 的维数就是向量组的秩.

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一组基, 则 V 可表示为



$$V = \{x = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_r \alpha_r \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r \in \mathbf{R}\}.$$

这就较清楚地显示出向量空间 V 的构造.

例 21 在向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中,

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \cdots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \varepsilon_n = (0, 0, \cdots, 1)$$

是 $\mathbf{R}^n$ 的一组基(称为标准基), 则 $\mathbf{R}^n$ 可表示为

$$\mathbf{R}^n = \{x = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}\}.$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中取 $e_1 = (1, 1, \cdots, 1), e_2 = (0, 1, \cdots, 1), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 1)$, 容易证明 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中另一组基, 则 $\mathbf{R}^n$ 可表示为

$$\mathbf{R}^n = \{x = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_n e_n \mid \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n \in \mathbf{R}\}.$$

从上面的例子可以看出, 一个向量空间的基不是唯一的, 因此在不同基下, 向量空间表示形式也不是唯一的.

定义 14 设 V 为 r 维向量空间, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为 V 的一组基, $\alpha \in V$, 若

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_r \alpha_r,$$

则称 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 为向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 下的坐标, 记为

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}.$$

例如, 单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一组基, 则 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标为

$$X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

例 22 设 $V = \{(0, a_2, a_3, \cdots, a_n) \mid a_2, a_3, \cdots, a_n \in \mathbf{R}\}$, (1) 证明: V 为向量空间; (2) 证明: 向量组 $\alpha_1 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \alpha_2 = (0, 1, 1, \cdots, 0), \cdots, \alpha_{n-1} = (0, 1, 1, \cdots, 1)$ 为 V 的一组基; (3) 求向量 $\alpha = (0, a_2, a_3, \cdots, a_n) \in V$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 下的坐标.

[证] (1) 任取 $\alpha, \beta \in V, \lambda \in \mathbf{R}$, 则

$$\alpha = (0, a_2, \cdots, a_n), \quad \beta = (0, b_2, \cdots, b_n).$$

且



$$\alpha + \beta = (0, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n) \in V;$$

$$\lambda \alpha = (0, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n) \in V.$$

故 V 为向量空间.

(2) 设 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_{n-1} \alpha_{n-1} = \mathbf{0}$, 则

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} = 0, \\ k_2 + \cdots + k_{n-1} = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ k_{n-2} + k_{n-1} = 0, \\ k_{n-1} = 0. \end{cases}$$

于是 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-1} = 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性无关.

任取 $\alpha = (0, a_2, a_3, \cdots, a_n) \in V$, 且设 $\alpha = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + \cdots + l_{n-2} \alpha_{n-2} + l_{n-1} \alpha_{n-1}$, 则

$$\begin{cases} l_1 + l_2 + \cdots + l_{n-1} = a_2, \\ l_2 + \cdots + l_{n-1} = a_3, \\ \cdots \cdots \cdots \\ l_{n-2} + l_{n-1} = a_{n-1}, \\ l_{n-1} = a_n, \end{cases}$$

解之, 得

$$\begin{cases} l_1 = a_2 - a_3, \\ l_2 = a_3 - a_4, \\ \cdots \cdots \cdots \\ l_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-1}, \\ l_{n-1} = a_{n-1}, \end{cases}$$

故 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性表示.

因此 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 为向量空间 V 的一组基.

(3) 由(2), 得 $\alpha = (0, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 下的坐标为

$$X = \begin{bmatrix} a_2 - a_3 \\ a_3 - a_4 \\ \vdots \\ a_{n-2} - a_{n-1} \\ a_{n-1} \end{bmatrix}.$$



习题二

1. 已知向量 $\alpha = (5, -1, 3)$, 且 $3\alpha - 4\beta = (3, -7, 17)$, 试求 $2\alpha + 3\beta$.

2. 设

$$\alpha_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \alpha_2 = (1, 1, 0, 0),$$

$$\alpha_3 = (1, 1, 1, 0), \quad \alpha_4 = (1, 1, 1, 1);$$

$$\beta_1 = (2, 1, -1), \quad \beta_2 = (2, 1, -1, 0),$$

$$\beta_3 = (2, 1, -1, 0, 0), \quad \beta_4 = (2, 1, -1, 3).$$

试问上述 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 都能表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合吗? 若能则写出表示式.

3. 试证任一向量 $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ 都可以由向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\alpha_2 = (2, 1, 0, 0)$, $\alpha_3 = (3, 2, 1, 0)$, $\alpha_4 = (4, 3, 2, 1)$ 线性表示, 并且表示方法只有一种, 写出这种表示式.

4. 证明: n 维零向量可由任意的 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.

5. 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中的任一向量 $\alpha_j (1 \leq j \leq m)$ 都可由这个向量组线性表示.

6. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3$. 试用线性相关定义判别 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是否线性相关?

7. 证明: 在 n 维向量空间中, 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 则任一向量 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.

8. 已知 $\alpha_1 = (1, 2, 3)$, $\alpha_2 = (3, -1, 2)$, $\alpha_3 = (2, 3, c)$. 试问

(1) 当 c 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(2) 当 c 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关? 并把 α_3 表示为 α_1, α_2 的线性组合.

9. 判别下列向量组的线性相关性.

(1) $\alpha_1 = (2, 5), \quad \alpha_2 = (1, 3, -1, 7);$

(2) $\alpha_1 = (1, 1, 1), \quad \alpha_2 = (1, 2, 3); \quad \alpha_3 = (1, 6, 3);$

(3) $\alpha_1 = (1, 2, 3), \quad \alpha_2 = (1, -4, 1), \quad \alpha_3 = (1, 14, 7);$

(4) $\alpha_1 = (1, 1, -3, 4), \quad \alpha_2 = (-1, 3, 1, 2),$

$\alpha_3 = (0, 2, -1, 3), \quad \alpha_4 = (-2, 6, 2, 4);$

(5) $\alpha_1 = (1, 0, 1, 0, 0), \quad \alpha_2 = (1, 1, 0, 0, 0), \quad \alpha_3 = (0, 1, 1, 0, 0),$



$$\alpha_4 = (0, 0, 1, 1, 0), \quad \alpha_5 = (0, 1, 0, 1, 1).$$

10. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则每个向量都可以由其余向量线性表示, 这种说法对吗?

11. 试证: 若 n 维单位向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 可以由 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

12. 假设 α 可以用 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示:

$$\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m,$$

则这种表示法唯一吗?

13. 求下列向量组的一个最大线性无关组及向量组的秩.

$$\alpha_1 = (2, 1, 3, -1), \quad \alpha_2 = (3, -1, 2, 0),$$

$$\alpha_3 = (4, 2, 6, -2), \quad \alpha_4 = (4, -3, 1, 1).$$

14. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 问:

(1) α_1 能否由 α_2, α_3 线性表示?

(2) α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

15. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 请用两种方法证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也线性无关.

16. 集合

$$V = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R} \text{ 满足 } x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$$

是否为一个向量空间?

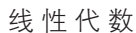
17. 证明: 向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 0), \alpha_2 = (2, 1, 3), \alpha_3 = (3, 1, 2)$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一组基, 并求向量 $\alpha = (5, 0, 7)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标.

本章首先引入矩阵的概念,介绍矩阵的运算及其性质,进而讨论逆矩阵、矩阵的秩、矩阵的初等变换,并且给出一个通过矩阵的初等变换求逆矩阵的实用方法.

在许多问题中,我们会遇到一些变量要用另外一些变量线性地表示. 设 $y_1, y_2, \dots, y_m$ 能用变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 线性地表示, 即

(1)

线性变换(1)中的系数可以排成如下 m 行 n 列的一张矩形表





的矩阵除特别说明外,都指实矩阵.(5)式也可简记为

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{ 或 } A = (a_{ij}).$$

当 $m = n$ 时, A 称为 n 阶方阵.

只有一行的矩阵

$$A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

称为行矩阵.

只有一列的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

称为列矩阵.

元素都是零的矩阵称为零矩阵,记作 O .

习惯上,我们也把行矩阵叫作行向量,列矩阵叫作列向量.

注意:矩阵与行列式是两个完全不同的概念. n 阶行列式是一个数, $m \times n$ 矩阵 A 不是一个数,而是由 $m \times n$ 个元素按一定顺序排成的矩形表.

定义 2 设矩阵 $A = (a_{ij})$ 与 $B = (b_{ij})$ 都是 $m \times n$ 矩阵,并且它们对应的元素相等,即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n),$$

则称矩阵 A 与矩阵 B 相等,记作 $A = B$.

2. 矩阵的运算

(1) 矩阵的加法.

定义 3 设有两个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, 那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A + B$, 规定为

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

应该注意,只有在两个矩阵 A 与 B 的行数相同且列数也相同时,才能进行加法运算.

矩阵



$$\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的负矩阵, 记作 $-A$.

利用负矩阵定义两个矩阵的减法为

$$A - B = A + (-B).$$

容易验证矩阵加法满足以下运算规律(设 A, B, C 都是 $m \times n$ 矩阵):

- (i) $A + B = B + A$;
- (ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- (iii) $A + O = A$;
- (iv) $A + (-A) = O$.

(2) 数与矩阵的乘法.

定义 4 数 λ 与矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$, 规定为

$$\begin{aligned} \lambda A = A\lambda &= \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

注意: 数与矩阵的乘法跟数与行列式的乘法是不同的.

容易验证数乘矩阵满足以下运算规律(设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵, λ, μ 为常数):

- (i) $1 \cdot A = A$;
- (ii) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
- (iii) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
- (iv) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

(3) 矩阵与矩阵相乘.

设有两个线性变换



$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3. \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2, \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2, \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2. \end{cases} \quad (9)$$

它们对应的矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}.$$

将变换(9)式代入(8)式,就得到从 t_1, t_2 到 y_1, y_2 的线性变换:

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2, \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2. \end{cases} \quad (10)$$

其对应矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}.$$

线性变换(10) 可以看成先做线性变换(9) 再做变换(8) 的结果. 我们把线性变换(10) 叫作线性变换(8) 与(9) 的乘积,相应地把(10) 所对应的矩阵 C 定义为(8) 与(9) 所对应的矩阵 A 与 B 的乘积,即

$$\begin{aligned} C = AB &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

一般地,我们有

定义 5 设 $A = (a_{ij})$ 是一个 $m \times s$ 矩阵, $B = (b_{ij})$ 是一个 $s \times n$ 矩阵,则矩阵 A 与 B 的乘积是一个 $m \times n$ 矩阵 $C = (c_{ij})$,其中

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} \\ &(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n), \end{aligned}$$

并把乘积记为 $C = AB$.



按此定义,一个 $1 \times s$ 行矩阵与一个 $s \times 1$ 列矩阵的乘积是一个一阶方阵,也就是一个数:

$$(a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{is}) \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} = c_{ij}.$$

由此表明乘积矩阵 $AB = C$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 就是 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的乘积.

必须注意:只有当第一个矩阵(左矩阵)的列数等于第二个矩阵(右矩阵)的行数时,两个矩阵才能相乘,否则没有意义.

例 1 设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix},$$

试求 AB .

[解] 按矩阵乘法定义,有

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \times 1 + (-1) \times 2 + 0 \times (-5) & 2 \times (-3) + (-1) \times 1 + 0 \times 0 \\ 3 \times 1 + 1 \times 2 + (-2) \times (-5) & 3 \times (-3) + 1 \times 1 + (-2) \times 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 15 & -8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

例 2 设

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix},$$

试求 AB 与 BA .

[解] 按矩阵乘法定义,有

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}, \\ BA &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$





$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

则(12)式的线性变换可写为 $Y = AX$.

(4) 矩阵的转置.

定义 6 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵, 称为 A 的转置矩阵, 记作 A' 或 A^T . 例如矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

的转置矩阵为

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

矩阵的转置也是一种运算, 满足下述运算规律(假设运算都是可行的):

- (i) $(A')' = A$;
- (ii) $(A + B)' = A' + B'$;
- (iii) $(\lambda A)' = \lambda A'$;
- (iv) $(AB)' = B'A'$.

前三式请读者自己验证, 下证(iv)式.

[证] 设

$$A = (a_{ij})_{m \times s}, \quad B = (b_{ij})_{s \times n},$$

$$\text{记 } AB = C = (c_{ij})_{m \times n}, \quad B'A' = D = (d_{ij})_{n \times m}.$$

于是按照矩阵乘法, 有

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^s a_{jk} b_{ki}.$$

而 B' 的第 i 行为 $(b_{1i}, \cdots, b_{si})$, A' 的第 j 列为 $(a_{j1}, \cdots, a_{js})'$, 因此

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^s b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^s a_{jk} b_{ki},$$



所以

$$d_{ij} = c_{ji} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m),$$

即 $D = C'$, 亦即

$$B'A' = (AB)'.$$

证毕.

例 3 设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

验证

$$(AB)' = B'A'.$$

[解]

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 14 & -3 \\ 17 & 13 & 10 \end{bmatrix},$$

$$(AB)' = \begin{bmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{bmatrix},$$

$$B'A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{bmatrix},$$

所以有

$$(AB)' = B'A'.$$

设 A 为 n 阶方阵, 如果满足 $A' = A$, 即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

则称 A 为对称矩阵. 对称矩阵的特点是: 它的元素以主对角线为对称轴对应相等. 例如:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$



由于 $A' = A$, 所以 A 是对称矩阵.

(5) 共轭矩阵.

如 $A = (a_{ij})$ 为复矩阵时, 用 $\bar{a}_{ij}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数, 记

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij}),$$

则称 $\bar{A}$ 为 A 的共轭矩阵.

共轭矩阵满足下述运算规律(设 A, B 为复矩阵, λ 为复数, 且运算都是可行的):

(i) $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B};$

(ii) $\overline{\lambda A} = \bar{\lambda} \bar{A};$

(iii) $\overline{AB} = \bar{A} \bar{B}.$



§2 方 阵

1. 方阵 A 的 n 次幂

设 A 是方阵, 因为矩阵的乘法满足结合律, 所以 $AA \cdots A$ 表示唯一的一个矩阵, 故有

定义 7 若 A 是方阵, 则称

$$A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{n \text{ 个}} \quad (n \text{ 为正整数})$$

为方阵 A 的 n 次幂.

注意: 只有方阵的幂才有意义.

由于矩阵乘法适合结合律, 所以方阵的幂满足以下运算规律:

(i) $A^k A^l = A^{k+l};$

(ii) $(A^k)^l = A^{kl}.$

其中 k, l 为任意正整数.

又由于乘法不满足交换律, 所以一般情况下

$$(AB)^k \neq A^k B^k \quad (k \geq 2),$$

其中 A, B 均为 n 阶方阵.

常见的乘法公式一般也不成立, 如

$$\begin{aligned} (A + B)^2 &= A^2 + BA + AB + B^2 \\ &\neq A^2 + 2AB + B^2; \end{aligned}$$

$$(A - B)(A + B) \neq A^2 - B^2.$$

以上各式仅当 A, B 可交换时才有等式成立.



例 4 证明

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}.$$

[证] 用数学归纳法.

当 $n = 1$ 时, 等号显然成立.

设 $n = k$ 时成立, 即

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix},$$

现在要证 $n = k + 1$ 时结论成立. 此时有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta & -\cos k\theta \sin \theta - \sin k\theta \cos \theta \\ \sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta & -\sin k\theta \sin \theta + \cos k\theta \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos (k+1)\theta & -\sin (k+1)\theta \\ \sin (k+1)\theta & \cos (k+1)\theta \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

于是等式得证.

2. 几种重要的方阵

(1) 单位矩阵.

主对角线上的元素全是 1, 而其余元素全为 0 的 n 阶方阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

称为 n 阶单位矩阵, 记为 E_n 或 I_n , 简记为 E 或 I . 它对任何 n 阶方阵 A 满足

$$EA = AE = A.$$

可见, n 阶单位方阵 E 在 n 阶方阵乘法运算中的作用类似于数 1 在数的乘法运算中的作用.

有了方阵幂以及单位矩阵, 还可定义方阵多项式的概念.

设

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$$



是 x 的多项式, A 是 n 阵方阵, 则

$$a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m$$

有确定意义, 记为 $f(A)$, 即

$$f(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m$$

称为方阵 A 的多项式.

例如, 对于

$$f(x) = 1 - x + x^2$$

及

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} f(A) &= E - A + A^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -12 & 10 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 数量矩阵.

具有如下形式的 n 阵方阵

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

称为数量矩阵, 其中 λ 为常数, 记为 λE 或 λI . 它对于任意 n 阵方阵 $A = (a_{ij})$, 有

$$(\lambda E)A = A(\lambda E) = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix} = \lambda A,$$

可见, 它相当于数 λ 与 A 相乘的结果.

(3) 对角方阵.

主对角线以外的元素全为零的方阵称为对角方阵, 简记为



$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

对角方阵具有下列性质:

- (i) 对角方阵的转置方阵就是自身;
- (ii) 两个同阶对角方阵的和仍是对角方阵;
- (iii) 对角方阵与数的乘积仍是对角方阵;
- (iv) 两个同阶对角方阵相乘可以交换,其积也是对角方阵.

设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

则

$$AB = BA = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}.$$

(4) 三角方阵.

形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的 n 阶方阵,分别称为上三角方阵或下三角方阵.

由矩阵运算规则可知,三角方阵有如下性质:

- (i) 数 λ 与三角方阵之积仍是三角方阵;
- (ii) 两个同阶上(下)三角方阵之和、差仍是上(下)三角方阵;
- (iii) 两个同阶上(下)三角方阵之积仍是上(下)三角方阵.



3. 方阵的行列式和非奇异方阵

方阵与行列式是两个不同的概念,但它们之间有一定的联系.

定义 8 由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式(各元素按原来的位置),称为方阵 A 的行列式,记为 $|A|$ 或 $\det A$.

设 A, B 为 n 阶方阵, λ 为实数,由 A 所确定的 $|A|$ 的这个运算满足下列运算规律:

$$(i) |A'| = |A|;$$

$$(ii) |\lambda A| = \lambda^n |A|;$$

$$(iii) |AB| = |A| |B|.$$

(i)、(ii) 成立是明显的, (iii) 的证明较繁,这里从略.

由 (iii) 可知,对于 n 阶方阵 A, B ,一般说来 $AB \neq BA$,但总有

$$|AB| = |BA|.$$

例 5 设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \text{求 } |-2A| \text{ 及 } |AB|.$$

[解法 1]

$$\text{因为 } -2A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -6 \end{bmatrix},$$

$$\text{所以 } |-2A| = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 12.$$

$$\text{因为 } AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 9 \end{bmatrix},$$

所以

$$|AB| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 3.$$

[解法 2]

$$|-2A| = (-2)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 = 12.$$

$$|AB| = |A| |B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 1 = 3.$$

定义 9 设 A 为 n 阶方阵,若 $|A| \neq 0$,则称 A 为非奇异方阵(或称 A 为非退化方阵);若 $|A| = 0$,则称 A 为奇异方阵(或称 A 为退化方阵).



$$X = B(AX) = (BA)X,$$

知有 $BA = E$. 于是有

$$AB = BA = E. \quad (15)$$

由此我们引入逆矩阵的定义.

定义 10 对于 n 阶方阵 A , 如果有一个 n 阶方阵 B , 使得

$$AB = BA = E,$$

则称 A 为可逆方阵, 或称 A 是可逆的, 并把方阵 B 称为 A 的逆矩阵.

如果方阵 A 是可逆的, 则 A 的逆矩阵是唯一的. 这是因为: 若 B, C 都是 A 的逆矩阵, 则有

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C,$$

所以 A 的逆矩阵是唯一的.

A 的逆矩阵记作 A^{-1} , 即若 $AB = BA = E$, 则 $B = A^{-1}$.

下面研究一下一个方阵是可逆矩阵的充要条件, 同时给出求逆矩阵的一种方法.

定理一 若方阵 A 可逆, 则 $|A| \neq 0$.

[证] 因为 A 可逆, 所以有矩阵 A^{-1} 满足 $AA^{-1} = E$, 故 $|A||A^{-1}| = 1$, 所以 $|A| \neq 0$.

证毕.

反之, 若 $|A| \neq 0$, A 是否一定可逆呢? 回答是肯定的. 为此我们先引入一个概念.

设 n 阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

A_{ij} 表示 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, 则称矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

为方阵 A 的伴随矩阵, 其中第 i 列各元素是 $|A|$ 中第 i 行各元素的代数余子式.

定理二 若 $|A| \neq 0$, 则方阵 A 可逆, 且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$



[证] 由行列式按一行(列)展开,得

$$AA^* = A^*A = |A|E,$$

由于 $|A| \neq 0$, 故有

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = E.$$

所以,按逆矩阵的定义有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* \quad \text{证毕.}$$

由定理二,可得下面推论:

推论 若 $AB = E$ 或 $BA = E$, 则 $B = A^{-1}$.

[证] 因为 $|A||B| = |AB| = |E| = 1$. 故 $|A| \neq 0$, 因而 A^{-1} 存在, 且

$$B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E = A^{-1}. \quad \text{证毕.}$$

综合定理一与定理二可知: 方阵 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$, 同时也给出了通过伴随矩阵求逆矩阵的一种方法.

例 6 判断方阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

是否可逆; 若可逆, 求 A^{-1} .

[解] 因为 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$,

所以 A 是可逆的. 容易求得

$$\begin{aligned} A_{11} &= 2, & A_{21} &= 6, & A_{31} &= -4, \\ A_{12} &= -3, & A_{22} &= -6, & A_{32} &= 5, \\ A_{13} &= 2, & A_{23} &= 2, & A_{33} &= -2. \end{aligned}$$

故

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

从而

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$



例7 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

求矩阵 X 使满足

$$AXB = C.$$

[解] 若 A^{-1}, B^{-1} 存在, 则由 A^{-1} 左乘上式, B^{-1} 右乘上式, 有

$$A^{-1}AXB B^{-1} = A^{-1}CB^{-1},$$

故

$$X = A^{-1}CB^{-1}. \quad (16)$$

由上例知 $|A| \neq 0$, 而 $|B| = 1 \neq 0$, 故 A, B 都可逆, 且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned} X = A^{-1}CB^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

下面再举一个利用逆矩阵求解线性方程组的例子.

例8 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

[解] 把方程组写成

$$AX = B, \quad (17)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



由于 $|A| = 3 \neq 0$, 故 A 可逆, 且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

由等式(17) 两端左乘 A^{-1} , 得 $X = A^{-1}B$.

即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

因此

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 3.$$

例 9 设 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 $P = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 试求 A^{11} .

[解] 因为

$$P^{-1}AP = \Lambda,$$

所以

$$A = P\Lambda P^{-1}, \quad A^{11} = P\Lambda^{11}P^{-1}.$$

容易求得

$$A^{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{11} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

故得

$$\begin{aligned} A^{11} &= \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2^{13} \\ -1 & 2^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 + 2^{13} & 4 + 2^{13} \\ -1 - 2^{11} & -4 - 2^{11} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$= \begin{bmatrix} 2731 & 2732 \\ -683 & -684 \end{bmatrix}.$$

例 10 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 2A + 2E = O$, 证明: $A + E$ 可逆, 并求 $(A + E)^{-1}$.

[解] 由 $A^2 - 2A + 2E = O$, 得

$$(A + E)(A - 3E) = -5E,$$

即

$$(A + E)\left[-\frac{1}{5}(A - 3E)\right] = E,$$

故

$$A + E \text{ 可逆.}$$

且

$$(A + E)^{-1} = -\frac{1}{5}(A - 3E).$$

2. 逆矩阵的性质

(1) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

[证] 因为 A^{-1} 存在, 由 $|A^{-1}||A| = |A^{-1}A| = |E| = 1$, 有

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}. \quad \text{证毕.}$$

(2) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 亦可逆, 且

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

[证] 因为 $|A^{-1}| = |A|^{-1} \neq 0$, 知 A^{-1} 可逆, 即 $(A^{-1})^{-1}$ 存在.

而 $A^{-1}A = E$, 由推论得

$$(A^{-1})^{-1} = A. \quad \text{证毕.}$$

(3) 若 A 可逆, 数 $\lambda \neq 0$, 则 λA 可逆, 且

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

[证] 因为 $|\lambda A| = \lambda^n |A| \neq 0$, 知 $(\lambda A)^{-1}$ 存在. 而

$$(\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right) = \left(\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}\right)(AA^{-1}) = 1 \cdot E = E,$$

由推论得

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}. \quad \text{证毕.}$$

(4) 若 A, B 为同阶方阵, 且均可逆, 则 AB 亦可逆, 且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

[证] 因为 $|AB| = |A||B| \neq 0$, 知 $(AB)^{-1}$ 存在. 而

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$



由推论得

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

证毕.

(5) 若 A 可逆, 则 A' 亦可逆, 且

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'.$$

[证] 因为 $|A'| = |A| \neq 0$, 知 $(A')^{-1}$ 存在. 而

$$A'(A^{-1})' = (A^{-1}A)' = E' = E,$$

由推论得

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'.$$

证毕.

例 11 设 A 为三阶方阵, 且 $|A| = \frac{1}{8}$, 求 $\left| \left(\frac{1}{3}A \right)^{-1} - 8A^* \right|$.

[解] 因为 $\left(\frac{1}{3}A \right)^{-1} - 8A^* = 3A^{-1} - 8|A|A^{-1}$

$$= 3A^{-1} - A^{-1} = 2A^{-1},$$

所以 $\left| \left(\frac{1}{3}A \right)^{-1} - 8A^* \right| = |2A^{-1}| = 2^3 |A|^{-1} = 8 \times 8 = 64.$

当 $|A| \neq 0$ 时, 还可定义

$$A^0 = E, \quad A^{-k} = (A^{-1})^k.$$

其中 k 为正整数.

因此, 当 $|A| \neq 0, \lambda, \mu$ 为整数时, 有

$$A^\lambda A^\mu = A^{\lambda+\mu}, \quad (A^\lambda)^\mu = A^{\lambda\mu}.$$



§4 分块矩阵

在处理阶数较高的矩阵运算时, 常采用分块法, 即用若干条纵线和横线把大矩阵分成许多块小矩阵. 此时把大矩阵看成由这些小块矩阵所构成的矩阵, 每一个小矩阵称为它的子块, 以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵. 在运算中, 可以把小矩阵当作数一样来处理, 从而使运算简化为子块之间的运算, 而子块的阶数一般来说都比大矩阵的阶数要低.

例如, 把 A 分成若干子块

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix},$$



其中

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = (a_{31}), \quad A_{22} = (a_{32} \quad a_{33}), \quad A_{23} = (a_{34}).$$

当然,还有其他分块法. 比如:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

其中

$$B_{11} = (a_{11} \quad a_{12}), \quad B_{12} = (a_{13} \quad a_{14}),$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

在分块矩阵的运算中,只需把每一个子块看作一个元素,其运算规则与普通矩阵的运算规则相类似,现说明如下:

(1) 设矩阵 A 与 B 有相同的行数与列数,采用相同的分块法,得

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{r1} & \cdots & B_{rs} \end{bmatrix}.$$

其中子块 A_{ij} 与 B_{ij} ($i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s$) 的行数相同,列数也相同,则有

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1s} + B_{1s} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2s} + B_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} + B_{r1} & A_{r2} + B_{r2} & \cdots & A_{rs} + B_{rs} \end{bmatrix}.$$

(2) 设

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}, \lambda \text{ 为数, 则}$$

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda A_{r1} & \lambda A_{r2} & \cdots & \lambda A_{rs} \end{bmatrix}.$$



(3) 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times p}$, 把 A, B 分成若干小矩阵:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix} & \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_t \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix} & \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{matrix} \end{matrix}.$$

其中每个元素 A_{ij} 是 $m_i \times n_j$ 小矩阵, 元素 B_{ij} 是 $n_i \times p_j$ 小矩阵. 明显地,

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = m, n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n, p_1 + p_2 + \cdots + p_t = p,$$

于是有

$$AB = \begin{matrix} & \begin{matrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_t \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{bmatrix} & \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix} \end{matrix},$$

其中 $C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{is}B_{sj} (i = 1, 2, \cdots, r; j = 1, 2, \cdots, t)$.

这个结果可由矩阵乘法的定义直接验证得到.

应该注意, 在分块矩阵的乘积中, 左矩阵列的分法必须与右矩阵行的分法一样.

例 12 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

求 AB .

[解] 把 A, B 分块成

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ E & A_{22} \end{bmatrix},$$



$$B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} B_{11} & O \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

则

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ E & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & O \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & O \\ B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

而

$$\begin{aligned} A_{11}B_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_{11} + A_{22}B_{21} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ A_{22}B_{22} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

于是

$$AB = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right].$$

这个结果与不分块而直接相乘的结果是一致的.

(4) 设

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}, \text{ 则 } A' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{21} & \cdots & A'_{r1} \\ A'_{12} & A'_{22} & \cdots & A'_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A'_{1s} & A'_{2s} & \cdots & A'_{rs} \end{bmatrix}.$$

$$\text{例如, } A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & E \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$



则有

$$A' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{21} \\ E' & A'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

最后,我们介绍形式上类似于对角矩阵的准对角矩阵.

设 A 为 n 阶方阵,经分块后,可表示为

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_s \end{bmatrix},$$

其中 A_i 为 n_i 阶方阵($i = 1, 2, \cdots, s$),则 A 称为准对角矩阵.

例如:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & O & O \\ O & A_2 & O \\ O & O & A_3 \end{bmatrix},$$

这是一个准对角矩阵,其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = (5), \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

其余子块都为零矩阵.

根据定义,准对角矩阵的特殊情形为对角矩阵.

对于两个有相同分块的准对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_s \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & O & \cdots & O \\ O & B_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & B_s \end{bmatrix},$$

如果 A_i 与 B_i 是同阶方阵($i = 1, 2, \cdots, s$),则



$$AB = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 B_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_s B_s \end{bmatrix},$$

$$A + B = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 + B_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_s + B_s \end{bmatrix}.$$

它们还是准对角矩阵.

准对角矩阵的行列式具有如下性质:

$$|A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_s|.$$

由此可知,若 $|A_i| \neq 0 (i=1,2,\cdots,s)$, 则 $|A| \neq 0$, 从而 A 可逆, 且有

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & O & \cdots & O \\ O & A_2^{-1} & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_s^{-1} \end{bmatrix}.$$

例 13 设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{求 } A^{-1}.$$

[解] 因为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = (2), \quad A_1^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right),$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

所以



$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$



§ 5 矩阵的秩

在第二章我们定义了向量组的秩. 如果我们把矩阵的每一行看成一个向量, 那么矩阵就可以认为是由这些行向量组成的. 同样, 如果把每一列看成一个向量, 那么矩阵也可以认为是由列向量组成的.

例如, 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

A 的每一行看成一个 n 维向量 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ ($i = 1, 2, \cdots, m$), 称为 A 的第 i 个行向量, 此时矩阵 A 从形式上可表示为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}.$$

同样, A 的每一列也可以看成一个 m 维向量

$$\beta_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

称为 A 的第 j 个列向量, 此时矩阵 A 从形式上可表示为



$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n).$$

定义 11 设 $m \times n$ 矩阵 A 的 n 个列向量所构成的向量组的秩为 r , 则称 r 为矩阵 A 的秩, 记为 $R(A) = r$ 或 $r(A) = r$.

为了建立矩阵的秩与行列式的关系, 引入

定义 12 在 $m \times n$ 矩阵 A 中任取 k 行与 k 列 ($k \leq \min\{m, n\}$), 位于这些交叉处的元素构成一个 k 阶行列式, 称为矩阵 A 的 k 阶子式.

例如, 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

选取行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15$, 它是 A 的一个二阶子式. 若选取行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 10,$$

则它是 A 的一个三阶子式.

注: $m \times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k C_n^k$ 个.

定理三 设矩阵 A 中有一个 r 阶子式 $D \neq 0$, 且所有包含 D 的 $r+1$ 阶子式 (如果存在的话) 都等于零, 则 A 的秩 $R(A) = r$.

[证] 不失一般性, 可设 D 位于 A 的左上角 (否则可经对调行与列达到这一目的, 而含有 D 的 $r+1$ 阶子式只是改变若干次符号而仍等于 0), 即设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} & a_{m,r+1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$



则向量组 $\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{rr} \end{bmatrix}$ 线性无关.

从而 A 的前 r 个列向量 $\beta_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{r1} \\ a_{r+1,1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \cdots, \beta_r = \begin{bmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{rr} \\ a_{r+1,r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{bmatrix}$ 线性无关.

下面我们证明 A 的第 l 个列向量 $\beta_l (l = r + 1, \cdots, n)$ 可由 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性表示.

为此, 作 $r + 1$ 阶辅助行列式

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kr} & a_{kl} \end{vmatrix},$$

可以看出, 当 $k \leq r$ 时, D_k 中有两行相同, 因而 $D_k = 0$; 当 $k > r$ 时, D_k 是 A 的包含 D 的 $r + 1$ 阶子式, 由假设知 $D_k = 0$. 于是对于每一个 $k (k = 1, 2, \cdots, m)$ 皆有 $D_k = 0$.

将 D_k 按最后一行展开, 得

$$a_{k1}A_1 + a_{k2}A_2 + \cdots + a_{kr}A_r + a_{kl}D = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, m),$$

其中

$$A_j = (-1)^{r+1+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1r} & a_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{r,j-1} & a_{r,j+1} & \cdots & a_{rr} & a_{rl} \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, r),$$

它们是一些与 k 无关的数. 因 $D \neq 0$, 故得

$$\begin{aligned} a_{kl} &= -\frac{1}{D}(A_1a_{k1} + A_2a_{k2} + \cdots + A_ra_{kr}) \\ &= -\frac{A_1}{D}a_{k1} - \frac{A_2}{D}a_{k2} - \cdots - \frac{A_r}{D}a_{kr} \quad (k = 1, 2, \cdots, m), \end{aligned}$$

因而 $\beta_l = -\frac{A_1}{D}\beta_1 - \frac{A_2}{D}\beta_2 - \cdots - \frac{A_r}{D}\beta_r \quad (l = r + 1, \cdots, n),$

这就表明 A 的第 l 个列向量 $\beta_l (l = r + 1, \cdots, n)$ 可由前 r 个列向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性表示,



于是 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 为 A 的列向量组的一个最大线性无关组, 因此 $R(A) = r$. 证毕.

特别地, 当 A 为 n 阶非奇异方阵时, 因为 $|A| \neq 0$, 所以由定理三知 $R(A) = n$ (A 的阶数). 这时, 我们又称 A 为满秩方阵, 而奇异方阵又称降秩方阵.

例 14 求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

的秩.

[解] 因为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

而含 D 的三阶子式只有两个, 且都等于零.

即

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

所以 $R(A) = 2$.

推论 1 矩阵 A 的列向量组的秩等于 A 的行向量组的秩.

[证] 设 A 的列向量组的秩为 r , 将 A 转置得 A' , 则 A 的每个子式都以转置行列式的形式出现在 A' 中, 由于转置后行列式的值不变, 从而定理三的假设对 A 与 A' 同时成立, 故 A 与 A' 的秩相等, 即 A 的列向量组的秩等于 A' 的列向量组的秩. 而 A' 的列向量就是 A 的行向量, 所以 A 的行向量组的秩也是 r . 证毕.

因此也可以用 A 的行向量组的秩来定义矩阵 A 的秩.

推论 2

(i) 若 A 中有一个 r 阶子式不为零, 则 $R(A) \geq r$;

(ii) 若 A 中所有 r 阶子式全为零, 则 $R(A) < r$.

[证] (i) 的证明见定理三证明的开头部分, 由于 A 中有一个 r 阶子式不为零, 所以 A 的列向量组中至少可以找到 r 个列向量是线性无关的, 故 A 的列向量组的秩不小于 r , 即有 $R(A) \geq r$. 下面证明 (ii). 设 $m \times n$ 矩阵 A 中所有 r 阶子式全为零, 由行列式展开式定理可以推知: A 中所有 $k (> r)$ 阶子式 (如果存在的话) 全为零, 从而 A 中不为零的子式的最大阶数 s 必小于 r , 由定理三知, $R(A) = s < r$. 证毕.



下面我们利用分块矩阵的知识证明关于矩阵秩的两个重要结论.

定理四 设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵, 则 $R(A + B) \leq R(A) + R(B)$.

$$[\text{证}] \quad \text{令 } A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}, A + B = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix},$$

则由分块矩阵运算, 得

$$\begin{cases} \gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1, \\ \gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2, \\ \dots\dots\dots \\ \gamma_m = \alpha_m + \beta_m. \end{cases}$$

即 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性表示,

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad R(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) &\leq R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \\ &\leq R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) + R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m), \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad R(A + B) \leq R(A) + R(B).$$

定理五 设 A 为 $m \times s$ 矩阵, B 为 $s \times n$ 矩阵, 则 $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.

$$[\text{证}] \quad \text{令 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix},$$

则由分块矩阵运算, 得

$$\begin{cases} \gamma_1 = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1s}\beta_s, \\ \gamma_2 = a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2s}\beta_s, \\ \dots\dots\dots \vdots \dots\dots\dots \\ \gamma_m = a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \cdots + a_{ms}\beta_s, \end{cases}$$

即 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示,

$$\text{所以} \quad R(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) \leq R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s),$$

$$\text{即} \quad R(AB) \leq R(B).$$

类似地, 把 A, AB 进行列分块, B 不分块可证 $R(AB) \leq R(A)$.

$$\text{故} \quad R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}.$$



前面我们介绍了一个矩阵可以用一组行(列)向量表示;反之,已知一组行(列)向量,也可以用它来构造一个矩阵.

例如,已知向量组

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \quad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

用它可以构造矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}.$$

从而可以根据定理三求矩阵的秩的方法来求向量组的秩.

例 15 判定下面的向量组是否线性相关,并求出它的一个最大线性无关组.

$$\alpha_1 = (-2, 1, 0, 3), \quad \alpha_2 = (1, -3, 2, 4),$$

$$\alpha_3 = (3, 0, 2, -1), \quad \alpha_4 = (2, -2, 4, 6).$$

[解] 用这些向量作为矩阵 A 的行向量,得

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

在 A 中有三阶子式

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0.$$

而 A 中包含 D 的四阶子式只有一个,即 $|A|$.

由于 $|A| = 0$, 所以 $R(A) = 3$. 即向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩为 3, 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是线性相关.

因为 D 位于前三行, 可知前三个行向量线性无关, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是一个最大线性无关组.

我们已经知道, 通过计算矩阵 A 的子式来求矩阵 A 的秩的方法, 倘若 A 的阶数较高, 需逐个计算那么多的子式, 其计算量是相当大的. 下一节我们将介绍一种行之有效的简便方法, 即利用矩阵的初等变换求矩阵的秩.



§6 矩阵的初等变换

定义 13 对矩阵 A 施行下列变换:

- (i) 互换矩阵 A 的任意两行(互换 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$);
- (ii) 用一个不等于零的数乘矩阵 A 的某一行中的所有元素(第 i 行乘 k , 记作 $k \cdot r_i$);
- (iii) 用一个数乘矩阵 A 的某一行的所有元素后再加到 A 的另一行对应元素上去(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上, 记作 $r_i + kr_j$).

这三种变换称为矩阵 A 的初等行变换.

把定义中的“行”换成“列”(所用记号“ r ”换成“ c ”), 即得矩阵 A 的初等列变换的定义, 矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换.

定义 14 如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B , 则称矩阵 A 与 B 是等价的, 记为 $A \simeq B$.

等价是矩阵间的一种关系, 它具有如下性质:

- (i) 反身性: 每一个矩阵与它自身等价;
- (ii) 对称性: 如果矩阵 A 与 B 等价, 则矩阵 B 与 A 等价;
- (iii) 传递性: 若 $A \simeq B$, 而 $B \simeq C$, 则 $A \simeq C$.

下面我们讨论等价矩阵的秩之间的关系.

定理六 设 A 为 $m \times n$ 矩阵:

- (1) 若矩阵 A 经有限次初等行变换变成矩阵 B , 则 $R(A) = R(B)$;
- (2) 若矩阵 A 经有限次初等列变换变成矩阵 B , 则 $R(A) = R(B)$.

[证] 设矩阵 A 的行向量组为

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_m, \quad (18)$$

经过定义 13 中(i)、(ii)或(iii)的初等行变换后得到新矩阵的行向量组分别为

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_m;$$

$$\alpha_1, \cdots, k\alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_m; \quad (k \neq 0)$$

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_i + k\alpha_j, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_m.$$

显然, 这三个向量组中的每一个向量组与向量组(18)可相互线性表示, 从而它们与向量组(18)是等价的. 我们知道, 等价向量组有相同的秩, 所以经过(i)、(ii)、(iii)的初等行变换, 变换前后的行向量组的秩是不变的, 即变换前后的矩阵的秩是不变的, 故

$$R(A) = R(B).$$

证毕.



类似可证(2).

综合(1)和(2)可得,矩阵 A 经有限次初等变换变成 B ,则

$$R(A) = R(B);$$

即若 $A \simeq B$,则

$$R(A) = R(B).$$

定义 15 设矩阵 A 的每个非零行第一个非零元素所在列的列标大于上一个非零行第一个非零元素所在列的列标,且零行在非零行的下方,则称 A 为阶梯形矩阵.

例如,矩阵
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 即为阶梯形矩阵.

我们利用矩阵经初等变换后其秩不变的特点,把所给矩阵 $A = (a_{ij})$ 通过一系列初等行变换,化矩阵中的许多元素为0,再利用初等列变换中的第(i)种变换,最后将矩阵 A 变为阶梯形矩阵 B :

$$A \simeq \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = B, \quad (19)$$

其中 $c_{ii} \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, r)$, (19)式阶梯形矩阵 B 中有一个 r 阶子式

$$D_r = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22}\cdots c_{rr} \neq 0,$$

且所有包含 D_r 的 $r+1$ 阶子式全为零,由定理三知, $R(B) = r$,再由定理六得知, $R(A) = r$.

例 16 设



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix},$$

求 $R(A)$.

$$\begin{aligned} [\text{解}] \quad A &\stackrel{\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-r_1}}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{r_3+r_2}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{r_3 \leftrightarrow r_4}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B. \end{aligned} \quad (20)$$

因为阶梯形矩阵 B 中有一个三阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

且所有包含它的四阶子式全为零,由定理三可知,

$$R(B) = 3,$$

再由定理六得知,

$$R(A) = 3.$$

(19) 式阶梯形矩阵若再经初等列变换,则可化为如下最简形式:



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

上述矩阵称为 A 的标准形, 其特点是: 标准形的左上角是一个 r 阶单位矩阵 $[r = R(A)]$, 其他元素都是 0.

下面我们将例 16 的矩阵 A 通过初等变换变为标准形. 在解例 16 的基础上, 对 (20) 式矩阵 B 继续进行初等列变换:

$$A \simeq B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} c_2 - c_1 \\ c_3 - 2c_1 \\ \cong \\ c_4 - 2c_1 \\ c_5 - c_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} c_3 - \frac{1}{2}c_2 \\ c_4 - \frac{5}{2}c_2 \\ \cong \\ c_5 + \frac{1}{2}c_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} c_4 + c_3 \\ \cong \\ c_5 - c_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} \times c_2 \\ \cong \\ -\frac{1}{2} \times c_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



这便是矩阵 A 的标准形,标准形的左上角的单位矩阵的阶数等于矩阵 A 的秩,即等于 $R(A) = 3$.

由此可见,若 $A \simeq B$,则它们的秩相等,从而 A 与 B 具有相同的标准形. 其中的特例,若 A 为 n 阶满秩方阵,则其标准形为 n 阶单位矩阵. 换言之, n 阶满秩方阵与 n 阶单位矩阵等价.

前面探讨了利用矩阵初等变换求矩阵的秩,由于矩阵的秩也是矩阵列向量组的秩或行向量组的秩,故我们可以利用矩阵的秩来解决向量组的秩,且由定理三的证明过程可以求出向量组的最大线性无关组. 下面介绍如何利用矩阵解决向量组的秩、最大线性无关组并用最大线性无关组表示其余向量,为此,我们先给出一个定义及一个结论.

定义 16 设矩阵 A 为阶梯形矩阵,若矩阵 A 的每个非零行的第一个非零元素为 1,且所在列的上方元素为零,则称 A 为简化阶梯形矩阵或行最简形.

例如,矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 即为行最简形.

定理七

- (1) 任何一个矩阵都可经初等行变换化为阶梯形矩阵及行最简形.
- (2) 矩阵的初等行变换不改变列向量组的线性相关性及线性表示式.

证明略.

由定理七可得求向量组的秩、最大线性无关组并用最大线性无关组表示其余向量的方法.

向量组的秩与最大线性无关组的求法:以所给向量为列构成矩阵 A ,用初等行变换把 A 化为阶梯形矩阵 B ,则向量组的秩为 $R(B)$,且 B 中每一非零行首非零元素所在列对应的向量构成一个最大线性无关组.

用最大线性无关组表示其余向量的方法:以所给向量为列构成矩阵 A ,用初等行变换把 A 化为行最简形 C ,若 C 中每一非零行的首 1 (第一个为 1 的元素) 所在列为 $i_1, i_2, \dots, i_r$ 且其他列所对应向量 $\beta_j = k_1 \beta_{i_1} + k_2 \beta_{i_2} + \dots + k_r \beta_{i_r}$,则 A 中列向量有

$$\alpha_j = k_1 \alpha_{i_1} + k_2 \alpha_{i_2} + \dots + k_r \alpha_{i_r}.$$

例 17 利用矩阵的初等变换判定下面向量组的线性相关性,并求出它的一个最大无关组.

$$\alpha_1 = (1, 2, 1, 3), \quad \alpha_2 = (4, -1, -5, -6),$$



$$\alpha_3 = (1, -3, -4, -7), \quad \alpha_4 = (2, 1, -1, 0).$$

[解] 用这些向量作为矩阵 A 的列向量得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & -1 \\ 3 & -6 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ \cong \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & -5 & -3 \\ 0 & -9 & -5 & -3 \\ 0 & -18 & -10 & -6 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{l} r_3 - r_2 \\ \cong \\ r_4 - 2r_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

所以 $R(A) = 2$, 即向量组的秩为 2, 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 且 α_1, α_2 是它的一个最大无关组.

例 18 求向量组 $\alpha_1 = (1, -2, 0, 3), \alpha_2 = (2, -5, -3, 6), \alpha_3 = (0, 1, 3, 0), \alpha_4 = (2, -1, 4, -7), \alpha_5 = (5, -8, 1, 2)$ 的一个最大线性无关组, 并用该最大线性无关组表示其余向量.

[解] 因为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{l} r_2 + 2r_1 \\ \cong \\ r_3 - 3r_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{l} r_3 - 3r_2 \\ \cong \\ (-1)r_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned}
& \begin{matrix} r_4 - \frac{5}{13}r_3 \\ \approx \\ (-\frac{1}{5})r_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \begin{matrix} r_2 + 3r_3 \\ \approx \\ r_1 - 2r_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \begin{matrix} r_1 - 2r_2 \\ \approx \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个最大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$. 且

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_4, \quad \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4.$$



§7 初等方阵

这一节主要讨论矩阵的初等变换与矩阵乘法的联系,然后在此基础上,给出用初等变换求逆矩阵的方法.

定义 17 由单位矩阵 E 经过一次初等变换而得到的方阵称为初等方阵.

显然,三种初等变换对应着三类初等方阵.

(i) 互换两行或互换两列.

把单位矩阵中第 i, j 两行互换($r_i \leftrightarrow r_j$),得初等方阵

$$E(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}.$$



(ii) 用数 $k \neq 0$ 乘以 E 的第 i 行 ($r_i \times k$), 得初等方阵

$$E(i(k)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}$$

(iii) 用数 k 乘以 E 的第 i 行后加到第 j 行上去, 得初等方阵

$$E(i(k), j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}$$

同样可得与初等列变换相对应的初等方阵, 而且对单位矩阵做一次初等列变换所得到的方阵也包括在上面所列的三类方阵之中, 故这三类方阵就是全部的初等方阵.

那么, 初等方阵与矩阵相乘又跟矩阵的初等变换有何联系呢? 请看定理八.

定理八 对于一个 $m \times n$ 矩阵 A 做一次初等行变换相当于在 A 的左边乘上一个相应的 m 阶初等方阵; 对 A 做一次初等列变换相当于在 A 的右边乘上一个相应的 n 阶初等方阵.

[证] (1) 用 m 阶初等方阵 $E(i, j)$ 左乘 A 得

$$E(i, j)A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}$$

其结果相当于对矩阵 A 进行第一种初等行变换. 类似地, 用 n 阶初等方阵 $E(i, j)$ 右乘矩阵 A , 其结果相当于对矩阵 A 进行第一种初等列变换.



(2) 用 m 阶初等方阵 $E(i(k))$ 左乘 A 得

$$E(i(k))A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}$$

其结果相当于对矩阵 A 进行第二种初等行变换. 类似地, 用 n 阶初等方阵 $E(i(k))$ 右乘矩阵 A , 其结果相当于对矩阵 A 进行第二种初等列变换.

(3) 用 m 阶初等方阵 $E(i(k), j)$ 左乘 A 得

$$E(i(k), j)A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} + a_{j1} & ka_{i2} + a_{j2} & \cdots & ka_{in} + a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}$$

其结果相当于对矩阵 A 施行第三种初等行变换. 类似地, 用 n 阶初等方阵 $E(i(k), j)$ 右乘矩阵 A , 其结果相当于对矩阵 A 施行第三种初等列变换. 证毕.

不难看出: 初等方阵都是可逆的, 它们的逆矩阵也是初等方阵, 事实上

$$E(i, j)^{-1} = E(i, j), \quad E(i(k))^{-1} = E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

$$E(i(k), j)^{-1} = E(i(-k), j).$$

根据定理八, 对一矩阵做初等变换就相当于用相应的初等方阵左乘或右乘这个矩阵, 因此两个 $m \times n$ 矩阵 A, B 等价的充要条件是存在 m 阶初等方阵 $P_1, \cdots, P_l$ 与 n 阶初等方阵 $P_{l+1}, \cdots, P_t$ 使

$$A = P_1 P_2 \cdots P_l B P_{l+1} P_{l+2} \cdots P_t. \quad (21)$$

若令 $P = P_1 P_2 \cdots P_l, Q = P_{l+1} P_{l+2} \cdots P_t$, 显然 P 为可逆的 m 阶方阵, Q 为可逆的 n 阶方阵, 此时上式可写成 $A = PBQ$, 从而得

定理九 两个 $m \times n$ 矩阵 A, B 等价的充要条件是存在可逆的 m 阶方阵 P 与可逆的 n 阶方阵 Q , 使

$$A = PBQ.$$



我们知道,若 A 为 n 阶可逆方阵,其标准形为 n 阶单位阵,即可逆矩阵 $A \simeq E$,由(21)式立得

$$A = P_1 P_2 \cdots P_l E P_{l+1} P_{l+2} \cdots P_t = P_1 P_2 \cdots P_t,$$

其中 $P_i (i = 1, 2, \dots, t)$ 为 n 阶初等方阵,从而得

定理十 n 阶方阵 A 可逆的充要条件是它能表成一些初等方阵的乘积,即

$$A = P_1 P_2 \cdots P_t. \quad (22)$$

把(22)式改写一下,有

$$P_t^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} A = E.$$

因为初等方阵的逆矩阵仍为初等方阵,同时在矩阵 A 的左边乘这些初等方阵就相当于对 A 做初等行变换,从而有

推论 可逆矩阵总可以经过一系列初等行变换化为单位矩阵.

定理十及推论提供了一种求逆矩阵的方法. 设 A 为可逆矩阵,由定理十知 A 可表为一些初等方阵的乘积:

$$A = P_1 P_2 \cdots P_t.$$

显然 $A^{-1} = P_t^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1}$,从而得以下两式:

$$P_t^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} A = E, \quad (23)$$

$$P_t^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} E = A^{-1}. \quad (24)$$

(23)、(24)两个式子说明,如果用一系列初等行变换把可逆矩阵 A 化成单位矩阵,那么同样地用这一系列初等行变换去化单位矩阵就得到 A^{-1} .

把 A, E 这两个 $n \times n$ 矩阵合并在一起,构成一个 $n \times 2n$ 矩阵 $(A : E)$,按矩阵的分块乘法,则有

$$\begin{aligned} P_t^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} (A : E) &= (P_t^{-1} \cdots P_1^{-1} A : P_t^{-1} \cdots P_1^{-1} E) \\ &= (E : A^{-1}). \end{aligned}$$

这就是用初等行变换求逆矩阵的根据所在. 请看下面的例子.

例 19 设

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \text{求 } A^{-1}.$$

[解] 因为

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$



$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} r_1+r_2 \\ \simeq \\ r_3+r_2 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\
 & \begin{matrix} r_2+2r_1 \\ \simeq \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\
 & \begin{matrix} \frac{1}{5} \times r_3 \\ \simeq \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right] \\
 & \begin{matrix} r_2-3r_3 \\ \simeq \\ r_1-r_3 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right],
 \end{aligned}$$

所以

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

上面是用初等行变换求逆矩阵,同样只用初等列变换也可以求逆矩阵,但在具体计

算时 E 不放在 A 的右边,而是放在 A 的下面,即 $\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} E \\ \cdots \\ A^{-1} \end{bmatrix}$. 理由请读者给出. 下面用

初等列变换求例 19 矩阵 A 的逆矩阵.

因为



$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1+2c_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{c_2+c_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_3-c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{\frac{1}{5} \times c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 2 & 3 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2+c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

所以

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

在第二章第四节向量空间中指出了向量空间的基不唯一,下面介绍向量在不同基下的坐标之间的关系,即坐标变换公式.

定义 18 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 为向量空间 V 的两组基,若



(1) 求基(I)到基(II)的过渡矩阵 A ;

(2) 设 α 在基(I)下的坐标为 $(1, 1, 3)^T$, 求 α 在基(II)下的坐标.

[解] (1) 方法 1:

因为 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A.$$

所以

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

方法 2:

因为

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{r_3-r_1}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{r_3+r_2}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{\frac{1}{2}r_3}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\stackrel{r_2-r_3}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{r_1-r_2}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

所以过渡矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(2) 坐标变换公式,得 α 在基(II)下的坐标为

$$Y = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

从例 20 解题过程可得,基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 的过渡矩阵 A 的求法.

(1) 逆矩阵法: $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$.

(2) 初等变换法: $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E : A)$.



习 题 三

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

求: (1) $3A - B$;

(2) $2A + 3B$;

(3) 若 X 满足 $A + X = B$, 求 X ;

(4) 若 Y 满足 $(2A - Y) + 2(B - Y) = 0$, 求 Y .

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $3AB - 2A$ 及 $A'B$.



3. 计算下列矩阵的乘积.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$(2) \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$(3) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix};$$

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix};$$

$$(5) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$4. \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 求 } A \text{ 与 } B \text{ 的乘积 } AB \text{ (用分块}$$

的方法).

$$5. \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \text{ 求 } AB \text{ (用分块的方法).}$$

$$6. \text{ 已知 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

求: (1) $(A+B)(A-B)$;

(2) $A^2 - B^2$.



比较(1)与(2)的结果,可得出什么结论?

7. 举反例说明下列命题是错误的.

(1) 若 $A^2 = 0$, 则 $A = 0$;

(2) 若 $A^2 = A$, 则 $A = 0$ 或 $A = E$;

(3) 若 $AX = AY$, 且 $A \neq 0$, 则 $X = Y$.

8. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}$, 求 $A^2, A^3, \dots, A^k$ (k 为正整数).

9. 设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, 求 A^k .

10. 设 A, B 为同阶方阵, 证明:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

的充分必要条件是 $AB = BA$.

11. 设 A, B 都是 n 阶对称矩阵, 证明: AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB = BA$.

12. 求下列各矩阵的逆矩阵.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad (4) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. 解下列矩阵方程.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix};$$

$$(2) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

14. 设 $A^k = 0$ (k 为正整数), 证明:

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}.$$



15. 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = 0$, 证明 A 及 $A + 2E$ 都可逆, 并求 A^{-1} 及 $(A + 2E)^{-1}$.

16. 设 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $AB = A + 2B$, 求 B .

17. 设

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix},$$

求 $(A + 2E)^{-1}(A^2 - 4E)$.

18. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

求 $|(4E - A)'(4E - A)|$.

19. 求下列矩阵的秩.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 10 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{bmatrix}.$$

20. 利用矩阵的秩判断下列向量组的线性相关性, 并求出它的一个最大线性无关组.

$$(1) \alpha_1 = (1, 4, 1, 0), \quad \alpha_2 = (2, 1, -1, -3),$$

$$\alpha_3 = (1, 0, -3, -1), \quad \alpha_4 = (0, 2, -6, 3);$$

$$(2) \alpha_1 = (1, -1, 2, 4), \quad \alpha_2 = (0, 3, 1, 2),$$

$$\alpha_3 = (3, 0, 7, 14), \quad \alpha_4 = (1, -1, 2, 0),$$

$$\alpha_5 = (2, 1, 5, 6);$$

$$(3) \alpha_1 = (2, 1, 1), \quad \alpha_2 = (-4, -2, -2),$$



$$\alpha_3 = (3, 1, 4), \quad \alpha_4 = (5, 3, 0).$$

21. 利用矩阵的初等变换求下列方阵的逆矩阵.

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix};$$

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

22. 用初等变换将下列矩阵化为标准形.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix};$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

23. 已知 $AP = PB$, 其中

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

求 A 及 A^5 .

24. 设 A 和 B 为可逆阵, 求分块矩阵

$$X = \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$$

的逆矩阵.

25. 若 A 为 n 阶方阵, 试证: $R(A) < n$ 的充分必要条件是 $|A| = 0$.

26. 利用逆矩阵解下列线性方程组.

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1. \end{cases}$$

27. 求下列向量组的一个最大线性无关组并用最大线性无关组表示其余向量.

$$(1) \alpha_1 = (2, 1, 2, 2), \quad \alpha_2 = (1, 1, -1, 0), \quad \alpha_3 = (0, 1, 2, 1), \\ \alpha_4 = (-1, -1, -1, -1);$$



$$(2) \alpha_1 = (2, 1, 3, 7), \quad \alpha_2 = (-1, 0, 1, 0), \quad \alpha_3 = (4, 1, 1, 7), \\ \alpha_4 = (-3, -1, 0, -3), \quad \alpha_5 = (-4, -3, 1, 3).$$

28. 在线性空间 $\mathbf{R}^3$ 中, 取两组基

$$(I) \alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \quad \alpha_3 = (1, 1, 1)^T;$$

$$(II) \beta_1 = (2, 1, 1)^T, \quad \beta_2 = (1, 2, 1)^T, \quad \beta_3 = (1, 1, 2)^T.$$

(1) 求基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵 A ;

(2) 设 α 在基 (I) 下的坐标为 $(3, 1, 1)^T$, 求 α 在基 (II) 下的坐标.