



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
大学数学系列教材

线性代数

X I A N X I N G D A I S H U

主 编 刘二根 谢霖铨

副主编 朱传喜 邬国根

主 审 孙弘安



江西高校出版社
JIANGXI UNIVERSITIES AND COLLEGES PRESS

同行表示感谢.

编 者
015 年 4 月

CONTENTS

目 录

1 第一章 行列式

§1 行列式的概念 1

§2 行列式的基本性质与计算 8

§3 克莱姆法则 21

习 题 一 27

31 第二章 n 维向量

§1 n 维向量的概念 31

§2 向量组的线性相关性 34

§3 向量组的秩 45

§4 向量空间 49

习 题 二 53

55 第三章 矩 阵

§1 矩阵的概念与运算 55

§2 方 阵 64

§3 逆矩阵及其求法 69

§4 分块矩阵 75

§5 矩阵的秩 81

§6 矩阵的初等变换 87

§7 初等方阵 93

习题三 101

107

第四章

线性方程组

§1 消元法 107

§2 齐次线性方程组 112

§3 非齐次线性方程组 123

习题四 131

134

第五章

相似矩阵及二次型

§1 向量的内积 134

§2 特征值与特征向量 142

§3 相似矩阵 148

§4 实对称矩阵的相似矩阵 153

§5 二次型及其标准形 159

§6 正定二次型 163

习题五 167

170

第六章

线性空间与线性变换

§1 线性空间及其子空间 170

§2 维数、基与坐标 174

§3 基变换与坐标变换 177

§4 线性变换 179

§5 线性变换的矩阵 182

习 题 六 187

190

附录一

n 阶行列式另一种定义

196

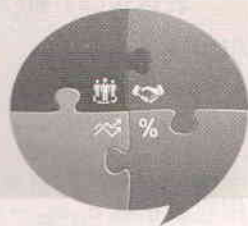
附录二

怎样用 MATLAB 解线性代数问题

215

习题参考答案

第一章



行列式



行列式是从解线性方程组的问题引进的. 行列式不但是研究线性方程组和矩阵的有力工具, 而且在许多理论和实际应用问题中, 也发挥着重要作用. 本章主要介绍行列式的定义、性质及计算, 最后介绍行列式的一个应用, 即用行列式解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

§ 1 行列式的概念

在给出 n 阶行列式的定义之前, 让我们先回顾中学代数从解线性方程组而引出的二阶和三阶行列式的定义.

为了解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (1)$$

我们可以采用消元法, 用 a_{22} 去乘第一个方程, a_{12} 去乘第二个方程, 然后两个方程相减, 得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 则可得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (2)$$

类似可以求得

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (3)$$

表达式(2)和(3)提供了线性方程组(1)解的一般公式. 为了便于记忆和讨论, 我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

用它表示数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (4)$$

我们称之为二阶行列式. 其中横写的叫做行, 竖写的叫做列, 一共有二行二列, $a_{ij} (i, j = 1, 2)$ 称为它的元素.

根据上面二阶行列式的定义, (2) 式和(3) 式的分子分别可以写为

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

可见二阶行列式是这样两项的代数和: 一项是位于第一行第一列的元素与划去第一行和第一列后剩下的一个元素的乘积, 取正号; 另一项是位于第一行第二列的元素与划去第一行和第二列后剩下的一个元素的乘积, 取负号. 例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \times 9 - 7 \times 3 = -3.$$

利用二阶行列式的定义, 方程组(1) 的解可写成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (5)$$

我们通过消元法得到了求解线性方程组(1) 的公式(2)、(3), 这个公式用行列式来表示就是(5) 式. 虽然用消元法可以求得二元线性方程组的解公式, 但是随着未知数的增多这个公式越来越复杂, 其规律也不易掌握. 而在用行列式表示的解公式(5) 中, 解的表

达有一定规律可循:

1. x_1 与 x_2 的分母都是将原方程组未知数前的系数按原顺序排成的一个行列式.

2. x_1 的分子行列式是将分母行列式的第一列换成常数项 b_1 与 b_2 而得到, x_2 的分子

行列式是将分母行列

正因为用行列式

来将一般的线性方程

从方程组(6) 的

消去 x_2 , 就得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33})x_1 = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33})x_1 + (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33})x_1$$

$$= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

注意到上式中 x_1 的系

规律构成的, 借助二阶

我们把此式记为

称为三阶行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

上式的规律是: 把第一

前面再冠以正、负相

同样地, 对(7) 式

若(7) 式 x_1 的系数不



行列式是将分母行列式的第二列换成常数项所得.

正因为用行列式来表示二元线性方程组的解有简单明了的优点,我们希望也能用它来将一般的线性方程组的解表示出来. 为此我们来讨论三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (6)$$

从方程组(6)的前两个方程消去 x_3 ,后两个方程也消去 x_3 ,再从所得到的两个方程中消去 x_2 ,就得到

$$\begin{aligned} & (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ & = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3. \end{aligned} \quad (7)$$

注意到上式中 x_1 的系数是由方程组(6)中未知数的9个系数 $a_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 按照一定的规律构成的,借助二阶行列式的定义,该系数可表示为

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

我们把此式记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

上式的规律是:把第一行每一元素乘以划去该元素所在的行列之后剩下的二阶行列式,前面再冠以正、负相间的符号,最后求它们的代数和.

同样地,对(7)式等号右端正是三阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

若(7)式 x_1 的系数不为零,则可写成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \quad (9)$$

类似可以求得

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \quad (10)$$

我们注意到在 x_1, x_2, x_3 的表达式中, 它们的分母都相同. 分子行列式都是由分母行列式去掉对应于 x_i 的第 i 列, 再换上常数列 b_1, b_2, b_3 组成. 这些特点与二元线性方程组解的表达式是一样的. 如果我们引进 n 阶行列式的概念, 当然希望也能用 n 阶行列式表示 n 元线性方程组的解, 本章第 3 节讨论的就是这个问题.

如果定义一阶行列式 $|a| = a$, 则我们发现 (4) 式和 (8) 式的规律是一样的. 我们把此规律进一步推广, 便引进 n 阶行列式的概念.

定义 1 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

它由 n 行 n 列元素 (共 n^2 个元素) 组成, 又记 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式, 即由 D 中划去第 i 行第 j 列后剩下的 $n-1$ 行 $n-1$ 列元素所组成的, 即

称 D 为 n 阶行列式

当 $n=1$ 时

M_{ij} 是一个 $n-1$ 阶行列式

助于 M_{ij} 按下面

$$D = a_{11} M_{11}$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}$$

显然, 对于

化为 $n-1$ 阶行列式

展开式

为了使 (12)

定义 2 在

其中 M_{ij} 是 a_{ij} 的

例如, 对行

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22}$$

由定义 2,

例 1 计

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$$



(9)

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

称 D 为 n 阶行列式, 它的值由下面的归纳法来定义.

当 $n=1$ 时, (11) 式定义 $D=a_{11}$, 假定对 $n-1$ 阶行列式已经定义, 那么对任意的 i, j , M_{ij} 是一个 $n-1$ 阶行列式, 它的值由归纳假定是已经定义好的, 既然如此, 我们就可以借助于 M_{ij} 按下面的方式来定义 n 阶行列式 D 的值:

(10)

$$\begin{aligned} D &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}. \end{aligned} \quad (12)$$

显然, 对于任何自然数 n , (12) 式给出了一个计算 n 阶行列式的方法: 将 n 阶行列式化为 $n-1$ 阶, 再化为 $n-2$ 阶 最后便可求出 D 的值. (12) 式又称为 D 按第一行的展开式.

为了使 (12) 式的形状更好一些, 我们再引进代数余子式的概念.

定义 2 在行列式 D ((11) 式) 中, 第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 的代数余子式定义为

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},$$

其中 M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式.

例如, 对行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

(11)

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 3 = 1, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 4 \times 2 = -7.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = -7.$$

由定义 2, (12) 式可化为

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}. \quad (13)$$

例 1 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 7 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 9 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$



[解]

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 7 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 6 \times \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-3) - 6 \times 7 + 0 = -45.$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 3 - (-1) \times (-6) + 3 \times (-9)$$

$$= -27.$$

例2 用定义证明下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注:主对角线(即从左上角到右下角这条对角线)上方所有元素全为零的行列式称为下三角行列式,类似地,可定义上三角行列式.上三角行列式和下三角行列式统称为三角行列式.

[证] 这是一个 n 阶行列式,但它的第一行除 a_{11} 外均为零,因此利用(12)式展开时只有一项不为零,于是

$$D = a_{11}M_{11} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

容易看出 a_{11} 的余子式仍是一个下三角行列式,只是阶数比 D 的阶数小1.因此又可用同样的方法求得

$$M_{11} = a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这样一直下去

即下三角行列

由例2,易

例3 证

[证] 由

 $D = a_{11}(-$ $= a_{11}(-$ $= \cdots$ $= (-$ $= (-1$ $= (-1$

这样一直下去,则可得

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即下三角行列式的值正好等于主对角线上元素的乘积.

由例2,易知对角行列式(即主对角线以外的元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例3 证明

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

[证] 由定义,按第一行反复展开

$$D = a_{1n}(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-2} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (n-1 \text{ 阶})$$

$$= a_{1n}(-1)^{1+n} a_{2,n-1}(-1)^{1+n-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{3,n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{4,n-3} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (n-2 \text{ 阶})$$

= \cdots

$$= (-1)^{1+n}(-1)^{1+n-1}\cdots(-1)^{1+2} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$



§2 行列式的基本性质与计算

1. 行列式的基本性质

行列式的基本性质不仅对理解行列式的概念是必要的,而且是计算行列式的基础.

下面我们来研究行列式的基本性质,先介绍一个概念.

定义 3 设 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

如果把 D 的行列互换而不改变各行、各列的顺序,得到一个新的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为行列式 D 的转置行列式,记为 D' 或 D^T .

例如,在例 1(1) 中该行列式的转置行列式为

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

由行列式的定义,知

$$D' = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 7 \times \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + 8 \times \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -45.$$

此行列式和原来的行列式恰好相等,即 $D' = D$.

事实上,对一般的 n 阶行列式,我们也有同样的结论.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D = D'$.

由性质 1 及例 2 知上三角行列式也等于主对角线上元素的乘积.



即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

根据性质 1 可知,行列式中行与列具有同等地位,行列式的性质凡是对行成立的,对列也同样成立,反之也成立.

对于例 1(1) 中的行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 7 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 9 \end{vmatrix},$$

将 D 的任意两行(列)交换,例如交换第一行、第三行得到

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 9 \\ 7 & 2 & 7 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix},$$

由行列式的定义,容易算得 $D_1 = 45 = -D$.

一般地,我们也有下面的结论:

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式改变符号.

由于性质 1 和性质 2 的证明比较复杂,我们只不加证明地给出来.

由性质 2 可得下面的推论.

推论 1 若行列式 D 中某一行(列)的所有元素均为零,则

$$D = 0.$$

[证] 当第一行元素全为零时,则由行列式的定义显然有

$$D = 0.$$

若第 i 行($i > 1$)的元素全为零时,则交换第 i 行和第一行后所得到的行列式应等于零,从而由性质 2 知 $D = 0$. 证毕.

推论 2 若行列式 D 中有两行(列)相同,则 $D = 0$.

只要将相同的两行互换就有 $-D = D$,故 $D = 0$.

性质 3 如果行列式 D 中某行(列)的所有元素是两个数的和,那么 D 可表示成两个新行列式之和,即



$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \text{ (第 } i \text{ 行)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

[证] 当 $i = 1$ 时, 由行列式的定义知

$$\begin{vmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} & \cdots & b_{1n} + c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} (b_{1j} + c_{1j}) M_{1j}$$

$$= \sum_{j=1}^n [(-1)^{1+j} b_{1j} M_{1j} + (-1)^{1+j} c_{1j} M_{1j}]$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} b_{1j} M_{1j} + \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} c_{1j} M_{1j}$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当 $i > 1$ 时, 把第 i 行与第一行互换, 再按上面方法把行列式拆成两个行列式之和, 然后再把这两个行列式的第 i 行与第一行互换即可. 证毕.

性质 4 行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

[证] 当 $i = 1$ 时, 由行列式的定义知

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} (ka_{1j}) M_{1j} \\
 = k \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} \right) = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

当 $i > 1$ 时, 把 i 行与第一行互换, 根据上面的结论, 可把第一行的公因子提到行列式外, 然后再互换第一行和第 i 行, 即得该命题. 证毕.

由性质 4 及推论 2 易得

推论 3 如果行列式 D 的某两行(列)对应元素成比例, 则

$$D = 0.$$

由性质 3、性质 4 及推论 2 可以得到下面的性质.

性质 5 把行列式中某一行(列)的各元素乘以常数 k 后加到另一行(列)对应的元素上去, 行列式保持不变, 即

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行, 以 c_i 表示第 i 列. 交换 i, j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$, 交换 i, j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$. 第 i 行(列)提出公因子 k 记作 $r_i \div k$ ($c_i \div k$). 以数 k 乘第 j 行(列)加到第 i 行(列)上去, 记作 $r_i + kr_j$ ($c_i + kc_j$).

一般来说, 计算行列式主要利用上述性质和推论把行列式化为上三角(或下三角)行列式来计算. 下面计算几个行列式.

例 4 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$



[解]

$$\begin{aligned}
 D & \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 + 5r_1]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - 8r_2]{r_3 + 4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{r_4 + \frac{5}{4}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40.
 \end{aligned}$$

例5 计算

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}.$$

[解] 从第四行开始,后行减前行:

$$\begin{aligned}
 D & \xrightarrow[r_2 - r_1]{r_4 - r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_4 - r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4.
 \end{aligned}$$

例6 计

【解法1】

■ 列均加到第

【解法2】

套行两式

例6 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

【解法1】 这个行列式的特点是各行 n 个数之和都是 $a + (n-1)b$, 故把第二列至第 n 列均加到第一列上去, 然后各行均减去第一行:

$$D \xrightarrow{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a + (n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ \cdots \\ r_n - r_1}} \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

【解法2】 镶边法.

由行列式的定义知, D 等于下面 $n+1$ 阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & b & \cdots & b \\ b & b & a & b & \cdots & b \\ b & b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$



$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} c_2 - c_1 \\ c_3 - c_1 \\ \cdots \\ c_{n+1} - c_1 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad \cdots \quad -1 \\ b \quad a-b \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \\ b \quad 0 \quad a-b \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \\ b \quad 0 \quad 0 \quad a-b \quad \cdots \quad 0 \\ \cdots \\ b \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad a-b \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} r_1 + \frac{1}{a-b}r_2 \\ r_1 + \frac{1}{a-b}r_3 \\ \cdots \\ r_1 + \frac{1}{a-b}r_{n+1} \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} 1 + \frac{nb}{a-b} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \\ b \quad a-b \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \\ b \quad 0 \quad a-b \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \\ b \quad 0 \quad 0 \quad a-b \quad \cdots \quad 0 \\ \cdots \\ b \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad a-b \end{array}
 \end{array}
 \quad (a \neq b)$$

$$= \left(1 + \frac{nb}{a-b}\right)(a-b)^n = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例7 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

证明: $D = D_1 D_2$.

[证] 由行列式性质5, 对 D_1 作运算 $r_i + \lambda r_j$, 把 D_1 化为下三角形行列式, 设为

$$D_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm} \end{vmatrix} = p_{11} \cdots p_{mm}.$$

同理, 对 D_2 作运算 $c_i + \lambda c_j$, 把 D_2 化为下三角形行列式, 设为

$$D_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} = q_{11} \cdots q_{nn}.$$

所以对 D 的前 m 行作运算 $r_i + \lambda r_j$, 再对后 n 列作运算 $c_i + \lambda c_j$, 把 D 化为下三角形行列式, 得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & q_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} \\ &= p_{11} \cdots p_{mm} q_{11} \cdots q_{nn} \\ &= D_1 D_2. \end{aligned}$$

2. 行列式按任一行(列)展开

根据行列式的定义和性质 1, 行列式等于它的第一行(列)的各元素与它们对应的代数余子式乘积之和. 事实上, 我们可以证明更一般的结论.

定理一 行列式等于它的任一行(列)的各元素与它们对应的代数余子式乘积之和, 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

为证上述定理, 先证下面的引理.

引理 一个 n 阶行列式 D , 如果其中第 i 行(或第 j 行)所有元素除 a_{ij} 外都为零, 则这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积, 即

$$D = a_{ij}A_{ij}.$$

[证] 以行为例进行证明.

(1) 先证 a_{ij} 位于第一行第一列的情形, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$



由行列式的定义,按第一行展开

$$D = a_{11}M_{11} = a_{11}A_{11}.$$

(2) 再证一般情形(第 i 行除 a_{ij} 外,其他元素全为零),此时

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 D 的第 i 行依次和第 $i-1, i-2, \dots, 1$ 行交换,然后将第 j 列依次和第 $j-1, j-2, \dots, 1$ 列交换,这样得到一个新的 n 阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

易知此行列式第一行第一列的元素的余子式就是 D 中第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} ,故由(1)的证明知

$$D_1 = a_{ij}M_{ij}.$$

又由行列式的性质 2 知

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{i+j-2} D_1 = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \\ &= a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}. \end{aligned}$$

证毕.

定理一的证明:

将行列式 D 的第 i 行的所有元素按下面的方式拆成 n 个数的和,然后由性质 3 将 D 表示为 n 个行列式之和.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + 0 + \cdots + 0 & 0 + a_{i2} + \cdots + 0 & \cdots & 0 + \cdots + 0 + a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由引理, 即得

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

同理, 若按列进行证明, 可得

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

证毕.

这个定理称为行列式按行(列)展开定理. 利用这一定理并结合行列式的性质, 可以简化行列式的计算.

由这一定理, 我们还得到下述重要推论.

推论 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零, 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j);$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j).$$

[证] 不妨设 $i < j$, 把行列式 D 中第 j 行的元素换成第 i 行的元素, 则得行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \text{ (第 } i \text{ 行)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \text{ (第 } j \text{ 行)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由行列式性质 2 的推论 2 知 $D_1 = 0$. 现把 D_1 按第 j 行展开, 有

$$D_1 = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}.$$

所以

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j).$$

同理也可得到

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j).$$

证毕.



综合定理一及推论,我们得到

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D & (i=j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} D & (i=j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

下面我们利用定理一计算行列式,先计算前面的例4:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

我们保留 a_{33} ,把第三行其余元素变为0,然后按第三行展开:

$$D \xrightarrow[c_4+c_3]{c_1-2c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_1-c_2]{c_1-c_2} \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 40.$$

例8 计算4阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$[\text{解}] \quad D \xrightarrow[r_4-r_2]{r_1-2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = -(-1)^{2+2} \times (-1) \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$= 27.$



例9 计算

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & a & & 0 & & b \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & 0 & & a & b & 0 \\ & & & c & d & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ c & & c & & 0 & d \\ & & & & & d \end{vmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{2n}$

[解] 按第一行展开,有

$$D_{2n} = a \cdot \begin{vmatrix} a & & & b & 0 \\ & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ & 0 & a & b & 0 \\ & & c & d & \vdots \\ & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ c & & & d & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & d \end{vmatrix} + b(-1)^{1+2n} \begin{vmatrix} 0 & a & & & b \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots \\ \vdots & & 0 & a & b & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots \\ 0 & c & & & d \\ c & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{2(n-1)}$

$$= adD_{2(n-1)} - bc(-1)^{2n-1+1}D_{2(n-1)}$$

$$= (ad - bc)D_{2(n-1)}.$$

以此作递推公式,即可得

$$D_{2n} = (ad - bc)D_{2(n-1)} = (ad - bc)^2D_{2(n-2)} = \dots$$



$$\begin{aligned}
 &= (ad - bc)^{n-1} D_2 = (ad - bc)^{n-1} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\
 &= (ad - bc)^n.
 \end{aligned}$$

例 10 证明范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

其中记号“ $\prod$ ”表示全体同类因子的乘积.

[证] 用数学归纳法. 因为

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2 \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

所以当 $n=2$ 时命题成立. 现在假设命题对于 $n-1$ 阶范德蒙行列式成立, 要证对 n 阶范德蒙行列式也成立.

为此, 设法把 D_n 降阶: 从第 n 行开始, 后行减去前行的 x_1 倍, 有

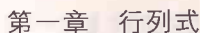
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第一列展开, 并把每列的公因子 $(x_i - x_1) (i=2, 3, \cdots, n)$ 提出, 就有

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙行列式, 按归纳法假设, 它等于所有 $(x_i - x_j)$ 因子的乘积, 其中 $n \geq i > j \geq 2$. 故

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \prod_{n \geq i > j \geq 2} (x_i - x_j) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$


$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}.$$
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 9 & 4 \\ 1 & -1 & 27 & -8 \end{vmatrix}$$

要证对 n 阶范德

§3 克莱姆法则

在中学代数里,我们研究过应用二阶(或三阶)行列式解二元(或三元)线性方程组的问题.我们已经知道,在一定的条件下,它的解可以用二阶(或三阶)行列式表示出来.自然会问,对于含有 n 个未知量的 n 个线性方程的方程组,它的解是否也可以用 n 阶行列式来表示呢?下面的定理给出了明确的答案.

定理二(克莱姆法则) 设线性方程组

[illegible]

的系数行列式



$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (15)$$

则线性方程组(14)有解,且只有唯一解,其解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}. \quad (16)$$

其中 $D_j (j=1, 2, \cdots, n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 代替后得到的 n 阶行列式,即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

[证] 第一步:

欲证(16)式是方程组(14)的一个解,只须将(16)式代入(14)式中验证是否满足.

因为

$$\begin{cases} D_1 = b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1}, \\ D_2 = b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \cdots + b_n A_{n2}, \\ \cdots \\ D_n = b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn}. \end{cases} \quad (17)$$

于是

$$\begin{aligned} & a_{11} \frac{D_1}{D} + a_{12} \frac{D_2}{D} + \cdots + a_{1n} \frac{D_n}{D} \\ &= \frac{1}{D} [a_{11} D_1 + a_{12} D_2 + \cdots + a_{1n} D_n] \\ &\stackrel{\text{由(17)式}}{=} \frac{1}{D} [a_{11} (b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1}) + a_{12} (b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \cdots \\ &\quad + b_n A_{n2}) + \cdots + a_{1n} (b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn})] \\ &= \frac{1}{D} [b_1 (a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \cdots + a_{1n} A_{1n}) + b_2 (a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + \cdots + a_{1n} A_{2n}) + \cdots \\ &\quad + b_i (a_{11} A_{i1} + a_{12} A_{i2} + \cdots + a_{1n} A_{in}) + \cdots + b_n (a_{11} A_{n1} + a_{12} A_{n2} + \cdots + a_{1n} A_{nn})] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{D} (b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot D + \cdots + b_n \cdot 0) = \frac{1}{D} (b_1 \cdot D) = b_1$$

$$= \frac{1}{D} (b_1 \cdot D) = b_1$$

所以(16)式是方程组(14)的解.

第二步:

欲证方程组(14)只有唯一解.

若证只能有唯一解:

则证得解的唯一性.

将解 $x_j = \frac{D_j}{D}$ 代入方程组(14)中,得

在上述恒等式中,将第 j 个恒等式相加,得

将这 n 个恒等式相加,得

因为

所以

故方程组(14)只有唯一解.

证二:用初等变换法.

(1) 将系数行列式 D 化为上三角行列式.

(15)

第二步:

(16)

$b_2, \dots, b_n$ 代替后所

$$c_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

将解 $x_i = c_i (j = 1, 2, \dots, n)$ 代入(14)式中得恒等式

中验证是否满足.

(17)

将这 n 个恒等式相加,并应用定理一及其推论,于是得到

因为

所以

故方程组(14)只有唯一解,且其解为

证毕.

(1) 未知数个数等于方程个数:



(2) 系数行列式 $D \neq 0$.

但是,用克莱姆法则解 n 个未知量、 n 个方程的线性方程组,需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式,计算量相当大.所以在实际问题中,超过四个未知数的线性方程组一般不采用克莱姆法则求解,通常是采用在第四章里将介绍的方法,那里将对更一般的线性方程组,用更有效的方法来求解.尽管如此,克莱姆法则在理论上仍然是相当重要的,因为它清楚地告诉我们,当方程组(14)的系数行列式不等于零时,方程组(14)有唯一解,又从求解公式中可看到方程组(14)的解与它们的系数、常数项的依赖关系,而且以后将会看到,克莱姆法则还可用于一般线性方程组的研究和讨论.所以对克莱姆法则的条件、结论及其求解公式必须正确掌握和运用.

例 12 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

[解] 因为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0, \end{aligned}$$

所以方程组有唯一解. 又因为

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 18, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 36,$$



$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 36, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -18.$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 2, \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = -1.$$

例 13 求一个二次多项式 $f(x)$, 使得 $f(1) = -1, f(-1) = 9, f(2) = 3$.

[解] 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$,

由

$$\begin{cases} f(1) = -1, \\ f(-1) = 9, \\ f(2) = 3. \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} a + b + c = -1, \\ a - b + c = 9, \\ 4a + 2b + c = 3. \end{cases}$$

因为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

所以方程组有唯一解. 又因为

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 18,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -30,$$

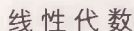
$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 9 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

所以

$$a = \frac{D_1}{D} = 3, \quad b = \frac{D_2}{D} = -5, \quad c = \frac{D_3}{D} = 1.$$

故所求多项式为

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 1.$$



下面讨论方程组(14)的特殊情形,即 $b_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$. 我们称方程组

为齐次线性方程组.

定理三 如果齐次线性方程组(18)有非零解, 则齐次线性方程组(18)的系数行列式 $D = 0$.

[证] 用反证法.

若 $D \neq 0$, 则由克莱姆法则得知, 方程组 (18) 只有唯一的零解, 这与已知条件相矛盾, 从而必有 $D = 0$. 证毕.

定理三清楚地告诉我们,方程组(18)的系数行列式 $D = 0$ 是方程组(18)有非零解的必要条件.在第四章我们将会看到, $D = 0$ 也是齐次线性方程组(18)有非零解的充分条件.

综合得到: 齐次线性方程组(18)有非零解的充要条件是系数行列式 $D = 0$.

例 14 设齐次线性方程组

有非零解,试问 λ 为何值?

[解] 由齐次线性方程组有非零解的必要条件得知

即
故得

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 = 0.$$

$\lambda = -2$ 或 $\lambda = 1$.



习题一

1. 写出下列行列式中元素 a_{12}, a_{31}, a_{33} 的余子式及代数余子式.

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

2. 用定义计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

3. 计算下列各行列式之值.

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(6) \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix};$$

$$(7) \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{vmatrix};$$



$$(8) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

4. 计算下列各 n 阶行列式.

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix};$$

$$(2) D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix};$$

$$(3) D_n = \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{vmatrix} (n \geq 2);$$

$$(4) D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \end{vmatrix};$$

$$(5) D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & b \\ & \ddots & & \\ & & a & b \\ & & b & a \\ & & & \ddots \\ b & & & & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} n \text{ 行} \\ \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} n \text{ 行} \end{matrix}$$

行列式中未写出的元素都是 0.

5. 证明:

$$(1) \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ 2x & x+y & 2y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-y)^3;$$

$$(2) \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(4) \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d);$$

$$(6) D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n;$$

$$(7) D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} \quad (\theta \neq k\pi)$$

$$= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta};$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix};$$



$$\begin{aligned}
 (8) D_n &= \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} \quad (a \neq b) \\
 &= \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.
 \end{aligned}$$

提示:(7)、(8) 两题应用数学归纳法证明.

6. 用克莱姆法则解下列各线性方程组.

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 5; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + y + z = a + b + c, \\ ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2, \\ bcx + cay + abz = 3abc. \end{cases}$$

(a, b, c 为互不相等的数)

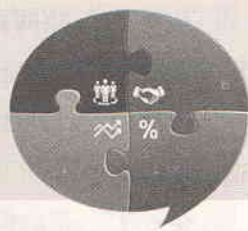
7. 求一个三次多项式 $f(x)$, 使得 $f(-1) = 0, f(1) = 4, f(2) = 3, f(3) = 16$.

8. 试问 λ 取何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + \lambda y + z = 0, \\ x + y + \lambda^2 z = 0 \end{cases}$$

有非零解.

第二章



n 维向量



在第一章我们介绍了线性方程组的克莱姆法则,可是用克莱姆法则解线性方程组是有条件的,如果条件不满足,解的存在性和唯一性需要作进一步的讨论,为了研究一般线性方程组的解的情况,还需 n 维向量的概念. 本章介绍的主要内容有: n 维向量的概念,向量组的线性相关性,向量组的秩,向量空间.

§1 n 维向量的概念

关于二维、三维向量的概念,在解析几何中已经建立起来了.

在平面上建立起平面直角坐标系,以坐标原点 $O(0,0)$ 为始点,以点 $A(x,y)$ 为终点的向量可以表示成

$$\overrightarrow{OA} = \alpha = xi + yj$$

其中 i, j 分别表示沿 Ox, Oy 轴正方向的单位向量, x, y 称为向量 α 的分量或坐标.

显然,在给定的平面直角坐标系中,向量 α 与两个有顺序的数所组成的数组 (x, y) 之间是一一对应关系,于是,向量 α 也可以表示成如下的形式:

$$\alpha = (x, y) \text{ 或 } \alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

同理,当我们在空间建立起空间直角坐标系,以坐标原点 $O(0,0,0)$ 为起点,以点 $P(x, y, z)$ 为终点的向量可以表示成



$$Z_A(\mu) = ($$

性方程中各未知数的系数顺序记下来,这样就得到由 n 个有顺序的数所组成的数组,也就是一个 n 维向量. 如上面的方程组中第 i 个方程就对应于一个 n 维向量为

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

于是,线性方程和向量之间有一一对应关系,向量也可以看成是线性方程的简化形式. 因此,我们可以通过对向量组的研究来研究线性方程组.

定义 2 把分量全是零的向量,称为零向量,记作 $\mathbf{0}$,即

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0).$$

把向量 $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ 称为向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 的负向量,记作 $-\alpha$,即

$$-\alpha = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n).$$

定义 3 设向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 和向量 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 如果它们对应的分量均相等,即

$$a_i = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

则称这两个向量相等,记作 $\alpha = \beta$.

n 维向量之间的基本关系是以向量的加法和数量乘法来表示的.

定义 4 设向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 向量 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 则向量 $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ 称为向量 α 与向量 β 的和,记作 $\alpha + \beta$,即

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

由上述定义,可立即推出如下运算规律:

- (1) 交换律 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
- (2) 结合律 $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;
- (3) $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$;
- (4) $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$.

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{0}$ 都是 n 维向量.

利用负向量定义,我们可以定义向量的减法:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n).$$

定义 5 设向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\lambda \in R$, 则向量 $(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$ 称为数 λ 与向量 α 的数量乘积,简称数乘,记作 $\lambda\alpha$,即

$$\lambda\alpha = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

由定义立即推出如下运算规律:

- (1) $1 \cdot \alpha = \alpha$;
- (2) $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha$;



$$(3) \lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta;$$

$$(4) (\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha.$$

其中 α, β 是 n 维向量, λ, μ 是常数.

由数乘定义及运算规律, 得

若 $\lambda\alpha = 0$, 则 $\lambda = 0$ 或 $\alpha = 0$.

向量的和、差及数乘运算统称为线性运算.

注: 两个向量只有维数相同时才有相等或不等的概念, 它们才能有加法或减法运算. 换句话说, 维数不同的两个向量不能进行比较, 也不能进行和或差的运算. 例如, 维数不同的零向量是不相等的.



§2 向量组的线性相关性

在这一节里我们介绍 n 维向量中两个基本概念: 向量组的线性相关与线性无关, 为此我们引进线性组合的概念.

定义 6 设 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 都是 n 维向量, 如果存在一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 使得

$$\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_m\alpha_m,$$

那么向量 α 称为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合. 或者说, α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示.

例 1 任意一个 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 都可由向量组

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$\varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

.....

$$\varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1)$$

线性表示.

事实上, 因为

$$\begin{aligned} & a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n \\ &= a_1(1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + a_n(0, 0, \dots, 1) \\ &= (a_1, 0, \dots, 0) + (0, a_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, a_n) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= \alpha, \end{aligned}$$

即



$$\alpha = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \cdots + a_n \varepsilon_n.$$

故任意一个 n 维向量 α 均可由向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性表示,或者说,任意一个 n 维向量 α 都是向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 的一个线性组合.

向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 称为 n 维单位向量组.

例 2 已知向量 $\alpha_1 = (0, 0, 1), \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (3, 3, 0)$, 试问 α_3 是否可由 α_1, α_2 线性表示?

[解] 显然

$$\alpha_3 = 0 \cdot \alpha_1 + 3\alpha_2,$$

故 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示.

例 3 已知向量 $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 2, 0), \alpha_3 = (0, 0, -\frac{1}{2}), \alpha_4 = (3, 2, 1)$, 试问 α_4 是否可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

[解] 若有 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使

$$\alpha_4 = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3,$$

下面来求 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. 把 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 代入上式,得

$$(3, 2, 1) = \lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 2, 0) + \lambda_3(0, 0, -\frac{1}{2})$$

$$= (\lambda_1, 2\lambda_2, -\frac{1}{2}\lambda_3),$$

于是

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3, \\ 2\lambda_2 = 2, \\ -\frac{1}{2}\lambda_3 = 1. \end{cases}$$

解得

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -2.$$

故 α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,即

$$\alpha_4 = 3\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3.$$

换个说法,即存在一组不全为零的数 $3, 1, -2, -1$, 使得

$$3\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 - \alpha_4 = 0$$

成立.

例 4 对于向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1, 0), \alpha_4 = (0, 0, 0, 1)$, 易知这四个向量中,任何一个向量均不能被其余的三个向量线性表示.



换个说法,即不存在一组不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, 使得

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3 + \lambda_4 \alpha_4 = 0$$

成立,只有当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ 时,才有

$$0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 + 0 \cdot \alpha_4 = 0$$

成立.

一般来说,在一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中,是否有某个向量能被其余向量线性表示,这是向量组的一种重要特性,我们称之为向量组的线性相关性,为此给出如下定义.

定义 7 设有 n 维向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m,$$

如果存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0$$

成立,则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关;如果上式仅当 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ 时才成立,则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

注意:

(1) 在向量组的线性相关定义中,只要求存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0$$

成立,并不要求 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 都不等于零.

(2) 在向量组的线性无关定义中,要特别注意“仅当”这个词.例如,向量 $\alpha_1 = (2, 0), \alpha_2 = (4, 0)$, 当 $k_1 = k_2 = 0$ 时,有 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = 0$, 但是由此不能判断出向量组 α_1, α_2 线性无关.这是因为并没有证明仅当 $k_1 = k_2 = 0$ 时,等式 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = 0$ 才成立.事实上,当 $k_1 = 2, k_2 = -1$ 时,等式 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = 0$ 也成立,因此向量组 α_1, α_2 线性相关.

(3) 一个向量组不是线性无关,就必然是线性相关.

(4) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关,且 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0$, 则

$$k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0.$$

根据定义 7, 可以直接得出以下结论.

(1) 只包含一个向量 α 的向量组线性相关,当且仅当 $\alpha = 0$.

事实上,因 α 线性相关,由定义 7 知,存在 $k \neq 0$, 使

$$k\alpha = 0,$$

由数乘的性质,有

$$\frac{1}{k}(k\alpha) = 0,$$

从而 $\alpha = 0$.

反之, 如果 $\alpha = 0$, 取 $k = 1$, 则 $1 \cdot \alpha = 0$, 故向量组 α 线性相关.

(2) 由一个非零向量 α 构成的向量组必线性无关.

事实上, 对任意不为零的数 k , 由数乘的性质, 有

$$k\alpha \neq 0.$$

所以只有当 $k = 0$ 时, 才有 $k\alpha = 0$, 故一个非零向量构成的向量组是线性无关的.

(3) 在二维与三维的情况下:

两个向量 α_1, α_2 线性相关, 就表示向量 α_1 与 α_2 共线; 两个向量 α_1, α_2 线性无关, 就表示向量 α_1 与 α_2 不共线.

三个三维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 就表示向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 共面; 三个三维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 就表示 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不共面.

为了加深对定义的理解, 下面举几个例子.

例5 试判断 n 维单位向量组

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$\varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1)$$

是否线性无关?

[解] 若

$$k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \dots + k_n\varepsilon_n = 0,$$

也就是

$$\begin{aligned} k_1(1, 0, \dots, 0) + k_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + k_n(0, 0, \dots, 1) &= (k_1, k_2, \dots, k_n) \\ &= (0, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

只有

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0.$$

故 n 维单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是线性无关的.

例6 判断下列向量组是否线性相关?

$$(1) \alpha_1 = (1, 1, 2), \alpha_2 = (3, 4, 5, 6);$$

$$(2) \alpha_1 = (1, -2, 3), \alpha_2 = (0, 2, -5), \alpha_3 = (-1, 0, 2);$$

$$(3) \alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (3, 2, 1), \alpha_3 = (1, 3, 1).$$

[解] (1) 由于向量 α_1 与 α_2 的维数不同, 因此无法讨论它们的线性相关性.



(2) 设存在三个数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0,$$

即

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(0, 2, -5) + k_3(-1, 0, 2) = (0, 0, 0).$$

从而有

$$\begin{cases} k_1 - k_3 = 0, \\ -2k_1 + 2k_2 = 0, \\ 3k_1 - 5k_2 + 2k_3 = 0. \end{cases}$$

而系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

由于齐次线性方程组的系数行列式等于零, 因此方程组有非零解, 即存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3 , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ 成立, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(3) 设存在三个数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1(1, 2, 3) + k_2(3, 2, 1) + k_3(1, 3, 1) = (0, 0, 0).$$

即

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 + k_3 = 0, \\ 2k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0, \\ 3k_1 + k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

而系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0,$$

由于齐次线性方程组的系数行列式不等于零, 因而方程组只有零解: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

例7 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明: 向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也线性无关.

[证] 设存在三个数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_1) = 0,$$

于是





$$(k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = 0.$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 根据定义必有

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

而系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

由于齐次线性方程组的系数行列式不等于零, 因此方程组只有零解, 即

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0,$$

故向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

注: 一般地, 设 n 个 n 维向量所组成的向量组为

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),$$

$$\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}),$$

.....

$$\alpha_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}).$$

且

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关的充分必要条件是 $D = 0$;

(2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是 $D \neq 0$.

下面介绍向量组的线性相关性的几种判别方法.

定理一 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m - 1$ 个向量线性表示.

[证] 充分性 由已知, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m - 1$ 个向量线性表示, 不妨设 α_m 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 因此存在数 $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$, 使得

$$\alpha_m = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_{m-1} \alpha_{m-1},$$

即

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_{m-1} \alpha_{m-1} + (-1) \alpha_m = 0.$$

由于 $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, -1$ 不全为零, 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

必要性 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 即有不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_m \alpha_m = 0.$$

不失一般性, 设 $k_m \neq 0$, 于是

$$\alpha_m = -\frac{k_1}{k_m} \alpha_1 - \frac{k_2}{k_m} \alpha_2 - \cdots - \frac{k_{m-1}}{k_m} \alpha_{m-1},$$

这表明向量 α_m 可被其余 $m-1$ 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示.

证毕.

注: 读者可进一步证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ (其中 $\alpha_1 \neq 0$) 线性相关的充分必要条件是至少有一向量 $\alpha_i (1 < i \leq r)$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ 线性表示.

性质 1 任意一个包含零向量的向量组必线性相关.

[证] 设所给向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 其中有一个零向量, 不妨设 $\alpha_1 = 0$. 现在取 $k_1 = 1, k_2 = k_3 = \cdots = k_m = 0$, 于是 $1, k_2, \dots, k_m$ 是一组不全为 0 的数, 从而有

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_m \alpha_m = 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \cdots + 0 \cdot \alpha_m = 0,$$

因此向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

证毕.

性质 2 两个向量线性相关的充分必要条件是它们的各对应分量成比例.

[证] 设两个向量 α_1, α_2 的各对应分量成比例, 比例系数为 k , 则

$$\alpha_2 = k \alpha_1,$$

即

$$k_1 \alpha_1 + (-1) \alpha_2 = 0.$$

由于系数 $k, -1$ 不全为 0, 所以向量 α_1, α_2 线性相关. 设 α_1, α_2 线性相关, 即有不全为零的数 k_1, k_2 , 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = 0,$$

不妨设 $k_1 \neq 0$, 则

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1} \alpha_2,$$

这说明向量 α_1 与 α_2 的各对应分量成比例.

证毕.

此性质表明, 由两个成比例的向量构成的向量组是线性相关的; 换个说法, 由两个不成比例的向量构成的向量组必线性无关.

例如, 向量 $\alpha_1 = (1, 2, 3)$

又如, 向量 $\alpha_1 = (2, 0)$

性无关.

性质 3 如果一个

[证] 设向量组

量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相

由上式, 显然有

$$k_1 \alpha_1 +$$

由于 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 不全为

α_n 线性相关.

在一个向量组 $\alpha_1,$

$\dots, \alpha_n$ 的部分向量组, 仍

性质 4 如果一个

[证] 用反证法.

若存在部分向量组

个向量组线性无关相矛

定理二 设向量组

α_1, β 线性相关, 则 β 可

[证] 因为 $\alpha_1, \alpha_2,$

使得

下面证明 $k \neq 0$ (用反证

于是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots,$

β

■ β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$

例 8 判别下列各

(1) $\alpha_1 = (1, 2, 3)$

(2) $\alpha_1 = (1, -1)$



例如, 向量 $\alpha_1 = (1, 1, 2)$, $\alpha_2 = (3, 3, 6)$, 由于 $\alpha_2 = 3\alpha_1$, 所以向量 α_1 与 α_2 线性相关;
又如, 向量 $\alpha_1 = (2, 0)$, $\alpha_2 = (1, 4)$, 因为 α_1 与 α_2 的对应分量不成比例, 故向量 α_1, α_2 线性无关.

性质 3 如果一个向量组的一部分向量线性相关, 则整个向量组就线性相关.

[证] 设向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_m (s \leq m)$, 不失一般性, 假定其中的一部分向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 即有不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0.$$

由上式, 显然有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s + 0 \cdot \alpha_{s+1} + \dots + 0 \cdot \alpha_m = 0.$$

由于 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 不全为零, 因而 $k_1, k_2, \dots, k_s, 0, \dots, 0$ 也不全为零, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_m$ 线性相关. 证毕.

定理 1 线性无关.

在一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中, 任取若干个向量组成的向量组, 称为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的部分向量组, 简称部分组.

性质 4 如果一个向量组线性无关, 那么它的任意一个部分向量组也线性无关.

[证] 用反证法.

若存在部分向量组线性相关, 则由性质 3 可知, 整个向量组也线性相关, 这与假设整个向量组线性无关相矛盾, 所以任意一个部分向量组也线性无关. 证毕.

定理 2 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 若添加向量 β 后所得向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示.

[证] 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 所以存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m, k$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m + k\beta = 0.$$

下面证明 $k \neq 0$ (用反证法). 假设 $k = 0$, 则 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 不全为零, 且有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0,$$

于是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 与已知条件相矛盾, 因此, $k \neq 0$, 从而

$$\beta = \left(-\frac{k_1}{k}\right)\alpha_1 + \left(-\frac{k_2}{k}\right)\alpha_2 + \dots + \left(-\frac{k_m}{k}\right)\alpha_m,$$

证毕.

例 8 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示.

例 8 判别下列各向量组的线性相关性.

(1) $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\alpha_2 = (4, -2, 1, 1)$, $\alpha_3 = (0, 0, 0, 0)$;

(2) $\alpha_1 = (1, -1, 0)$, $\alpha_2 = (-2, 5, 1)$, $\alpha_3 = (-4, 10, 2)$.

证毕.

换个说法, 由两个不



【解】 (1) 由于 $\alpha_3 = (0, 0, 0, 0)$ 是零向量, 根据性质 1 可知, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(2) 容易看出, $\alpha_3 = 2\alpha_2$, 由性质 2 可知, 向量组 α_2, α_3 线性相关, 再根据性质 3 可得, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

例 9 判断向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4$ 的线性相关性.

【解】 因为

$$\alpha_3 + \alpha_4 - (\alpha_3 + \alpha_4) = 0,$$

所以向量组 $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4$ 线性相关, 由性质 3 可知, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4$ 也线性相关.

例 10 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性相关, 证明: β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示.

【证】 因为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 所以根据性质 4 可知, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

又向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性相关, 所以根据定理二可知, β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 即

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3.$$

于是

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + 0\alpha_4,$$

因此 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示.

定理三 设

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$\beta_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}, a_{i,r+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

如果 r 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 那么 $r+1$ 维向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 也线性无关.

【证】 设存在 m 个数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 使得

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_m\beta_m = 0,$$

即

$$\begin{aligned} & k_1(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1r}, a_{1,r+1}) + k_2(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2r}, a_{2,r+1}) \\ & + \dots + k_m(a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mr}, a_{m,r+1}) = (0, 0, \dots, 0, 0). \end{aligned}$$

从而

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性

[illegible]

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0.$$

证毕.

注:

【解】 令 $\beta_1 = (1, a, a^2), \beta_2 = (1, b, b^2), \beta_3 = (1, c, c^2)$, 则



$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b),$$

因为 a, b, c 两两互不相同, 所以 $D \neq 0$.

因此向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 由定理三, 得向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

定理四 任意 $n+1$ 个 n 维向量都是线性相关的.

[证] 设 $n+1$ 个 n 维向量为

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),$$

$$\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}),$$

.....

$$\alpha_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}),$$

$$\alpha_{n+1} = (a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, \dots, a_{n+1,n}).$$

在这 $n+1$ 个向量中同时增加一个分量 0, 得到下列 $n+1$ 个 $n+1$ 维向量

$$\beta_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, 0),$$

$$\beta_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, 0),$$

.....

$$\beta_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}, 0),$$

$$\beta_{n+1} = (a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, \dots, a_{n+1,n}, 0).$$

由这 $n+1$ 个向量构成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

故 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}$ 线性相关, 由定理三注(1) 知, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 也线性相关.

推论 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 都是 n 维向量, 如果 $m > n$, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 必线性相关.

定理四及推论可简单地叙述为: 向量个数大于维数的向量组是线性相关的.

§3 向量组的秩

现在我们来研究向量组之间的一些关系.

定义 8 设有两个 n 维向量组

$$A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r;$$

$$B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s.$$

如果向量组 A 中的每个向量都可由向量组 B 中的向量线性表示, 则称向量组 A 可由向量组 B 线性表示. 如果向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 并且向量组 B 也可由向量组 A 线性表示, 则称向量组 A 与向量组 B 等价.

由定义 8 不难证明, 每一个向量组都可由它自身线性表示. 还容易推出, 如果向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 向量组 B 又可由向量组 C 线性表示, 那么向量组 A 可由向量组 C 线性表示.

根据上述结论, 可以得出等价向量组之间有如下的性质:

- (1) 反身性: 每一个向量组都与它自身等价;
- (2) 对称性: 如果向量组 A 与向量组 B 等价, 则向量组 B 也与向量组 A 等价;
- (3) 传递性: 如果向量组 A 与向量组 B 等价, 向量组 B 与向量组 C 等价, 则向量组 A 与向量组 C 等价.

例 12 验证向量组

$$\alpha_1 = (1, 2, 3), \quad \alpha_2 = (1, 0, 2)$$

与向量组

$$\beta_1 = (3, 4, 8), \quad \beta_2 = (2, 2, 5), \quad \beta_3 = (0, 2, 1)$$

等价.

[解] 事实上, 可以验证它们之间有如下关系:

$$\alpha_1 = \beta_1 - \beta_2, \quad \alpha_2 = 2\beta_2 - \beta_1;$$

$$\beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2.$$

故两个向量组等价.

例 13 判定以下两个向量组是否等价.

$$A: \alpha_1 = (-1, 1, 0), \quad \alpha_2 = (-1, 2, 1),$$

$$B: \beta_1 = (0, 1, 1), \quad \beta_2 = (1, 0, 1), \quad \beta_3 = (2, 1, 2).$$

[解] 容易求出



$$\alpha_1 = \beta_1 - \beta_2 + 0 \cdot \beta_3, \quad \alpha_2 = 2\beta_1 - \beta_2 + 0 \cdot \beta_3.$$

即向量组 A 可用向量组 B 线性表示.

我们考虑 β_3 能否用 α_1, α_2 线性表示.

设

$$\beta_3 = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2,$$

即

$$(2, 1, 2) = \lambda_1(-1, 1, 0) + \lambda_2(-1, 2, 1).$$

于是

$$\begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 = 2, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1, \\ \lambda_2 = 2. \end{cases}$$

此方程组无解, 故 β_3 不能用 α_1, α_2 线性表示, 因而向量组 B 不能用向量组 A 线性表示, 也即向量组 A 与 B 不等价.

为了进一步讨论向量组的一些重要性质, 我们引进最大线性无关向量组和向量组的秩等概念.

定义 9 若一个向量组中的部分向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 满足:

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关;
- (2) 向量组中任一向量都是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合.

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是该向量组的一个最大线性无关向量组或极大线性无关向量组, 简称最大无关组或极大无关组.

例 14 设有向量组

$$\alpha_1 = (1, 0, 0), \quad \alpha_2 = (0, 1, 0), \quad \alpha_3 = (1, 1, 0),$$

试求向量组的一个最大线性无关组.

[解] 显然 α_1, α_2 线性无关, 而 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, 所以 α_1, α_2 是一个最大线性无关组. 另一方面, 容易看出, α_1, α_3 或 α_2, α_3 也都是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的最大无关组.

注意:

- (1) 一般来说, 一个向量组的最大线性无关组不是唯一的.
- (2) 由定义 9 可得到一个基本性质: 一个向量组与它的最大线性无关组是等价的.
- (3) 由(2)及等价的传递性可知, 一个向量组的任意两个最大线性无关组都是等价的.
- (4) 一个线性无关向量组的最大线性无关组就是这个向量组本身.
- (5) 当一个向量组的向量都是零向量时, 那么这个向量组的最大无关组是空集.

例 15 全体 n 维向量所构成的向量组记作 R^n . 设 n 维向量组 E 为 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$, 则 E

是 R^n 的一个最大线性无关组.

[证] 在例 5 中

任一 n 维向量 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

即 R^n 中任一向量都可由

$\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是 R^n 中的

例 16 设 n 维向量

的一个最大线性无关组.

[证] 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$

是 n 维向量 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$

线性无关, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$

定理五 设有向量组

如果向量组 A 可以由

[证] 用反证法

上式的系数构成 r 个

因为 $r > s$, 即向量的

个数 $k_1, k_2, \dots, k_r$, 使

而这 r 个数 $k_1, k_2, \dots, k_r$

将(1)式代入(3)式





$$\begin{aligned}
& k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r \\
&= k_1(a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1s}\beta_s) + k_2(a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2s}\beta_s) \\
&\quad + \cdots + k_r(a_{r1}\beta_1 + a_{r2}\beta_2 + \cdots + a_{rs}\beta_s) \\
&= (k_1a_{11} + k_2a_{21} + \cdots + k_ra_{r1})\beta_1 + \cdots + (k_1a_{1s} + k_2a_{2s} + \cdots + k_ra_{rs})\beta_s,
\end{aligned}$$

由(2)式知,上式中 β_i 前的系数全为0,故

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0.$$

于是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关,这与假设向量组 A 线性无关矛盾,即 r 不可能大于 s ,

因而 $r \leq s$.

证毕.

推论1 两个线性无关的等价的向量组,一定包含相同个数的向量.

[证] 设有两个等价的线性无关的向量组

$$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r; \quad B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s.$$

因向量组 A 是线性无关的向量组,且可由向量组 B 线性表示,由定理五,则有 $r \leq s$. 同理,由定理五可得 $s \leq r$,所以 $r = s$,即两个向量组所含的向量个数相同. 证毕.

推论2 在一个向量组中,它的任意两个最大无关组所含向量的个数相同.

[证] 设 A 与 B 都是向量组 T 的最大线性无关组,因为 A 与 T 等价, B 与 T 等价,因此 A 与 B 等价,由推论1可知,向量组 A 与向量组 B 所含向量的个数相同. 证毕.

由此可见,一个向量组的最大无关组虽然可以不是唯一的,但最大无关组所含向量的个数总是确定的,根据这个结论,我们引出向量组秩的概念.

定义10 向量组的最大无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩.

说明:向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的秩记为 $R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$.

例如,由例15可知,单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是向量组 R^n 的一个最大无关组,所以 $R(R^n) = n$.

对向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (1, 1, 0)$,由例14可知, α_1, α_2 为其一个最大无关组,所以 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$.

显然,当向量组所含向量个数较多时,通过找最大无关组得到向量组的秩不是很理想,我们将在第三章介绍求向量组的秩与最大无关组的一个比较实用方法.

由定义10容易证明,一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关的充要条件是:这个向量组的秩等于它所含向量的个数 r .

推论3 等价的向量组有相同的秩.

[证] 设两个等价的向量组为

$$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r; \quad B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m.$$



且向量组 A 的秩为 r , 向量组 B 的秩为 s , 并各取它们的一个最大无关组:

$$A_1: \alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir}; \quad B_1: \beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{is}.$$

由于向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 显然它的部分向量组 A_1 可由向量组 B 线性表示, 而 B 可由 B_1 线性表示, 于是 A_1 可由 B_1 线性表示, 且向量组 A_1 线性无关, 根据定理五得 $r \leq s$. 同理可证 $s \leq r$, 因此有 $r = s$. 证毕.

§4 向量空间

在 §1 中, 我们把 n 元有序数组

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

称为 n 维向量, 并且对它规定了加法及数乘两种运算, 这两种运算满足以下八条运算规律 (设 α, β, γ 都是 n 维向量, λ, μ 是实数):

$$(1) \alpha + \beta = \beta + \alpha;$$

$$(2) (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$$

$$(3) \alpha + 0 = \alpha;$$

$$(4) \alpha + (-\alpha) = 0;$$

$$(5) 1 \cdot \alpha = \alpha;$$

$$(6) \lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha;$$

$$(7) \lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta;$$

$$(8) (\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha.$$

下面介绍向量空间概念.

定义 11 设 V 为 n 维向量的集合, 若 V 非空, 且对任意 $\alpha, \beta \in V, \lambda \in R$, 有 $\alpha + \beta \in V, \lambda\alpha \in V$, 即 V 对于加法及乘数两种运算封闭, 则称集合 V 为向量空间.

所谓封闭, 是指对于集合 V , 若 $\alpha \in V, \beta \in V$, 则 $\alpha + \beta \in V$; 若 $\alpha \in V, \lambda \in R$, 则 $\lambda\alpha \in V$.

检验一个 n 维向量集合是否构成向量空间, 只需检验对运算的封闭性, 因为 n 维向量规定的加法及数乘两种运算显然满足八条线性运算规律.

例 17 n 维向量的全体 R^n 就是一个向量空间, 因为任意两个 n 维向量之和仍然是 n 维向量, 数 λ 乘 n 维向量也仍然是 n 维向量, 它们都属于 R^n . 特别地, 二维向量全体组成的向量空间记作 R^2 , 三维向量全体组成的向量空间记作 R^3 .

例 18 集合

$$V_1 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 + 2x_2 = 0, x_1, x_2 \in R\}$$



是一个向量空间.

因为若

$$\alpha = (a_1, a_2), \quad \beta = (b_1, b_2) \in V_1,$$

则

$$a_1 + 2a_2 = 0, \quad b_1 + 2b_2 = 0,$$

又

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \quad \lambda \alpha = (\lambda a_1, \lambda a_2) (\lambda \in R),$$

从而

$$(a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2) = (a_1 + 2a_2) + (b_1 + 2b_2) = 0 + 0 = 0,$$

$$\lambda a_1 + 2(\lambda a_2) = \lambda(a_1 + 2a_2) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

于是

$$\alpha + \beta \in V_1, \quad \lambda \alpha \in V_1.$$

故 V_1 是一个向量空间.

例 19 集合

$$V_2 = \{x = (1, x_2, \dots, x_n) \mid x_2, x_3, \dots, x_n \in R\}$$

不是向量空间.

因为若 $\alpha = (1, a_2, \dots, a_n) \in V_2$, 则 $2\alpha = (2, 2a_2, \dots, 2a_n) \notin V_2$, 对数乘运算不满足封闭性.

定义 12 设 V_2 是一个向量空间, V_1 是 V_2 的一个非空子集, 若 V_1 对于 V_2 中所定义的加法及数乘两种运算也构成一个向量空间, 则称 V_1 为 V_2 的子空间.

在向量空间 V 中, 只由零向量组成的子集是 V 的一个子空间, 称为零空间; 向量空间本身也是 V 的一个子空间; 任何由 n 维向量所组成的向量空间 V , 总有 $V \subset R^n$, 所以这样的向量空间总是 R^n 的子空间.

例 20 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 为 n 维向量, 集合

$$V = \{x = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in R\}$$

是一个向量空间.

因为 (1) 若 $x_1, x_2 \in V$, 则

$$x_1 = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \dots + a_m \alpha_m \quad (a_i \in R),$$

$$x_2 = b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + \dots + b_m \alpha_m \quad (b_i \in R).$$

于是

$$x_1 + x_2 = (a_1 + b_1) \alpha_1 + (a_2 + b_2) \alpha_2 + \dots + (a_m + b_m) \alpha_m \in V.$$

(2) 若 $x_1 \in V, \lambda \in R$, 则

$$\lambda x_1 = \lambda a_1 \alpha_1 + \lambda a_2 \alpha_2 + \dots + \lambda a_m \alpha_m \in V.$$

这个向量空间称为由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 所生成的向量空间.

定义 13 在向量空间 V 中, 如果存在 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 满足:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关;

(2) V 中任一向量总可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 则称向量组



$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$$

为向量空间 V 的一组基, r 称为向量空间的维数.

维数为 r 的向量空间, 称为 r 维向量空间. 在 r 维向量空间中, 任意 r 个线性无关的向量均可取作向量空间的基. 一个向量空间的维数是唯一的, 但它的基不是唯一的.

零空间没有线性无关的向量, 所以它没有基, 它的维数是零.

若把向量空间看作向量组, 则 V 的基就是向量组的最大无关组, V 的维数就是向量组的秩.

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一组基, 则 V 可表示为

$$V = \{x = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_r \alpha_r \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in R\}.$$

这就较清楚地显示出向量空间 V 的构造.

例 21 在向量空间 R^n 中,

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1)$$

是 R^n 的一组基 (称为标准基), 则 R^n 可表示为

$$R^n = \{x = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R\}.$$

在 R^n 中取 $e_1 = (1, 1, \dots, 1), e_2 = (0, 1, \dots, 1), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$,

容易证明 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 是 R^n 中另一组基, 则 R^n 可表示为

$$R^n = \{x = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n \mid \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in R\}.$$

从上面的例子可以看出, 一个向量空间的基不是唯一的, 因此在不同基下, 向量空间

表示形式也不是唯一的.

定义 14 设 V 为 r 维向量空间, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为 V 的一组基, $\alpha \in V$, 若

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_r \alpha_r,$$

则称 $x_1, x_2, \dots, x_r$ 为向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 下的坐标, 记为

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}.$$

例如, 单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是向量空间 R^n 的一组基, 则 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n$

在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标为

$$X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$



例 22 设 $V = \{(0, a_2, a_3, \dots, a_n) \mid a_2, a_3, \dots, a_n \in R\}$, (1) 证明: V 为向量空间; (2) 证明: 向量组 $\alpha_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \alpha_2 = (0, 1, 1, \dots, 0), \dots, \alpha_{n-1} = (0, 1, 1, \dots, 1)$ 为 V 的一组基; (3) 求向量 $\alpha = (0, a_2, a_3, \dots, a_n) \in V$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 下的坐标.

[证] (1) 任取 $\alpha, \beta \in V, \lambda \in R$, 则

$$\alpha = (0, a_2, \dots, a_n), \quad \beta = (0, b_2, \dots, b_n).$$

且

$$\alpha + \beta = (0, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \in V;$$

$$\lambda \alpha = (0, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) \in V.$$

故 V 为向量空间.

(2) 设 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{n-1} \alpha_{n-1} = 0$, 则

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} = 0, \\ k_2 + \dots + k_{n-1} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ k_{n-2} + k_{n-1} = 0, \\ k_{n-1} = 0. \end{cases}$$

于是 $k_1 = k_2 = \dots = k_{n-1} = 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 线性无关.

任取 $\alpha = (0, a_2, a_3, \dots, a_n) \in V$, 且设 $\alpha = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + \dots + l_{n-2} \alpha_{n-2} + l_{n-1} \alpha_{n-1}$, 则

$$\begin{cases} l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} = a_2, \\ l_2 + \dots + l_{n-1} = a_3, \\ \dots\dots\dots \\ l_{n-2} + l_{n-1} = a_{n-1}, \\ l_{n-1} = a_n, \end{cases}$$

解之, 得

$$\begin{cases} l_1 = a_2 - a_3, \\ l_2 = a_3 - a_4, \\ \dots\dots\dots \\ l_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-1}, \\ l_{n-1} = a_{n-1}. \end{cases}$$

故 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 线性表示.

因此 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 为向量空间 V 的一组基.

(3) 由(2)

1. 已知向量

求 $2\alpha + 3\beta$.

2. 设

$\alpha_1 = (1, 0, 1)$

$\alpha_2 = (1, 1, 1)$

$\beta_1 = (2, 1, 1)$

$\beta_2 = (2, 1, 1)$

求上述 β

形式

3. 求证任

$\alpha_2 = (2, 1, 0, 0)$

上述表示式

4. 证明: 若

5. 证明: 向

量

6. 设 α_1, α_2

或线性相关

7. 证明: 在

α_1, α_2 线性表

8. 已知 α_1

(1) 当 c 为

(2) 当 c 为



用: V 为向量空间; (2)
 $(1, 1, \dots, 1)$ 为 V 的一
 的坐标.

(3) 由(2), 得 $\alpha = (0, a_2, a_3, \dots, a_n)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 下的坐标为

$$X = \begin{bmatrix} a_2 - a_3 \\ a_3 - a_4 \\ \vdots \\ a_{n-2} - a_{n-1} \\ a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

习题二

1. 已知向量 $\alpha = (5, -1, 3)$, 且 $3\alpha - 4\beta = (3, -7, 17)$,

试求 $2\alpha + 3\beta$.

2. 设

$$\alpha_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \alpha_2 = (1, 1, 0, 0),$$

$$\alpha_3 = (1, 1, 1, 0), \quad \alpha_4 = (1, 1, 1, 1);$$

$$\beta_1 = (2, 1, -1), \quad \beta_2 = (2, 1, -1, 0),$$

$$\beta_3 = (2, 1, -1, 0, 0), \quad \beta_4 = (2, 1, -1, 3).$$

试问上述 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 都能表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合吗? 若能则写出表示式.

3. 试证任一向量 $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ 都可以由向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\alpha_2 = (2, 1, 0, 0)$, $\alpha_3 = (3, 2, 1, 0)$, $\alpha_4 = (4, 3, 2, 1)$ 线性表示, 并且表示方法只有一种, 写出这种表示式.

4. 证明: n 维零向量可由任意的 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.

5. 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中的任一向量 $\alpha_j (1 \leq j \leq m)$ 都可由这个向量组线性表示.

6. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3$. 试用线性相关定义判别 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是否线性相关?

7. 证明: 在 n 维向量空间中, 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 则任一向量 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.

8. 已知 $\alpha_1 = (1, 2, 3)$, $\alpha_2 = (3, -1, 2)$, $\alpha_3 = (2, 3, c)$. 试问

(1) 当 c 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(2) 当 c 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关? 并把 α_3 表示为 α_1, α_2 的线性组合.



9. 判别下列向量组的线性相关性.

(1) $\alpha_1 = (2, 5), \alpha_2 = (1, 3, -1, 7);$

(2) $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 2, 3); \alpha_3 = (1, 6, 3);$

(3) $\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (1, -4, 1), \alpha_3 = (1, 14, 7);$

(4) $\alpha_1 = (1, 1, -3, 4), \alpha_2 = (-1, 3, 1, 2),$

$\alpha_3 = (0, 2, -1, 3), \alpha_4 = (-2, 6, 2, 4);$

(5) $\alpha_1 = (1, 0, 1, 0, 0), \alpha_2 = (1, 1, 0, 0, 0), \alpha_3 = (0, 1, 1, 0, 0),$

$\alpha_4 = (0, 0, 1, 1, 0), \alpha_5 = (0, 1, 0, 1, 1).$

10. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则每个向量都可以由其余向量线性表示, 这种说法对吗?

11. 试证: 若 n 维单位向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 可以由 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

12. 假设 α 可以用 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示:

$$\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m,$$

问这种表示法唯一吗?

13. 求下列向量组的一个最大线性无关组及向量组的秩.

$\alpha_1 = (2, 1, 3, -1), \alpha_2 = (3, -1, 2, 0),$

$\alpha_3 = (4, 2, 6, -2), \alpha_4 = (4, -3, 1, 1).$

14. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 问:

(1) α_1 能否由 α_2, α_3 线性表示?

(2) α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

15. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 请用两种方法证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也线性无关.

16. 集合

$$V = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in R \text{ 满足 } x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$$

是否为一个向量空间?

17. 证明: 向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 0), \alpha_2 = (2, 1, 3), \alpha_3 = (3, 1, 2)$ 为 R^3 的一组基, 并求向量 $\alpha = (5, 0, 7)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标.