

线性代数学习指导书

第一章 行列式

内容提要

行列式概念

n 阶行列式: n 阶行列式是用特定的符号

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示的由 $n \times n$ 个数 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 确定的一个数. 其中数 a_{ij} 称为行列式的第 i 行、第 j 列元素. $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 形成行列式的主对角线, $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ 形成另一条对角线. 从 D_n 中划去第 i 行第 j 列后, 剩下的 $(n-1) \times (n-1)$ 个元素数组成的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij} . 而 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式. n 阶行列式 D_n 的值由下面的归纳法定义, 即

当 $n=1$ 时, $D_1 = |a_{11}| = a_{11}$;

假定 $n-1$ 阶行列式的值已经定义, 则 M_{ij} 的值随之确定, 且 n 阶行列式 D_n 的值为

$$D_n = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+j} a_{1j}M_{1j} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}M_{1n},$$

$$\text{或 } D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

对角行列式: 对角线以外的元素全为零的行列式称为对角行列式, 其形式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

三角形行列式: 对角线以下 (上) 的元素全为零的行列式称为上 (下) 三角行列式, 其形式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ 和 } \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

转置行列式：将行列式 D 的行列互换所得到的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D' 或 D^T .

行列式性质

性质 1：行列式与它的转置行列式相等；

性质 2：互换行列式的两行（列），行列式的值变号；

性质 3：如果行列式有两行（列）完全相同，则行列式的值为零；

性质 4：行列式的某一行（列）中所有元素都乘以同一个数 k ，等于用数 k 乘以该行列式；

性质 5：行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号之外；

性质 6：如果行列式中有两行（列）对应元素成比例，则行列式的值为零；

性质 7：如果行列式的某一行（列）的所有元素都是两个数之和，则该行行列式可写成两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots (a_{li} + a'_{li}) \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots (a_{2i} + a'_{2i}) \cdots a_{2n} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1} \cdots (a_{ni} + a'_{ni}) \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{li} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2i} \cdots a_{2n} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1} \cdots a_{ni} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a'_{li} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a'_{2i} \cdots a_{2n} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1} \cdots a'_{ni} \cdots a_{nn} \end{vmatrix};$$

性质 8：行列式的某一行（列）各元素乘以同一个数加到另一行（列）的对应元素上去，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

行列式按行（列）展开定理：行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和。

行列式任意一行（列）的各元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和为零。即

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = \begin{cases} D & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} D & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

克莱姆法则

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

若其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则线性方程组有且只有唯一解, 其解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_j (j=1, 2, \cdots, n)$ 是将系数行列式 D 中第 j 列的元素用常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 代替后所得到的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

齐次线性方程组

[illegible]

有非零解的充分必要条件是其系数行列式 $D=0$.

特殊行列式的计算

(i) 上(下)三角形行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

(ii) 准三角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{m \times n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{m \times n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

(iii) 范德蒙行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

例题分析

例 1 写出下列行列式中元素 a_{11}, a_{23}, a_{33} 的余子式及代数余子式.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 8 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 (1) 元素 a_{11}, a_{23}, a_{33} 的余子式分别为:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

相应的代数余子式分别为:

$$A_{11} = M_{11}, \quad A_{23} = -M_{23}, \quad A_{33} = M_{33}.$$

(2) 元素 a_{11}, a_{23}, a_{33} 的余子式为:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 7 & 8 & -2 \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \end{vmatrix}, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -2 \end{vmatrix}.$$

相应的代数余子式分别为:

$$A_{11} = M_{11}, \quad A_{23} = -M_{23}, \quad A_{33} = M_{33}.$$

例2 用行列式定义计算下列行列式

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad (2) D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

解 (1) 由行列式的定义, 得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-5) - 2 \times (-1) + 3 \times 7$$

$$= 18.$$

(2) 由行列式的定义, 得

$$D_n = (-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= [(-1)^{1+2}]^2 \times 2! \times \begin{vmatrix} 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= [(-1)^{1+2}]^{n-2} \times (n-2)! \begin{vmatrix} 0 & n-1 \\ n & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} n!.$$

例3 已知 104、143、377 均能被 13 整除，试不计算行列式的值，用行列式的性质证明：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix} \text{ 能被 13 整除.}$$

分析 因为 $104 = 1 \times 100 + 0 \times 10 + 4$, $143 = 1 \times 100 + 4 \times 10 + 3$, $377 = 3 \times 100 + 7 \times 10 + 7$ 及行列式元素的特点，所以可将第一列乘以 100、第二列乘以 10 加到第三列，则第三列的三个元素分别为 104, 143, 377，于是利用行列式的性质便可得到结论.

证 因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 104 \\ 1 & 4 & 143 \\ 3 & 7 & 377 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \\ 3 & 7 & 29 \end{vmatrix},$$

又因为右端行列式的元素皆为整数，由行列式定义知其值为整数，故原行列式能被 13 整除.

例4 设 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & -1 & 4 \end{vmatrix}$, 求(1) A_{44} , (2) 利用(1)的结果求 $\sum_{k=1}^4 A_{4k}$.

解 (1) $A_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{r_1-r_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$

(2) 因为行列式的第二行的元素分别乘以第四行对应元素的代数余子式相加，得

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + 2A_{44} = 0.$$

所以

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = -A_{44} = -1.$$

例5 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27,$

求 $A_{41} + A_{42} + A_{43}$ 和 $A_{44} + A_{45}$.

分析 如果先求出 A_{41}, A_{42}, A_{43} , 然后再相加求出 $A_{41} + A_{42} + A_{43}$, 则要计算 3 个四阶行列式, 比较麻烦, 本例可利用行列式第二行、第四行元素的特点及行列式展开定理得到关于 $A_{41} + A_{42} + A_{43}$ 及 $A_{44} + A_{45}$ 的两个方程, 通过解方程得到所求的值.

解 由行列式展开定理, 得

$$\begin{cases} A_{41} + A_{42} + A_{43} + 2(A_{44} + A_{45}) = 27, \\ 2(A_{41} + A_{42} + A_{43}) + A_{44} + A_{45} = 0. \end{cases}$$

解上述方程组得

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} = -9, \quad A_{44} + A_{45} = 18.$$

例 6(2001.IV) 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix},$$

求第四行各元素余子式之和.

解 以 M_{ij} 表示 D 中元素 a_{ij} 的余子式, 考虑行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

因为 D_1 中第四行元素的余子式 $M_{41}, M_{42}, M_{43}, M_{44}$ 也是 D 中第四行相应元素的余子式

$M_{41}, M_{42}, M_{43}, M_{44}$, 将 D_1 按第四行展开, 得

$$\begin{aligned} D_1 &= (-1)^{4+1}(-1)M_{41} + (-1)^{4+2}M_{42} + (-1)^{4+3}(-1)M_{43} + (-1)^{4+4}M_{44} \\ &= M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44}. \end{aligned}$$

于是 D 中第四行各元素余子式之和等于 D_1 ,

不难求得 $D_1 = -28$,

所以 $M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} = -28$.

例 7 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x-1 & 2x-1 \\ 1 & x-2 & 3x-2 \\ 1 & x-3 & 4x-3 \end{vmatrix}$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

分析 要证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$, 只要证明 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上满足罗尔定理的条件.

证 因为 $f(x)$ 为关于 x 的二次多项式, 故在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在区间 $(0, 1)$ 内可导, 又因为

$$f(0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad f(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

即有 $f(0) = f(1)$.

由罗尔定理, 可知存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

例8 计算行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解 解法一 (化三角形行列式)

$$\begin{aligned} D_4 &\stackrel{r_1 \leftrightarrow r_4}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{r_2+r_1 \\ r_4-r_3 \\ r_3+2r_1}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{r_2 \leftrightarrow r_3}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{r_3-4r_2 \\ r_4-2r_2}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -41 & -17 \\ 0 & 0 & -23 & -10 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{r_3-2r_4}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -23 & -10 \end{vmatrix} \stackrel{r_4+4r_3}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{r_3+2r_4}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{r_4-3r_3}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix} \\ &= -19. \end{aligned}$$

解法二 (逐次降阶法)

$$\begin{aligned} D_4 &\stackrel{\substack{c_3+c_1 \\ c_4+2c_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 9 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & -5 & 3 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\substack{c_2-9c_1 \\ c_3-5c_1}}{=} \begin{vmatrix} 3 & -23 & -10 \\ 4 & -41 & -17 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -23 & -10 \\ -41 & -17 \end{vmatrix} \\ &= -19. \end{aligned}$$

注：上述两种解法是求三、四阶行列式常用的方法.

例9 计算行列式

$$(1) D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}; (2) D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

解 (1) 显而易见, 当 $2-x^2=1$, 即 $x=\pm 1$ 时, D_4 种第一、二行对应元素相同, 此时 $D_4=0$, 即 D_4 有因子 $(x-1)(x+1)$.

当 $9-x^2=5$, 即 $x=\pm 2$ 时, D_4 种第三、四行对应元素相同, 此时 $D_4=0$, 因此 D_4 还有因子 $(x-2)(x+2)$.

又因为行列式 D_4 为 x 的 4 次多项式, 所以

$$\text{令 } D_4 = a(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

现只要求出 x^4 的系数即可. 又当 $x=0$ 时, 可算出 $D_4=-12$, 于是 $a=-3$, 故

$$D_4 = -3(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

$$(2) \text{ 因为 } D_4^2 = D_4 D_4'$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix},$$

$$\text{其中 } f = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

$$\text{所以 } D_4 = \pm(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

又因为行列式 D_4 中 a^4 的系数为 1,

故

$$D_4 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

注：上例中(1)的解法称为分析因子法. 即运用行列式性质找出 D_4 的全部因子, 最后再确

定最高次项系数；(2)的解法虽有一定的特殊性，但说明当 D_n^2 或 $D_n^2 = D_n D'_n$ 易于计算时，可先求出 D_n^2 ，然后确定 D_n 的符号，从而求出 D_n 。

例10 利用行列式性质证明

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

证 左边 $\stackrel{c_1+c_2+c_3}{=} \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & c+a & a+b \\ 2(a_1+b_1+c_1) & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ 2(a_2+b_2+c_2) & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$

$$\stackrel{c_1+c_2+c_3}{=} 2 \begin{vmatrix} a+b+c & c+a & a+b \\ a_1+b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ a_2+b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{c_2-c_1}{=} 2 \begin{vmatrix} a+b+c & -b & -c \\ a_1+b_1+c_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2+b_2+c_2 & -b_2 & -c_2 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{c_3-c_1}{=} 2 \begin{vmatrix} a+b+c & -b & -c \\ a_1+b_1+c_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2+b_2+c_2 & -b_2 & -c_2 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{c_1+c_2+c_3}{=} 2 \begin{vmatrix} a & -b & -c \\ a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & -b_2 & -c_2 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{c_1+c_2+c_3}{=} 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \text{右边}.$$

例11 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

分析 因为主对角线上的元素非零，利用行列式性质可将第一列（行）除第一个元素外的其它元素变为零，从而行列式变成上（下）三角行列式，从而可计算出行列式的值。

解 $D_n \stackrel{c_1 - \sum_{j=2}^n c_j}{=} \begin{vmatrix} 1 - \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$

$$=n!(1-\sum_{j=2}^n \frac{1}{j}).$$

例12 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

分析 该行列式具有特点：各行元素之和相同，且各列除对角线上的元素外均相同，可考虑下面方法求解。

解 解法一 从第二列起将各列加到第一列，提出公因子，然后从第二行起各行减去第一行，得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \\ &= [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ 1 & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \\ &= [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} \\ &= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

解法二 把行列式的第1行乘以 (-1) 分别加到第 $2, 3, \cdots, n$ 行上去，得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix},$$

依次将第 $2, 3, \cdots, n$ 列加到第1列，得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)](x-a)^{n-1}.$$

解法三 构造与 D_n 等值的 $n+1$ 阶行列式 D_{n+1}

$$D_n = D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix},$$

将行列式的第 1 行乘以 (-1) 分别加到第 $2, 3, \dots, n+1$ 行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix},$$

(1) 当 $x-a \neq 0$ 时, 依次将第 $2, 3, \dots, n+1$ 列乘 $\frac{1}{x-a}$ 加到第 1 列, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + \frac{na}{x-a} & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= (1 + \frac{na}{x-a})(x-a)^n$$

$$= [x+(n-1)](x-a)^{n-1}.$$

(2) 当 $x-a=0$ 时, 显然有 $D_n=0$.

由(1)、(2)可知 $D_n = [x+(n-1)](x-a)^{n-1}$.

注: 本例解法一是根据行列式的特点, 利用行列式的性质, 将 n 阶行列式的计算转化为上(下)三角行列式的计算, 这是计算 n 阶行列式常用的方法.

例 13 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

分析 本例的行列式是将上例中的行列式主对角线以下的元素 a 变为 $-a$ ，其它元素不变而得到的，但无法用上例的方法求值，下面用拆边法来计算该行列式的值.

解

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} (x+a)-a & a & a & \cdots & a \\ 0-a & x & a & \cdots & a \\ 0-a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0-a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x+a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -a & -a & \cdots & -a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

将第一个行列式按第一列展开，第二个行列式的第一列依次加到其它各列，则有

$$\begin{aligned} D_n &= (x+a)D_{n-1} + \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -a & -2a & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -2a & -2a & \cdots & x-a \end{vmatrix} \\ &= (x+a)D_{n-1} - a(x-a)^{n-1}. \end{aligned} \quad (1)$$

另一方面，

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} (x-a)+a & 0+a & 0+a & \cdots & 0+a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

将第一个行列式按第一行展开，第二个行列式的第一行依次加到其它各行，则

$$\begin{aligned}
 D_n &= (x-a)D_{n-1} + \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x+a & 2a & \cdots & 2a \\ 0 & 0 & x+a & \cdots & 2a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+a \end{vmatrix} \\
 &= (x-a)D_{n-1} + a(x+a)^{n-1}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

由 (1) $\times (x-a) - (2) \times (x+a)$, 得

$$2aD_n = a(x-a)^n + a(x+a)^n,$$

$$\text{当 } a \neq 0 \text{ 时, } D_n = \frac{(x-a)^n + (x+a)^n}{2},$$

$$\text{当 } a = 0 \text{ 时, } D_n = x^n,$$

$$\text{综上所述得 } D_n = \frac{(x-a)^n + (x+a)^n}{2}.$$

例 14 计算 n 阶行列式

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix};$$

$$(2) D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}.$$

解 (1) 解法一 从第二列起将各列加到第一列, 提出公因子, 然后从第二行起各行减去第一行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 + \sum_{i=1}^n a_i & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 + \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 + \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + \sum_{i=1}^n a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \\
&= (1 + \sum_{i=1}^n a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^n a_i.
\end{aligned}$$

解法二 （加边法）

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^n a_i & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^n a_i.
\end{aligned}$$

(2) 从第二列起将各列加到第一列，提出公因子，再从第 n 行开始依次减前一行，得

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \frac{n(n+1)}{2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

再从第 2 行开始到第 $n-1$ 行, 各行减去第一行, 得

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & n \\ -n & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix},$$

再从第 1 列开始到第 $n-2$ 列, 各列加到第 $n-1$ 列, 得

$$\begin{aligned}
D_n &= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot n^{n-2} \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot n^{n-1} \cdot \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}$$

例 15 证明:

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}$$

$$= \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n, \quad (\alpha \neq \beta).$$

证 方法一（归纳法）

当 $n=1$ 时，结论显然成立.

假设对于阶数小于 n 的行列式结论成立，下面证明对 n 阶行列式也结论成立.

将 D_n 按第一行展开，得

$$\begin{aligned} D_n &= (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2} \\ &= (\alpha + \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}) \\ &\quad - \alpha\beta(\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-3} + \beta^{n-2}) \\ &= \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \cdots + \beta^n. \end{aligned}$$

方法二（递推法）

将 D_n 按第一行展开，得

$$D_n = (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2},$$

$$\text{即 } D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}),$$

上式对一切 n 都成立，故递推可得

$$\begin{aligned} D_n - \alpha D_{n-1} &= \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}) \\ &= \cdots \\ &= \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1) \\ &= \beta^{n-2}[(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta - \alpha(\alpha + \beta)] \\ &= \beta^n, \end{aligned}$$

$$\text{即 } D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n. \quad (3)$$

同理可得

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^n, \quad (4)$$

由 (4) $\times \alpha - (3) \times \beta$ ，得

$$(\alpha - \beta)D_n = \alpha^{n+1} - \beta^{n+1},$$

又因为 $\alpha \neq \beta$,

所以

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

$$= \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n.$$

方法三

因为

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix},$$

第一个行列式记为 D_{n1} , 则

$$D_{n1} = \alpha \begin{vmatrix} 1 & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}$$

$$= \alpha^2 \begin{vmatrix} 1 & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}$$

$$= \cdots$$

$$= \alpha^n \begin{vmatrix} 1 & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha^n.$$

第二个行列式记为 D_{n2} , 则

$$D_{n2} = \beta \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}$$

$$= \beta D_{n-1}.$$

所以

$$D_n = D_{n1} + D_{n2} = \alpha^n + \beta D_{n-1}, \quad (5)$$

由于 D_n 中 α, β 地位相同, 交换位置不改变 D_n ,
因此

$$D_n = \beta^n + \alpha D_{n-1}, \quad (6)$$

由 $(5) \times \alpha - (6) \times \beta$, 得

$$(\alpha - \beta)D_n = (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}),$$

又因为 $\alpha \neq \beta$,

所以

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \\ &= \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n. \end{aligned}$$

注: 当 $\alpha = \beta$ 时,

$$\begin{aligned} D_n &= \alpha^n + \beta D_{n-1} \\ &= \alpha^n + \alpha D_{n-1} \\ &= \alpha^n + \alpha(\alpha^{n-1} + \alpha D_{n-2}) \\ &= 2\alpha^n + \alpha^2 D_{n-2} \\ &= \cdots \\ &= (n-1)\alpha^n + \alpha^{n-1} D_1 \\ &= (n+1)\alpha^n. \end{aligned}$$

例 16 利用范德蒙行列式计算

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{vmatrix} a^n & (a+1)^n & \cdots & (a+n)^n \\ a^{n-1} & (a+1)^{n-1} & \cdots & (a+n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a+1 & \cdots & a+n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}; \\ (2) \quad & \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $a_i \cdot b_i \neq 0 (i=1, 2, \cdots, n+1)$.

分析 这两个行列式与范德蒙行列式形式不同, 但若把(1)的最后一行依次与前面各行交换到第一行, 新的最后一行再依次与前面各行交换到第二行, 这样继续进行下去, 共经过交换 $\frac{n(n+1)}{2}$ 次行后可化为范德蒙行列式. (2)只要每行提出 $a_i^n (i=1, 2, \cdots, n+1)$ 也可化为范德蒙

行列式.
解

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \text{原式} &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a+1 & \cdots & a+n \\ a^2 & (a+1)^2 & \cdots & (a+n)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n & (a+1)^n & \cdots & (a+n)^n \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} [(a+i-1) - (a+j-1)] \\
 &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (i-j) \\
 &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n! \cdot (n-1)! \cdots 2! \cdot 1!.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \text{原式} &= a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \cdots & (\frac{b_1}{a_1})^{n-1} & (\frac{b_1}{a_1})^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \cdots & (\frac{b_2}{a_2})^{n-1} & (\frac{b_2}{a_2})^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \cdots & (\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^{n-1} & (\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^n \end{vmatrix} \\
 &= (a_1 a_2 \cdots a_{n+1})^n \cdot \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} \left(\frac{b_i}{a_i} - \frac{b_j}{a_j} \right) \\
 &= \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (b_i a_j - b_j a_i).
 \end{aligned}$$

例 17 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

分析 行列式 D_n 不是范德蒙行列式, 但它和范德蒙行列式比较接近, 只要在第 $n-1$ 行与第 n 行之间适当加一行, 在加上一列便可构成一个范德蒙行列式.
解 考虑 $n+1$ 阶范德蒙行列式

$$= (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j),$$

$$D_n = M_{n,n+1} = -A_{n,n+1},$$
$$A_{n,n+1} = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j),$$
$$D_n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

证 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ 是 $f(x)$ 的 $n+1$ 个不同的根, 则有齐次线性方程组

其系数行列式 D 的转置即 D' 为一个 $n+1$ 阶的范德蒙行列式.

$$D = D' = \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0,$$

故 $f(x)$ 是零多项式.

21

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda & x & x & \cdots & x \\ y & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ y & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix} \quad (n \geq 2).$$

分析 这个行列式大部分元素相同，所以问题的关键是想办法变出尽可能多的零。

解 从第二行开始，以后各行都减去第 n 行，然后从第二列开始，以后各列都加到最后

一列，再按第一列展开，得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} \lambda & x & x & \cdots & x & x \\ 0 & \alpha - \beta & 0 & 0 & 0 & \beta - \alpha \\ 0 & 0 & \alpha - \beta & 0 & 0 & \beta - \alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - \beta & \beta - \alpha \\ y & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & x & x & \cdots & x & (n-1)x \\ 0 & \alpha - \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - \beta & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - \beta & 0 \\ y & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha + (n-2)\beta \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \alpha - \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha - \beta & 0 \\ \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha + (n-2)\beta \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & (n-1)x \\ \alpha - \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha - \beta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\alpha - \beta)^{n-2} [\alpha + (n-2)\beta] + (-1)^{n+1} (-1)^n (n-1)xy(\alpha - \beta)^{n-2} \\ &= (\alpha - \beta)^{n-2} [\lambda\alpha + (n-2)\lambda\beta - (n-1)xy]. \end{aligned}$$

例 20 证明：

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

证 方法一 按最后一行展开, 得

$$\begin{aligned} \text{左边} &= (x+a_1)(-1)^{2n} \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} + a_2(-1)^{2n-1} \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \cdots \\ &+ a_{n-1}(-1)^{n+2} \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 \end{vmatrix} + a_n(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} \\ &= (x+a_1)x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(-1)^{n+2}x(-1)^{n-2} + a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} \\ &= \text{右边}. \end{aligned}$$

方法二 降阶为三角形行列式

记原式右边多项式为 $f(x)$, 从第二列起, 依次对左边行列式作 $c_1 + x^{j-1}c_j (j=2, 3, \cdots, n)$,

则左边行列式变为第一列除 $(n, 1)$ 元素为 $f(x)$ 外, 其余元素全为零的一个行列式, 再按第一列展开, 得到一个下三角行列式,

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ f(x) & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} \\ &= f(x)(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 \end{vmatrix} \\ &= f(x)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = f(x), \end{aligned}$$

其中 $f(x)$ 为原式右边的多项式.

方法三 数学归纳法

记左边行列式为 D_n , 则

$D_1 = |x + a_1| = x + a_1$ ($|x + a_1|$ 是一阶行列式, 不是绝对值!), 即当 $n=1$ 时, 命题成立.

假设 $D_{n-1} = x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x + a_{n-1}$.

对 D_n 按第一列展开, 得

$$\begin{aligned} D_n &= x D_{n-1} + a_n (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} \\ &= x(x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) + a_n (-1)^{n+1} (-1)^{n-1} \\ &= x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n, \end{aligned}$$

因此由数学归纳法, 命题对一切正整数 n 成立.

小结: 以上例题说明了行列式计算的一般方法, 从这些例题可以总结出计算行列式的基本原则和常用的方法.

基本原则:

(i) 利用行列式性质把行列式的某一行(列)尽可能化简, 使得这一行只剩下一个或很少几个不为零, 然后按该行(列)用展开定理计算(化零降阶法).

(ii) 利用行列式性质把行列式化成某些特殊的行列式或自己熟悉的行列式类型, 然后得到结果.

(iii) 利用行列式性质得到所求行列式的递推公式, 然后求解.

常用方法:

(i) 某一行(列)乘数加到另一行(列)上去或某一行(列)乘数加到其余各行(列)上去.

(ii) 第 $n-1$ 行(列)乘数加到第 n 行(列)上, 之后再从第 $n-2$ 行(列)乘数加到第 $n-1$ 行(列)上, 直到需要为止.

(iii) 若干行(列)加到某一行(列)上去或者各行(列)全加到某一行(列)上去.

(iv) 利用行列式性质把行列式按某一行(列)或按某几行(列)或按 n 行(列)拆开计算(称为拆行列法).

(v) 把 n 阶行列式变成等值的 $n+1$ 阶行列式(称为加边法).

目标测试题

一、填空题

1. 如果 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M \neq 0$, $D_1 = \begin{vmatrix} 3a_{11} & 4a_{11} - a_{12} & -a_{13} \\ 3a_{21} & 4a_{21} - a_{22} & -a_{23} \\ 3a_{31} & 4a_{31} - a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$, 则 $D_1 =$ _____.

2. 已知 D 为四阶行列式, 且第 3 列元素分别为 $1, 3, -2, 2$, 它们的余子式分别为

$3, -2, 1, 1$, 则 $D = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. (1988.IV)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

4. (1991.V) n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

5. 已知 a, b, c 为一元三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 的三个根, 则
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二、选择题

1. 设 $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{nn} & a_{n-1,n} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n,n-1} & a_{n-1,n-1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n-1,n} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}$, 则有().

(A) $D_1 = D_2$,

(B) $D_1 = -D_2$,

(C) $D_1 = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} D_2$,

(D) $D_1 = (-1)^n D_2$.

2. 行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\quad) a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

(A) -1 , (B) $-\frac{1}{2}n(n-1)$, (C) $-n$, (D) $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$.

3.
$$\begin{vmatrix} 8 & 27 & 64 & 125 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\quad).$$

(A) 12 , (B) -12 , (C) 16 , (D) -16 .

4. 四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = ().$$

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$, (B) $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$,

(C) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$, (D) $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$.

5. 行列式 $D=0$ 的必要条件是().

(A) D 中有两行(列)元素对应成比例,

(B) D 中至少有一行各元素可用行列式的性质化为零,

(C) D 中有一行元素全为零,

(D) D 中任一行各元素都可用行列式的性质化为零.

三、计算下列各行列式的值

1. $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$

2. $D_{10} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}.$

3. $D_n = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix} \quad (n \geq 3).$

4. $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

四、解方程

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 + x \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & a_4 \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & a_4 \\ a_1 + x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

五、证明题

1. 已知 1632, 2160, 3696, 5024 都可被 16 整除, 不求行列式的值, 证明:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \text{可被 } 16 \text{ 整除.}$$

2. 证明: n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = n+1.$$

第二章 n 维向量

内容提要

n 维向量概念

n 维向量: 由 n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成的 n 元有序数组 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 称为 n 维向量, 记为 $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

负向量: 称向量 $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ 为向量 $\vec{\alpha}$ 的负向量, 记为 $-\vec{\alpha}$.

零向量: 称 $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ 为零向量.

向量相等: 设 $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{\beta} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 如果 $a_i = b_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则称向量 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 相等, 记为 $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

n 维向量的运算

向量加法: 设 $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{\beta} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 为 n 维向量, 则称 n 维向量 $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ 为 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的和, 记为 $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, 即 $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$.

向量减法: 向量的减法定义为 $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$, 其中 $-\vec{\beta}$ 为 $\vec{\beta}$ 的负向量.

数乘向量: 设 $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\lambda \in R$, 称 n 维向量 $(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$ 为数 λ 与向量 $\vec{\alpha}$ 的数量乘积, 记为 $\lambda \vec{\alpha}$, 即 $\lambda \vec{\alpha} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$.

n 维向量的运算规律

向量的加法与数乘统称为向量的线性运算, 向量的线性运算满足以下运算规律

设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ 均为 n 维向量, λ, μ 为实数, 则有

$$(i) \quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha};$$

$$(ii) \quad (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma});$$

$$(iii) \quad \vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha};$$

$$(iv) \quad \vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0};$$

$$(v) \quad 1 \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha};$$

$$(vi) \quad \lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha};$$

$$(vii) \quad \lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$$

$$(viii) \quad (\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}.$$

向量组的线性相关性

线性组合: 设 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$ 为 m 个 n 维向量, $l_1, l_2, \dots, l_m$ 为 m 个数, 则称

$$l_1\vec{\alpha}_1 + l_2\vec{\alpha}_2 + \dots + l_m\vec{\alpha}_m,$$

为 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$ 的一个线性组合.

线性表示: 设 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$ 为 m 个 n 维向量, $\vec{\beta}$ 也为一个 n 维向量, 且存在数

$k_1, k_2, \dots, k_m$, 使

$$\vec{\beta} = k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + \dots + k_m\vec{\alpha}_m,$$

则称 $\vec{\beta}$ 可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$ 线性表示, 或称 $\vec{\beta}$ 为 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$ 的一个线性组合.

线性相关: 对于 n 维向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$, 如果存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使

$$k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + \dots + k_m\vec{\alpha}_m = \vec{0},$$

则称向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$ 线性相关; 否则称它们线性无关.

向量组的秩

向量组等价: 设有两个 n 维向量组

$$A: \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s,$$

$$B: \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_t,$$

如果向量组 A 中每个向量都能由向量组 B 中的向量线性表示, 则称向量组 A 能由向量组 B 线性表示; 又若向量组 B 能由向量组 A 线性表示, 则称向量组 A 与向量组 B 等价.

最大线性无关组: 如果向量组 A 中有 r 个向量 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r$ 线性无关, 且 A 中的任一向

量都是 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r$ 的线性组合, 则称 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r$ 为向量组 A 的一个最大线性无关组 (或极大线性无关组), 简称最大无关组 (或极大无关组).

向量组的秩: 最大线性无关组所含向量的个数 r 称为向量组 A 的秩, 同时规定仅含零向量的向量组的秩为 0.

向量空间

向量空间: 设 V 为 n 维向量的集合, 如果 V 非空, 且 V 对于向量加法和数乘两种运算封闭, 即若 $\vec{\alpha} \in V, \vec{\beta} \in V, \vec{\alpha} + \vec{\beta} \in V$; 若 $\vec{\alpha} \in V, \lambda \in R, \lambda \vec{\alpha} \in V$, 则称 V 为向量空间.

基: 如果向量空间 V 中有 r 个向量 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r$ 线性无关, 且 V 中任一向量都可以由这 r 个向量线性表示, 则称向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r$ 为向量空间 V 的一个基,

维数: 向量空间的基所含向量的个数 r 称为向量空间 V 的维数, 同时称向量空间 V 为 r 维向量空间. 特别规定零空间没有基, 它的维数为零.

子空间: 设 V_1, V_2 为向量空间, 如果 $V_1 \subset V_2$, 则称 V_1 为 V_2 的子空间.

线性相关性的主要定理

定理 1: 向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$ 线性相关的充分必要条件是至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

定理 2: 设向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$ 线性无关, 而 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m, \vec{\beta}$ 线性相关, 则 $\vec{\beta}$ 可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$ 线性表示, 且表示式是唯一的.

定理 3: 如果向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r$ 线性相关, 则 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r, \vec{\alpha}_{r+1}, \dots, \vec{\alpha}_m$ 线性相关; 如果向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r, \vec{\alpha}_{r+1}, \dots, \vec{\alpha}_m$ 线性无关, 则它的任一部分向量组也线性无关.

定理 4: 含零向量的向量组必线性相关.

定理 5: r 维向量组的每一个向量添上 $n-r$ 个分量成为 n 维向量组, 如果 r 维向量组线性无关, 则 n 维向量组也线性无关; 如果 n 维向量组线性相关, 则 r 维向量组也线性相关.

定理 6: 当 $m > n$ 时, m 个 n 维向量组一定线性相关.

定理 7: 向量组线性无关的充分必要条件是它所含向量个数等于它的秩.

定理 8: 如果向量组 $A: \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r$ 为向量组 T 的一个最大无关组, 则向量组 A 与向量组 T 等价.

定理 9: 如果向量组 $A: \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r$ 可由向量组 $B: \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_s$ 线性表示, 且向量组 A 线性无关, 则 $r \leq s$.

定理 10: 等价的线性无关向量组所含向量的个数相等.

定理 11: 如果向量组 A 能由向量组 B 线性表示, 且向量组 A 的秩为 r , 向量组 B 的秩为 s , 则 $r \leq s$.

定理 12: 等价的向量组有相同的秩.

例题分析

例 1 判别下列向量组的线性相关性

(1) $\vec{\alpha}_1 = (2, 5), \vec{\alpha}_2 = (1, 3, -2);$

(2) $\vec{\alpha}_1 = (1, 1, 1), \vec{\alpha}_2 = (1, 2, 3), \vec{\alpha}_3 = (1, 6, 3);$

(3) $\vec{\alpha}_1 = (1, 2, 3), \vec{\alpha}_2 = (1, -4, 1), \vec{\alpha}_3 = (1, 1, 4);$

(4) $\vec{\alpha}_1 = (2, 1, -1, -1), \vec{\alpha}_2 = (0, 3, -2, 0), \vec{\alpha}_3 = (2, 4, -3, -1);$

(5) $\vec{\alpha}_1 = (-2, 1, 2, 10), \vec{\alpha}_2 = (3, 5, 10, 2), \vec{\alpha}_3 = (2, 1, 2, -1), \vec{\alpha}_4 = (1, 3, 6, 2),$

$\vec{\alpha}_5 = (2, 6, 2, 4).$

分析 对于向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$, 设有数组 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使 $k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + \dots + k_m\vec{\alpha}_m = \vec{0}$,

比较等式两端向量的对应分量, 可得 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 为未知量的齐次线性方程组, 于是判别向量组线性相关性的问题转化为齐次线性方程组是否有非零解的问题. 因而当齐次线性方程组有非零解时, 向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$ 线性相关; 当齐次线性方程组只有零解时, 向量组

$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$ 线性无关. 该方法是讨论向量组线性相关性的一般方法.

解 (1) 因为只有维数相同的向量组成的向量组, 才能讨论向量组的线性相关性, 而 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 的维数不相同, 故不可能讨论 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 的线性相关性.

(2) 设有数组 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + k_3\vec{\alpha}_3 = \vec{0},$$

即 $k_1(1, 1, 1) + k_2(1, 2, 3) + k_3(1, 6, 3) = (0, 0, 0).$

于是有方程组

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 + 2k_2 + 6k_3 = 0, \\ k_1 + 3k_2 + 3k_3 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

由于其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$$

故齐次线性方程组(1)只有零解 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$,

所以向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性无关.

(3) 设有数组 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1 \vec{\alpha}_1 + k_2 \vec{\alpha}_2 + k_3 \vec{\alpha}_3 = \vec{0},$$

即 $k_1(1, 2, 3) + k_2(1, -4, 1) + k_3(1, 14, 7) = (0, 0, 0)$.

于是有方程组

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0, \\ 2k_1 - 4k_2 + 14k_3 = 0, \\ 3k_1 + k_2 + 7k_3 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

由于其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 14 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

故齐次线性方程组(2)有非零解, 即存在 k_1, k_2, k_3 不全为零, 使得 $k_1 \vec{\alpha}_1 + k_2 \vec{\alpha}_2 + k_3 \vec{\alpha}_3 = \vec{0}$,

所以向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性相关.

例如, 解方程组(2), 得 $k_1 = -3k_3, k_2 = 2k_3$. 显然若 k_3 取任意非零值时, k_1, k_2 随之取定, 这时 k_1, k_2, k_3 不全为零, 且满足

$$k_1 \vec{\alpha}_1 + k_2 \vec{\alpha}_2 + k_3 \vec{\alpha}_3 = \vec{0},$$

所以向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性相关.

(4) 设有数组 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1 \vec{\alpha}_1 + k_2 \vec{\alpha}_2 + k_3 \vec{\alpha}_3 = \vec{0},$$

即 $k_1(2, 1, -1, -1) + k_2(0, 3, -2, 0) + k_3(2, 4, -3, -1) = (0, 0, 0, 0)$,

于是有方程组

$$\begin{cases} 2k_1 + 2k_2 = 0, \\ k_1 + 3k_2 + 4k_3 = 0, \\ -k_1 - 2k_2 - 3k_3 = 0, \\ -k_1 - k_3 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

解之, 得 $k_1 = -k_3, k_2 = -k_3$. 可见, $k_1 = k_2 = -1, k_3 = 1$ 是方程组(3)的一组非零解, 所以向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性相关.

(5) 因为 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_5$ 是五个四维向量组成的向量组, 由定理 “当 $m > n$ 时, m 个 n

维向量组成的向量组一定线性相关”可知向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_5$ 线性相关.

例2 设向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性相关, 向量组 $\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4$ 线性无关,

问: (1) $\vec{\alpha}_1$ 能否由 $\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示? 说明理由;

(2) $\vec{\alpha}_4$ 能否由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示? 说明理由.

解 (1) $\vec{\alpha}_1$ 能由 $\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示.

因为 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性相关, 故存在不全为零的数组 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1 \vec{\alpha}_1 + k_2 \vec{\alpha}_2 + k_3 \vec{\alpha}_3 = \vec{0},$$

如果 $k_1 = 0$, 则 k_2, k_3 不全为零, 且 $k_2 \vec{\alpha}_2 + k_3 \vec{\alpha}_3 = \vec{0}$,

所以 $\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性相关, 从而 $\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4$ 线性相关, 与已知矛盾.

故 $k_1 \neq 0$, 于是有

$$\vec{\alpha}_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right) \vec{\alpha}_2 + \left(-\frac{k_3}{k_1}\right) \vec{\alpha}_3 = l_1 \vec{\alpha}_2 + l_2 \vec{\alpha}_3 \quad (4)$$

(2) $\vec{\alpha}_4$ 不能由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示.

用反证法, 若 $\vec{\alpha}_4$ 能由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示, 则存在数组 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得

$$\vec{\alpha}_4 = \lambda_1 \vec{\alpha}_1 + \lambda_2 \vec{\alpha}_2 + \lambda_3 \vec{\alpha}_3,$$

利用(4)式, 得

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_4 &= \lambda_1 (l_1 \vec{\alpha}_2 + l_2 \vec{\alpha}_3) + \lambda_2 \vec{\alpha}_2 + \lambda_3 \vec{\alpha}_3 \\ &= (\lambda_1 l_1 + \lambda_2) \vec{\alpha}_2 + (\lambda_1 l_2 + \lambda_3) \vec{\alpha}_3, \end{aligned}$$

即 $\vec{\alpha}_4$ 能由 $\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示, 从而 $\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4$ 线性相关, 与已知矛盾.

所以 $\vec{\alpha}_4$ 不能由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示.

注: 在讨论向量组的线性相关性时, 常常使用反证法.

例3 设 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 是互不相同的数, $r \leq n$, 且 $\vec{\alpha}_i = (1, b_i, b_i^2, \dots, b_i^{n-1}) (i=1, 2, \dots, r)$, 证

明: 向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r$ 是线性无关.

证 作向量组

$$\begin{aligned}\vec{\beta}_1 &= (1, b_1, b_1^2, \dots, b_1^{r-1}), \\ \vec{\beta}_2 &= (1, b_2, b_2^2, \dots, b_2^{r-1}), \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{\beta}_r &= (1, b_r, b_r^2, \dots, b_r^{r-1}).\end{aligned}$$

设存在数 $k_1, k_2, \dots, k_r$, 使得

$$k_1 \vec{\beta}_1 + k_2 \vec{\beta}_2 + \dots + k_r \vec{\beta}_r = \vec{0},$$

于是有

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \dots + k_r = 0, \\ b_1 k_1 + b_2 k_2 + \dots + b_r k_r = 0, \\ \dots\dots\dots \\ b_1^{r-1} k_1 + b_2^{r-1} k_2 + \dots + b_r^{r-1} k_r = 0. \end{cases} \quad (5)$$

其系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1^{r-1} & b_2^{r-1} & \dots & b_r^{r-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq r} (b_i - b_j),$$

由于 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 是互不相同的数, 所以 $D \neq 0$,

故齐次线性方程组(5)只有零解 $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$,

因而 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_r$ 线性无关.

又因为 $\vec{\alpha}_i = (1, b_i, b_i^2, \dots, b_i^{n-1}) (i=1, 2, \dots, r)$ 是在 $\vec{\beta}_i$ 中增加 $n-r$ 个分量

$b_i^r, b_i^{r+1}, \dots, b_i^{n-1} (i=1, 2, \dots, r)$ 得到的向量,

所以向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r$ 线性无关.

例 4 设向量 $\vec{\beta}$ 可由向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$ 线性表示, 但不能由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_{m-1}$ 线性表示, 证

明: $\vec{\alpha}_m$ 可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_{m-1}, \vec{\beta}$ 线性表示.

证 因为向量 β 可由向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$ 线性表示,

所以存在数组 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得

$$\vec{\beta} = k_1 \vec{\alpha}_1 + k_2 \vec{\alpha}_2 + \dots + k_m \vec{\alpha}_m,$$

如果 $k_m = 0$, 则 $\vec{\beta} = k_1 \vec{\alpha}_1 + k_2 \vec{\alpha}_2 + \cdots + k_{m-1} \vec{\alpha}_{m-1}$,

即 $\vec{\beta}$ 可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_{m-1}$ 线性表示, 与已知矛盾,

故 $k_m \neq 0$, 于是有

$$\vec{\alpha}_m = \left(-\frac{k_1}{k_m}\right)\vec{\alpha}_1 + \left(-\frac{k_2}{k_m}\right)\vec{\alpha}_2 + \cdots + \left(-\frac{k_{m-1}}{k_m}\right)\vec{\alpha}_{m-1} + \left(-\frac{1}{k_m}\right)\vec{\beta},$$

即 $\vec{\alpha}_m$ 可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_{m-1}, \vec{\beta}$ 线性表示.

例5 设向量 $\vec{\beta}$ 可由向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_m$ 线性表示, 证明: 表示法唯一的充分必要条件是 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_m$ 线性无关.

证 必要性 设 $\vec{\beta}$ 的表示式唯一,

又设有数组 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使得

$$k_1 \vec{\alpha}_1 + k_2 \vec{\alpha}_2 + \cdots + k_m \vec{\alpha}_m = \vec{0}.$$

由题设有

$$\vec{\beta} = l_1 \vec{\alpha}_1 + l_2 \vec{\alpha}_2 + \cdots + l_m \vec{\alpha}_m,$$

于是

$$\vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{0} = (l_1 + k_1) \vec{\alpha}_1 + (l_2 + k_2) \vec{\alpha}_2 + \cdots + (l_m + k_m) \vec{\alpha}_m.$$

因为 $\vec{\beta}$ 由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_m$ 的表示式唯一,

所以 $l_i + k_i = l_i (i = 1, 2, \cdots, m)$,

即 $k_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$,

故 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_m$ 线性无关.

充分性 设 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_m$ 线性无关

假设 $\vec{\beta}$ 有表示式

$$\vec{\beta} = l_1 \vec{\alpha}_1 + l_2 \vec{\alpha}_2 + \cdots + l_m \vec{\alpha}_m, \quad (6)$$

$$\vec{\beta} = \lambda_1 \vec{\alpha}_1 + \lambda_2 \vec{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{\alpha}_m. \quad (7)$$

由 (6) - (7), 得

$$(l_1 - \lambda_1) \vec{\alpha}_1 + (l_2 - \lambda_2) \vec{\alpha}_2 + \cdots + (l_m - \lambda_m) \vec{\alpha}_m = \vec{0},$$

因为 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_m$ 线性无关,

所以 $l_i - \lambda_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$,

即 $l_i = \lambda_i \ (i=1, 2, \cdots, m)$,

故 $\vec{\beta}$ 的表示式唯一.

注: 由例 5 易知, 设向量 $\vec{\beta}$ 可由向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_m$ 线性表示, 则表示法不唯一的充分必要条件是 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_m$ 线性相关.

例6 (2001 工程硕士) 设向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性无关, 证明: 向量组

$$\vec{\beta}_1 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3,$$

$$\vec{\beta}_2 = 2\vec{\alpha}_1 + 3\vec{\alpha}_2 + 4\vec{\alpha}_3,$$

$$\vec{\beta}_3 = 4\vec{\alpha}_1 + 9\vec{\alpha}_2 + 16\vec{\alpha}_3.$$

也线性无关.

分析 对于抽象的向量组证明其线性无关, 常采用的方法为待定系数法, 即先设有 $k_1\vec{\beta}_1 + k_2\vec{\beta}_2 + k_3\vec{\beta}_3 = \vec{0}$, 然后由已知得到 k_1, k_2, k_3 的齐次线性方程组, 再说明该方程组只有零解.

证 设有数组 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1\vec{\beta}_1 + k_2\vec{\beta}_2 + k_3\vec{\beta}_3 = \vec{0},$$

则

$$(k_1 + 2k_2 + 4k_3)\vec{\alpha}_1 + (k_1 + 3k_2 + 9k_3)\vec{\alpha}_2 + (k_1 + 4k_2 + 16k_3)\vec{\alpha}_3 = \vec{0},$$

因为 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性无关,

所以

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 4k_3 = 0, \\ k_1 + 3k_2 + 9k_3 = 0, \\ k_1 + 4k_2 + 16k_3 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

所以方程组(8)只有零解 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$,

故向量组 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\beta}_3$ 线性无关.

例 7 设向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_m$ 线性无关, 令 $\vec{\beta}_1 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_2 = \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3, \cdots,$

$\overrightarrow{\beta_{m-1}} = \overrightarrow{\alpha_{m-1}} + \overrightarrow{\alpha_m}$, $\overrightarrow{\beta_m} = \overrightarrow{\alpha_m} + \overrightarrow{\alpha_1}$, 证明:

(1) 当 m 为偶数时, 向量组 $\overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2}, \dots, \overrightarrow{\beta_m}$ 线性相关;

(2) 当 m 为奇数时, 向量组 $\overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2}, \dots, \overrightarrow{\beta_m}$ 也线性无关.

证 设数组 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得 $k_1 \overrightarrow{\beta_1} + k_2 \overrightarrow{\beta_2} + \dots + k_m \overrightarrow{\beta_m} = \vec{0}$,

则有

$$(k_1 + k_m) \overrightarrow{\alpha_1} + (k_1 + k_2) \overrightarrow{\alpha_2} + \dots + (k_{m-1} + k_m) \overrightarrow{\alpha_m} = \vec{0},$$

因为 $\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \dots, \overrightarrow{\alpha_m}$ 线性无关,

所以

$$\begin{cases} k_1 + k_m = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ k_{m-1} + k_m = 0. \end{cases} \quad (9)$$

其系数行列式

$$D_m = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{m+1},$$

(1) 当 m 为偶数时, $D_m = 0$, 方程组(9)有非零解,

故向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性相关.

(2) 当 m 为奇数时, $D_m = 2 \neq 0$, 方程组(9)只有零解 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$,

故 $\overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2}, \dots, \overrightarrow{\beta_m}$ 也线性无关.

例 8 设向量组 $\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \dots, \overrightarrow{\alpha_m} (m > 1)$ 线性无关, 且 $\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\alpha_1} + \overrightarrow{\alpha_2} + \dots + \overrightarrow{\alpha_m}$, 证明: 向量组

$\overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{\alpha_2}, \dots, \overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{\alpha_m}$ 线性无关.

证 设有数组 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得

$$k_1(\overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{\alpha_1}) + k_2(\overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{\alpha_2}) + \dots + k_m(\overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{\alpha_m}) = \vec{0},$$

即

$$(k_2 + k_3 + \dots + k_m) \overrightarrow{\alpha_1} + (k_1 + k_3 + \dots + k_m) \overrightarrow{\alpha_2} + \dots + (k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1}) \overrightarrow{\alpha_m} = \vec{0},$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关,

所以

[illegible]

其系数行列式

$$D_m = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1} (m-1) \neq 0,$$

所以线性方程(10)只有零解 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$,

故向量组 $\vec{\beta} - \vec{\alpha}_1, \vec{\beta} - \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\beta} - \vec{\alpha}_m$ 线性无关.

例9 设向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$ 线性无关, 且

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\beta_1} &= a_{11}\overrightarrow{\alpha_1} + a_{12}\overrightarrow{\alpha_2} + \cdots + a_{1m}\overrightarrow{\alpha_m}, \\ \overrightarrow{\beta_2} &= a_{21}\overrightarrow{\alpha_1} + a_{22}\overrightarrow{\alpha_2} + \cdots + a_{2m}\overrightarrow{\alpha_m}, \\ &\dots\dots\dots \\ \overrightarrow{\beta_m} &= a_{m1}\overrightarrow{\alpha_1} + a_{m2}\overrightarrow{\alpha_2} + \cdots + a_{mm}\overrightarrow{\alpha_m}.\end{aligned}$$

证明：向量组 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0$$

证 设有数组 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得

$$k_1 \overrightarrow{\beta_1} + k_2 \overrightarrow{\beta_2} + \cdots + k_m \overrightarrow{\beta_m} = \vec{0},$$

将 $\vec{\beta}_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \vec{\alpha}_j, (i=1, 2, \cdots, m)$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned} & k_1 \overrightarrow{\beta_1} + k_2 \overrightarrow{\beta_2} + \cdots + k_m \overrightarrow{\beta_m} \\ &= \sum_{i=1}^m k_i \overrightarrow{\beta_i} = \sum_{i=1}^m k_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \overrightarrow{\alpha_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m k_i a_{ij} \right) \overrightarrow{\alpha_j} = \vec{0}. \end{aligned}$$

因为 $\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \dots, \overrightarrow{\alpha_m}$ 线性无关,

所以

$$\sum_{i=1}^m k_i a_{ij} = 0, \quad 1, 2, \dots, m.$$

即

[illegible]

其系数行列式为

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix},$$

因为 $D' = D$, 且齐次线性方程组(12)只有零解的充分必要条件为 $D' \neq 0$,

所以向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性无关的充分必要条件为 $D \neq 0$.

例10 $\vec{\alpha}_1 = (1, 1, 1), \vec{\alpha}_2 = (1, 2, 3), \vec{\alpha}_3 = (1, 3, t)$, 则当 $t = \underline{\hspace{1cm}}$ 时, $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性相关; 当 $t = \underline{\hspace{1cm}}$ 时, $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性无关.

分析 当向量组的个数与维数相同时,若用这些向量作行(列)构成的行列式等于零,则向量组线性相关;否则向量组线性无关.

解 因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix} = t - 5,$$

所以当 $t=5$ 时, $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性相关; 而当 $t \neq 5$ 时, $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性无关.

例11 已知向量组 $A: \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 及向量组 $B: \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_t$ 的秩相等, 且向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 证明: 向量组 A 与向量组 B 等价.

分析 要证向量组 A 与向量组 B 等价, 只需证明向量组 B 可由向量组 A 表示.

证 设向量组 A, B 的秩都为 r ,

考虑向量组 $C: \overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \cdots, \overrightarrow{\alpha_s}, \overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2}, \cdots, \overrightarrow{\beta_t}$,

因为向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 故向量组 C 与向量组 B 等价, 从而向量组 C 的秩也为 r .

显然, 向量组 A 的一个最大无关组 $\overrightarrow{\alpha_{i_1}}, \overrightarrow{\alpha_{i_2}}, \dots, \overrightarrow{\alpha_{i_r}}$ 也是向量组 C 的最大无关组, 于是向量组 $B: \overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2}, \dots, \overrightarrow{\beta_t}$ 可由 $\overrightarrow{\alpha_{i_1}}, \overrightarrow{\alpha_{i_2}}, \dots, \overrightarrow{\alpha_{i_r}}$ 线性表示, 从而可由向量组 $A: \overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \dots, \overrightarrow{\alpha_s}$ 线性表示, 所以向量组 A 与向量组 B 等价.

例12 证明：一个向量组的任何一个线性无关组都可以扩充成一个最大线性无关组.

证 设一向量组为

$$A: \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_r, \cdots, \vec{\alpha}_m,$$

不妨设向量组 A 的前 r 个向量线性无关, 则以 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_r$ 为基础, 增加向量

$\vec{\alpha}_i$ ($i = r+1, r+2, \cdots, m$) 形成向量组 $B: \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_r, \vec{\alpha}_i$.

如果所有得到的向量组 B 都线性相关, 则向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_r$ 就是向量组 A 的一个最大线性无关组.

如果存在某个向量 $\vec{\alpha}_j$ ($r < j \leq m$), 使得向量组 $C: \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_r, \vec{\alpha}_j$ 线性无关, 则以向量组 C 为基础, 然后逐一增加其余没有考察过的向量, 并进行类似于上面的讨论. 照此继续下去, 经过有限次的考察总可以找到向量组 $D: \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_r, \vec{\alpha}_j, \cdots, \vec{\alpha}_l$, 且向量组 D 满足:

(1) 向量组 D 是以某一线性无关组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_r$ 为基础形成的一个新的线性无关组;

(2) 从向量组 D 的形成过程, 可知 A 中所有向量均可由 D 线性表示.

所以向量组 D 是向量组 A 的一个最大线性无关组.

例 13(1988. I) n 维向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s$ ($3 \leq s \leq n$) 线性无关的充分必要条件是().

(A) 存在不全为零的 s 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得 $k_1 \vec{\alpha}_1 + k_2 \vec{\alpha}_2 + \cdots + k_s \vec{\alpha}_s \neq \vec{0}$.

(B) $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s$ 中的任何两个向量都线性无关,

(C) $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s$ 中存在一个向量不能用其余向量线性表示,

(D) $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示.

解 (A), (B), (C) 是 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s$ 线性无关的必要条件, 不是充分条件.

例如向量组

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_1 &= (1, 0, 0, 0), & \vec{\alpha}_2 &= (0, 1, 0, 0), \\ \vec{\alpha}_3 &= (1, 1, 0, 0), & \vec{\alpha}_4 &= (0, 0, 1, 0). \end{aligned}$$

线性相关, 其中任何两个向量线性无关, 符合 (B).

显然 $1 \cdot \vec{\alpha}_1 + 1 \cdot \vec{\alpha}_2 + 0 \cdot \vec{\alpha}_3 + 0 \cdot \vec{\alpha}_4 \neq \vec{0}$, 符合 (A).

又显然 $\vec{\alpha}_4$ 不能用 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示, 符合 (C).

因此符合 (A), (B), (C) 条件的向量不一定线性无关, 故不能选择 (A), (B), (C).

由内容提要中的定理 1 可知选择 (D) 正确.

例 14 设有向量组 $\vec{\alpha}_1 = (1, -1, 2, 4), \vec{\alpha}_2 = (0, 3, 1, 2), \vec{\alpha}_3 = (3, 0, 7, 14), \vec{\alpha}_4 = (1, -1, 2, 0),$

$\vec{\alpha}_5 = (2, 1, 5, 6).$

(1) 证明: $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 线性无关;

(2) 把 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 扩充为 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_5$ 一个最大线性无关组.

证 (1) 因为 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 的各对应分量不成例, 所以 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 线性无关.

(2) 先讨论向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 的线性相关性

设有数组 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1 \vec{\alpha}_1 + k_2 \vec{\alpha}_2 + k_3 \vec{\alpha}_3 = \vec{0},$$

即

$$k_1(1, -1, 2, 4) + k_2(0, 3, 1, 2) + k_3(3, 0, 7, 14) = (0, 0, 0, 0),$$

于是有

$$\begin{cases} k_1 + 3k_3 = 0, \\ -k_1 + 3k_2 = 0, \\ 2k_1 + k_2 + 7k_3 = 0, \\ 4k_1 + 2k_2 + 14k_3 = 0. \end{cases}$$

解此方程组, 得 $k_1 = -3k_3$, $k_2 = -k_3$, k_3 可取任意值.

若令 $k_3 = -1$, 则 $k_1 = -3$, $k_2 = 1$,

于是 $3\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 - \vec{\alpha}_3 = \vec{0}$,

所以 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性相关, 故 $\vec{\alpha}_3$ 能由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 线性表示.

[注: $\vec{\alpha}_3$ 自然也能由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_4$ 线性表示!]

再讨论向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_4$ 的线性相关性

设有数组 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4$, 使得

$$\lambda_1 \vec{\alpha}_1 + \lambda_2 \vec{\alpha}_2 + \lambda_4 \vec{\alpha}_4 = \vec{0},$$

即

$$\lambda_1(1, -1, 2, 4) + \lambda_2(0, 3, 1, 2) + \lambda_4(1, -1, 2, 0) = (0, 0, 0, 0),$$

于是有

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = 0, \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_4 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 = 0, \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

解此方程组, 得 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$, 故 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_4$ 线性无关.

最后讨论向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_5$ 的线性相关性

因为向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_5$ 是四个 4 维向量, 且行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

所以向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_5$ 的线性相关, 故 $\vec{\alpha}_5$ 能由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_4$ 线性表示.

综上所述, 向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_4$ 满足最大线性无关组的条件, 同时也是由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 扩充成一个最大线性无关组.

例15 判断向量集合

$$(1) V_1 = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in R \text{ 满足 } x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\},$$

$$(2) V_2 = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in R \text{ 满足 } x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1\}.$$

是否构为向量空间, 若为向量空间, 求其维数和一个基.

分析 要判断向量集合 V 是否构成向量空间, 只要验证 V 对向量的加法及数乘是否封闭, 即任取 $\alpha, \beta \in V, \lambda \in R$, 是否有 $\alpha + \beta \in V, \lambda\alpha \in V$.

解 (1) 显然, n 维向量 $\vec{0} \in V_1$, 故 V_1 非空.

$$\text{设 } \vec{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \vec{\beta} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in V_1, \lambda \in R,$$

则有

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0, \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n = 0,$$

$$\text{且 } \vec{\alpha} + \vec{\beta} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

$$\lambda\vec{\alpha} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n),$$

因为

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) \\ &= 0 + 0 = 0. \\ & \lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n \\ &= \lambda(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ &= \lambda \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

所以

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in V_1, \quad k\vec{\alpha} \in V_1,$$

故 V_1 为向量空间.

取 $\vec{\xi}_1 = (-1, 1, 0, \dots, 0)$, $\vec{\xi}_2 = (-1, 0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $\vec{\xi}_{n-1} = (-1, 0, 0, \dots, 1)$,

则 $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_{n-1} \in V_1$, 且 $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_{n-1}$ 线性无关及 V_1 中的任意一个元素都能由

$\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_{n-1}$ 线性表示,

所以 $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_{n-1}$ 是 V_1 的一个基, 且 V_1 的维数为 $n-1$.

注: 在学过第四章线性方程组后, $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_{n-1}$ 可通过解齐次线性方程组

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ 得到.

(2) 设 $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{\beta} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in V_2$,

则有 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 1$,

由于 $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n)$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

$$= 1 + 1 = 2,$$

于是 $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \notin V_2$, 故 V_2 不是向量空间.

例 16 设向量组 $A: \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 的秩为 r_1 , 向量组 $B: \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_t$ 的秩为 r_2 , 向量组 $C: \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s, \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_t$ 的秩为 r_3 , 证明: $\max\{r_1, r_2\} \leq r_3 \leq r_1 + r_2$.

证 设向量组 A 的最大线性无关组为 $\vec{\alpha}_{i_1}, \vec{\alpha}_{i_2}, \dots, \vec{\alpha}_{i_{r_1}}$, 向量组 B 的最大线性无关组为 $\vec{\beta}_{j_1}, \vec{\beta}_{j_2}, \dots, \vec{\beta}_{j_{r_2}}$, 向量组 C 的最大线性无关组为 $\vec{\gamma}_{k_1}, \vec{\gamma}_{k_2}, \dots, \vec{\gamma}_{k_{r_3}}$.

因为最大线性无关组与向量组等价, 所以 $\vec{\gamma}_{k_1}, \vec{\gamma}_{k_2}, \dots, \vec{\gamma}_{k_{r_3}}$ 可由向量组 C 线性表示, 从而可由向量组 A 和 B 线性表示, 由此可知 $\vec{\gamma}_{k_1}, \vec{\gamma}_{k_2}, \dots, \vec{\gamma}_{k_{r_3}}$ 可由 $\vec{\alpha}_{i_1}, \vec{\alpha}_{i_2}, \dots, \vec{\alpha}_{i_{r_1}}, \vec{\beta}_{j_1}, \vec{\beta}_{j_2}, \dots, \vec{\beta}_{j_{r_2}}$ 线性表示, 故

$$r_3 \leq r_1 + r_2,$$

又因为 $\vec{\alpha}_{i_1}, \vec{\alpha}_{i_2}, \dots, \vec{\alpha}_{i_{r_1}}$ 可由向量组 C 线性表示, 所以它也可以由 $\vec{\gamma}_{k_1}, \vec{\gamma}_{k_2}, \dots, \vec{\gamma}_{k_{r_3}}$ 线性表示, 故

$$r_1 \leq r_3,$$

同理可得

$$r_2 \leq r_3,$$

所以 $\max\{r_1, r_2\} \leq r_3$,

故 $\max\{r_1, r_2\} \leq r_3 \leq r_1 + r_2$.

注: 在讨论向量组的秩等问题时, 经常需设出该向量组的最大线性无关组, 由于任一向量组与它的最大线性无关组等价, 就可使问题化为仅讨论其最大线性无关组的问题. 这时还常常需要用到的结论是:

- (1) 若向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 则向量组 A 的秩不超过向量组 B 的秩;
- (2) 若向量组 A 与向量组 B 等价, 则它们有相同的秩.

例 17 设向量组 $A: \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4$ 的秩为 3, 向量组 $B: \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_5$ 的秩为 4, 证明:

向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_5 - \vec{\alpha}_4$ 的秩为 4.

分析 要证明向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_5 - \vec{\alpha}_4$ 的秩为 4, 只需证明该向量组线性无关.

证 因为向量组 B 的秩为 4, 所以 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性无关, 又由向量组 A 的秩为 3, 所以 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4$ 线性相关, 从而 $\vec{\alpha}_4$ 可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示. 即有数组 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$\vec{\alpha}_4 = k_1 \vec{\alpha}_1 + k_2 \vec{\alpha}_2 + k_3 \vec{\alpha}_3, \quad (12)$$

设有数组 l_1, l_2, l_3, l_4 , 使得

$$l_1 \vec{\alpha}_1 + l_2 \vec{\alpha}_2 + l_3 \vec{\alpha}_3 + l_4 (\vec{\alpha}_5 - \vec{\alpha}_4) = \vec{0}, \quad (13)$$

将(12)式代入(13)式, 得

$$(l_1 - l_4 k_1) \vec{\alpha}_1 + (l_2 - l_4 k_2) \vec{\alpha}_2 + (l_3 - l_4 k_3) \vec{\alpha}_3 + l_4 \vec{\alpha}_5 = \vec{0},$$

由于 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_5$ 线性无关, 所以

$$\begin{cases} l_1 - l_4 k_1 = 0, \\ l_2 - l_4 k_2 = 0, \\ l_3 - l_4 k_3 = 0, \\ l_4 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 1 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & 1 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

所以方程组(14)只有零解 $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 0$,

故向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_5 - \vec{\alpha}_4$ 线性无关, 于是该向量组的秩为 4.

例 18(2002. II) 设向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性无关, 向量 $\vec{\beta}_1$ 可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示, 而向量

$\vec{\beta}_2$ 不能由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示, 则对于任意常数 k , 必有().

(A) $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, k\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$ 线性无关, (B) $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, k\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$ 线性相关,

(C) $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\beta}_1 + k\vec{\beta}_2$ 线性无关, (D) $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\beta}_1 + k\vec{\beta}_2$ 线性相关.

解 依题意知 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\beta}_2$ 线性无关, 且设 $\vec{\beta}_1 = a\vec{\alpha}_1 + b\vec{\alpha}_2 + c\vec{\alpha}_3$,

设 $k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + k_3\vec{\alpha}_3 + k_4(k\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2) = \vec{0}$, 则

$$(k_1 + kk_4a)\vec{\alpha}_1 + (k_2 + kk_4b)\vec{\alpha}_2 + (k_3 + kk_4c)\vec{\alpha}_3 + k_4\vec{\beta}_2 = \vec{0},$$

因为 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\beta}_2$ 线性无关,

所以

$$\begin{cases} k_1 + kk_4a = 0, \\ k_2 + kk_4b = 0, \\ k_3 + kk_4c = 0, \\ k_4 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

其系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ka \\ 0 & 1 & 0 & kb \\ 0 & 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

于是方程组(15)只有零解 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$,

故 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, k\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$ 线性无关, 因而(A)正确, (B)不正确.

同理, (C), (D)不正确.

目标测试题

一、填空题

1. (2002.IV) 设向量组 $\vec{\alpha}_1 = (a, 0, c), \vec{\alpha}_2 = (b, c, 0), \vec{\alpha}_3 = (0, a, b)$ 线性无关, 则 a, b, c 必满足关系式_____.

2. 已知向量组 $\vec{\alpha}_1 = (2, 1, 3, -1), \vec{\alpha}_2 = (3, -1, 2, 0), \vec{\alpha}_3 = (4, 2, 6, -2), \vec{\alpha}_4 = (4, -3, 1, 1)$, 则该向量组的秩为_____.

3. 若 n 维基本单位向量组 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n$ 可由向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 线性表示, 则 s 与 n 的大小为_____.

4. 设 V 是由 $\vec{\alpha}_1 = (1, 1, 0), \vec{\alpha}_2 = (1, 0, 1), \vec{\alpha}_3 = (3, 2, 1)$ 生成的向量空间, 则向量空间 V 的维数

为_____.

5. 设 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性无关, 问 $k = \underline{\hspace{1cm}}$ 时, $\vec{\alpha}_2 - \vec{\alpha}_1, k\vec{\alpha}_3 - \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_3$ 线性相关.

二、选择题

1. 设有向量组 $\vec{\alpha}_1 = (1, -1, 2, 4), \vec{\alpha}_2 = (0, 3, 1, 2), \vec{\alpha}_3 = (3, 0, 7, 14), \vec{\alpha}_4 = (1, -2, 2, 0),$
 $\vec{\alpha}_5 = (2, 1, 5, 10)$, 则该向量组的最大线性无关组().

- (A) $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$, (B) $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_4$,
(C) $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_5$, (D) $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_5$.

2. 设向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是().

- (A) $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_1$, (B) $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3$,
(C) $\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_2 - \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_3 - \vec{\alpha}_1$, (D) $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2, 2\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_3, 3\vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_1$.

3. 设向量组

- (I) $\vec{\alpha}_1 = (a_1, a_2, a_3), \vec{\alpha}_2 = (b_1, b_2, b_3), \vec{\alpha}_3 = (c_1, c_2, c_3)$,
(II) $\vec{\beta}_1 = (a_1, a_2, a_3, a_4), \vec{\beta}_2 = (b_1, b_2, b_3, b_4), \vec{\beta}_3 = (c_1, c_2, c_3, c_4)$.

则有().

- (A) 若(I)线性相关, 则(II)线性相关,
(B) 若(I)线性无关, 则(II)线性无关,
(C) 若(II)线性相关, 则(I)线性相关,
(D) (I)线性相关的充分必要条件是(II)线性相关.

4 设 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 和 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_t$ 是两个 n 维向量组, 且两个向量组的秩都是 r , 则().

- (A) 两个向量组等价,
(B) 向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s, \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_t$ 的秩也是 r ,
(C) 当 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 可由 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_t$ 线性表示时, $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_t$ 也可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 线性表示,
(D) 当 $s = t$ 时, 两向量组等价.

5. 下列命题正确的是().

- (A) 对于向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$, 若有不全为零的数组 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得

$k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + \dots + k_s\vec{\alpha}_s \neq \vec{0}$, 则 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 线性无关,

- (B) 对于向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$, 若有不全为零的数组 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得

$k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + \dots + k_s\vec{\alpha}_s = \vec{0}$, 则 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 线性无关,

(C) 若向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 线性相关, 则其中每个向量都可由其余向量线性表示,

(D) 任何 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

三、计算题

1. 设 $\vec{\alpha}_1 = (1, 1, 2), \vec{\alpha}_2 = (1, 2, 3), \vec{\alpha}_3 = (1, 3, t)$.

(1) 当 t 为何值时, $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性无关.

(2) 当 t 为何值时, $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性相关.

(3) 当 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性相关时, 将 $\vec{\alpha}_3$ 用 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 线性表示.

2. 求向量组 $\vec{\alpha}_1 = (3, 1, 2, 1), \vec{\alpha}_2 = (-6, 4, -1, -5), \vec{\alpha}_3 = (-7, -1, -3, -4), \vec{\alpha}_4 = (3, 2, 1, 2)$ 的一个最大无关组, 并用最大无关组表示其余向量.

3. 确定常数 a 和 b 使得 $\vec{\alpha}_1 = (1, 0, -1, 2), \vec{\alpha}_2 = (2, -1, 3, a), \vec{\alpha}_3 = (1, -2, b, 0)$ 线性相关.

4. 确定向量 $\vec{\beta}_3 = (2, a, b)$, 使向量 $\vec{\beta}_1 = (1, 1, 0), \vec{\beta}_2 = (1, 1, 1), \vec{\beta}_3$ 与向量组

$\vec{\alpha}_1 = (0, 1, 1), \vec{\alpha}_2 = (1, 2, 1), \vec{\alpha}_3 = (1, 0, -1)$ 的秩相同, 且 $\vec{\beta}_3$ 可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示.

四、证明题

1. 设有向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m (m > 1)$, 且

$$\begin{aligned}\vec{\beta}_1 &= \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \dots + \vec{\alpha}_m, \\ \vec{\beta}_2 &= \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_3 + \dots + \vec{\alpha}_m, \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{\beta}_m &= \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \dots + \vec{\alpha}_{m-1}.\end{aligned}$$

证明: 当向量组 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_m$ 线性无关时, 向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$ 也线性无关.

2. 设 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ 是 n 维向量组, 证明: $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是任一 n 维向量 $\vec{\beta}$ 都可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ 线性表示.

第三章 矩阵

内容提要

矩阵概念

矩阵: 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ 按一定的次序排成 m 行 n 列的矩形表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵, 简称 $m \times n$ 矩阵, 记为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中数 a_{ij} 称为矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素. (1)式也可简记为

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{ 或 } A = (a_{ij}).$$

当 $m = n$ 时, A 称为方阵.

行矩阵: 只有一行的矩阵

$$A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

称为行矩阵.

列矩阵: 只有一列的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

称为列矩阵.

零矩阵: 元素都为零的矩阵称为零矩阵, 记为 O .

负矩阵: 矩阵

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 A 的负矩阵, 记作 $-A$.

矩阵相等: 设矩阵 $A = (a_{ij})$ 与 $B = (b_{ij})$ 都是 $m \times n$ 矩阵, 并且它们对应的元素相等, 即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n),$$

则称矩阵 A 与 B 相等. 记作 $A = B$.

矩阵运算及规律

加法: 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$, 则 A 与 B 的和为 $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$.

减法: 利用负矩阵定义两个矩阵的减法为

$$A - B = A + (-B).$$

矩阵加法满足以下运算规律:

(i) $A + B = B + A$;

$$(ii) \quad (A+B)+C=A+(B+C);$$

$$(iii) \quad A+O=O+A;$$

$$(iv) \quad A+(-A)=O.$$

其中 A, B, C, O 均为 $m \times n$ 矩阵.

数乘矩阵: 设 $A=(a_{ij})_{m \times n}$, 数 $\lambda \in R$, 则数 λ 与 A 的乘积为 $\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m \times n}$.

数乘矩阵满足以下运算规律:

$$(i) \quad 1 \cdot A = A;$$

$$(ii) \quad \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A) = (\lambda\mu)A;$$

$$(iii) \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A;$$

$$(iv) \quad \lambda(A+B) = \lambda A + \mu A.$$

乘法: 设 $A=(a_{ij})_{m \times s}$, $B=(b_{ij})_{s \times n}$, 则 A 与 B 的乘积为矩阵 $C=(c_{ij})_{m \times n} = AB$, 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj},$$

$$(i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n),$$

矩阵乘法满足以下运算规律:

$$(i) \quad (AB)C = A(BC);$$

$$(ii) \quad A(B+C) = AB + AC;$$

$$(iii) \quad (B+C)A = BA + CA;$$

$$(iv) \quad \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

其中 A, B, C 的运算是可行的, λ 是一个常数.

转置: 设 $A=(a_{ij})_{m \times n}$, 把 A 的行与列互换所得到的矩阵称为 A 的转置矩阵, 记为 A^T 或 A' .

转置矩阵满足以下运算规律:

$$(i) \quad (A^T)^T = A;$$

$$(ii) \quad (A+B)^T = A^T + B^T;$$

$$(iii) \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T;$$

$$(iv) \quad (AB)^T = B^T A^T.$$

其中 A, B 的运算是可行的, λ 是一个常数.

共轭: 当 $A=(a_{ij})_{m \times n}$ 为复矩阵时, 用 $\overline{a_{ij}}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数,

则称矩阵 $(\overline{a_{ij}})_{m \times n}$ 为 A 的共轭矩阵, 记为 $\overline{A}$.

共轭矩阵满足以下运算规律:

$$(i) \quad \overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B};$$

$$(ii) \quad \overline{\lambda A} = \overline{\lambda} \overline{A};$$

$$(iii) \quad \overline{AB} = \overline{A} \overline{B}.$$

其中 A, B 的运算是可行的, λ 是一个常数.

几种重要的方阵

单位矩阵: 主对角线上的元素全为1, 而其余元素全为0的 n 阶方阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

称为 n 阶单位矩阵, 记为 E_n 或 I_n , 简记为 E 或 I .

数量矩阵: 主对角线上的元素都相等, 而其余元素全为零的 n 阶方阵

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix},$$

称为数量矩阵, 记为 λE .

对角矩阵: 主对角线以外的元素全为零的 n 阶方阵

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

称为对角矩阵, 记为 $diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

上三角矩阵: 主对角线下方的元素全为零的 n 阶方阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

称为上三角矩阵.

下三角矩阵: 主对角线上方的元素全为零的 n 阶方阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

称为下三角矩阵.

上、下三角矩阵统称为三角矩阵.

对称矩阵: 若 n 阶方阵 A 满足 $A^T = A$, 则称 A 为对称矩阵.

反对称矩阵: 若 n 阶方阵 A 满足 $A^T = -A$, 则称 A 为反对称矩阵.

方阵的幂

方阵的幂: 设 A 为方阵, n 为正整数, A 的 n 次幂定义为 $A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{n\text{个}}$.

规定 $A^0 = E$.

方阵的幂满足以下运算规律:

$$(i) A^k A^l = A^{k+l};$$

$$(ii) (A^k)^l = A^{k+l}.$$

方阵多项式: 设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$, A 为 n 阶方阵, 则方阵 A 的多项式 $f(A)$ 定义为

$$f(A) = a_0E + a_1A + \cdots + a_mA^m,$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_m$ 为常系数.

方阵行列式

方阵行列式: 由 n 阶方阵 A 的元素构成的行列式(各元素按原来的位置), 称为方阵 A 的行列式, 记为 $|A|$ 或 $\det A$.

方阵行列式具有以下规律:

$$(i) |A^T| = |A|;$$

$$(ii) |\lambda A| = \lambda^n |A|;$$

$$(iii) |AB| = |BA| = |A||B|.$$

其中 A, B 为 n 阶方阵, λ 为常数.

非奇异矩阵: 设 A 为 n 阶方阵, 若 $|A| \neq 0$, 则称 A 为非奇异矩阵或非退化矩阵, 否则称 A 为奇异矩阵或退化矩阵.

逆矩阵及其求法

伴随矩阵: 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶方阵, A_{ij} 为行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, 则矩阵

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

称为方阵 A 的伴随矩阵, 记为 A^* .

伴随矩阵的性质: $AA^* = A^*A = |A|E$.

逆矩阵: 对于 n 阶方阵 A , 若存在 n 阶方阵 B , 使得

$$AB = BA = E,$$

则称 A 可逆, 且 B 称为 A 的逆矩阵, 记为 $A^{-1} = B$.

可逆的条件:

(i) A 可逆的充分必要条件为 $|A| \neq 0$, 即矩阵 A 为非奇异矩阵,

(ii) 设 A, B 为 n 阶方阵, 若 $AB = E$, 则 A 可逆, 且 $A^{-1} = B$.

利用伴随矩阵求逆矩阵的方法: 设 $|A| \neq 0$, 则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$.

逆矩阵的性质:

(I) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;

(ii) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$;

(iii) 若 A 可逆, 数 $\lambda \neq 0$, 则 λA 可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$;

(iv) 若 A, B 为同阶方阵且均可逆, 则 AB 可逆, 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(v) 若 A 可逆, 则 A^T 也可逆, 且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

分块矩阵及其运算

分块矩阵: 用若干条纵线和横线把一个大矩阵分成许多小矩阵, 则每个小矩阵称为它的一个子块, 以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

加法: 设 $A = (A_{ij})_{r \times s}$, $B = (B_{ij})_{r \times s}$, 则分块矩阵 A 与 B 的和为 $A + B = (A_{ij} + B_{ij})_{r \times s}$.

其中子块 $A_{ij}, B_{ij} (i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s)$ 的行数相同, 列数也相同.

数乘: 设 $A = (A_{ij})_{r \times s}$, λ 为常数, 则数 λ 与分块矩阵 A 的积为 $\lambda A = (\lambda A_{ij})_{r \times s}$.

乘法: 设 $A = (A_{ij})_{r \times p}$, $B = (B_{ij})_{p \times s}$, 则分块矩阵 A 与 B 的乘积为 $AB = (C_{ij})_{r \times s}$.

其中 $C_{ij} = A_{i1}B_{j1} + A_{i2}B_{j2} + \dots + A_{ip}B_{jp} = \sum_{k=1}^p A_{ik}B_{kj} (i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s)$,

而子块 A_{ik} 的列数与 B_{kj} 的行数相同($i = 1, 2, \dots, r; k = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, s$).

转置: 设 $A = (A_{ij})_{r \times s}$, 则分块矩阵 A 的转置为 $A^T = (A_{ji}^T)_{s \times r}$.

准对角矩阵: 设 A 为 n 阶方阵, 经分块后可表示为

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{bmatrix},$$

其中 A_i 为 n_i 阶方阵($i = 1, 2, \dots, s$), 则 A 称为准对角矩阵或分块对角矩阵.

准对角矩阵具有的性质:

(i) $|A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_s|$;

(ii) 当 A_i 可逆时($i = 1, 2, \dots, s$), A 也可逆, 且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s^{-1} \end{bmatrix}.$$

矩阵的秩

矩阵的秩： 设 $m \times n$ 矩阵 A 的 n 个列向量所构成的向量组的秩为 r ，则 r 称为矩阵 A 的秩，记为 $R(A) = r$.

子式： 在 $m \times n$ 矩阵 A 中任取 k 行 k 列 ($k \leq \min(m, n)$)，位于这些交叉处的 k^2 个元素构成一个 k 阶行列式，称为 k 阶子式.

子式与秩的关系： 设矩阵 A 中有一个 r 阶子式 $D \neq 0$ ，且所有含 D 的 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）都等于零，则 A 的秩 $R(A) = r$.

矩阵行、列向量组的秩之间的关系： 矩阵 A 的列向量组的秩等于 A 的行向量组的秩.

矩阵的初等变换

初等变换： 对矩阵 A 施行下述三种变换中的任何一种变换，都称为矩阵 A 的初等变换：

- (i) 互换矩阵 A 中两行（列）的位置；
- (ii) 矩阵 A 的某一行（列）乘以一个非零数 k ；
- (iii) 矩阵 A 的某一行（列）乘以一个数 k 加到另一行（列）上去.

矩阵等价： 如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B ，则称矩阵 A 与 B 是等价. 记为 $A \sim B$.

等价具有的性质：

- (i) 反身性：每一个矩阵与它自己等价；
- (ii) 对称性：如果矩阵 A 与 B 等价，则矩阵 B 与 A 等价；
- (iii) 传递性：如果 $A \sim B$ ， $B \sim C$ ，则 $A \sim C$.

阶梯形矩阵： 若矩阵 A 的每行第一个不为零的元素所在列的下方元素都为零，且零行在非零行的下方，则称矩阵 A 为阶梯形矩阵.

阶梯形矩阵的秩： 阶梯形矩阵 A 的秩等于非零行的个数.

行最简形： 若矩阵 A 的每行第一个不为零的元素为 1，且它所在列的上、下方元素都为零，零行在非零行的下方，则称矩阵 A 为行最简形或简化阶梯形矩阵.

标准形： 任何一个 $m \times n$ 矩阵 A 都可以经过一系列初等变换化为如下最简形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

(2)称为矩阵 A 的标准形, 其中 $r = R(A)$.

初等方阵

初等方阵: 由单位矩阵 E 经过一次初等变换而得到的矩阵称为初等方阵.

初等方阵的类型:

- (i) 互换第 i 行(列)与第 j 行(列)得初等方阵 $E(i, j)$;
- (ii) 第 i 行(列)乘以 $k \neq 0$ 得初等方阵 $E(i(k))$;
- (iii) 第 i 行(列)乘以 k 加到第 j 行(列)得到初等方阵 $E(i(k), j)$.

初等方阵的基本性质:

- (i) 初等矩阵都是可逆矩阵, 且 $E(i, j)^{-1} = E(i, j)$, $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$,

$$E(i(k), j)^{-1} = E(i(-k), j);$$

- (ii) 初等方阵的转置仍为初等方阵

矩阵的初等变换与初等方阵之间的关系: 对一个 $m \times n$ 矩阵 A 作一次初等行(列)变换相当于在 A 的左(右)边乘以一个相应的 $m(n)$ 阶初等方阵.

可逆矩阵与初等方阵的关系: 矩阵 A 可逆的充分必要条件是 A 能表成一些初等方阵的积, 即

$$A = P_1 P_2 \cdots P_t,$$

其中 $P_1, P_2, \dots, P_t$ 为初等方阵.

矩阵 A 与 B 等价的充分必要条件:

- (i) 存在初等方阵 $P_1, P_2, \dots, P_s$ 和 $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$, 使

$$P_s P_{s-1} \cdots P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = B;$$

- (ii) 存在可逆矩阵 P 和 Q , 使得 $PAQ = B$;

- (iii) $R(A) = R(B)$;

- (iv) A 和 B 有相同的标准形.

利用初等变换求逆矩阵的方法: 作一个 $n \times 2n$ 矩阵 $(A:E)$, 利用初等行变换把左边的一半化为单位矩阵 E , 这是右边的一半即为 A^{-1} , 即

$$(A : E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E : A^{-1}).$$

或 $\begin{bmatrix} A \\ \dots \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ \dots \\ A^{-1} \end{bmatrix}.$

关于矩阵秩的一些重要结论

结论 1: 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $0 \leq R(A) \leq \min\{m, n\}$;

结论 2: $R(A) = 0$ 当且仅当 $A = O$;

结论 3: $R(A) = R(A^T) = R(-A)$;

结论 4: $R(A) = r$ 的充分必要条件是存在可逆矩阵 P, Q 使

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

结论 5: $R(A+B) \leq R(A) + R(B)$;

结论 6: $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$;

结论 7: 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 m 阶可逆矩阵, C 是 n 阶可逆矩阵, 则

$$R(BA) = R(A) = R(AC);$$

结论 8: 设 A, B 为 n 阶方阵, 且 $A+B = kE$, 则

$$R(A) + R(B) \geq n;$$

结论 9: 设 A, B 为 n 阶方阵, 且 $AB = O$, 则

$$R(A) + R(B) \leq n;$$

结论 10: 若 A 与 B 等价, 则 $R(A) = R(B)$.

例题分析

例1 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

求 AB , BC , AC , CA .

解 由矩阵乘法得

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad BC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}, \quad CA = \begin{bmatrix} 9 & -12 & -3 \\ -6 & 8 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

注:

(1) 矩阵乘法一般不满足交换律, 如本例中, A 与 B 可乘, 但 B 与 A 不可乘; AC , CA 虽然都存在, 可阶数不同, 无法比较. 即使 A , B 都为同阶方阵, 一般也不满足交换律.

(2) 本例中 B 和 C 都不是零矩阵, 而它们的乘积为零矩阵. 也就是由 $AB = O$ 一般推不出 $A = O$ 或 $B = O$, 由此导致消去律一般也不成立, 即由 $AB = AC$ 不能推出 $B = C$.

例2 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

求 $(A+B)(A-B)$, $A^2 - B^2$.

解 因为 $A+B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $A-B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

所以 $(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

又因为 $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$,

所以 $A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

注: 在本例中 $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$, 可见乘法公式对同阶方阵一般不成立. 即一般来说 $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$, $(A+B)(A^2 - AB + B^2) \neq A^3 + B^3$, $(AB)^n \neq A^n B^n (n > 1)$ 等. 但当 $AB = BA$, 即 A 与 B 相乘可交换时, 乘法公式成立. 特别有, $(E+A)(E-A) = E - A^2$, $(E \pm A)^2 = E \pm 2A + A^2$, $(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}) = E - A^k$ 等.

例3 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $A^n (n \text{ 为正整数})$.

解法一 用数学归纳法

当 $n=2$ 时, $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\text{当 } n=3 \text{ 时, } A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{设 } n=k \text{ 时, } A^k = \begin{bmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则当 $n=k+1$ 时, 有

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

所以对任意的正整数 n , 有 $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\text{解法二 设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E + B,$$

容易算得 $B^2 = 0$, 所以 $B^k = 0 (k \geq 2)$,

显然 E 与 B 可交换, 由二项式定理可得

$$\begin{aligned} A^n &= (E + B)^n \\ &= C_n^0 E^n + C_n^1 E^{n-1} B + C_n^2 E^{n-2} B^2 + \cdots + C_n^n B^n \\ &= E + nB \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

注: 使用二项式定理时, 可交换的条件不可少.

例4 设 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 均为4维列向量, $A = (\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2 \vec{\alpha}_3 \vec{\alpha})$, $B = (\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2 \vec{\alpha}_3 \vec{\beta})$, 且 $|A| = 3$, $|B| = -2$, 求 $|A - 3B|$.

分析 先求出 $A - 3B$, 再通过行列式的性质把 $|A - 3B|$ 化为 $|A|$ 与 $|B|$ 的表达式.

$$\begin{aligned} \text{解 因为 } A - 3B &= (\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2 \vec{\alpha}_3 \vec{\alpha}) - 3(\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2 \vec{\alpha}_3 \vec{\beta}) \\ &= (-2\vec{\alpha}_1 \quad -2\vec{\alpha}_2 \quad -2\vec{\alpha}_3 \quad \vec{\alpha} - 3\vec{\beta}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |A - 3B| &= \begin{vmatrix} -2\vec{\alpha}_1 & -2\vec{\alpha}_2 & -2\vec{\alpha}_3 & \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} \end{vmatrix} \\ &= (-2)(-2)(-2) \begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & \vec{\alpha}_3 & \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} \end{vmatrix} \\ &= -8 \left(\begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & \vec{\alpha}_3 & \vec{\alpha} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & \vec{\alpha}_3 & -3\vec{\beta} \end{vmatrix} \right) \\ &= -8 \left(\begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & \vec{\alpha}_3 & \vec{\alpha} \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & \vec{\alpha}_3 & \vec{\beta} \end{vmatrix} \right) \\ &= -8(|A| - 3|B|) \\ &= -8[3 - 3 \times (-2)] = -72. \end{aligned}$$

例5 设 $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$, A_{ij} 为 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, $A_{ij} = -a_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4)$, 且 $a_{11} \neq 0$, 求 $|A|$.

$$\text{解 因为 } A^* = (A_{ji})_{4 \times 4} = (-a_{ji})_{4 \times 4} = -A^T,$$

所以, 由 $A^* A = |A| E$ 得 $-A^T A = |A| E$.

$$\text{两边取行列式有 } \begin{vmatrix} -A^T A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |A| E \end{vmatrix},$$

$$(-1)^4 |A^T| |A| = |A|^4 |E|,$$

即 $|A|^2 = |A|^4,$

于是 $|A|^2(|A|^2 - 1) = 0,$

故 $|A| = 0$ 或 $|A| = \pm 1,$

又因为 $|A| = \sum_{j=1}^4 a_{1j} A_{1j} = - \sum_{j=1}^4 a_{1j}^2$, 且 $a_{11} \neq 0,$

所以 $|A| < 0,$

故 $|A| = -1.$

例6 设 A 为3阶方阵, $|A| = \frac{1}{2}$, 求 $|(3A)^{-1} - 2A^*|$.

解 先化简再计算

$$\begin{aligned} \text{因为 } (3A)^{-1} - 2A^* &= \frac{1}{3} A^{-1} - 2|A|A^{-1} \\ &= \frac{1}{3} A^{-1} - A^{-1} = -\frac{2}{3} A^{-1}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} |(3A)^{-1} - 2A^*| &= \left| -\frac{2}{3} A^{-1} \right| \\ &= \left(-\frac{2}{3} \right)^3 |A^{-1}| \\ &= -\frac{8}{27} \frac{1}{|A|} = -\frac{16}{27}. \end{aligned}$$

注:

(1) 一般来说, 题中涉及 A^* 时, 就要想到 $AA^* = A^*A = |A|E$, 这一点在解题时要记住;

(2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$, 与行列式性质的区别.

例7 求下列矩阵的逆矩阵

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}; \quad (2) A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

分析 求逆矩阵的方法有两种, 一是利用伴随矩阵求逆矩阵, 二是用初等变换求逆矩阵, 前者常适用于低阶的矩阵, 后者对低阶或高阶都适用.

解 (1) 用伴随矩阵求解

因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

所以

$$A^* = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

于是

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 5 & -1 & 1 \\ \frac{7}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(2) 用初等变换求解

因为

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} r_3 - 3r_1 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} r_3 - 3r_1 \\ \sim \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& \begin{array}{c} r_2 \leftrightarrow r_4 \\ \sim \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \begin{array}{c} r_3 - 4r_2 \\ \sim \\ r_4 - 2r_2 \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\
& \begin{array}{c} r_4 + 2r_3 \\ \sim \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix} \\
& \begin{array}{c} r_3 - r_4 \\ r_2 - r_4 \\ \sim \\ r_1 + 2r_4 \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 4 & 2 & -11 & -20 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & -1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix} \\
& \begin{array}{c} r_2 - 2r_3 \\ \sim \\ r_1 + 3r_3 \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix} \\
& \begin{array}{c} r_1 + 2r_2 \\ \sim \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

所以

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}.$$

例8 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, 求 $|A|$ 及 A^{-1} .

分析 这是一个5阶矩阵, 阶数比较高, 如果直接去求行列式及逆矩阵则比较麻烦, 而通过观察可知 A 为一个准对角矩阵, 所以利用准对角矩阵的性质把高阶行列式化为低阶行列式, 把高阶矩阵化为低阶矩阵处理比较简单.

解 这是一个准对角矩阵

$$\text{令 } A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\text{则 } A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

所以

$$|A| = |A_1| |A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -1 \times 1 = -1.$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}.$$

$$\text{又因为 } A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_2^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix},$$

故

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

注：当 $A_i (i=1, 2, \dots, s)$ 可逆时，有

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\text{但 } \begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \ddots & & \\ A_s & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & A_{s-1}^{-1} & \\ & \ddots & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}.$$

$$\text{例9 设 } A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 且 } a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0,$$

求 A^{-1} .

$$\text{解 令 } A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad A_2 = a_n,$$

$$\text{则 } A = \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix},$$

于是 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$

又因为

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1}^{-1} \end{bmatrix}, \quad A_2 = a_n^{-1},$$

所以

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

例10 已知 n 阶方阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$

求 $|A|$ 中所有元素的代数余子式之和 $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}.$

分析 显然直接求出各个元素的代数余子式，再求和比较麻烦，需找其它方法，由于 $|A| = 3$ ，所以 A 可逆，且 $AA^* = |A|E$ ，故 $A^* = |A|A^{-1}$ ，因而只要求出 A^{-1} 便可得到结果。

解 由分析知求 A_{ij} 比较麻烦，故采用初等变换的方法求 A^{-1} 。

因为

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 & | & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_{n-1}-r_n \\ \cdots \\ r_2-r_n \\ \widetilde{\quad} \\ r_1-3r_n \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_{n-2}-r_{n-1} \\ \cdots \\ r_2-r_{n-1} \\ \widetilde{\quad} \\ r_1-3r_{n-1} \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & \cdots & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & \cdots & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \sim \dots\dots\dots \\ & \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & 1 & -3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & \frac{1}{3} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

所以

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

又由 $AA^* = |A|E$ 得

$$A^* = |A|A^{-1} = 3A^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

所以

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = 1 + (n-1) \times 3 + (n-1) \times (-3) = 1.$$

例11 已知 $X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, 求 X .

分析 含有未知矩阵的方程称为矩阵方程, 常见的线性矩阵方程主要有三种形式:

$$AX = C, \quad XB = C, \quad AXB = C,$$

若 A, B 均为方阵且都可逆时, 它们的解分别为:

$$X = A^{-1}C, \quad X = CB^{-1}, \quad X = A^{-1}CB^{-1}.$$

解 令 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $|B| = 2$,

所以 B 可逆, 即 B^{-1} 存在,

故由上面分析可得

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} B^{-1},$$

求逆矩阵得

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -9 & 7 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

注:

(1) 由于矩阵乘法一般不满足交换律, 所以上面分析的各式中矩阵相乘的次序不能随便改变;

(2) 若给定的矩阵方程与上面三种形式都不相同时, 一般情况下可经过恒等变形把未知矩阵移到等号左边化为其中的某一种形式;

(3) 当 A, B 不可逆时, 上述方法不能用, 一般通过待定系数法求解.

例 12(1992.IV) 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

矩阵 X 满足 $AX + E = A^2 + X$, 其中 E 为三阶单位矩阵, 求矩阵 X .

解 由 $AX + E = A^2 + X$ 得

$$AX - X = A^2 - E,$$

即 $(A - E)X = (A - E)(A + E),$

因为 $A - E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

显然 $A - E$ 可逆,

所以

$$\begin{aligned} X &= (A - E)^{-1}(A - E)(A + E) \\ &= A + E \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

注: 由于矩阵乘法不满足交换律, 故在提取矩阵时一定是把左边或右边的相同矩阵提出, 且当某项提出矩阵后为常数时一定要把该项写成数量矩阵 λE .

例 13(1995. I) 设三阶方阵 A, B 满足关系式 $A^{-1}BA = 6A + BA$, 且

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix},$$

求矩阵 B .

解 由 $A^{-1}BA = 6A + BA$ 得

$$(A^{-1} - E)BA = 6A,$$

因为 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ 可逆, 且 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},$

所以 $A^{-1} - E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$

显然 $A^{-1} - E$ 可逆,

于是

$$\begin{aligned} B &= (A^{-1} - E)(6A)A^{-1} \\ &= 6(A^{-1} - E)^{-1}, \end{aligned}$$

又因为

$$(A^{-1} - E)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix},$$

所以

$$B = 6 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

例 14(2000. I) 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$,

其中 E 为 4 阶单位矩阵, 求矩阵 B .

解法一 利用矩阵的运算性质求出 B 的表达式

由 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ 左边乘以 A^{-1} , 右边乘以 A 得

$$B = A^{-1}B + 3E,$$

因为 $|A^*| = 8, \quad |A^*| = |A|^3,$

所以 $|A| = 2,$

又因为 $A^* = |A|A^{-1} = 2A^{-1},$

所以 $B = \frac{1}{2}A^*B + 3E,$

即 $(2E - A^*)B = 6E,$

因为 $2E - A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix},$

显然 $2E - A^*$ 可逆, 且利用初等变换求逆矩阵得

$$(2E - A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

故 $B = (2E - A^*)^{-1} \cdot 6E = 6(2E - A^*)^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

解法二 利用 A^* 先求出 A , 再求出 B 的表达式

$$\text{由 } |A^*| = 8, |A^*| = |A|^3 \text{ 得 } |A| = 2,$$

$$\text{又由 } AA^* = |A|E \text{ 得}$$

$$A = |A|(A^*)^{-1} = 2(A^*)^{-1}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{由 } ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E \text{ 得 } AB = B + 3A,$$

$$\text{即 } (A - E)B = 3A,$$

$$\text{又 } A - E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

显然 $A - E$ 可逆, 且

$$(A - E)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix},$$

所以

$$B = 3(A - E)^{-1}A$$

$$= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

例 15(2001 工程硕士) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 且 $AX = BA$, 求 X^5 .

解 由 $AX = BA$, 且 A 可逆得

$$X = A^{-1}BA,$$

所以

$$X^5 = A^{-1}B^5A.$$

又因为

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{故 } X^5 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 \\ -32 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 \\ -64 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

例16 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, 且 $AX = B$, 求 X .

分析 因为 $|A| = 0$, 所以 A 不可逆, 即 A^{-1} 不存在, 故不能在 $AX = B$ 两边左乘 A^{-1} , 因而应采用待定系数法.

解 因为 A 为 3×3 矩阵, B 为 3×2 矩阵, 所以根据矩阵乘法的定义可知 X 应为 3×2 矩阵, 故可设

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix},$$

则由 $AX = B$ 可得方程组

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} - 2x_{31} = 1, \\ x_{11} - 2x_{21} + x_{31} = 1, \\ -2x_{11} + x_{21} + x_{31} = -2. \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_{12} + x_{22} - 2x_{32} = 4, \\ x_{12} - 2x_{22} + x_{32} = -2, \\ -2x_{12} + x_{22} + x_{32} = -2. \end{cases} \quad (4)$$

解方程组(3)得

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

解方程组(4)得

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

所以

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

注：此时 X 一般不唯一，如本例中的 X 一般情况为

$$X = \begin{bmatrix} 1+k_1 & 2+k_2 \\ k_1 & 2+k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意实数.}$$

例17 求下列矩阵的秩

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

分析 对于数字矩阵，求其秩的方法主要有两种：（1）子式法，即寻找矩阵中非零子式的最高阶数，（2）初等变换法，即用初等行（列）变换把矩阵化为阶梯形矩阵，则阶梯形矩阵中不为零的行（列）数就是原矩阵的秩，一般情况下用初等变换求秩较为简单.

解 （1）用子式法求解

$$\text{因为 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{r_2-r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{r_4-r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ & = 0, \end{aligned}$$

$$\text{而3阶子式 } |D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

所以

$$R(A) = 3.$$

（2）用初等变换求解

因为

$$B \begin{array}{l} r_5-r_4 \\ r_4-r_3 \\ \simeq \\ r_3-r_2 \\ r_2-r_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_3-r_2 \\ r_4-r_3 \\ \simeq \\ r_5-r_4 \\ r_2-r_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以

$$R(B) = 2.$$

例18 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 试确定 λ , 使矩阵 A 的秩最大和最小.

解 因为

$$A \begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_3 \\ \simeq \\ r_2 \leftrightarrow r_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r_2-r_1 \\ \simeq \\ r_3-2r_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_3-(\lambda-2)r_2 \\ \simeq \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 9-4\lambda \end{bmatrix},$$

所以

当 $9-4\lambda \neq 0$, 即 $\lambda \neq \frac{9}{4}$ 时, 矩阵 A 的秩最大, 这时 $R(A) = 3$.

当 $9-4\lambda = 0$, 即 $\lambda = \frac{9}{4}$ 时, 矩阵 A 的秩最小, 这时 $R(A) = 2$.

例19 求向量组 $\vec{\alpha}_1 = (2, 1, 3, -1)$, $\vec{\alpha}_2 = (3, -1, 2, 1)$, $\vec{\alpha}_3 = (4, 2, 6, -2)$, $\vec{\alpha}_4 = (4, -3, 1, 1)$ 的秩.

分析 根据矩阵的秩等于行或列向量组的秩, 所以通过求出所给向量构成矩阵的秩即可得到向量组的秩.

解 因为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} c_1 \leftrightarrow c_2 \\ \simeq \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ -3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \\ \simeq \\ r_4+3r_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r_4-2r_2 \\ \simeq \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_3 \leftrightarrow r_4 \\ \simeq \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以 $R(A)=3$,

即向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4$ 的秩为3.

例20 将矩阵 A 化为标准形

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

分析 先用初等行变换化为阶梯形矩阵, 再用初等列变换化为标准形.

解 因为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+2r_1, r_3-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_2]{r_3-3r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+2r_3]{r_4+2r_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_3 \leftrightarrow c_4]{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_5-2c_1]{c_2+2c_1, c_4+c_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_5+\frac{1}{3}c_2]{c_3-\frac{2}{3}c_2, c_4-\frac{2}{3}c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_5+\frac{1}{3}c_3]{c_5+\frac{1}{3}c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}c_3]{\frac{1}{3}c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以 A 的标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

例21 设 $\vec{\alpha}_1 = (1, -2, -1, -2)$, $\vec{\alpha}_2 = (4, 1, 2, 1)$, $\vec{\alpha}_3 = (2, 5, 4, -1)$, $\vec{\alpha}_4 = (1, 1, 1, 1)$, 求向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4$ 的最大线性无关组, 并用最大线性无关组表示其余向量.

分析 利用矩阵的初等行(列)变换不改变列(行)向量组的线性相关性及线性关系式这一性质, 以所给向量如 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4$ 为列构成矩阵 A , 用初等行变换把 A 化为阶梯形矩阵可得最大线性无关组, 然后再把阶梯形矩阵化为简化阶梯形或行最简形矩阵就可得到用最大线性无关组表示其余向量的关系式.

解 因为

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4+2r_1]{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3+r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 9 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-\frac{2}{3}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow[-\frac{1}{6}r_3]{\frac{1}{9}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_1-2c_3]{c_2-c_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow[r_1-4r_2]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 &\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3 \text{ 为最大线性无关组, 且} \\
 &\vec{\alpha}_4 = -\frac{1}{3}\vec{\alpha}_1 + \frac{1}{3}\vec{\alpha}_2 + 0 \cdot \vec{\alpha}_3.
 \end{aligned}$$

例 22(2001. I) 设矩阵 A 满足 $A^2 + A - 4E = 0$, 其中 E 为单位矩阵, 证明: $A - E$ 可逆,

并求 $(A - E)^{-1}$.

分析 对抽象矩阵, 要证明其可逆并求逆矩阵, 一般是利用逆矩阵的定义由已知条件经恒等变形得到所证的矩阵乘以另一个矩阵等于单位矩阵.

$$\begin{aligned}
 \text{证 由 } A^2 + A - 4E = 0 \text{ 得} \\
 (A - E)(A + 2E) = 2E,
 \end{aligned}$$

于是

$$(A - E) \frac{A + 2E}{2} = E,$$

故

$$\begin{aligned}
 &A - E \text{ 可逆, 且} \\
 &(A - E)^{-1} = \frac{A + 2E}{2}.
 \end{aligned}$$

例23 设 $A^3 = 2E$, 证明: $A + 2E$ 可逆, 并求 $(A + 2E)^{-1}$.

$$\text{证 由 } A^3 = 2E \text{ 得 } A^3 + 8E = 10E,$$

即

$$A^3 + (2E)^3 = 10E,$$

由于

$$A \text{ 与 } 2E \text{ 可交换,}$$

所以

$$(A + 2E)(A^2 - 2A + 4E) = 10E,$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad & (A+2E) \frac{A^2 - 2A + 4E}{10} = E, \\ \text{故} \quad & A+2E \text{可逆, 且} \\ & (A+2E)^{-1} = \frac{A^2 - 2A + 4E}{10}. \end{aligned}$$

例24 设 $A^2 = A$ (即 A 为幂等矩阵), 证明: $R(A) + R(A-E) = n$.

分析 因为 $R(A-E) = R(E-A)$, 故要证 $R(A) + R(A-E) = R(A) + R(E-A) = n$, 只需证不等式

$$\begin{aligned} R(A) + R(E-A) &\leq n, \\ R(A) + R(E-A) &\geq n, \end{aligned}$$

同时成立即可.

证 由 $A^2 = A$ 得 $A(E-A) = 0$,
所以

$$R(A) + R(E-A) \leq n, \quad (5)$$

又因为 $E = E + (E-A)$,
所以

$$R(A) + R(E-A) \geq R[E + (E-A)] = R(E) = n, \quad (6)$$

由 (5), (6) 可得 $R(A) + R(E-A) = n$,

又 $R(E-A) = R(A-E)$,
所以 $R(A) + R(A-E) = n$.

例25 设 $A, B, A+B$ 都是可逆矩阵, 证明: $A^{-1} + B^{-1}$ 可逆, 并求 $(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$.

分析 为了证明 $A^{-1} + B^{-1}$ 的可逆, 要充分利用 $A, B, A+B$ 的可逆性, 为此设法把和式 $A^{-1} + B^{-1}$ 化为 $A, B, A+B$ 及其逆矩阵的乘积形式.

$$\begin{aligned} \text{证 因为 } A^{-1} + B^{-1} &= A^{-1} + A^{-1}AB^{-1} \\ &= A^{-1}(E + AB^{-1}) \\ &= A^{-1}(BB^{-1} + AB^{-1}) \\ &= A^{-1}(B+A)B^{-1}, \end{aligned}$$

由于 $A^{-1}, B^{-1}, A+B$ 可逆,
所以 $A^{-1} + B^{-1}$ 可逆, 且

$$\begin{aligned} (A^{-1} + B^{-1})^{-1} &= [A^{-1}(A+B)B^{-1}]^{-1} \\ &= B(A+B)^{-1}A. \end{aligned}$$

注:

(1) 若将上式中 A^{-1}, B^{-1} 用 A, B 替换, 则可得

$$(A+B)^{-1} = B^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1},$$

这时要求矩阵 $A, B, A^{-1} + B^{-1}$ 均可逆.

(2) 由 A, B 可逆不能推出 $A+B$ 可逆, 例

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

则显然 A, B 可逆,

而 $A+B=O$, 不可逆.

例26 设 A 是 n 阶矩阵, n 为奇数, 且 $|A|=1$, 又已知 $A^T = A^{-1}$, 证明: $E-A$ 不可逆.

分析 要证 $E-A$ 不可逆, 只需证 $|E-A|=0$ 即可, 为此设法把和式 $E-A$ 化为乘积形式.

证 由 $A^T = A^{-1}$ 得

$$E-A = AA^{-1} - A = A(A^T - E) = A(A-E)^T,$$

又因为 $|A|=1$, 且 A 为 n 阶矩阵, n 为奇数,

所以

$$\begin{aligned} |E-A| &= |A| |(A-E)^T| = |A-E| = |-(E-A)| \\ &= (-1)^n |E-A| = -|E-A|, \end{aligned}$$

即 $2|E-A|=0$,

于是 $|E-A|=0$,

故 $E-A$ 不可逆.

例27 设 n 阶矩阵 $A \neq O$, 证明: 存在一个非零矩阵 B 使 $AB=O$ 的充分必要条件是 $|A|=0$.

证 必要性

如果 $|A| \neq 0$, 则 A 可逆

由 $AB=O$ 两边左乘 A^{-1} ,

得 $B=O$, 与 $B \neq O$ 矛盾,

故 $|A|=0$.

充分性

若 $|A|=0$, 则齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 必有非零解,

设 $\vec{B_1}, \vec{B_2}, \dots, \vec{B_n}$ 是 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的 n 个非零解,

令 $B = (\vec{B_1} \ \vec{B_2} \ \dots \ \vec{B_n})$, 则 $B \neq O$, 且

$$AB = (\vec{AB_1} \ \vec{AB_2} \ \dots \ \vec{AB_n}) = (\vec{0} \ \vec{0} \ \dots \ \vec{0}) = O.$$

例 28(2001. I) 已知3阶矩阵 A 与三维向量 $\vec{x}$, 使得向量组 $\vec{x}, A\vec{x}, A^2\vec{x}$ 线性无关

, 且满足 $A^3\vec{x} = 3A\vec{x} - 2A^2\vec{x}$,

(1) 记 $P = (\vec{x} \ A\vec{x} \ A^2\vec{x})$, 求3阶矩阵 B , 使 $A = PBP^{-1}$,

(2) 计算行列式 $|A+E|$.

解 (1) 设

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix},$$

则由 $AP = PB$ 得

$$A(\vec{x} \ A\vec{x} \ A^2\vec{x}) = (\vec{x} \ A\vec{x} \ A^2\vec{x}) \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix},$$

即

$$(A\vec{x} \ A^2\vec{x} \ A^3\vec{x}) = (a_1\vec{x} + b_1A\vec{x} + c_1A^2\vec{x} \ a_2\vec{x} + b_2A\vec{x} + c_2A^2\vec{x} \ a_3\vec{x} + b_3A\vec{x} + c_3A^2\vec{x}),$$

于是

$$\begin{cases} A\vec{x} = a_1\vec{x} + b_1A\vec{x} + c_1A^2\vec{x}, \\ A^2\vec{x} = a_2\vec{x} + b_2A\vec{x} + c_2A^2\vec{x}, \\ A^3\vec{x} = a_3\vec{x} + b_3A\vec{x} + c_3A^2\vec{x}. \end{cases}$$

$$\text{又 } A^3\vec{x} = 3A\vec{x} - 2A^2\vec{x},$$

所以

$$\begin{cases} a_1\vec{x} + (b_1 - 1)A\vec{x} + c_1A^2\vec{x} = 0, \\ a_2\vec{x} + b_2A\vec{x} + (c_2 - 1)A^2\vec{x} = 0, \\ a_3\vec{x} + (b_3 - 3)A\vec{x} + (c_3 + 2)A^2\vec{x} = 0. \end{cases}$$

因为向量组 $\vec{x}, A\vec{x}, A^2\vec{x}$ 所以

$$\begin{cases} a_1 = 0, & a_2 = 0, & a_3 = 0, \\ b_1 = 1, & b_2 = 0, & b_3 = 3, \\ c_1 = 0, & c_2 = 1, & c_3 = -2. \end{cases}$$

故

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(2) 因为 $A = PBP^{-1}$,

$$\text{所以 } A + E = PBP^{-1} + PP^{-1} = P(B + E)P^{-1},$$

$$\text{于是 } |A + E| = |P||B + E||P^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

例29 设 n 阶方阵 A 为对称矩阵, B 为反对称矩阵, 证明: AB 为反对称矩阵的充分必要条件是 $AB = BA$.

证 必要性

设 AB 为反对称矩阵, 则 $(AB)^T = -AB$,

因为 $A^T = A$, $B^T = -B$,

所以 $(AB)^T = B^T A^T = -BA$,

于是 $-AB = -BA$, 即 $AB = BA$.

充分性

设 $AB = BA$, 则

$$(AB)^T = B^T A^T = -BA = -AB,$$

故 AB 为反对称矩阵.

例30 设 A 为 n 阶方阵 ($n \geq 2$), A^* 为 A 的伴随矩阵, 证明:

$$R(A^*) = \begin{cases} n, & \text{若 } R(A) = n, \\ 1, & \text{若 } R(A) = n-1, \\ 0, & \text{若 } R(A) < n-1. \end{cases}$$

证 (1) 若 $R(A) = n$, 则 A 可逆, 于是 $|A| \neq 0$,

因为 $AA^* = |A|E$, 所以 $|A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$,

故 若 $R(A^*) = n$.

(2) 若 $R(A) = n-1$, 则 $|A| = 0$,

于是有 $AA^* = |A|E = O$, 即 A^* 的每一列向量都是齐次线性方程组 $A\vec{x} = \vec{0}$ 的解向量,

因为 $R(A) = n-1$

所以方程组 $A\vec{x} = \vec{0}$ 的基础解系中含有 $n - R(A) = n - (n-1) = 1$ 个向量,

故 $R(A^*) \leq 1$,

又因为 $R(A) = n-1$,

故 A 中至少有一个 $n-1$ 阶子式不等于零,

即 A^* 中至少有一个元素不为零,

所以 $R(A^*) \geq 1$,

由此得 $R(A^*) = 1$.

(3) 若 $R(A) < n-1$, 则 A 的所有 $n-1$ 阶子式全为零, 即 $A^* = O$,

故 $R(A^*) = 0$.

例31 已知 A, B 均为 n 阶方阵, 证明: $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$.

证 因为

$$\begin{bmatrix} E & E \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & -E \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{bmatrix},$$

两边取行列式得

$$\begin{vmatrix} E & E \\ 0 & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E & -E \\ 0 & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{vmatrix},$$

所以

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|.$$

注:

(1) 对以分块矩阵为元素的行列式, 不能直接用求行列式的对角线法则计算, 而将行列式化为分块三角形行列式.

(2) 可以证明 $\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$.

例32 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵, 证明:

$$R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}.$$

证 设 $R(A) = r$, 则有可逆矩阵 P, Q 使

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

于是

$$PAB = PAQQ^{-1}B = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1}B.$$

对 $Q^{-1}B$ 作相应的分块, 记

$$Q^{-1}B = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \text{ 行} \\ n-r \text{ 行} \end{matrix},$$

则

$$PAB = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由 P 可逆得

$$R(AB) = R(PAB) = R\left(\begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \leq r = R(A).$$

又因为

$$R(AB) = R((AB)^T) = R(B^T A^T) \leq R(B^T) = R(B),$$

所以

$$R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}.$$

例33 设方阵 A 可逆, 且 A 的每行元素之和均等于常数 a , 证明:

(1) $a \neq 0$;

(2) A^{-1} 的每行元素之和均为 $\frac{1}{a}$.

解 (1) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{c_n + \cdots + c_2 + c_1} \begin{bmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

若 $a = 0$, 则 $|A| = 0$, 与 A 可逆即 $|A| \neq 0$ 矛盾, 故 $a \neq 0$.

(2) 令 $A = (\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_n)$,

$A^{-1} = (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \cdots, \vec{\beta}_n)$, $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$,

因为 $A^{-1}A = E$,

所以 $A^{-1}\vec{\alpha}_j = \vec{e}_j, (j=1, 2, \cdots, n)$

于是 $A^{-1}\vec{\alpha}_1 + A^{-1}\vec{\alpha}_2 + \cdots + A^{-1}\vec{\alpha}_n = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \cdots + \vec{e}_n$,

$$A^{-1}(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \cdots + \vec{\alpha}_n) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \cdots + \vec{e}_n,$$

即 $A^{-1} \begin{bmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$

又 $A^{-1} \begin{bmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix} = (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \cdots, \vec{\beta}_n) \begin{bmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}$

$$= a(\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 + \cdots + \vec{\beta}_n),$$

所以 $a(\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 + \cdots + \vec{\beta}_n) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$

故 $(\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 + \cdots + \vec{\beta}_n) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} \\ \vdots \\ \frac{1}{a} \end{bmatrix},$

即 A^{-1} 的每行元素之和均为 $\frac{1}{a}$.

例34 将矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 表示为有限个初等方阵的乘积.

分析 由于任一可逆矩阵 A 都可经一系列初等行变换化为单位矩阵 E , 即 $P_l \cdots P_1 A = E$, 故 $A = P_1^{-1} \cdots P_l^{-1}$, 而初等方阵的逆矩阵仍为初等方阵, 所以任一可逆矩阵可表示为初等方阵的积.

解 因为

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1)r_2 \\ (-1)r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & P_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ P_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & P_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

则

$$P_4 P_3 P_2 P_1 A = E,$$

故

$$\begin{aligned} A &= P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} P_4^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

例35 如果 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, 试问: 一定有 $|AB| = |BA|$ 吗? 若成立证明之, 若不成立, 举例说明.

分析 当 A, B 为 n 阶方阵时, 一定有 $|AB| = |BA|$, 而当 A, B 不为 n 阶方阵时, 不一定有 $|AB| = |BA|$.

解 不一定有 $|AB| = |BA|$. 举例如下:

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{则 } AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

于是 $|AB| = 1, \quad |BA| = 0.$

故 $|AB| \neq |BA|.$

目标测试题

一、填空题

1. 设 A 为3阶方阵, 且 $|A|=3$, 则 $|-2A| = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 当 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & \lambda \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ 为奇异矩阵.

3. (1996. I) 设 A 为 4×3 矩阵, 且 $R(A)=2$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $R(AB) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. (1997. I) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, B 为3阶非零矩阵且 $AB = O$, 则 $t = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $(A^*)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题

1. 设 n 阶方阵 A, B, C 满足 $ABC = E$, 则必有 ().

- (A) $ACB = E$, (B) $CBA = E$,
(C) $BAC = E$, (D) $BCA = E$.

2. (1999. I) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, 则 ().

- (A) 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$,
(B) 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$,
(C) 当 $n > m$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$,
(D) 当 $n > m$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$.

3. (1995. I) 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{bmatrix}$,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则必有 ().}$$

- (A) $AP_1P_2 = B$, (B) $AP_2P_1 = B$,
(C) $P_1P_2A = B$, (D) $P_2P_1A = B$.

4. (1993. I) 已知 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, P 为三阶非零矩阵, 且满足 $PQ = O$, 则 ().

- (A) $t = 6$ 时, P 的秩必为 1,
(B) $t = 6$ 时, P 的秩必为 2,
(C) $t \neq 6$ 时, P 的秩必为 1,
(D) $t \neq 6$ 时, P 的秩必为 2.

5. 设 n 阶方阵 A 与 B 等价, 则 ().

- (A) $|A| = |B|$, (B) $|A| \neq |B|$,
(C) 若 $|A| \neq 0$, 则必有 $|B| \neq 0$, (D) $|A| = -|B|$.

三、计算题

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, 求 A^{-1} .

2. 设矩阵 A, B 满足关系式 $AB = 2(A + B)$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

求矩阵 B .

3. 设 n 阶方阵 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$, 求 $R(A)$.

4. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 求 A^n (n 为正整数).

5. 设实矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足条件

(1) $a_{ij} = A_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$), 其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式,

(2) $a_{11} \neq 0$,

求 $|A|$.

6. 求向量组 $\vec{\alpha}_1 = (1, 3, 2, 0)$, $\vec{\alpha}_2 = (7, 0, 14, 3)$, $\vec{\alpha}_3 = (2, -1, 0, 1)$, $\vec{\alpha}_4 = (5, 1, 6, 2)$, $\vec{\alpha}_5 = (2, -1, 4, 1)$ 的秩及最大线性无关组, 并用最大线性无关组表示其余向量.

四、证明题

1. 若 $A^2 = E$, $B^2 = E$, 且 $|A| + |B| = 0$, 证明: $A + B$ 为奇异矩阵.

2. (1994. I) 设 A 为 n 阶非零矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵且 $A^* = A^T$, 证明: $|A| \neq 0$.

目标测试题参考答案

第一章目标测试题

一、1. $3M$; 2. 5; 3. -3; 4. $a^n + (-1)^{n+1}b^n$; 5. 0.

二、1. A ; 2. D ; 3. A ; 4. D ; 5. B .

三、1. x^4 ;

2. $\lambda^{10} - 10^{10}$;

3. 0;

4. $(-1)^{n-1}(n-1)$.

四、 $x_1 = -\sum_{i=1}^4 a_i, x_2 = x_3 = x_4 = 0.$

第二章目标测试题

一、1. $abc \neq 0$; 2. 2; 3. $s \geq n$; 4. 2; 5. 1.

二、1. B; 2. C; 3. B; 4. C; 5. D.

三、1. $t \neq 4$ 时线性无关, $t = 4$ 时线性相关, $\vec{\alpha}_3 = -\vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2$;

2. $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 为一个最大无关组, $\vec{\alpha}_4 = -\frac{3}{2}\vec{\alpha}_1 + \frac{1}{2}\vec{\alpha}_2 - \frac{3}{2}\vec{\alpha}_3$;

3. $a = 3, b = 9$;

4. $\vec{\beta}_3 = (2, 2, 0).$

第三章目标测试题

一、1. -24; 2. -3; 3. 2; 4. $t = -3$; 5. $\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

二、1. D; 2. B; 3. C; 4. C; 5. C.

三、1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -5 & 2 \end{bmatrix};$

2. $\begin{bmatrix} 10 & -4 & -4 \\ 8 & -6 & -4 \\ -4 & 4 & 6 \end{bmatrix};$

3. 当 $a = 1$ 时, $R(A) = 1$; 当 $a = 1 - n$ 时, $R(A) = n - 1$; 当 $a \neq 1$ 且 $a \neq 1 - n$ 时 $R(A) = n$;

4. 当 n 为偶数时, $2^n E$; 当 n 为奇数时, $2^{n-1} A$;

5. 1;

6. 秩为 3; 最大线性无关组为 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_5$; $\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + 3\vec{\alpha}_5, \vec{\alpha}_4 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_5$;

