

1	第一章 行列式
	§ 1 行列式的概念 1
	§ 2 行列式的基本性质与计算 8
	§ 3 克莱姆法则 21
	习 题 一 27
31	第二章 n 维向量
	§ 1 n 维向量的概念 31
	§ 2 向量组的线性相关性 34
	§ 3 向量组的秩 44
	§ 4 向量空间 48
	习 题 二 53
55	第三章 矩 阵
	§ 1 矩阵的概念与运算 55
	§ 2 方 阵 64

§ 3	逆矩阵及其求法	69
§ 4	分块矩阵	75
§ 5	矩阵的秩	81
§ 6	矩阵的初等变换	87
§ 7	初等方阵	93
习 题 三		101

107

第四章

线性方程组

§ 1	消元法	107
§ 2	齐次线性方程组	112
§ 3	非齐次线性方程组	123
习 题 四		131

134

第五章

相似矩阵及二次型

§ 1	向量的内积	134
§ 2	特征值与特征向量	142
§ 3	相似矩阵	148
§ 4	实对称矩阵的相似矩阵	153
§ 5	二次型及其标准形	158
§ 6	正定二次型	163
习 题 五		167

	第六章
170	线性空间与线性变换

	§ 1 线性空间及其子空间 170
	§ 2 维数、基与坐标 174
	§ 3 基变换与坐标变换 177
	§ 4 线性变换 179
	§ 5 线性变换的矩阵 182
	习 题 六 187

	附录一
190	n 阶行列式另一种定义

	附录二
196	怎样用 MATLAB 解线性代数问题

215	习题参考答案

第一章



行列式



行列式是从解线性方程组的问题引进的. 行列式不但是研究线性方程组和矩阵的有力工具, 而且在解决许多理论和实际应用问题中, 也发挥着重要作用. 本章主要介绍行列式的定义、性质及计算, 最后介绍行列式的一个应用, 即用行列式解 n 元线性方程组的克莱姆法则.



§ 1 行列式的概念

在给出 n 阶行列式的定义之前, 让我们先回顾中学代数解线性方程组, 从而引出的二阶和三阶行列式的定义.

为了解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (1)$$

我们可以采用消元法, 用 a_{22} 去乘第一个方程, a_{12} 去乘第二个方程, 然后两个方程相减, 得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 则可得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (2)$$



类似地可以求得

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (3)$$

表达式(2)和(3)提供了线性方程组(1)解的一般公式. 为了便于记忆和讨论, 我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

用它表示数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (4)$$

我们称之为二阶行列式. 其中横写的叫作行, 竖写的叫作列, 一共有二行二列, $a_{ij} (i, j = 1, 2)$ 称为它的元素.

根据上面二阶行列式的定义, (2) 式和(3) 式的分子分别可以写为

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

可见二阶行列式是这样两项的代数和: 一项是位于第一行第一列的元素与划去第一行和第一列后剩下的一个元素的乘积, 取正号; 另一项是位于第一行第二列的元素与划去第一行和第二列后剩下的一个元素的乘积, 取负号. 例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \times 9 - 7 \times 3 = -3.$$

利用二阶行列式的定义, 方程组(1) 的解可写成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (5)$$

我们通过消元法得到了求解线性方程组(1) 的公式(2)、(3), 这个公式用行列式来表示就是(5) 式. 虽然用消元法可以求得二元线性方程组解的公式, 但是随着未知数的增多, 这个公式越来越复杂, 其规律也不易掌握. 而在用行列式表示解的公式(5) 中, 解的表达有一定规律可循:

(1) x_1 与 x_2 的分母都是将原方程组未知数前的系数按原顺序排成的一个行列式.

(2) x_1 的分子行列式是将分母行列式的第一列换成常数项 b_1 与 b_2 而得到, x_2 的分子



行列式是将分母行列式的第二列换成常数项所得.

正因为用行列式来表示二元线性方程组的解有简单明了的优点,我们希望也能用它来将一般的线性方程组的解表示出来. 为此我们来讨论三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (6)$$

从方程组(6)的前两个方程消去 x_3 ,后两个方程也消去 x_3 ,再从所得到的两个方程中消去 x_2 ,就得到

$$\begin{aligned} & (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ & = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3. \end{aligned} \quad (7)$$

注意到上式中 x_1 的系数是由方程组(6)中未知数的9个系数 $a_{ij}(i, j=1, 2, 3)$ 按照一定的规律构成的,借助二阶行列式的定义,该系数可表示为

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

我们把此式记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

称为三阶行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

上式的规律是:把第一行每一元素乘以划去该元素所在的行列之后剩下的二阶行列式,前面再冠以正、负相间的符号,最后求它们的代数和.

同样地,(7)式等号右端正是三阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

若(7)式 x_1 的系数不为零,则可写成



$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \quad (9)$$

类似地可以求得

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \quad (10)$$

我们注意到在 x_1, x_2, x_3 的表达式中, 它们的分母都相同. 分子行列式都是由分母行列式去掉对应于 x_i 的第 i 列, 再换上常数列 b_1, b_2, b_3 组成. 这些特点与二元线性方程组解的表达式是一样的. 如果我们引进 n 阶行列式的概念, 当然希望也能用 n 阶行列式表示 n 元线性方程组的解, 本章第 3 节讨论的就是这个问题.

如果定义一阶行列式 $|a| = a$, 则我们发现(4)式和(8)式的规律是一样的. 我们把此规律进一步推广, 便引进 n 阶行列式的概念.

定义 1 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

它由 n 行 n 列元素 (共 n^2 个元素) 组成, 又记 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式, 即由 D 中划去第 i 行第 j 列后剩下的 $n-1$ 行 $n-1$ 列元素所组成的, 即



$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

称 D 为 n 阶行列式, 它的值由下面的归纳法来定义.

当 $n=1$ 时, (11) 式定义 $D=a_{11}$, 假定对 $n-1$ 阶行列式已经定义, 那么对任意的 i, j , M_{ij} 是一个 $n-1$ 阶行列式, 它的值由归纳假定是已经定义好的, 既然如此, 我们就可以借助于 M_{ij} 按下面的方式来定义 n 阶行列式 D 的值:

$$\begin{aligned} D &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}. \end{aligned} \quad (12)$$

显然, 对于任何自然数 n , (12) 式给出了一个计算 n 阶行列式的方法: 将 n 阶行列式化为 $n-1$ 阶, 再化为 $n-2$ 阶, …… 最后便可求出 D 的值. (12) 式又称为 D 按第一行的展开式.

为了使 (12) 式的形状更好一些, 我们再引进代数余子式的概念.

定义 2 在行列式 D (11) 式中, 第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 的代数余子式定义为

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},$$

其中 M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式.

例如, 对行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 3 = 1, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 4 \times 2 = -7.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = -7.$$

由定义 2, (12) 式可化为

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}. \quad (13)$$

例 1 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 7 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 9 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$



[解]

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 7 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 6 \times \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \times (-3) - 6 \times 7 + 0 = -45.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \times 3 - (-1) \times (-6) + 3 \times (-9) \\
 &= -27.
 \end{aligned}$$

例 2 用定义证明下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注:主对角线(即从左上角到右下角这条对角线)上方所有元素全为零的行列式称为下三角行列式,类似地,可定义上三角行列式.上三角行列式和下三角行列式统称为三角行列式.

[证] 这是一个 n 阶行列式,但它的第一行除 a_{11} 外均为零,因此利用(12)式展开时只有一项不为零,于是

$$D = a_{11}M_{11} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

容易看出 a_{11} 的余子式仍是一个下三角行列式,只是阶数比 D 的阶数小1.因此又可用同样的方法求得

$$M_{11} = a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$



这样一直下去,则可得

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即下三角行列式的值正好等于主对角线上元素的乘积.

由例2,易知对角行列式(即主对角线以外的元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例3 证明

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

[证] 由定义,按第一行反复展开

$$\begin{aligned} D &= a_{1n}(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-2} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (n-1 \text{ 阶}) \\ &= a_{1n}(-1)^{1+n} a_{2,n-1}(-1)^{1+n-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{3,n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{4,n-3} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (n-2 \text{ 阶}) \\ &\cdots \\ &= (-1)^{1+n}(-1)^{1+n-1}\cdots(-1)^{1+2} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} \\ &= (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}. \end{aligned}$$



§2 行列式的基本性质与计算

1. 行列式的基本性质

行列式的基本性质不仅对理解行列式的概念是必要的,而且是计算行列式的基础.

下面我们来研究行列式的基本性质,在此先介绍一个概念.

定义 3 设 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

如果把 D 的行列互换而不改变各行、各列的顺序,得到一个新的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为行列式 D 的转置行列式,记为 D' 或 D^T .

例如,在例 1(1) 中该行列式的转置行列式为

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

由行列式的定义,知

$$D' = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 7 \times \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + 8 \times \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -45.$$

此行列式和原来的行列式恰好相等,即 $D' = D$.

事实上,对一般的 n 阶行列式,我们也有同样的结论.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D = D'$.

由性质 1 及例 2 知上三角行列式也等于主对角线上元素的乘积.



即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

根据性质 1 可知,行列式中行与列具有同等地位,行列式的性质凡是对行成立的,对列也同样成立,反之也成立.

对于例 1(1) 中的行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 7 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 9 \end{vmatrix},$$

将 D 的任意两行(列)交换,例如交换第一行、第三行得到

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 9 \\ 7 & 2 & 7 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix},$$

由行列式的定义,容易算得 $D_1 = 45 = -D$.

一般地,我们也有下面的结论:

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式改变符号.

由于性质 1 和性质 2 的证明比较复杂,我们只不加证明地给出来.

由性质 2 可得下面的推论.

推论 1 若行列式 D 中某一行(列)的所有元素均为零,则

$$D = 0.$$

[证] 当第一行元素全为零时,则由行列式的定义显然有

$$D = 0.$$

若第 i 行($i > 1$) 的元素全为零时,则交换第 i 行和第一行后所得到的行列式应等于零,从而由性质 2 知 $D = 0$. 证毕.

推论 2 若行列式 D 中有两行(列)相同,则 $D = 0$.

只要将相同的两行互换就有 $-D = D$,故 $D = 0$.

性质 3 如果行列式 D 中某行(列)的所有元素是两个数的和,那么 D 可表示成两个新行列式之和,即



$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \text{ (第 } i \text{ 行)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

[证] 当 $i = 1$ 时, 由行列式的定义知

$$\begin{vmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} & \cdots & b_{1n} + c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} (b_{1j} + c_{1j}) M_{1j}$$

$$= \sum_{j=1}^n [(-1)^{1+j} b_{1j} M_{1j} + (-1)^{1+j} c_{1j} M_{1j}]$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} b_{1j} M_{1j} + \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} c_{1j} M_{1j}$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

当 $i > 1$ 时, 把第 i 行与第一行互换, 再按上面方法把行列式拆成两个行列式之和, 然后再把这两个行列式的第 i 行与第一行互换即得该命题成立. 证毕.

性质 4 行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

[证] 当 $i = 1$ 时, 由行列式的定义知



$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} (ka_{1j}) M_{1j} \\
 = k \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} \right) = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

当 $i > 1$ 时,把 i 行与第一行互换,根据上面的结论,可把第一行的公因子提到行列式外,然后再互换第一行和第 i 行,即得该命题成立. 证毕.

由性质 4 及推论 2 易得

推论 3 如果行列式 D 的某两行(列)对应元素成比例,则

$$D = 0.$$

由性质 3、性质 4 及推论 2 可以得到下面的性质.

性质 5 把行列式中某一行(列)的各元素乘以常数 k 后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式保持不变,即

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行,以 c_i 表示第 i 列. 交换 i, j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$, 交换 i, j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$. 第 i 行(列)提出公因子 k 记作 $r_i \div k (c_i \div k)$. 以数 k 乘第 j 行(列)加到第 i 行(列)上去,记作 $r_i + kr_j (c_i + kc_j)$.

一般来说,计算行列式主要利用上述性质和推论把行列式化为上三角(或下三角)行列式来计算. 下面计算几个行列式.

例 4 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$



[解]

$$\begin{aligned}
 D & \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 + 5r_1]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - 8r_2]{r_3 + 4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow[r_4 + \frac{5}{4}r_3]{r_4 - 8r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40.
 \end{aligned}$$

例 5 计算

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}.$$

[解] 从第四行开始,后行减前行:

$$\begin{aligned}
 D & \xrightarrow[r_2 - r_1]{r_3 - r_2, r_4 - r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_4 - r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow[r_4 - r_3]{r_4 - r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4.
 \end{aligned}$$

例6 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

〔解法1〕 这个行列式的特点是各行 n 个数之和都是 $a + (n-1)b$, 故把第二列至第 n 列均加到第一列上去, 然后各行均减去第一行:

$$D \xrightarrow{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a + (n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ \cdots \\ r_n - r_1}} \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

〔解法2〕 镶边法.

由行列式的定义知, D 等于下面 $n+1$ 阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & b & \cdots & b \\ b & b & a & b & \cdots & b \\ b & b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} c_2 - c_1 \\ c_3 - c_1 \\ \cdots \\ c_{n+1} - c_1 \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ b & a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{array} \right| \\
 & \begin{array}{c} r_1 + \frac{1}{a-b}r_2 \\ r_1 + \frac{1}{a-b}r_3 \\ \cdots \\ r_1 + \frac{1}{a-b}r_{n+1} \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} 1 + \frac{nb}{a-b} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{array} \right| \quad (a \neq b) \\
 & = \left(1 + \frac{nb}{a-b}\right) (a-b)^n = [a + (n-1)b] (a-b)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

例7 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明: $D = D_1 D_2$.

[证] 由行列式性质5, 对 D_1 做运算 $r_i + \lambda r_j$, 把 D_1 化为下三角形行列式, 设为

$$D_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm} \end{vmatrix} = p_{11} \cdots p_{mm}.$$

同理, 对 D_2 做运算 $c_i + \lambda c_j$, 把 D_2 化为下三角形行列式, 设为



$$D_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} = q_{11} \cdots q_{nn}.$$

所以对 D 的前 m 行做运算 $r_i + \lambda r_j$, 再对后 n 列做运算 $c_i + \lambda c_j$, 把 D 化为下三角形行列式, 得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & q_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} \\ &= p_{11} \cdots p_{mm} q_{11} \cdots q_{nn} \\ &= D_1 D_2. \end{aligned}$$

2. 行列式按任一行(列)展开

根据行列式的定义和性质 1, 行列式等于它的第一行(列)的各元素与它们对应的代数余子式乘积之和. 事实上, 我们可以证明更一般的结论.

定理一 行列式等于它的任一行(列)的各元素与它们对应的代数余子式乘积之和, 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

为证上述定理, 先证下面的引理.

引理 一个 n 阶行列式 D , 如果其中第 i 行(或第 j 行)所有元素除 a_{ij} 外都为零, 则这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积, 即

$$D = a_{ij}A_{ij}.$$

[证] 以行为例进行证明.

(1) 先证 a_{ij} 位于第一行第一列的情形, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$



由行列式的定义,按第一行展开

$$D = a_{11}M_{11} = a_{11}A_{11}.$$

(2) 再证一般情形(第 i 行除 a_{ij} 外,其他元素全为零),此时

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 D 的第 i 行依次和第 $i-1, i-2, \cdots, 1$ 行交换,然后将第 j 列依次和第 $j-1, j-2, \cdots, 1$ 列交换,这样得到一个新的 n 阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

易知此行列式第一行第一列的元素的余子式就是 D 中第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} ,故由(1)的证明知

$$D_1 = a_{ij}M_{ij}.$$

又由行列式的性质 2 知

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{i+j-2} D_1 = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \\ &= a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}. \end{aligned}$$

证毕.

定理一的证明:

将行列式 D 的第 i 行的所有元素按下面的方式拆成 n 个数的和,然后由性质 3 将 D 表示为 n 个行列式之和.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + 0 + \cdots + 0 & 0 + a_{i2} + \cdots + 0 & \cdots & 0 + \cdots + 0 + a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$



$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由引理,即得

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

同理,若按列进行证明,可得

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n). \quad \text{证毕.}$$

这个定理称为行列式按行(列)展开定理. 利用这一定理并结合行列式的性质,可以简化行列式的计算.

由这一定理,我们还得到下列重要推论.

推论 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j);$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j).$$

[证] 不妨设 $i < j$, 把行列式 D 中第 j 行的元素换成第 i 行的元素, 则得行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \quad (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \quad (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由行列式性质 2 的推论 2 知 $D_1 = 0$. 现把 D_1 按第 j 行展开, 有

$$D_1 = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}.$$

所以

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j).$$

同理也可得到

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j). \quad \text{证毕.}$$



综合定理一及推论,我们得到

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D & (i=j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} D & (i=j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

下面我们利用定理一计算行列式,先计算前面的例4:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

我们保留 a_{33} ,把第三行其余元素变为0,然后按第三行展开:

$$\begin{aligned} D & \xrightarrow[c_4 + c_3]{c_1 - 2c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow[r_2 + r_1]{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_1 - c_2]{c_1 - c_2} \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 40. \end{aligned}$$

例8 计算4阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} [\text{解}] \quad D & \xrightarrow[r_4 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow[c_3 + 2c_2]{c_1 + 2c_2} - \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = -(-1)^{2+2} \times (-1) \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} \\ & = 27. \end{aligned}$$



例9 计算

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & a & & 0 & b \\ & & \ddots & & \ddots \\ & 0 & & a & b \\ & & & c & d \\ & & \ddots & & \ddots \\ c & & & 0 & d \\ & c & & & d \end{vmatrix}.$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{2n}$

[解] 按第一行展开,有

$$\begin{aligned} D_{2n} &= a \cdot \begin{vmatrix} & & & b & 0 \\ & \ddots & & 0 & \ddots \\ & & a & b & 0 \\ & & c & d & \\ & \ddots & & 0 & \ddots \\ c & & & d & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & d \end{vmatrix} \\ &\quad + b(-1)^{1+2n} \begin{vmatrix} 0 & a & & & b \\ \vdots & & \ddots & & 0 & \ddots \\ \vdots & & & a & b & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 & \ddots \\ 0 & c & & & & d \\ c & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} \\ &= adD_{2(n-1)} - bc(-1)^{2n-1+1}D_{2(n-1)} \\ &= (ad - bc)D_{2(n-1)}. \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{2(n-1)}$

以此做递推公式,即可得

$$D_{2n} = (ad - bc)D_{2(n-1)} = (ad - bc)^2D_{2(n-2)} = \dots$$



$$\begin{aligned}
 &= (ad - bc)^{n-1} D_2 = (ad - bc)^{n-1} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\
 &= (ad - bc)^n.
 \end{aligned}$$

例 10 证明范德蒙 (Vandermonde) 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

其中记号“ $\prod$ ”表示全体同类因子的乘积.

[证] 用数学归纳法. 因为

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2 \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

所以当 $n=2$ 时命题成立. 现在假设命题对于 $n-1$ 阶范德蒙行列式成立, 要证对 n 阶范德蒙行列式也成立.

为此, 设法把 D_n 降阶: 从第 n 行开始, 后行减去前行的 x_1 倍, 有

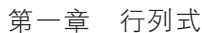
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第一列展开, 并把每列的公因子 $(x_i - x_1) (i=2, 3, \cdots, n)$ 提出, 就有

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙行列式, 按归纳法假设, 它等于所有 $(x_i - x_j)$ 因子的乘积, 其中 $n \geq i > j \geq 2$. 故

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \prod_{n \geq i > j \geq 2} (x_i - x_j) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$



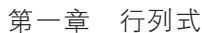


(15)

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}. \quad (16)$$
$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

欲证(16)式是方程组(14)的一个解,只需将(16)式代入(14)式中验证是否满足.

[illegible]
$$\begin{aligned} & a_{i1} \frac{D_1}{D} + a_{i2} \frac{D_2}{D} + \cdots + a_{in} \frac{D_n}{D} = \frac{1}{D} [a_{i1} D_1 + a_{i2} D_2 + \cdots + a_{in} D_n] \\ & \underline{\underline{\text{由(17) 式}}} \quad \frac{1}{D} [a_{i1} (b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1}) + a_{i2} (b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \cdots \\ & \quad + b_n A_{n2}) + \cdots + a_{in} (b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn})] \\ & = \frac{1}{D} [b_1 (a_{i1} A_{11} + a_{i2} A_{12} + \cdots + a_{in} A_{1n}) + b_2 (a_{i1} A_{21} + a_{i2} A_{22} + \cdots + a_{in} A_{2n}) + \cdots \\ & \quad + b_i (a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}) + \cdots + b_n (a_{i1} A_{n1} + a_{i2} A_{n2} + \cdots + a_{in} A_{nn})] \\ & = \frac{1}{D} (b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 + \cdots + b_{i-1} \cdot 0 + b_i \cdot D + b_{i+1} \cdot 0 + \cdots + b_n \cdot 0) \end{aligned}$$



所以(16)式是方程组(14)的解.

第二步：

欲证方程组(14)的解唯一,只需对任取方程组(14)的一组解

$$x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n,$$

若能证明只能是:

$$c_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

则证得解的唯一性.

将解 $x_j = c_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 代入(14) 式中得恒等式

[illegible]

在上述这组恒等式中,分别用 $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{nj}$ 乘这 n 个恒等式两边,得到:

[illegible]

将这 n 个恒等式相加,并应用定理一及其推论,于是得到

$$0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + \cdots + D \cdot c_j + \cdots + 0 \cdot c_n = D_j.$$

因为

$$D \neq 0,$$

所以

$$c_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

故方程组(14)只有唯一解,且其解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

证毕.

注意:用克莱姆法则解线性方程组必须具备两个前提条件,即

- (1) 未知数个数等于方程个数;
(2) 系数行列式 $D \neq 0$.

但是,用克莱姆法则解 n 个未知量、 n 个方程的线性方程组,需要计算 $n + 1$ 个 n 阶行



列式,计算量相当大.所以在实际问题中,超过四个未知数的线性方程组一般不采用克莱姆法则求解,通常是采用在第四章里将介绍的方法,那里将对更一般的线性方程组,用更有效的方法来求解.尽管如此,克莱姆法则在理论上仍然是相当重要的,因为它清楚地告诉我们,当方程组(14)的系数行列式不等于零时,方程组(14)有唯一解,又从求解公式中可看到方程组(14)的解与它们的系数、常数项的依赖关系,而且以后将会看到,克莱姆法则还可用于一般线性方程组的研究和讨论.所以,对克莱姆法则的条件、结论及其求解公式必须正确掌握和运用.

例 12 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

[解] 因为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0, \end{aligned}$$

所以方程组有唯一解. 又因为

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 18, & D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 36, \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 36, & D_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -18. \end{aligned}$$



所以 $x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 2, \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = -1.$

例 13 求一个二次多项式 $f(x)$, 使得 $f(1) = -1, f(-1) = 9, f(2) = 3.$

[解] 设 $f(x) = ax^2 + bx + c,$

由
$$\begin{cases} f(1) = -1, \\ f(-1) = 9, \\ f(2) = 3. \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} a + b + c = -1, \\ a - b + c = 9, \\ 4a + 2b + c = 3. \end{cases}$$

因为
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

所以方程组有唯一解. 又因为

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 18,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -30,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 9 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

所以 $a = \frac{D_1}{D} = 3, \quad b = \frac{D_2}{D} = -5, \quad c = \frac{D_3}{D} = 1.$

故所求多项式为

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 1.$$

2. 齐次线性方程组有非零解的充要条件

下面讨论方程组(14)的特殊情形, 即 $b_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n).$ 我们称方程组



(18)

对于齐次线性方程组,可以肯定它一定有解,因为至少 $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$ 就是它的解(这个零解也叫作平凡解). 而我们感兴趣的问题是齐次线性方程组(18)除了零解以外是否还有非零解? 即 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全为零的解. 如果有的话,它必须满足什么条件? 对于什么情形下齐次线性方程组(18)有非零解的问题,我们留在第四章里介绍,至于有非零解必须满足的条件,我们有下面的定理.

[证] 用反证法.

证毕.

综合得到:齐次线性方程组(18)有非零解的充要条件是系数行列式 $D = 0$.

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 0, \\ x + \lambda y + z = 0, \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

[解] 由齐次线性方程组有非零解的必要条件得知

$$= 0,$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 = 0.$$
 $\lambda = -2$ 或 $\lambda = 1$.



习题一

1. 写出下列行列式中元素 a_{12}, a_{31}, a_{33} 的余子式及代数余子式.

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

2. 用定义计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

3. 计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(6) \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix};$$

$$(7) \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{vmatrix};$$



$$(8) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}.$$

4. 计算下列 n 阶行列式.

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}; \quad (2) D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix};$$

$$(3) D_n = \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{vmatrix} \quad (n \geq 2);$$

$$(4) D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \end{vmatrix};$$

$$(5) D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & b \\ & \ddots & & \ddots \\ & & a & b \\ & & b & a \\ & \ddots & & \ddots \\ b & & & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{vmatrix} a & & & b \\ & \ddots & & \ddots \\ & & a & b \\ & & b & a \\ & \ddots & & \ddots \end{vmatrix}} \right\} n \text{ 行} \\ \left. \vphantom{\begin{vmatrix} a & & & b \\ & \ddots & & \ddots \\ & & a & b \\ & & b & a \\ & \ddots & & \ddots \end{vmatrix}} \right\} n \text{ 行} \end{matrix}.$$

行列式中未写出的元素都是0.

5. 证明:

$$(1) \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ 2x & x+y & 2y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-y)^3; \quad (2) \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix};$$



$$(3) \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(4) \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d);$$

$$(6) D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$= x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n;$$

$$(7) D_n = \begin{vmatrix} 2\cos \theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos \theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos \theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos \theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos \theta \end{vmatrix} \quad (\theta \neq k\pi)$$

$$= \frac{\sin (n+1)\theta}{\sin \theta};$$



$$(8) D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} \quad (a \neq b)$$

$$= \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

提示:(7)、(8) 两题应用数学归纳法证明.

6. 用克莱姆法则解下列各线性方程组.

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 5; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + y + z = a + b + c, \\ ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2, \\ bcx + cay + abz = 3abc. \end{cases}$$

(a, b, c 为互不相等的数)

7. 求一个三次多项式 $f(x)$, 使得 $f(-1) = 0, f(1) = 4, f(2) = 3, f(3) = 16$.

8. 试问 λ 取何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + \lambda y + z = 0, \\ x + y + \lambda^2 z = 0 \end{cases}$$

有非零解.

第二章



n 维向量



在第一章我们介绍了线性方程组的克莱姆法则,可是用克莱姆法则解线性方程组是有条件的,如果条件不满足,解的存在性和唯一性需要做进一步的讨论,为了研究一般线性方程组的解的情况,还需引入 n 维向量的概念. 本章介绍的主要内容有: n 维向量的概念、向量组的线性相关性、向量组的秩、向量空间.



§ 1 n 维向量的概念

关于二维、三维向量的概念,在解析几何中已经建立起来了.

在平面上建立起平面直角坐标系,以坐标原点 $O(0,0)$ 为始点,以点 $A(x,y)$ 为终点的向量可以表示成

$$\overrightarrow{OA} = \alpha = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

其中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 分别表示沿 Ox, Oy 轴正方向的单位向量, x, y 称为向量 α 的分量或坐标.

显然,在给定的平面直角坐标系中,向量 α 与两个有顺序的数所组成的数组 (x, y) 之间是一一对应关系,于是,向量 α 也可以表示成如下的形式:

$$\alpha = (x, y) \text{ 或 } \alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

同理,当我们在空间建立起空间直角坐标系,以坐标原点 $O(0,0,0)$ 为起点,以点 $P(x, y, z)$ 为终点的向量可以表示成



$$\boldsymbol{\alpha} = (x, y, z) \text{ 或 } \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

也就是说,空间直角坐标系中以 $O(0,0,0)$ 为起点、以 $P(x,y,z)$ 为终点的向量可以用三个有顺序的数所组成的数组 (x,y,z) 来表示.

类似地,我们可以用由 n 个有序的数所组成的数组来定义一种向量,这种向量就是所谓的 n 维向量.

定义 1 由 n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成的 n 元有序数组 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 称为 n 维向量, 其中数 $a_i (1, 2, \dots, n)$ 称为 n 维向量 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 的第 i 个分量 (或坐标), 分量是实数的向量, 称为实向量, 分量是复数的向量, 称为复向量.

以后我们用小写希腊字母 $\alpha, \beta, \dots$ 表示向量, 用小写拉丁字母 $a, b, \dots$ 表示向量的分量.

通常,定义中 n 维向量 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 用 α 表示时,记作

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

有时,向量也可以写成一行:

$$\alpha' = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

称为列向量.

上面所讲的平面向量 $\alpha = (x, y)$ 就是二维向量, 空间向量 $\alpha = (x, y, z)$ 就是三维向量, n 维向量正是二维、三维向量的推广. 当 $n > 3$ 时, n 维向量就没有直观的几何意义, 但仍沿用几何术语, 称为向量, 这是因为, 一方面它是二维、三维向量的推广, 另一方面它与二维、三维向量确实有许多相同的性质.

对于齐次线性方程组

[illegible]

中的每一个方程都是由它的系数完全决定,而与未知数的记号无关,如果我们把一个线



性方程中各未知数的系数顺序记下来,这样就得到由 n 个有顺序的数组所组成的数组,也就是一个 n 维向量. 如上面的方程组中第 i 个方程就对应于一个 n 维向量为

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

于是,线性方程和向量之间有一一对应关系,向量也可以看成是线性方程的简化形式. 因此,我们可以通过对向量组的研究来研究线性方程组.

定义 2 把分量全是零的向量,称为零向量,记作 $\mathbf{0}$,即

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0).$$

把向量 $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ 称为向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 的负向量,记作 $-\alpha$,即

$$-\alpha = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n).$$

定义 3 设向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 和向量 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 如果它们对应的分量均相等,即

$$a_i = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

则称这两个向量相等,记作 $\alpha = \beta$.

n 维向量之间的基本关系是以向量的加法和数量乘法来表示的.

定义 4 设向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 向量 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 则向量 $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ 称为向量 α 与向量 β 的和,记作 $\alpha + \beta$,即

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

由上述定义,可立即推出如下运算规律:

- (1) 交换律: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
- (2) 结合律: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;
- (3) $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$;
- (4) $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$.

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{0}$ 都是 n 维向量.

利用负向量定义,我们可以定义向量的减法:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n).$$

定义 5 设向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, 则向量 $(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$ 称为数 λ 与向量 α 的数量乘积,简称数乘,记作 $\lambda\alpha$,即

$$\lambda\alpha = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

由定义立即推出如下运算规律:

- (1) $1 \cdot \alpha = \alpha$;
- (2) $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha$;



$$(3) \lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta;$$

$$(4) (\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha.$$

其中 α, β 是 n 维向量, λ, μ 是常数.

由数乘定义及运算规律, 可得: 若 $\lambda\alpha = 0$, 则 $\lambda = 0$ 或 $\alpha = 0$.

向量的和、差及数乘运算统称为线性运算.

注: 两个向量只有维数相同时才有相等或不等的概念, 它们才能有加法或减法运算. 换句话说, 维数不同的两个向量不能进行比较, 也不能进行和或差的运算. 例如, 维数不同的零向量是不相等的.



§ 2 向量组的线性相关性

在这一节里我们介绍 n 维向量中两个基本概念, 即向量组的线性相关与线性无关, 为此我们引入线性组合的概念.

定义 6 设 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 都是 n 维向量, 如果存在一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 使得

$$\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_m\alpha_m,$$

那么向量 α 称为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合. 或者说, α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示.

例 1 任意一个 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 都可由向量组

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$\varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

.....

$$\varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1)$$

线性表示.

事实上, 因为

$$\begin{aligned} & a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n \\ &= a_1(1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + a_n(0, 0, \dots, 1) \\ &= (a_1, 0, \dots, 0) + (0, a_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, a_n) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= \alpha, \end{aligned}$$

即

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n.$$



故任意一个 n 维向量 α 均可由向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性表示,或者说,任意一个 n 维向量 α 都是向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 的一个线性组合.

向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 称为 n 维单位向量组.

例 2 已知向量 $\alpha_1 = (0, 0, 1), \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (3, 3, 0)$, 试问 α_3 是否可由 α_1, α_2 线性表示?

[解] 显然

$$\alpha_3 = 0 \cdot \alpha_1 + 3\alpha_2,$$

故 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示.

例 3 已知向量 $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 2, 0), \alpha_3 = (0, 0, -\frac{1}{2}), \alpha_4 = (3, 2, 1)$, 试问 α_4 是否可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

[解] 若有 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使

$$\alpha_4 = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3,$$

下面来求 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. 把 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned} (3, 2, 1) &= \lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 2, 0) + \lambda_3(0, 0, -\frac{1}{2}) \\ &= (\lambda_1, 2\lambda_2, -\frac{1}{2}\lambda_3), \end{aligned}$$

于是

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3, \\ 2\lambda_2 = 2, \\ -\frac{1}{2}\lambda_3 = 1. \end{cases}$$

解得

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -2.$$

故 α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 即

$$\alpha_4 = 3\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3.$$

换个说法, 即存在一组不全为零的数 $3, 1, -2, -1$, 使得

$$3\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 - \alpha_4 = 0$$

成立.

例 4 对于向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1, 0), \alpha_4 = (0, 0, 0, 1)$, 易知这四个向量中, 任何一个向量均不能被其余的三个向量线性表示. 换个说法, 即不存在一组不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, 使得



$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3 + \lambda_4 \alpha_4 = 0$$

成立,只有当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ 时,才有

$$0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 + 0 \cdot \alpha_4 = 0$$

成立.

一般来说,在一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中,是否有某个向量能被其余向量线性表示,这是向量组的一种重要特性,我们称之为向量组的线性相关性,为此给出如下定义.

定义 7 设有 n 维向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m,$$

如果存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$,使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0$$

成立,则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关;如果上式仅当 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ 时才成立,则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

注意:

(1) 在向量组的线性相关定义中,只要求存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$,使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0$$

成立,并不要求 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 都不等于零.

(2) 在向量组的线性无关定义中,要特别注意“仅当”这个词.例如,向量 $\alpha_1 = (2, 0), \alpha_2 = (4, 0)$,当 $k_1 = k_2 = 0$ 时,有 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = 0$,但是由此不能判断出向量组 α_1, α_2 线性无关.这是因为并没有证明仅当 $k_1 = k_2 = 0$ 时,等式 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = 0$ 才成立.事实上,当 $k_1 = 2, k_2 = -1$ 时,等式 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = 0$ 也成立,因此向量组 α_1, α_2 线性相关.

(3) 一个向量组不是线性无关,就必然是线性相关.

(4) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关,且 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0$,则

$$k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0.$$

根据定义 7,可以直接得出以下结论.

(1) 只包含一个向量 α 的向量组线性相关,当且仅当 $\alpha = 0$.

事实上,因 α 线性相关,由定义 7 知,存在 $k \neq 0$,使

$$k\alpha = 0,$$

由数乘的性质,有

$$\frac{1}{k}(k\alpha) = 0,$$

从而 $\alpha = 0$.



反之,如果 $\alpha = 0$, 取 $k = 1$, 则 $1 \cdot \alpha = 0$, 故向量组 α 线性相关.

(2) 由一个非零向量 α 构成的向量组必线性无关.

事实上, 对任意不为零的数 k , 由数乘的性质, 有

$$k\alpha \neq 0.$$

所以只有当 $k = 0$ 时, 才有 $k\alpha = 0$, 故一个非零向量构成的向量组是线性无关的.

(3) 在二维与三维的情况下:

两个向量 α_1, α_2 线性相关, 就表示向量 α_1 与 α_2 共线; 两个向量 α_1, α_2 线性无关, 就表示向量 α_1 与 α_2 不共线.

三个三维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 就表示向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 共面; 三个三维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 就表示 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不共面.

为了加深对定义的理解, 下面举几个例子.

例 5 试判断 n 维单位向量组

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \cdots, 0),$$

$$\varepsilon_2 = (0, 1, \cdots, 0),$$

.....

$$\varepsilon_n = (0, 0, \cdots, 1)$$

是否线性无关?

[解] 若

$$k_1 \varepsilon_1 + k_2 \varepsilon_2 + \cdots + k_n \varepsilon_n = 0,$$

也就是

$$\begin{aligned} k_1(1, 0, \cdots, 0) + k_2(0, 1, \cdots, 0) + \cdots + k_n(0, 0, \cdots, 1) &= (k_1, k_2, \cdots, k_n) \\ &= (0, 0, \cdots, 0), \end{aligned}$$

只有

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0.$$

故 n 维单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是线性无关的.

例 6 判断下列向量组是否线性相关?

$$(1) \alpha_1 = (1, 1, 2), \alpha_2 = (3, 4, 5, 6);$$

$$(2) \alpha_1 = (1, -2, 3), \alpha_2 = (0, 2, -5), \alpha_3 = (-1, 0, 2);$$

$$(3) \alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (3, 2, 1), \alpha_3 = (1, 3, 1).$$

[解] (1) 由于向量 α_1 与 α_2 的维数不同, 因此无法讨论它们的线性相关性.

(2) 设存在三个数 k_1, k_2, k_3 , 使得



$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0},$$

即

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(0, 2, -5) + k_3(-1, 0, 2) = (0, 0, 0).$$

从而有

$$\begin{cases} k_1 - k_3 = 0, \\ -2k_1 + 2k_2 = 0, \\ 3k_1 - 5k_2 + 2k_3 = 0. \end{cases}$$

而系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

由于齐次线性方程组的系数行列式等于零, 因此方程组有非零解, 即存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3 , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}$ 成立, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(3) 设存在三个数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1(1, 2, 3) + k_2(3, 2, 1) + k_3(1, 3, 1) = (0, 0, 0).$$

即

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 + k_3 = 0, \\ 2k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0, \\ 3k_1 + k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

而系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0,$$

由于齐次线性方程组的系数行列式不等于零, 因而方程组只有零解: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

例 7 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明: 向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也线性无关.

[证] 设存在三个数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_1) = \mathbf{0},$$

于是

$$(k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = \mathbf{0}.$$



由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 根据定义必有

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

而系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

由于齐次线性方程组的系数行列式不等于零, 因此方程组只有零解, 即

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0,$$

故向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

注: 一般地, 设 n 个 n 维向量所组成的向量组为

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}),$$

$$\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}),$$

.....

$$\alpha_n = (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}).$$

且

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关的充分必要条件是 $D = 0$;

(2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是 $D \neq 0$.

下面介绍向量组的线性相关性的几种判别方法.

定理一 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ ($m \geq 2$) 线性相关的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m - 1$ 个向量线性表示.

[证] 充分性: 由已知, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m - 1$ 个向量线性表示, 不妨设 α_m 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 因此存在数 $k_1, k_2, \cdots, k_{m-1}$, 使得

$$\alpha_m = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_{m-1} \alpha_{m-1},$$



即

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + (-1)\alpha_m = 0.$$

由于 $k_1, k_2, \cdots, k_{m-1}, -1$ 不全为零, 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关.

必要性: 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关, 即有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$$

不失一般性, 设 $k_m \neq 0$, 于是

$$\alpha_m = -\frac{k_1}{k_m}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_m}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{m-1}}{k_m}\alpha_{m-1},$$

这表明向量 α_m 可被其余 $m-1$ 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$ 线性表示.

证毕.

注: 读者可进一步证明, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ (其中 $\alpha_1 \neq 0$) 线性相关的充分必要条件是至少有一向量 α_i ($1 < i \leq r$) 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表示.

性质 1 任意一个包含零向量的向量组必线性相关.

[证] 设所给向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, 其中有一个零向量, 不妨设 $\alpha_1 = 0$. 现在取 $k_1 = 1, k_2 = k_3 = \cdots = k_m = 0$, 于是 $1, k_2, \cdots, k_m$ 是一组不全为 0 的数, 从而有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \cdots + 0 \cdot \alpha_m = 0,$$

因此向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关.

证毕.

性质 2 两个向量线性相关的充分必要条件是它们的各对应分量成比例.

[证] 设两个向量 α_1, α_2 的各对应分量成比例, 比例系数为 k , 则

$$\alpha_2 = k\alpha_1,$$

即

$$k_1\alpha_1 + (-1)\alpha_2 = 0.$$

由于系数 $k, -1$ 不全为 0, 所以向量 α_1, α_2 线性相关. 设 α_1, α_2 线性相关, 即有不全为零的数 k_1, k_2 , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0,$$

不妨设 $k_1 \neq 0$, 则

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2,$$

这说明向量 α_1 与 α_2 的各对应分量成比例.

证毕.

此性质表明, 由两个成比例的向量构成的向量组是线性相关的; 换个说法, 由两个不成比例的向量构成的向量组必线性无关.

例如, 向量 $\alpha_1 = (1, 1, 2), \alpha_2 = (3, 3, 6)$, 由于 $\alpha_2 = 3\alpha_1$, 所以向量 α_1 与 α_2 线性相关;



又如, 向量 $\alpha_1 = (2, 0)$, $\alpha_2 = (1, 4)$, 因为 α_1 与 α_2 的对应分量不成比例, 故向量 α_1, α_2 线性无关.

性质 3 如果一个向量组的一部分向量线性相关, 则整个向量组就线性相关.

[证] 设向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_m (s \leq m)$, 不失一般性, 假定其中的一部分向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 即有不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}.$$

由上式, 显然有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s + 0 \cdot \alpha_{s+1} + \dots + 0 \cdot \alpha_m = \mathbf{0}.$$

由于 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 不全为零, 因而 $k_1, k_2, \dots, k_s, 0, \dots, 0$ 也不全为零, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_m$ 线性相关. 证毕.

在一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中, 任取若干个向量后组成的向量组, 称为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的部分向量组, 简称部分组.

性质 4 如果一个向量组线性无关, 那么它的任意一个部分向量组也线性无关.

[证] 用反证法.

若存在部分向量组线性相关, 则由性质 3 可知, 整个向量组也线性相关, 这与假设整个向量组线性无关相矛盾, 所以任意一个部分向量组也线性无关. 证毕.

定理二 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 若添加向量 β 后所得向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示.

[证] 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 所以存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m, k$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m + k\beta = \mathbf{0}.$$

下面证明 $k \neq 0$ (用反证法). 假设 $k = 0$, 则 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 不全为零, 且有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0},$$

于是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 与已知条件相矛盾, 因此, $k \neq 0$, 从而

$$\beta = \left(-\frac{k_1}{k}\right)\alpha_1 + \left(-\frac{k_2}{k}\right)\alpha_2 + \dots + \left(-\frac{k_m}{k}\right)\alpha_m,$$

即 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示. 证毕.

例 8 判别下列各向量组的线性相关性.

(1) $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\alpha_2 = (4, -2, 1, 1)$, $\alpha_3 = (0, 0, 0, 0)$;

(2) $\alpha_1 = (1, -1, 0)$, $\alpha_2 = (-2, 5, 1)$, $\alpha_3 = (-4, 10, 2)$.

[解] (1) 由于 $\alpha_3 = (0, 0, 0, 0)$ 是零向量, 根据性质 1 可知, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性





从这 $r+1$ 个等式的前 r 个等式可得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}.$$

由假设知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关, 所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$, 故 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性无关.

证毕.

该定理说明, 线性无关的向量组, 在每一个向量上添一个分量所得到的新向量组仍线性无关. 这个定理可以推广到添加若干个分量的情形.

推论 在 r 维向量组的每个向量上添加 $n-r$ 个分量, 使之成为 n 维向量组. 如果 r 维向量组线性无关, 则 n 维向量组也线性无关.

注:

(1) 定理三及其推论表明: 一个向量组线性无关, 则每个向量添加相同个数的分量后得到的向量组仍线性无关; 一个向量组线性相关, 则每个向量减少相同个数的分量后得到的新向量组也线性相关.

为了便于记忆, 这两个结论可简单地叙述为: 无关组增加分量仍无关, 相关组减少分量仍相关.

(2) 一个向量组线性无关, 则每个向量减少相同个数的分量后得到的向量组不一定线性无关.

例如, 向量组 $\alpha_1 = (2, 4, 1)$, $\alpha_2 = (4, 8, 5)$, 显然向量组 α_1, α_2 线性无关, 当 α_1, α_2 都减少一个分量后, 得到新向量组 $\beta_1 = (2, 4)$, $\beta_2 = (4, 8)$, 而 β_1, β_2 是线性相关的.

(3) 一个向量组线性相关, 则每个向量增加相同个数的分量后得到的新向量组不一定仍线性相关.

例如, 向量组 $\alpha_1 = (1, 2)$, $\alpha_2 = (2, 4)$, 显然 $\alpha_2 = 2\alpha_1$, 向量组 α_1, α_2 线性相关, 当 α_1, α_2 均增加一个分量后, 得到向量组 $\beta_1 = (1, 2, 1)$, $\beta_2 = (2, 4, 0)$, 显然 β_1, β_2 是线性无关的.

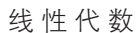
例 11 设 a, b, c 两两互不相同, $\alpha_1 = (1, a, a^2, a^3)$, $\alpha_2 = (1, b, b^2, b^3)$, $\alpha_3 = (1, c, c^2, c^3)$, 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

[解] 令 $\beta_1 = (1, a, a^2)$, $\beta_2 = (1, b, b^2)$, $\beta_3 = (1, c, c^2)$, 则

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b),$$

因为 a, b, c 两两互不相同, 所以 $D \neq 0$.

因此向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 由定理三, 得向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.



[证] 设 $n + 1$ 个 n 维向量为

在这 $n + 1$ 个向量中同时增加一个分量 0, 得到下列 $n + 1$ 个 $n + 1$ 维向量

由这 $n + 1$ 个向量构成的行列式

故 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}$ 线性相关, 由定理三注(1) 知, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 也线性相关.

推论 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 都是 n 维向量, 如果 $m > n$, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 必线性相关.

定理四及其推论可简单地叙述为:向量个数大于维数的向量组是线性相关的.



现在我们来研究向量组之间的一些关系.

定义 8 设有两个 n 维向量组

$$A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r;$$

$$B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s.$$

如果向量组 A 中的每个向量都可由向量组 B 中的向量线性表示, 则称向量组 A 可由



向量组 B 线性表示. 如果向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 并且向量组 B 也可由向量组 A 线性表示, 则称向量组 A 与向量组 B 等价.

由定义 8 不难证明, 每一个向量组都可由它自身线性表示. 还容易推出, 如果向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 向量组 B 又可由向量组 C 线性表示, 那么向量组 A 可由向量组 C 线性表示.

根据上述结论, 可以得出等价向量组之间有如下的性质:

- (1) 反身性: 每一个向量组都与它自身等价;
- (2) 对称性: 如果向量组 A 与向量组 B 等价, 则向量组 B 也与向量组 A 等价;
- (3) 传递性: 如果向量组 A 与向量组 B 等价, 向量组 B 与向量组 C 等价, 则向量组 A 与向量组 C 等价.

例 12 验证向量组

$$\alpha_1 = (1, 2, 3), \quad \alpha_2 = (1, 0, 2)$$

与向量组

$$\beta_1 = (3, 4, 8), \quad \beta_2 = (2, 2, 5), \quad \beta_3 = (0, 2, 1)$$

等价.

[解] 事实上, 可以验证它们之间有如下关系:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1 - \beta_2, & \alpha_2 &= 2\beta_2 - \beta_1; \\ \beta_1 &= 2\alpha_1 + \alpha_2, & \beta_2 &= \alpha_1 + \alpha_2, & \beta_3 &= \alpha_1 - \alpha_2. \end{aligned}$$

故两个向量组等价.

例 13 判定以下两个向量组是否等价.

$$A: \alpha_1 = (-1, 1, 0), \quad \alpha_2 = (-1, 2, 1),$$

$$B: \beta_1 = (0, 1, 1), \quad \beta_2 = (1, 0, 1), \quad \beta_3 = (2, 1, 2).$$

[解] 容易求出

$$\alpha_1 = \beta_1 - \beta_2 + 0 \cdot \beta_3, \quad \alpha_2 = 2\beta_1 - \beta_2 + 0 \cdot \beta_3.$$

即向量组 A 可用向量组 B 线性表示.

我们考虑 β_3 能否用 α_1, α_2 线性表示.

设

$$\beta_3 = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2,$$

即

$$(2, 1, 2) = \lambda_1(-1, 1, 0) + \lambda_2(-1, 2, 1).$$

于是

$$\begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 = 2, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1, \\ \lambda_2 = 2. \end{cases}$$



此方程组无解,故 β_3 不能用 α_1, α_2 线性表示,因而向量组 B 不能用向量组 A 线性表示,也即向量组 A 与 B 不等价.

为了进一步讨论向量组的一些重要性质,我们引入最大线性无关向量组和向量组的秩等概念.

定义 9 若一个向量组中的部分向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 满足:

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关;
- (2) 向量组中任一向量都是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合.

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是该向量组的一个最大线性无关向量组或极大线性无关向量组,简称最大无关组或极大无关组.

例 14 设有向量组

$$\alpha_1 = (1, 0, 0), \quad \alpha_2 = (0, 1, 0), \quad \alpha_3 = (1, 1, 0),$$

试求向量组的一个最大线性无关组.

[解] 显然 α_1, α_2 线性无关,而 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$,所以 α_1, α_2 是一个最大线性无关组.另一方面,容易看出, α_1, α_3 或 α_2, α_3 也都是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的最大无关组.

注意:

- (1) 一般来说,一个向量组的最大线性无关组不是唯一的.
- (2) 由定义 9 可得到一个基本性质:一个向量组与它的最大线性无关组是等价的.
- (3) 由(2)及等价的传递性可知,一个向量组的任意两个最大线性无关组都是等价的.
- (4) 一个线性无关向量组的最大线性无关组就是这个向量组本身.
- (5) 当一个向量组的向量都是零向量时,那么这个向量组的最大无关组是空集.

例 15 全体 n 维向量所构成的向量组记作 $\mathbf{R}^n$. 设 n 维向量组 E 为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$,则 E 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个最大线性无关组.

[证] 在例 5 中,我们已经证明了 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是线性无关的,而由例 1 又得知,对任一 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 均有

$$\alpha = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \dots + a_n \varepsilon_n.$$

即 $\mathbf{R}^n$ 中任一向量都可被 n 维单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性表示. 因此 n 维单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个最大线性无关组.

例 16 设 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}^n$ 且线性无关,则 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个最大线性无关组.

[证] 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关,对任意一个 n 维向量 α ,由定理四知,这 $n+1$ 个 n 维向量 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关,再由定理二可知, α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示,故 n



定理五 设有两个 n 维向量组

$$A: \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r; \quad B: \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s.$$

如果向量组 A 可以由向量组 B 线性表示, 而且向量组 A 线性无关, 则 $r \leq s$.

【证】 用反证法,假设 $r > s$, 由于向量组 A 可由向量组 B 线性表示,故有

[illegible]

上式的系数构成 r 个 s 维向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1s}), \\ \boldsymbol{\delta}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2s}), \\ &\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{\delta}_r &= (a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rs}).\end{aligned}$$

因为 $r > s$, 即向量的个数 r 大于向量维数 s , 所以它们是线性相关的, 于是存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_r$, 使

$$k_1\delta_1 + k_2\delta_2 + \cdots + k_r\delta_r = \mathbf{0}. \quad (2)$$

以这 r 个数 $k_1, k_2, \dots, k_r$ 做线性组合

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r, \quad (3)$$

将(1)式代入(3)式,整理得

$$\begin{aligned}
& k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_r \alpha_r \\
&= k_1 (a_{11} \beta_1 + a_{12} \beta_2 + \cdots + a_{1s} \beta_s) + k_2 (a_{21} \beta_1 + a_{22} \beta_2 + \cdots + a_{2s} \beta_s) \\
&\quad + \cdots + k_r (a_{r1} \beta_1 + a_{r2} \beta_2 + \cdots + a_{rs} \beta_s) \\
&= (k_1 a_{11} + k_2 a_{21} + \cdots + k_r a_{r1}) \beta_1 + \cdots + (k_1 a_{1s} + k_2 a_{2s} + \cdots + k_r a_{rs}) \beta_s,
\end{aligned}$$

由(2)式知,上式中 β_i 前的系数全为0,故

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_r \alpha_r = \mathbf{0}.$$

于是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 这与假设向量组 A 线性无关矛盾, 即 r 不可能大于 s , 因此 $r \leq s$.

推论 1 两个线性无关的等价的向量组,一定包含相同个数的向量.

[证] 设有两个等价的线性无关的向量组



$$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r; \quad B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s.$$

因向量组 A 是线性无关的向量组,且可由向量组 B 线性表示,由定理五,则有 $r \leq s$. 同理,由定理五可得 $s \leq r$,所以 $r = s$,即两个向量组所含的向量个数相同. 证毕.

推论 2 在一个向量组中,它的任意两个最大无关组所含向量的个数相同.

[证] 设 A 与 B 都是向量组 T 的最大线性无关组,因为 A 与 T 等价, B 与 T 等价,因此 A 与 B 等价,由推论 1 可知,向量组 A 与向量组 B 所含向量的个数相同. 证毕.

由此可见,一个向量组的最大无关组虽然可以不是唯一的,但最大无关组所含向量的个数总是确定的,根据这个结论,我们引出向量组秩的概念.

定义 10 向量组的最大无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩.

说明:向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的秩记为 $R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$.

例如,由例 15 可知,单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是向量组 $\mathbf{R}^n$ 的一个最大无关组,所以 $R(\mathbf{R}^n) = n$.

对向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (1, 1, 0)$,由例 14 可知, α_1, α_2 为其一个最大无关组,所以 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$.

显然,当向量组所含向量个数较多时,通过找最大无关组得到向量组的秩不是很理想,我们将在第三章介绍求向量组的秩与最大无关组的一个比较实用的方法.

由定义 10 容易证明,一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关的充要条件是:这个向量组的秩等于它所含向量的个数 r .

推论 3 等价的向量组有相同的秩.

[证] 设两个等价的向量组为

$$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l; \quad B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m.$$

且向量组 A 的秩为 r ,向量组 B 的秩为 s ,并各取它们的一个最大无关组:

$$A_1: \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}; \quad B_1: \beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_s}.$$

由于向量组 A 可由向量组 B 线性表示,显然它的部分向量组 A_1 可由向量组 B 线性表示,而 B 可由 B_1 线性表示,于是 A_1 可由 B_1 线性表示,且向量组 A_1 线性无关,根据定理五得 $r \leq s$. 同理可证 $s \leq r$,因此有 $r = s$. 证毕.



§ 4 向量空间

在本章第 1 节中,我们把 n 元有序数组

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$



称为 n 维向量,并且对它规定了加法及数乘两种运算,这两种运算满足以下八条运算规律(设 α, β, γ 都是 n 维向量, λ, μ 是实数):

- (1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
- (2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
- (3) $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$;
- (4) $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$;
- (5) $1 \cdot \alpha = \alpha$;
- (6) $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha$;
- (7) $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$;
- (8) $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$.

下面介绍向量空间的概念.

定义 11 设 V 为 n 维向量的集合,若 V 非空,且对任意 $\alpha, \beta \in V, \lambda \in \mathbf{R}$, 有 $\alpha + \beta \in V, \lambda\alpha \in V$, 即 V 对于加法及乘数两种运算封闭,则称集合 V 为向量空间.

所谓封闭,是指对于集合 V , 若 $\alpha \in V, \beta \in V$, 则 $\alpha + \beta \in V$; 若 $\alpha \in V, \lambda \in \mathbf{R}$, 则 $\lambda\alpha \in V$.

检验一个 n 维向量集合是否构成向量空间,只需检验对运算的封闭性,因为 n 维向量规定的加法及数乘两种运算显然满足八条线性运算规律.

例 17 n 维向量的全体 $\mathbf{R}^n$ 就是一个向量空间,因为任意两个 n 维向量之和仍然是 n 维向量,数 λ 乘 n 维向量也仍然是 n 维向量,它们都属于 $\mathbf{R}^n$. 特别地,二维向量全体组成的向量空间记作 $\mathbf{R}^2$, 三维向量全体组成的向量空间记作 $\mathbf{R}^3$.

例 18 集合

$$V_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1 + 2x_2 = 0, x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$$

是一个向量空间.

因为若 $\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2) \in V_1$,

则 $a_1 + 2a_2 = 0, b_1 + 2b_2 = 0$,

又 $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \lambda\alpha = (\lambda a_1, \lambda a_2) (\lambda \in \mathbf{R})$,

从而 $(a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2) = (a_1 + 2a_2) + (b_1 + 2b_2) = 0 + 0 = 0$,

$$\lambda a_1 + 2(\lambda a_2) = \lambda(a_1 + 2a_2) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

于是 $\alpha + \beta \in V_1, \lambda\alpha \in V_1$.

故 V_1 是一个向量空间.

例 19 集合



$$V_2 = \{\mathbf{x} = (1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_2, x_3, \cdots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

不是向量空间.

因为若 $\alpha = (1, a_2, \cdots, a_n) \in V_2$, 则 $2\alpha = (2, 2a_2, \cdots, 2a_n) \notin V_2$, 对数乘运算不满足封闭性.

定义 12 设 V_2 是一个向量空间, V_1 是 V_2 的一个非空子集, 若 V_1 对于 V_2 中所定义加法及数乘两种运算也构成一个向量空间, 则称 V_1 为 V_2 的子空间.

在向量空间 V 中, 只由零向量组成的子集是 V 的一个子空间, 称为零空间; 向量空间本身也是 V 的一个子空间; 任何由 n 维向量所组成的向量空间 V , 总有 $V \subset \mathbf{R}^n$, 所以这样的向量空间总是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.

例 20 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为 n 维向量, 集合

$$V = \{\mathbf{x} = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_m \alpha_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbf{R}\}$$

是一个向量空间.

因为 (1) 若 $x_1, x_2 \in V$, 则

$$x_1 = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \cdots + a_m \alpha_m \quad (a_i \in \mathbf{R}),$$

$$x_2 = b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + \cdots + b_m \alpha_m \quad (b_i \in \mathbf{R}).$$

于是

$$x_1 + x_2 = (a_1 + b_1) \alpha_1 + (a_2 + b_2) \alpha_2 + \cdots + (a_m + b_m) \alpha_m \in V.$$

(2) 若 $x_1 \in V, \lambda \in \mathbf{R}$, 则

$$\lambda x_1 = \lambda a_1 \alpha_1 + \lambda a_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda a_m \alpha_m \in V.$$

这个向量空间称为由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 所生成的向量空间.

定义 13 在向量空间 V 中, 如果存在 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 满足:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关;

(2) V 中任一向量总可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示, 则称向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$$

为向量空间 V 的一组基, r 称为向量空间的维数.

维数为 r 的向量空间, 称为 r 维向量空间. 在 r 维向量空间中, 任意 r 个线性无关的向量均可取作向量空间的基. 一个向量空间的维数是唯一的, 但它的基不是唯一的.

零空间没有线性无关的向量, 所以它没有基, 它的维数是零.

若把向量空间看作向量组, 则 V 的基就是向量组的最大无关组, V 的维数就是向量组的秩.

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一组基, 则 V 可表示为



$$V = \{x = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_r \alpha_r \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r \in \mathbf{R}\}.$$

这就较清楚地显示出向量空间 V 的构造.

例 21 在向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中,

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \cdots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \varepsilon_n = (0, 0, \cdots, 1)$$

是 $\mathbf{R}^n$ 的一组基(称为标准基),则 $\mathbf{R}^n$ 可表示为

$$\mathbf{R}^n = \{x = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}\}.$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中取 $e_1 = (1, 1, \cdots, 1), e_2 = (0, 1, \cdots, 1), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 1)$, 容易证明 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中另一组基,则 $\mathbf{R}^n$ 可表示为

$$\mathbf{R}^n = \{x = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_n e_n \mid \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n \in \mathbf{R}\}.$$

从上面的例子可以看出,一个向量空间的基不是唯一的,因此在不同基下,向量空间表示形式也不是唯一的.

定义 14 设 V 为 r 维向量空间,且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为 V 的一组基, $\alpha \in V$, 若

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_r \alpha_r,$$

则称 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 为向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 下的坐标,记为

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}.$$

例如,单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一组基,则 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标为

$$X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

例 22 设 $V = \{(0, a_2, a_3, \cdots, a_n) \mid a_2, a_3, \cdots, a_n \in \mathbf{R}\}$, (1) 证明: V 为向量空间; (2) 证明: 向量组 $\alpha_1 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \alpha_2 = (0, 1, 1, \cdots, 0), \cdots, \alpha_{n-1} = (0, 1, 1, \cdots, 1)$ 为 V 的一组基; (3) 求向量 $\alpha = (0, a_2, a_3, \cdots, a_n) \in V$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 下的坐标.

[证] (1) 任取 $\alpha, \beta \in V, \lambda \in \mathbf{R}$, 则

$$\alpha = (0, a_2, \cdots, a_n), \quad \beta = (0, b_2, \cdots, b_n).$$

且



$$\alpha + \beta = (0, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n) \in V;$$

$$\lambda \alpha = (0, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n) \in V.$$

故 V 为向量空间.

(2) 设 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_{n-1} \alpha_{n-1} = \mathbf{0}$, 则

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} = 0, \\ k_2 + \cdots + k_{n-1} = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ k_{n-2} + k_{n-1} = 0, \\ k_{n-1} = 0. \end{cases}$$

于是 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-1} = 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性无关.

任取 $\alpha = (0, a_2, a_3, \cdots, a_n) \in V$, 且设 $\alpha = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + \cdots + l_{n-2} \alpha_{n-2} + l_{n-1} \alpha_{n-1}$, 则

$$\begin{cases} l_1 + l_2 + \cdots + l_{n-1} = a_2, \\ l_2 + \cdots + l_{n-1} = a_3, \\ \cdots \cdots \cdots \\ l_{n-2} + l_{n-1} = a_{n-1}, \\ l_{n-1} = a_n, \end{cases}$$

解之, 得

$$\begin{cases} l_1 = a_2 - a_3, \\ l_2 = a_3 - a_4, \\ \cdots \cdots \cdots \\ l_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-1}, \\ l_{n-1} = a_{n-1}, \end{cases}$$

故 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性表示.

因此 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 为向量空间 V 的一组基.

(3) 由(2), 得 $\alpha = (0, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 下的坐标为

$$X = \begin{bmatrix} a_2 - a_3 \\ a_3 - a_4 \\ \vdots \\ a_{n-2} - a_{n-1} \\ a_{n-1} \end{bmatrix}.$$



习题二

1. 已知向量 $\alpha = (5, -1, 3)$, 且 $3\alpha - 4\beta = (3, -7, 17)$, 试求 $2\alpha + 3\beta$.

2. 设

$$\alpha_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \alpha_2 = (1, 1, 0, 0),$$

$$\alpha_3 = (1, 1, 1, 0), \quad \alpha_4 = (1, 1, 1, 1);$$

$$\beta_1 = (2, 1, -1), \quad \beta_2 = (2, 1, -1, 0),$$

$$\beta_3 = (2, 1, -1, 0, 0), \quad \beta_4 = (2, 1, -1, 3).$$

试问上述 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 都能表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合吗? 若能则写出表示式.

3. 试证任一向量 $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ 都可以由向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\alpha_2 = (2, 1, 0, 0)$, $\alpha_3 = (3, 2, 1, 0)$, $\alpha_4 = (4, 3, 2, 1)$ 线性表示, 并且表示方法只有一种, 写出这种表示式.

4. 证明: n 维零向量可由任意的 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.

5. 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中的任一向量 $\alpha_j (1 \leq j \leq m)$ 都可由这个向量组线性表示.

6. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3$. 试用线性相关定义判别 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是否线性相关?

7. 证明: 在 n 维向量空间中, 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 则任一向量 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.

8. 已知 $\alpha_1 = (1, 2, 3)$, $\alpha_2 = (3, -1, 2)$, $\alpha_3 = (2, 3, c)$. 试问

(1) 当 c 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(2) 当 c 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关? 并把 α_3 表示为 α_1, α_2 的线性组合.

9. 判别下列向量组的线性相关性.

(1) $\alpha_1 = (2, 5), \quad \alpha_2 = (1, 3, -1, 7);$

(2) $\alpha_1 = (1, 1, 1), \quad \alpha_2 = (1, 2, 3); \quad \alpha_3 = (1, 6, 3);$

(3) $\alpha_1 = (1, 2, 3), \quad \alpha_2 = (1, -4, 1), \quad \alpha_3 = (1, 14, 7);$

(4) $\alpha_1 = (1, 1, -3, 4), \quad \alpha_2 = (-1, 3, 1, 2),$

$\alpha_3 = (0, 2, -1, 3), \quad \alpha_4 = (-2, 6, 2, 4);$

(5) $\alpha_1 = (1, 0, 1, 0, 0), \quad \alpha_2 = (1, 1, 0, 0, 0), \quad \alpha_3 = (0, 1, 1, 0, 0),$



$$\alpha_4 = (0, 0, 1, 1, 0), \quad \alpha_5 = (0, 1, 0, 1, 1).$$

10. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则每个向量都可以由其余向量线性表示, 这种说法对吗?

11. 试证: 若 n 维单位向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 可以由 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

12. 假设 α 可以用 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示:

$$\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m,$$

则这种表示法唯一吗?

13. 求下列向量组的一个最大线性无关组及向量组的秩.

$$\alpha_1 = (2, 1, 3, -1), \quad \alpha_2 = (3, -1, 2, 0),$$

$$\alpha_3 = (4, 2, 6, -2), \quad \alpha_4 = (4, -3, 1, 1).$$

14. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 问:

(1) α_1 能否由 α_2, α_3 线性表示?

(2) α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

15. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 请用两种方法证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也线性无关.

16. 集合

$$V = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R} \text{ 满足 } x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$$

是否为一个向量空间?

17. 证明: 向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 0), \alpha_2 = (2, 1, 3), \alpha_3 = (3, 1, 2)$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一组基, 并求向量 $\alpha = (5, 0, 7)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标.

本章首先引入矩阵的概念,介绍矩阵的运算及其性质,进而讨论逆矩阵、矩阵的秩、矩阵的初等变换,并且给出一个通过矩阵的初等变换求逆矩阵的实用方法.

在许多问题中,我们会遇到一些变量要用另外一些变量线性地表示. 设 $y_2, y_2, \cdots, y_m$ 变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性地表示, 即

(1)

线性变换(1)中的系数可以排成如下 m 行 n 列的一张矩形表



(2)

对于一般线性方程组

(3)

(4)

表(2)和表(4)这种形状的矩形表,在数学上就叫作矩阵.

,

(5)

..... 56



的矩阵除特别说明外,都指实矩阵.(5)式也可简记为

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{ 或 } A = (a_{ij}).$$

当 $m = n$ 时, A 称为 n 阶方阵.

只有一行的矩阵

$$A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

称为行矩阵.

只有一列的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

称为列矩阵.

元素都是零的矩阵称为零矩阵,记作 O .

习惯上,我们也把行矩阵叫作行向量,列矩阵叫作列向量.

注意:矩阵与行列式是两个完全不同的概念. n 阶行列式是一个数, $m \times n$ 矩阵 A 不是一个数,而是由 $m \times n$ 个元素按一定顺序排成的矩形表.

定义 2 设矩阵 $A = (a_{ij})$ 与 $B = (b_{ij})$ 都是 $m \times n$ 矩阵,并且它们对应的元素相等,即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n),$$

则称矩阵 A 与矩阵 B 相等,记作 $A = B$.

2. 矩阵的运算

(1) 矩阵的加法.

定义 3 设有两个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, 那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A + B$, 规定为

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

应该注意,只有在两个矩阵 A 与 B 的行数相同且列数也相同时,才能进行加法运算.

矩阵



$$\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的负矩阵, 记作 $-A$.

利用负矩阵定义两个矩阵的减法为

$$A - B = A + (-B).$$

容易验证矩阵加法满足以下运算规律(设 A, B, C 都是 $m \times n$ 矩阵):

- (i) $A + B = B + A$;
- (ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- (iii) $A + O = A$;
- (iv) $A + (-A) = O$.

(2) 数与矩阵的乘法.

定义 4 数 λ 与矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$, 规定为

$$\begin{aligned} \lambda A = A\lambda &= \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

注意: 数与矩阵的乘法跟数与行列式的乘法是不同的.

容易验证数乘矩阵满足以下运算规律(设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵, λ, μ 为常数):

- (i) $1 \cdot A = A$;
- (ii) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
- (iii) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
- (iv) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

(3) 矩阵与矩阵相乘.

设有两个线性变换



$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3. \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2, \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2, \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2. \end{cases} \quad (9)$$

它们对应的矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}.$$

将变换(9)式代入(8)式,就得到从 t_1, t_2 到 y_1, y_2 的线性变换:

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2, \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2. \end{cases} \quad (10)$$

其对应矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}.$$

线性变换(10) 可以看成先做线性变换(9) 再做变换(8) 的结果. 我们把线性变换(10) 叫作线性变换(8) 与(9) 的乘积,相应地把(10) 所对应的矩阵 C 定义为(8) 与(9) 所对应的矩阵 A 与 B 的乘积,即

$$\begin{aligned} C = AB &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

一般地,我们有

定义 5 设 $A = (a_{ij})$ 是一个 $m \times s$ 矩阵, $B = (b_{ij})$ 是一个 $s \times n$ 矩阵,则矩阵 A 与 B 的乘积是一个 $m \times n$ 矩阵 $C = (c_{ij})$, 其中

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} \\ &(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n), \end{aligned}$$

并把乘积记为 $C = AB$.



按此定义,一个 $1 \times s$ 行矩阵与一个 $s \times 1$ 列矩阵的乘积是一个一阶方阵,也就是一个数:

$$(a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{is}) \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} = c_{ij}.$$

由此表明乘积矩阵 $AB = C$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 就是 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的乘积.

必须注意:只有当第一个矩阵(左矩阵)的列数等于第二个矩阵(右矩阵)的行数时,两个矩阵才能相乘,否则没有意义.

例 1 设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix},$$

试求 AB .

[解] 按矩阵乘法定义,有

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \times 1 + (-1) \times 2 + 0 \times (-5) & 2 \times (-3) + (-1) \times 1 + 0 \times 0 \\ 3 \times 1 + 1 \times 2 + (-2) \times (-5) & 3 \times (-3) + 1 \times 1 + (-2) \times 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 15 & -8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

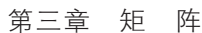
例 2 设

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix},$$

试求 AB 与 BA .

[解] 按矩阵乘法定义,有

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}, \\ BA &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$





$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

则(12)式的线性变换可写为 $Y = AX$.

(4) 矩阵的转置.

定义 6 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵,称为 A 的转置矩阵,记作 A' 或 A^T . 例如矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

的转置矩阵为

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

矩阵的转置也是一种运算,满足下述运算规律(假设运算都是可行的):

- (i) $(A')' = A$;
- (ii) $(A + B)' = A' + B'$;
- (iii) $(\lambda A)' = \lambda A'$;
- (iv) $(AB)' = B'A'$.

前三式请读者自己验证,下证(iv)式.

[证] 设

$$A = (a_{ij})_{m \times s}, \quad B = (b_{ij})_{s \times n},$$

$$\text{记 } AB = C = (c_{ij})_{m \times n}, \quad B'A' = D = (d_{ij})_{n \times m}.$$

于是按照矩阵乘法,有

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^s a_{jk} b_{ki}.$$

而 B' 的第 i 行为 $(b_{1i}, \cdots, b_{si})$, A' 的第 j 列为 $(a_{j1}, \cdots, a_{js})'$, 因此

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^s b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^s a_{jk} b_{ki},$$



所以

$$d_{ij} = c_{ji} \quad (i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m),$$

即 $D = C'$, 亦即

$$B'A' = (AB)'.$$

证毕.

例 3 设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

验证

$$(AB)' = B'A'.$$

[解]

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 14 & -3 \\ 17 & 13 & 10 \end{bmatrix},$$

$$(AB)' = \begin{bmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{bmatrix},$$

$$B'A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{bmatrix},$$

所以有

$$(AB)' = B'A'.$$

设 A 为 n 阶方阵, 如果满足 $A' = A$, 即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

则称 A 为对称矩阵. 对称矩阵的特点是: 它的元素以主对角线为对称轴对应相等. 例如:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$



由于 $A' = A$, 所以 A 是对称矩阵.

(5) 共轭矩阵.

如 $A = (a_{ij})$ 为复矩阵时, 用 $\bar{a}_{ij}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数, 记

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij}),$$

则称 $\bar{A}$ 为 A 的共轭矩阵.

共轭矩阵满足下述运算规律(设 A, B 为复矩阵, λ 为复数, 且运算都是可行的):

(i) $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B};$

(ii) $\overline{\lambda A} = \bar{\lambda} \bar{A};$

(iii) $\overline{AB} = \bar{A} \bar{B}.$



§2 方阵

1. 方阵 A 的 n 次幂

设 A 是方阵, 因为矩阵的乘法满足结合律, 所以 $AA \cdots A$ 表示唯一的一个矩阵, 故有

定义 7 若 A 是方阵, 则称

$$A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{n \text{ 个}} \quad (n \text{ 为正整数})$$

为方阵 A 的 n 次幂.

注意: 只有方阵的幂才有意义.

由于矩阵乘法适合结合律, 所以方阵的幂满足以下运算规律:

(i) $A^k A^l = A^{k+l};$

(ii) $(A^k)^l = A^{kl}.$

其中 k, l 为任意正整数.

又由于乘法不满足交换律, 所以一般情况下

$$(AB)^k \neq A^k B^k \quad (k \geq 2),$$

其中 A, B 均为 n 阶方阵.

常见的乘法公式一般也不成立, 如

$$\begin{aligned} (A + B)^2 &= A^2 + BA + AB + B^2 \\ &\neq A^2 + 2AB + B^2; \end{aligned}$$

$$(A - B)(A + B) \neq A^2 - B^2.$$

以上各式仅当 A, B 可交换时才有等式成立.



例 4 证明

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}.$$

[证] 用数学归纳法.

当 $n = 1$ 时, 等号显然成立.

设 $n = k$ 时成立, 即

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix},$$

现在要证 $n = k + 1$ 时结论成立. 此时有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta & -\cos k\theta \sin \theta - \sin k\theta \cos \theta \\ \sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta & -\sin k\theta \sin \theta + \cos k\theta \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos (k+1)\theta & -\sin (k+1)\theta \\ \sin (k+1)\theta & \cos (k+1)\theta \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

于是等式得证.

2. 几种重要的方阵

(1) 单位矩阵.

主对角线上的元素全是 1, 而其余元素全为 0 的 n 阶方阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

称为 n 阶单位矩阵, 记为 E_n 或 I_n , 简记为 E 或 I . 它对任何 n 阶方阵 A 满足

$$EA = AE = A.$$

可见, n 阶单位方阵 E 在 n 阶方阵乘法运算中的作用类似于数 1 在数的乘法运算中的作用.

有了方阵幂以及单位矩阵, 还可定义方阵多项式的概念.

设

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$$



是 x 的多项式, A 是 n 阵方阵, 则

$$a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m$$

有确定意义, 记为 $f(A)$, 即

$$f(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m$$

称为方阵 A 的多项式.

例如, 对于

$$f(x) = 1 - x + x^2$$

及

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} f(A) &= E - A + A^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -12 & 10 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 数量矩阵.

具有如下形式的 n 阵方阵

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

称为数量矩阵, 其中 λ 为常数, 记为 λE 或 λI . 它对于任意 n 阵方阵 $A = (a_{ij})$, 有

$$(\lambda E)A = A(\lambda E) = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix} = \lambda A,$$

可见, 它相当于数 λ 与 A 相乘的结果.

(3) 对角方阵.

主对角线以外的元素全为零的方阵称为对角方阵, 简记为



$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

对角方阵具有下列性质:

- (i) 对角方阵的转置方阵就是自身;
- (ii) 两个同阶对角方阵的和仍是对角方阵;
- (iii) 对角方阵与数的乘积仍是对角方阵;
- (iv) 两个同阶对角方阵相乘可以交换,其积也是对角方阵.

设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

则

$$AB = BA = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}.$$

(4) 三角方阵.

形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的 n 阶方阵,分别称为上三角方阵或下三角方阵.

由矩阵运算规则可知,三角方阵有如下性质:

- (i) 数 λ 与三角方阵之积仍是三角方阵;
- (ii) 两个同阶上(下)三角方阵之和、差仍是上(下)三角方阵;
- (iii) 两个同阶上(下)三角方阵之积仍是上(下)三角方阵.



3. 方阵的行列式和非奇异方阵

方阵与行列式是两个不同的概念,但它们之间有一定的联系.

定义 8 由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式(各元素按原来的位置),称为方阵 A 的行列式,记为 $|A|$ 或 $\det A$.

设 A, B 为 n 阶方阵, λ 为实数,由 A 所确定的 $|A|$ 的这个运算满足下列运算规律:

$$(i) |A'| = |A|;$$

$$(ii) |\lambda A| = \lambda^n |A|;$$

$$(iii) |AB| = |A| |B|.$$

(i)、(ii) 成立是明显的, (iii) 的证明较繁,这里从略.

由 (iii) 可知,对于 n 阶方阵 A, B ,一般说来 $AB \neq BA$,但总有

$$|AB| = |BA|.$$

例 5 设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \text{求 } |-2A| \text{ 及 } |AB|.$$

[解法 1]

因为
$$-2A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -6 \end{bmatrix},$$

所以
$$|-2A| = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 12.$$

因为
$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 9 \end{bmatrix},$$

所以

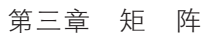
$$|AB| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 3.$$

[解法 2]

$$|-2A| = (-2)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 = 12.$$

$$|AB| = |A| |B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 1 = 3.$$

定义 9 设 A 为 n 阶方阵,若 $|A| \neq 0$,则称 A 为非奇异方阵(或称 A 为非退化方阵);若 $|A| = 0$,则称 A 为奇异方阵(或称 A 为退化方阵).



1. 逆矩阵的概念及其求法

设给定一个线性变换

[illegible]

写成矩阵的形式为

$$Y = AX. \quad (13)'$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

按克莱姆法则,若 $|A| \neq 0$,则由(13)可解出每个 x_i ,即 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 可用 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 线性表示为

[illegible]

并且这个表示式是唯一的. (14) 是一个从 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 到 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的线性变换, 称为线性变换 (13) 的逆变换.

若把(14)的系数矩阵记作 B ,则(14)也可记作

$$X = BY. \quad (14)'$$

我们从(13)'、(14)'两式分析变换所对应的方阵 A 与逆变换所对应的方阵 B 之间的关系. 用(14)'代入(13)', 可得

$$Y = A(BY) = (AB)Y.$$

可见 AB 为恒等变换所对应的矩阵, 故 $AB = E$. 用 $(13)'$ 代入 $(14)'$, 得



$$X = B(AX) = (BA)X,$$

知有 $BA = E$. 于是有

$$AB = BA = E. \quad (15)$$

由此我们引入逆矩阵的定义.

定义 10 对于 n 阶方阵 A , 如果有一个 n 阶方阵 B , 使得

$$AB = BA = E,$$

则称 A 为可逆方阵, 或称 A 是可逆的, 并把方阵 B 称为 A 的逆矩阵.

如果方阵 A 是可逆的, 则 A 的逆矩阵是唯一的. 这是因为: 若 B, C 都是 A 的逆矩阵, 则有

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C,$$

所以 A 的逆矩阵是唯一的.

A 的逆矩阵记作 A^{-1} , 即若 $AB = BA = E$, 则 $B = A^{-1}$.

下面研究一下一个方阵是可逆矩阵的充要条件, 同时给出求逆矩阵的一种方法.

定理一 若方阵 A 可逆, 则 $|A| \neq 0$.

[证] 因为 A 可逆, 所以有矩阵 A^{-1} 满足 $AA^{-1} = E$, 故 $|A||A^{-1}| = 1$, 所以 $|A| \neq 0$.

证毕.

反之, 若 $|A| \neq 0$, A 是否一定可逆呢? 回答是肯定的. 为此我们先引入一个概念.

设 n 阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

A_{ij} 表示 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, 则称矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

为方阵 A 的伴随矩阵, 其中第 i 列各元素是 $|A|$ 中第 i 行各元素的代数余子式.

定理二 若 $|A| \neq 0$, 则方阵 A 可逆, 且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$



[证] 由行列式按一行(列)展开,得

$$AA^* = A^*A = |A|E,$$

由于 $|A| \neq 0$, 故有

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = E.$$

所以,按逆矩阵的定义有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* \quad \text{证毕.}$$

由定理二,可得下面推论:

推论 若 $AB = E$ 或 $BA = E$, 则 $B = A^{-1}$.

[证] 因为 $|A||B| = |AB| = |E| = 1$. 故 $|A| \neq 0$, 因而 A^{-1} 存在, 且

$$B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E = A^{-1}. \quad \text{证毕.}$$

综合定理一与定理二可知: 方阵 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$, 同时也给出了通过伴随矩阵求逆矩阵的一种方法.

例 6 判断方阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

是否可逆; 若可逆, 求 A^{-1} .

$$[\text{解}] \quad \text{因为} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

所以 A 是可逆的. 容易求得

$$\begin{aligned} A_{11} &= 2, & A_{21} &= 6, & A_{31} &= -4, \\ A_{12} &= -3, & A_{22} &= -6, & A_{32} &= 5, \\ A_{13} &= 2, & A_{23} &= 2, & A_{33} &= -2. \end{aligned}$$

故

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

从而

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$



例7 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

求矩阵 X 使满足

$$AXB = C.$$

[解] 若 A^{-1}, B^{-1} 存在, 则由 A^{-1} 左乘上式, B^{-1} 右乘上式, 有

$$A^{-1}AXB B^{-1} = A^{-1}CB^{-1},$$

故

$$X = A^{-1}CB^{-1}. \quad (16)$$

由上例知 $|A| \neq 0$, 而 $|B| = 1 \neq 0$, 故 A, B 都可逆, 且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned} X = A^{-1}CB^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

下面再举一个利用逆矩阵求解线性方程组的例子.

例8 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

[解] 把方程组写成

$$AX = B, \quad (17)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



由于 $|A| = 3 \neq 0$, 故 A 可逆, 且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

由等式(17) 两端左乘 A^{-1} , 得 $X = A^{-1}B$.

即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

因此

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 3.$$

例 9 设 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 $P = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 试求 A^{11} .

[解] 因为

$$P^{-1}AP = \Lambda,$$

所以

$$A = P\Lambda P^{-1}, \quad A^{11} = P\Lambda^{11}P^{-1}.$$

容易求得

$$A^{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{11} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

故得

$$\begin{aligned} A^{11} &= \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2^{13} \\ -1 & 2^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 + 2^{13} & 4 + 2^{13} \\ -1 - 2^{11} & -4 - 2^{11} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$= \begin{bmatrix} 2731 & 2732 \\ -683 & -684 \end{bmatrix}.$$

例 10 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 2A + 2E = O$, 证明: $A + E$ 可逆, 并求 $(A + E)^{-1}$.

[解] 由 $A^2 - 2A + 2E = O$, 得

$$(A + E)(A - 3E) = -5E,$$

即

$$(A + E)\left[-\frac{1}{5}(A - 3E)\right] = E,$$

故

$$A + E \text{ 可逆.}$$

且

$$(A + E)^{-1} = -\frac{1}{5}(A - 3E).$$

2. 逆矩阵的性质

(1) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

[证] 因为 A^{-1} 存在, 由 $|A^{-1}||A| = |A^{-1}A| = |E| = 1$, 有

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}. \quad \text{证毕.}$$

(2) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 亦可逆, 且

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

[证] 因为 $|A^{-1}| = |A|^{-1} \neq 0$, 知 A^{-1} 可逆, 即 $(A^{-1})^{-1}$ 存在.

而 $A^{-1}A = E$, 由推论得

$$(A^{-1})^{-1} = A. \quad \text{证毕.}$$

(3) 若 A 可逆, 数 $\lambda \neq 0$, 则 λA 可逆, 且

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

[证] 因为 $|\lambda A| = \lambda^n |A| \neq 0$, 知 $(\lambda A)^{-1}$ 存在. 而

$$(\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right) = \left(\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}\right)(AA^{-1}) = 1 \cdot E = E,$$

由推论得

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}. \quad \text{证毕.}$$

(4) 若 A, B 为同阶方阵, 且均可逆, 则 AB 亦可逆, 且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

[证] 因为 $|AB| = |A||B| \neq 0$, 知 $(AB)^{-1}$ 存在. 而

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$



由推论得

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

证毕.

(5) 若 A 可逆, 则 A' 亦可逆, 且

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'.$$

[证] 因为 $|A'| = |A| \neq 0$, 知 $(A')^{-1}$ 存在. 而

$$A'(A^{-1})' = (A^{-1}A)' = E' = E,$$

由推论得

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'.$$

证毕.

例 11 设 A 为三阶方阵, 且 $|A| = \frac{1}{8}$, 求 $\left| \left(\frac{1}{3}A \right)^{-1} - 8A^* \right|$.

[解] 因为 $\left(\frac{1}{3}A \right)^{-1} - 8A^* = 3A^{-1} - 8|A|A^{-1}$

$$= 3A^{-1} - A^{-1} = 2A^{-1},$$

所以 $\left| \left(\frac{1}{3}A \right)^{-1} - 8A^* \right| = |2A^{-1}| = 2^3 |A|^{-1} = 8 \times 8 = 64.$

当 $|A| \neq 0$ 时, 还可定义

$$A^0 = E, \quad A^{-k} = (A^{-1})^k.$$

其中 k 为正整数.

因此, 当 $|A| \neq 0, \lambda, \mu$ 为整数时, 有

$$A^\lambda A^\mu = A^{\lambda+\mu}, \quad (A^\lambda)^\mu = A^{\lambda\mu}.$$



§4 分块矩阵

在处理阶数较高的矩阵运算时, 常采用分块法, 即用若干条纵线和横线把大矩阵分成许多块小矩阵. 此时把大矩阵看成由这些小块矩阵所构成的矩阵, 每一个小矩阵称为它的子块, 以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵. 在运算中, 可以把小矩阵当作数一样来处理, 从而使运算简化为子块之间的运算, 而子块的阶数一般来说都比大矩阵的阶数要低.

例如, 把 A 分成若干子块

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix},$$



其中

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = (a_{31}), \quad A_{22} = (a_{32} \quad a_{33}), \quad A_{23} = (a_{34}).$$

当然,还有其他分块法. 比如:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

其中

$$B_{11} = (a_{11} \quad a_{12}), \quad B_{12} = (a_{13} \quad a_{14}),$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

在分块矩阵的运算中,只需把每一个子块看作一个元素,其运算规则与普通矩阵的运算规则相类似,现说明如下:

(1) 设矩阵 A 与 B 有相同的行数与列数,采用相同的分块法,得

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{r1} & \cdots & B_{rs} \end{bmatrix}.$$

其中子块 A_{ij} 与 B_{ij} ($i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s$) 的行数相同,列数也相同,则有

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1s} + B_{1s} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2s} + B_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} + B_{r1} & A_{r2} + B_{r2} & \cdots & A_{rs} + B_{rs} \end{bmatrix}.$$

(2) 设

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}, \lambda \text{ 为数, 则}$$

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda A_{r1} & \lambda A_{r2} & \cdots & \lambda A_{rs} \end{bmatrix}.$$



(3) 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times p}$, 把 A, B 分成若干小矩阵:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix} & \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_t \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix} & \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{matrix} \end{matrix}.$$

其中每个元素 A_{ij} 是 $m_i \times n_j$ 小矩阵, 元素 B_{ij} 是 $n_i \times p_j$ 小矩阵. 明显地,

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = m, n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n, p_1 + p_2 + \cdots + p_t = p,$$

于是有

$$AB = \begin{matrix} & \begin{matrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_t \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{bmatrix} & \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix} \end{matrix},$$

其中 $C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{is}B_{sj} (i = 1, 2, \cdots, r; j = 1, 2, \cdots, t)$.

这个结果可由矩阵乘法的定义直接验证得到.

应该注意, 在分块矩阵的乘积中, 左矩阵列的分法必须与右矩阵行的分法一样.

例 12 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

求 AB .

[解] 把 A, B 分块成

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ E & A_{22} \end{bmatrix},$$



$$B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} B_{11} & O \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

则

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ E & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & O \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & O \\ B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

而

$$\begin{aligned} A_{11}B_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_{11} + A_{22}B_{21} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ A_{22}B_{22} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

于是

$$AB = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right].$$

这个结果与不分块而直接相乘的结果是一致的.

(4) 设

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}, \text{ 则 } A' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{21} & \cdots & A'_{r1} \\ A'_{12} & A'_{22} & \cdots & A'_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A'_{1s} & A'_{2s} & \cdots & A'_{rs} \end{bmatrix}.$$

$$\text{例如, } A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & E \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$



则有

$$A' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{21} \\ E' & A'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

最后,我们介绍形式上类似于对角矩阵的准对角矩阵.

设 A 为 n 阶方阵,经分块后,可表示为

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_s \end{bmatrix},$$

其中 A_i 为 n_i 阶方阵($i = 1, 2, \cdots, s$),则 A 称为准对角矩阵.

例如:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & O & O \\ O & A_2 & O \\ O & O & A_3 \end{bmatrix},$$

这是一个准对角矩阵,其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = (5), \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

其余子块都为零矩阵.

根据定义,准对角矩阵的特殊情形为对角矩阵.

对于两个有相同分块的准对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_s \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & O & \cdots & O \\ O & B_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & B_s \end{bmatrix},$$

如果 A_i 与 B_i 是同阶方阵($i = 1, 2, \cdots, s$),则



$$AB = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 B_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_s B_s \end{bmatrix},$$

$$A + B = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 + B_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_s + B_s \end{bmatrix}.$$

它们还是准对角矩阵.

准对角矩阵的行列式具有如下性质:

$$|A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_s|.$$

由此可知,若 $|A_i| \neq 0 (i=1,2,\cdots,s)$, 则 $|A| \neq 0$, 从而 A 可逆, 且有

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & O & \cdots & O \\ O & A_2^{-1} & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_s^{-1} \end{bmatrix}.$$

例 13 设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{求 } A^{-1}.$$

[解] 因为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = (2), \quad A_1^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right),$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

所以



$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$



§ 5 矩阵的秩

在第二章我们定义了向量组的秩. 如果我们把矩阵的每一行看成一个向量, 那么矩阵就可以认为是由这些行向量组成的. 同样, 如果把每一列看成一个向量, 那么矩阵也可以认为是由列向量组成的.

例如, 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

A 的每一行看成一个 n 维向量 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ ($i = 1, 2, \cdots, m$), 称为 A 的第 i 个行向量, 此时矩阵 A 从形式上可表示为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}.$$

同样, A 的每一列也可以看成一个 m 维向量

$$\beta_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

称为 A 的第 j 个列向量, 此时矩阵 A 从形式上可表示为



$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n).$$

定义 11 设 $m \times n$ 矩阵 A 的 n 个列向量所构成的向量组的秩为 r , 则称 r 为矩阵 A 的秩, 记为 $R(A) = r$ 或 $r(A) = r$.

为了建立矩阵的秩与行列式的关系, 引入

定义 12 在 $m \times n$ 矩阵 A 中任取 k 行与 k 列 ($k \leq \min\{m, n\}$), 位于这些交叉处的元素构成一个 k 阶行列式, 称为矩阵 A 的 k 阶子式.

例如, 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

选取行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15$, 它是 A 的一个二阶子式. 若选取行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 10,$$

则它是 A 的一个三阶子式.

注: $m \times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k C_n^k$ 个.

定理三 设矩阵 A 中有一个 r 阶子式 $D \neq 0$, 且所有包含 D 的 $r+1$ 阶子式 (如果存在的话) 都等于零, 则 A 的秩 $R(A) = r$.

[证] 不失一般性, 可设 D 位于 A 的左上角 (否则可经对调行与列达到这一目的, 而含有 D 的 $r+1$ 阶子式只是改变若干次符号而仍等于 0), 即设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} & a_{m,r+1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$



则向量组 $\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{rr} \end{bmatrix}$ 线性无关.

从而 A 的前 r 个列向量 $\beta_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{r1} \\ a_{r+1,1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \cdots, \beta_r = \begin{bmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{rr} \\ a_{r+1,r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{bmatrix}$ 线性无关.

下面我们证明 A 的第 l 个列向量 $\beta_l (l = r + 1, \cdots, n)$ 可由 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性表示.

为此, 作 $r + 1$ 阶辅助行列式

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kr} & a_{kl} \end{vmatrix},$$

可以看出, 当 $k \leq r$ 时, D_k 中有两行相同, 因而 $D_k = 0$; 当 $k > r$ 时, D_k 是 A 的包含 D 的 $r + 1$ 阶子式, 由假设知 $D_k = 0$. 于是对于每一个 $k (k = 1, 2, \cdots, m)$ 皆有 $D_k = 0$.

将 D_k 按最后一行展开, 得

$$a_{k1}A_1 + a_{k2}A_2 + \cdots + a_{kr}A_r + a_{kl}D = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, m),$$

其中

$$A_j = (-1)^{r+1+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1r} & a_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{r,j-1} & a_{r,j+1} & \cdots & a_{rr} & a_{rl} \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, r),$$

它们是一些与 k 无关的数. 因 $D \neq 0$, 故得

$$\begin{aligned} a_{kl} &= -\frac{1}{D}(A_1a_{k1} + A_2a_{k2} + \cdots + A_ra_{kr}) \\ &= -\frac{A_1}{D}a_{k1} - \frac{A_2}{D}a_{k2} - \cdots - \frac{A_r}{D}a_{kr} \quad (k = 1, 2, \cdots, m), \end{aligned}$$

因而 $\beta_l = -\frac{A_1}{D}\beta_1 - \frac{A_2}{D}\beta_2 - \cdots - \frac{A_r}{D}\beta_r \quad (l = r + 1, \cdots, n),$

这就表明 A 的第 l 个列向量 $\beta_l (l = r + 1, \cdots, n)$ 可由前 r 个列向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性表示,



于是 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 为 A 的列向量组的一个最大线性无关组, 因此 $R(A) = r$. 证毕.

特别地, 当 A 为 n 阶非奇异方阵时, 因为 $|A| \neq 0$, 所以由定理三知 $R(A) = n$ (A 的阶数). 这时, 我们又称 A 为满秩方阵, 而奇异方阵又称降秩方阵.

例 14 求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

的秩.

[解] 因为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

而含 D 的三阶子式只有两个, 且都等于零.

即

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

所以 $R(A) = 2$.

推论 1 矩阵 A 的列向量组的秩等于 A 的行向量组的秩.

[证] 设 A 的列向量组的秩为 r , 将 A 转置得 A' , 则 A 的每个子式都以转置行列式的形式出现在 A' 中, 由于转置后行列式的值不变, 从而定理三的假设对 A 与 A' 同时成立, 故 A 与 A' 的秩相等, 即 A 的列向量组的秩等于 A' 的列向量组的秩. 而 A' 的列向量就是 A 的行向量, 所以 A 的行向量组的秩也是 r . 证毕.

因此也可以用 A 的行向量组的秩来定义矩阵 A 的秩.

推论 2

(i) 若 A 中有一个 r 阶子式不为零, 则 $R(A) \geq r$;

(ii) 若 A 中所有 r 阶子式全为零, 则 $R(A) < r$.

[证] (i) 的证明见定理三证明的开头部分, 由于 A 中有一个 r 阶子式不为零, 所以 A 的列向量组中至少可以找到 r 个列向量是线性无关的, 故 A 的列向量组的秩不小于 r , 即有 $R(A) \geq r$. 下面证明 (ii). 设 $m \times n$ 矩阵 A 中所有 r 阶子式全为零, 由行列式展开式定理可以推知: A 中所有 $k (> r)$ 阶子式 (如果存在的话) 全为零, 从而 A 中不为零的子式的最大阶数 s 必小于 r , 由定理三知, $R(A) = s < r$. 证毕.



下面我们利用分块矩阵的知识证明关于矩阵秩的两个重要结论.

定理四 设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵, 则 $R(A + B) \leq R(A) + R(B)$.

$$[\text{证}] \quad \text{令 } A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}, A + B = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix},$$

则由分块矩阵运算, 得

$$\begin{cases} \gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1, \\ \gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2, \\ \dots\dots\dots \\ \gamma_m = \alpha_m + \beta_m. \end{cases}$$

即 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性表示,

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad R(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) &\leq R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \\ &\leq R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) + R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m), \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad R(A + B) \leq R(A) + R(B).$$

定理五 设 A 为 $m \times s$ 矩阵, B 为 $s \times n$ 矩阵, 则 $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.

$$[\text{证}] \quad \text{令 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix},$$

则由分块矩阵运算, 得

$$\begin{cases} \gamma_1 = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1s}\beta_s, \\ \gamma_2 = a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2s}\beta_s, \\ \dots\dots\dots \vdots \dots\dots\dots \\ \gamma_m = a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \cdots + a_{ms}\beta_s, \end{cases}$$

即 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示,

$$\text{所以} \quad R(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) \leq R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s),$$

$$\text{即} \quad R(AB) \leq R(B).$$

类似地, 把 A, AB 进行列分块, B 不分块可证 $R(AB) \leq R(A)$.

$$\text{故} \quad R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}.$$



前面我们介绍了一个矩阵可以用一组行(列)向量表示;反之,已知一组行(列)向量,也可以用它来构造一个矩阵.

例如,已知向量组

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \quad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

用它可以构造矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}.$$

从而可以根据定理三求矩阵的秩的方法来求向量组的秩.

例 15 判定下面的向量组是否线性相关,并求出它的一个最大线性无关组.

$$\alpha_1 = (-2, 1, 0, 3), \quad \alpha_2 = (1, -3, 2, 4),$$

$$\alpha_3 = (3, 0, 2, -1), \quad \alpha_4 = (2, -2, 4, 6).$$

[解] 用这些向量作为矩阵 A 的行向量,得

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

在 A 中有三阶子式

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0.$$

而 A 中包含 D 的四阶子式只有一个,即 $|A|$.

由于 $|A| = 0$, 所以 $R(A) = 3$. 即向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩为 3, 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是线性相关.

因为 D 位于前三行, 可知前三个行向量线性无关, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是一个最大线性无关组.

我们已经知道, 通过计算矩阵 A 的子式来求矩阵 A 的秩的方法, 倘若 A 的阶数较高, 需逐个计算那么多的子式, 其计算量是相当大的. 下一节我们将介绍一种行之有效的简便方法, 即利用矩阵的初等变换求矩阵的秩.



§6 矩阵的初等变换

定义 13 对矩阵 A 施行下列变换:

- (i) 互换矩阵 A 的任意两行(互换 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$);
- (ii) 用一个不等于零的数乘矩阵 A 的某一行中的所有元素(第 i 行乘 k , 记作 $k \cdot r_i$);
- (iii) 用一个数乘矩阵 A 的某一行的所有元素后再加到 A 的另一行对应元素上去(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上, 记作 $r_i + kr_j$).

这三种变换称为矩阵 A 的初等行变换.

把定义中的“行”换成“列”(所用记号“ r ”换成“ c ”), 即得矩阵 A 的初等列变换的定义, 矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换.

定义 14 如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B , 则称矩阵 A 与 B 是等价的, 记为 $A \simeq B$.

等价是矩阵间的一种关系, 它具有如下性质:

- (i) 反身性: 每一个矩阵与它自身等价;
- (ii) 对称性: 如果矩阵 A 与 B 等价, 则矩阵 B 与 A 等价;
- (iii) 传递性: 若 $A \simeq B$, 而 $B \simeq C$, 则 $A \simeq C$.

下面我们讨论等价矩阵的秩之间的关系.

定理六 设 A 为 $m \times n$ 矩阵:

- (1) 若矩阵 A 经有限次初等行变换变成矩阵 B , 则 $R(A) = R(B)$;
- (2) 若矩阵 A 经有限次初等列变换变成矩阵 B , 则 $R(A) = R(B)$.

[证] 设矩阵 A 的行向量组为

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_m, \quad (18)$$

经过定义 13 中(i)、(ii)或(iii)的初等行变换后得到新矩阵的行向量组分别为

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_m;$$

$$\alpha_1, \cdots, k\alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_m; \quad (k \neq 0)$$

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_i + k\alpha_j, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_m.$$

显然, 这三个向量组中的每一个向量组与向量组(18)可相互线性表示, 从而它们与向量组(18)是等价的. 我们知道, 等价向量组有相同的秩, 所以经过(i)、(ii)、(iii)的初等行变换, 变换前后的行向量组的秩是不变的, 即变换前后的矩阵的秩是不变的, 故

$$R(A) = R(B).$$

证毕.



类似可证(2).

综合(1)和(2)可得,矩阵 A 经有限次初等变换变成 B , 则

$$R(A) = R(B);$$

即若 $A \simeq B$, 则

$$R(A) = R(B).$$

定义 15 设矩阵 A 的每个非零行第一个非零元素所在列的列标大于上一个非零行第一个非零元素所在列的列标,且零行在非零行的下方,则称 A 为阶梯形矩阵.

例如,矩阵
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 即为阶梯形矩阵.

我们利用矩阵经初等变换后其秩不变的特点,把所给矩阵 $A = (a_{ij})$ 通过一系列初等行变换,化矩阵中的许多元素为0,再利用初等列变换中的第(i)种变换,最后将矩阵 A 变为阶梯形矩阵 B :

$$A \simeq \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = B, \quad (19)$$

其中 $c_{ii} \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, r)$, (19) 式阶梯形矩阵 B 中有一个 r 阶子式

$$D_r = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22}\cdots c_{rr} \neq 0,$$

且所有包含 D_r 的 $r+1$ 阶子式全为零,由定理三知, $R(B) = r$,再由定理六得知, $R(A) = r$.

例 16 设



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix},$$

求 $R(A)$.

$$\begin{aligned} [\text{解}] \quad A &\xrightarrow[r_4-r_1]{r_3-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B. \end{aligned} \quad (20)$$

因为阶梯形矩阵 B 中有一个三阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

且所有包含它的四阶子式全为零,由定理三可知,

$$R(B) = 3,$$

再由定理六得知,

$$R(A) = 3.$$

(19) 式阶梯形矩阵若再经初等列变换,则可化为如下最简形式:



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

上述矩阵称为 A 的标准形, 其特点是: 标准形的左上角是一个 r 阶单位矩阵 $[r = R(A)]$, 其他元素都是 0.

下面我们将例 16 的矩阵 A 通过初等变换变为标准形. 在解例 16 的基础上, 对 (20) 式矩阵 B 继续进行初等列变换:

$$A \simeq B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} c_2 - c_1 \\ c_3 - 2c_1 \\ \cong \\ c_4 - 2c_1 \\ c_5 - c_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} c_3 - \frac{1}{2}c_2 \\ c_4 - \frac{5}{2}c_2 \\ \cong \\ c_5 + \frac{1}{2}c_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} c_4 + c_3 \\ \cong \\ c_5 - c_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} \times c_2 \\ \cong \\ -\frac{1}{2} \times c_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



这便是矩阵 A 的标准形,标准形的左上角的单位矩阵的阶数等于矩阵 A 的秩,即等于 $R(A) = 3$.

由此可见,若 $A \simeq B$,则它们的秩相等,从而 A 与 B 具有相同的标准形. 其中的特例,若 A 为 n 阶满秩方阵,则其标准形为 n 阶单位矩阵. 换言之, n 阶满秩方阵与 n 阶单位矩阵等价.

前面探讨了利用矩阵初等变换求矩阵的秩,由于矩阵的秩也是矩阵列向量组的秩或行向量组的秩,故我们可以利用矩阵的秩来解决向量组的秩,且由定理三的证明过程可以求出向量组的最大线性无关组. 下面介绍如何利用矩阵解决向量组的秩、最大线性无关组并用最大线性无关组表示其余向量,为此,我们先给出一个定义及一个结论.

定义 16 设矩阵 A 为阶梯形矩阵,若矩阵 A 的每个非零行的第一个非零元素为 1,且所在列的上方元素为零,则称 A 为简化阶梯形矩阵或行最简形.

例如,矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 即为行最简形.

定理七

- (1) 任何一个矩阵都可经初等行变换化为阶梯形矩阵及行最简形.
- (2) 矩阵的初等行变换不改变列向量组的线性相关性及线性表示式.

证明略.

由定理七可得求向量组的秩、最大线性无关组并用最大线性无关组表示其余向量的方法.

向量组的秩与最大线性无关组的求法:以所给向量为列构成矩阵 A ,用初等行变换把 A 化为阶梯形矩阵 B ,则向量组的秩为 $R(B)$,且 B 中每一非零行首非零元素所在列对应的向量构成一个最大线性无关组.

用最大线性无关组表示其余向量的方法:以所给向量为列构成矩阵 A ,用初等行变换把 A 化为行最简形 C ,若 C 中每一非零行的首 1 (第一个为 1 的元素) 所在列为 $i_1, i_2, \dots, i_r$,且其他列所对应向量 $\beta_j = k_1 \beta_{i_1} + k_2 \beta_{i_2} + \dots + k_r \beta_{i_r}$,则 A 中列向量有

$$\alpha_j = k_1 \alpha_{i_1} + k_2 \alpha_{i_2} + \dots + k_r \alpha_{i_r}.$$

例 17 利用矩阵的初等变换判定下面向量组的线性相关性,并求出它的一个最大无关组.

$$\alpha_1 = (1, 2, 1, 3), \quad \alpha_2 = (4, -1, -5, -6),$$



$$\alpha_3 = (1, -3, -4, -7), \quad \alpha_4 = (2, 1, -1, 0).$$

[解] 用这些向量作为矩阵 A 的列向量得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & -1 \\ 3 & -6 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ \cong \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & -5 & -3 \\ 0 & -9 & -5 & -3 \\ 0 & -18 & -10 & -6 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{l} r_3 - r_2 \\ \cong \\ r_4 - 2r_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

所以 $R(A) = 2$, 即向量组的秩为 2, 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 且 α_1, α_2 是它的一个最大无关组.

例 18 求向量组 $\alpha_1 = (1, -2, 0, 3), \alpha_2 = (2, -5, -3, 6), \alpha_3 = (0, 1, 3, 0), \alpha_4 = (2, -1, 4, -7), \alpha_5 = (5, -8, 1, 2)$ 的一个最大线性无关组, 并用该最大线性无关组表示其余向量.

[解] 因为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{l} r_2 + 2r_1 \\ \cong \\ r_3 - 3r_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{l} r_3 - 3r_2 \\ \cong \\ (-1)r_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned}
& \begin{matrix} r_4 - \frac{5}{13}r_3 \\ \approx \\ (-\frac{1}{5})r_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \begin{matrix} r_2 + 3r_3 \\ \approx \\ r_1 - 2r_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \begin{matrix} r_1 - 2r_2 \\ \approx \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个最大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$. 且

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_4, \quad \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4.$$



§ 7 初等方阵

这一节主要讨论矩阵的初等变换与矩阵乘法的联系,然后在此基础上,给出用初等变换求逆矩阵的方法.

定义 17 由单位矩阵 E 经过一次初等变换而得到的方阵称为初等方阵.

显然,三种初等变换对应着三类初等方阵.

(i) 互换两行或互换两列.

把单位矩阵中第 i, j 两行互换($r_i \leftrightarrow r_j$),得初等方阵

$$E(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}.$$



(ii) 用数 $k \neq 0$ 乘以 E 的第 i 行 ($r_i \times k$), 得初等方阵

$$E(i(k)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}$$

(iii) 用数 k 乘以 E 的第 i 行后加到第 j 行上去, 得初等方阵

$$E(i(k), j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}$$

同样可得与初等列变换相对应的初等方阵, 而且对单位矩阵做一次初等列变换所得到的方阵也包括在上面所列的三类方阵之中, 故这三类方阵就是全部的初等方阵.

那么, 初等方阵与矩阵相乘又跟矩阵的初等变换有何联系呢? 请看定理八.

定理八 对于一个 $m \times n$ 矩阵 A 做一次初等行变换相当于在 A 的左边乘上一个相应的 m 阶初等方阵; 对 A 做一次初等列变换相当于在 A 的右边乘上一个相应的 n 阶初等方阵.

[证] (1) 用 m 阶初等方阵 $E(i, j)$ 左乘 A 得

$$E(i, j)A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}$$

其结果相当于对矩阵 A 进行第一种初等行变换. 类似地, 用 n 阶初等方阵 $E(i, j)$ 右乘矩阵 A , 其结果相当于对矩阵 A 进行第一种初等列变换.



(2) 用 m 阶初等方阵 $E(i(k))$ 左乘 A 得

$$E(i(k))A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}$$

其结果相当于对矩阵 A 进行第二种初等行变换. 类似地, 用 n 阶初等方阵 $E(i(k))$ 右乘矩阵 A , 其结果相当于对矩阵 A 进行第二种初等列变换.

(3) 用 m 阶初等方阵 $E(i(k), j)$ 左乘 A 得

$$E(i(k), j)A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} + a_{j1} & ka_{i2} + a_{j2} & \cdots & ka_{in} + a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}$$

其结果相当于对矩阵 A 施行第三种初等行变换. 类似地, 用 n 阶初等方阵 $E(i(k), j)$ 右乘矩阵 A , 其结果相当于对矩阵 A 施行第三种初等列变换. 证毕.

不难看出: 初等方阵都是可逆的, 它们的逆矩阵也是初等方阵, 事实上

$$E(i, j)^{-1} = E(i, j), \quad E(i(k))^{-1} = E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

$$E(i(k), j)^{-1} = E(i(-k), j).$$

根据定理八, 对一矩阵做初等变换就相当于用相应的初等方阵左乘或右乘这个矩阵, 因此两个 $m \times n$ 矩阵 A, B 等价的充要条件是存在 m 阶初等方阵 $P_1, \cdots, P_l$ 与 n 阶初等方阵 $P_{l+1}, \cdots, P_t$ 使

$$A = P_1 P_2 \cdots P_l B P_{l+1} P_{l+2} \cdots P_t. \quad (21)$$

若令 $P = P_1 P_2 \cdots P_l, Q = P_{l+1} P_{l+2} \cdots P_t$, 显然 P 为可逆的 m 阶方阵, Q 为可逆的 n 阶方阵, 此时上式可写成 $A = PBQ$, 从而得

定理九 两个 $m \times n$ 矩阵 A, B 等价的充要条件是存在可逆的 m 阶方阵 P 与可逆的 n 阶方阵 Q , 使

$$A = PBQ.$$



我们知道,若 A 为 n 阶可逆方阵,其标准形为 n 阶单位阵,即可逆矩阵 $A \simeq E$,由(21)式立得

$$A = P_1 P_2 \cdots P_l E P_{l+1} P_{l+2} \cdots P_t = P_1 P_2 \cdots P_t,$$

其中 $P_i (i = 1, 2, \dots, t)$ 为 n 阶初等方阵,从而得

定理十 n 阶方阵 A 可逆的充要条件是它能表成一些初等方阵的乘积,即

$$A = P_1 P_2 \cdots P_t. \quad (22)$$

把(22)式改写一下,有

$$P_t^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} A = E.$$

因为初等方阵的逆矩阵仍为初等方阵,同时在矩阵 A 的左边乘这些初等方阵就相当于对 A 做初等行变换,从而有

推论 可逆矩阵总可以经过一系列初等行变换化为单位矩阵.

定理十及推论提供了一种求逆矩阵的方法. 设 A 为可逆矩阵,由定理十知 A 可表为一些初等方阵的乘积:

$$A = P_1 P_2 \cdots P_t.$$

显然 $A^{-1} = P_t^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1}$,从而得以下两式:

$$P_t^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} A = E, \quad (23)$$

$$P_t^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} E = A^{-1}. \quad (24)$$

(23)、(24)两个式子说明,如果用一系列初等行变换把可逆矩阵 A 化成单位矩阵,那么同样地用这一系列初等行变换去化单位矩阵就得到 A^{-1} .

把 A, E 这两个 $n \times n$ 矩阵合并在一起,构成一个 $n \times 2n$ 矩阵 $(A : E)$,按矩阵的分块乘法,则有

$$\begin{aligned} P_t^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} (A : E) &= (P_t^{-1} \cdots P_1^{-1} A : P_t^{-1} \cdots P_1^{-1} E) \\ &= (E : A^{-1}). \end{aligned}$$

这就是用初等行变换求逆矩阵的根据所在. 请看下面的例子.

例 19 设

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \text{求 } A^{-1}.$$

[解] 因为

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$



$$\begin{aligned}
& \begin{matrix} r_1+r_2 \\ \simeq \\ r_3+r_2 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\
& \begin{matrix} r_2+2r_1 \\ \simeq \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\
& \begin{matrix} \frac{1}{5} \times r_3 \\ \simeq \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right] \\
& \begin{matrix} r_2-3r_3 \\ \simeq \\ r_1-r_3 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right],
\end{aligned}$$

所以

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

上面是用初等行变换求逆矩阵,同样只用初等列变换也可以求逆矩阵,但在具体计

算时 E 不放在 A 的右边,而是放在 A 的下面,即 $\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} E \\ \cdots \\ A^{-1} \end{bmatrix}$. 理由请读者给出. 下面用

初等列变换求例 19 矩阵 A 的逆矩阵.

因为



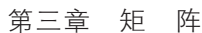
$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1+2c_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{c_2+c_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_3-c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{\frac{1}{5} \times c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 2 & 3 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2+c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

所以

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

在第二章第四节向量空间中指出了向量空间的基不唯一,下面介绍向量在不同基下的坐标之间的关系,即坐标变换公式.

定义 18 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 为向量空间 V 的两组基,若



[illegible]

则称矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$ 为基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 的过渡矩阵.

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)A.$$

例如,在向量空间 $\mathbf{R}^2$ 中,基 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 到基 $\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 的过渡矩

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$X = AY \quad \text{或} \quad Y = A^{-1}X.$$

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)A,$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)X,$$

$$\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) Y,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} &= [(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)A]Y \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)(AY).\end{aligned}$$

$$X = AY \quad \text{或} \quad Y = A^{-1}X.$$

$$(\text{I}) \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 1, 0)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0, 1, 1)^T;$$

$$(\text{II}) \boldsymbol{\beta}_1 = (1, 0, 3)^T, \boldsymbol{\beta}_2 = (2, 2, 2)^T, \boldsymbol{\beta}_3 = (-1, 1, 4)^T.$$



(1) 求基(I)到基(II)的过渡矩阵 A ;

(2) 设 α 在基(I)下的坐标为 $(1, 1, 3)^T$, 求 α 在基(II)下的坐标.

[解] (1) 方法 1:

因为 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A.$$

所以

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

方法 2:

因为

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{r_3-r_1}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{r_3+r_2}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{\frac{1}{2}r_3}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \xrightarrow{r_2-r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

所以过渡矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(2) 坐标变换公式,得 α 在基(II)下的坐标为

$$Y = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

从例 20 解题过程可得,基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 的过渡矩阵 A 的求法.

(1) 逆矩阵法: $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$.

(2) 初等变换法: $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E : A)$.



习 题 三

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

求: (1) $3A - B$;

(2) $2A + 3B$;

(3) 若 X 满足 $A + X = B$, 求 X ;

(4) 若 Y 满足 $(2A - Y) + 2(B - Y) = 0$, 求 Y .

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $3AB - 2A$ 及 $A'B$.



3. 计算下列矩阵的乘积.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$(2) \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$(3) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix};$$

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix};$$

$$(5) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$4. \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 求 } A \text{ 与 } B \text{ 的乘积 } AB \text{ (用分块}$$

的方法).

$$5. \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \text{ 求 } AB \text{ (用分块的方法).}$$

$$6. \text{ 已知 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

求: (1) $(A+B)(A-B)$;

(2) $A^2 - B^2$.



比较(1)与(2)的结果,可得出什么结论?

7. 举反例说明下列命题是错误的.

(1) 若 $A^2 = 0$, 则 $A = 0$;

(2) 若 $A^2 = A$, 则 $A = 0$ 或 $A = E$;

(3) 若 $AX = AY$, 且 $A \neq 0$, 则 $X = Y$.

8. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}$, 求 $A^2, A^3, \dots, A^k$ (k 为正整数).

9. 设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, 求 A^k .

10. 设 A, B 为同阶方阵, 证明:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

的充分必要条件是 $AB = BA$.

11. 设 A, B 都是 n 阶对称矩阵, 证明: AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB = BA$.

12. 求下列各矩阵的逆矩阵.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad (4) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. 解下列矩阵方程.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix};$$

$$(2) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

14. 设 $A^k = 0$ (k 为正整数), 证明:

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}.$$



15. 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = 0$, 证明 A 及 $A + 2E$ 都可逆, 并求 A^{-1} 及 $(A + 2E)^{-1}$.

16. 设 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $AB = A + 2B$, 求 B .

17. 设

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix},$$

求 $(A + 2E)^{-1}(A^2 - 4E)$.

18. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

求 $|(4E - A)'(4E - A)|$.

19. 求下列矩阵的秩.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 10 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{bmatrix}.$$

20. 利用矩阵的秩判断下列向量组的线性相关性, 并求出它的一个最大线性无关组.

$$(1) \alpha_1 = (1, 4, 1, 0), \quad \alpha_2 = (2, 1, -1, -3),$$

$$\alpha_3 = (1, 0, -3, -1), \quad \alpha_4 = (0, 2, -6, 3);$$

$$(2) \alpha_1 = (1, -1, 2, 4), \quad \alpha_2 = (0, 3, 1, 2),$$

$$\alpha_3 = (3, 0, 7, 14), \quad \alpha_4 = (1, -1, 2, 0),$$

$$\alpha_5 = (2, 1, 5, 6);$$

$$(3) \alpha_1 = (2, 1, 1), \quad \alpha_2 = (-4, -2, -2),$$



$$\alpha_3 = (3, 1, 4), \quad \alpha_4 = (5, 3, 0).$$

21. 利用矩阵的初等变换求下列方阵的逆矩阵.

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix};$$

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

22. 用初等变换将下列矩阵化为标准形.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix};$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

23. 已知 $AP = PB$, 其中

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

求 A 及 A^5 .

24. 设 A 和 B 为可逆阵, 求分块矩阵

$$X = \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$$

的逆矩阵.

25. 若 A 为 n 阶方阵, 试证: $R(A) < n$ 的充分必要条件是 $|A| = 0$.

26. 利用逆矩阵解下列线性方程组.

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1. \end{cases}$$

27. 求下列向量组的一个最大线性无关组并用最大线性无关组表示其余向量.

$$(1) \alpha_1 = (2, 1, 2, 2), \quad \alpha_2 = (1, 1, -1, 0), \quad \alpha_3 = (0, 1, 2, 1), \\ \alpha_4 = (-1, -1, -1, -1);$$



$$(2) \alpha_1 = (2, 1, 3, 7), \quad \alpha_2 = (-1, 0, 1, 0), \quad \alpha_3 = (4, 1, 1, 7), \\ \alpha_4 = (-3, -1, 0, -3), \quad \alpha_5 = (-4, -3, 1, 3).$$

28. 在线性空间 $\mathbf{R}^3$ 中, 取两组基

$$(I) \alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \quad \alpha_3 = (1, 1, 1)^T;$$

$$(II) \beta_1 = (2, 1, 1)^T, \quad \beta_2 = (1, 2, 1)^T, \quad \beta_3 = (1, 1, 2)^T.$$

(1) 求基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵 A ;

(2) 设 α 在基 (I) 下的坐标为 $(3, 1, 1)^T$, 求 α 在基 (II) 下的坐标.

这一章主要讨论以下几个问题:

- ## § 1 消元法

[illegible]

107



$1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 称为方程组的系数, $b_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 称为常数项.

当 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 分别用数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 代入方程组中的每一个方程后, 若能使得每一个等式都变成恒等式, 则称 $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n$ 是方程组(1) 的一个解. 方程组(1) 的解的全体组成一个集合, 则称该集合为方程组(1) 的解集合, 所谓解方程组实际上就是求出它的解集合. 如果两个方程组有相同的解集合, 则称这两个方程组同解, 或称它们为同解的方程组.

消元法是求解线性方程组最直接、最有效、最一般的方法, 它的基本思路是利用方程组中方程之间的算术运算, 每次保留一个方程, 消去其他方程的某一个未知量, 这样一步步做下去, 最后得到一个阶梯形方程组, 然后通过解这个较容易求解的阶梯形方程组而获得原方程组的解. 我们先看一个例子.

例如, 解方程组

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 17, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 2. \end{cases} \quad (2)$$

把第一个方程与第三个方程的位置互换, 得

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 2, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3, \\ -3x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 17. \end{cases} \quad (3)$$

将第一个方程的 -2 倍加到第二个方程, 将第一个方程的 3 倍加到第三个方程, 得

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 2, \\ -19x_2 + 13x_3 = -1, \\ 23x_2 - 23x_3 = 23. \end{cases} \quad (4)$$

用 $\frac{1}{23}$ 乘第三个方程, 得

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 2, \\ -19x_2 + 13x_3 = -1, \\ x_2 - x_3 = 1. \end{cases} \quad (5)$$

将第二、第三两个方程互换, 然后将第二个方程的 19 倍加到第三个方程, 得

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 - x_3 = 1, \\ -6x_3 = 18. \end{cases} \quad (6)$$

用 $-\frac{1}{6}$ 乘第三个方程,然后将第三个方程加到第二个方程,得

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = -3. \end{cases} \quad (7)$$

将第三个方程的 5 倍加到第一个方程,将第二个方程的 -7 倍加到第一个方程,得

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = -3. \end{cases} \quad (8)$$

以上各方程组都是同解方程组,由最后一个方程组得到 $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = -3$. 这个解法就称为消元法,(2) 至(6) 是消元过程,(6) 至(8) 是回代过程.

分析一下这个例子的解题过程,不难看出实际上是对方程组进行以下三种运算:

- (i) 将一个方程乘以一个非零的常数;
- (ii) 将两个方程的位置互换;
- (iii) 将一个方程的 k 倍加到另一个方程上.

我们把这三种运算统称为线性方程组的初等变换.

不难证明,对线性方程组施行初等变换后,所得到的方程组与原方程组是同解的.

从这个例子的求解过程还可以看出,在对方程组施行初等变换时,只是对方程组的系数和常数项进行运算,而未知量并没有加入运算. 事实上,一个线性方程组完全由系数和常数项所决定,而未知量用什么符号代表则不是实质性的问题,基于这个事实,把方程组(1) 的未知量、运算加号以及等号都省略掉,可以得到由方程组(1) 的系数和常数项构成的矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}. \quad (9)$$

对于每一个线性方程组都可以唯一地写出上面的矩阵. 反之,任意给一个上面的矩阵,就可以唯一地写出相应的方程组,这说明方程组可以用上面的矩阵来表示,当一个线性方程组用一个矩阵表示以后,利用初等变换化线性方程组成为阶梯形方程组的过程实际上就是用初等行变换化这个矩阵成为阶梯形矩阵的过程.

线性方程组(1) 的全部系数和常数项构成的矩阵(9) 称为方程组(1) 的增广矩阵,



记作 $\bar{A}$; 而只由全部系数构成的矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为方程组(1) 的系数矩阵, 记作 A .

通过以上分析, 解线性方程组首先可以通过矩阵来进行, 即先把线性方程组的增广矩阵通过初等行变换化为阶梯形矩阵, 然后再回到阶梯形方程组去求解.

例 1 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3. \end{cases}$$

[解] 对增广矩阵进行初等行变换

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & -7 & 3 \end{bmatrix} &\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{(-\frac{1}{2})r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1+3r_2]{r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

与这个阶梯形矩阵对应的是同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -2, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

从而解得

$$\begin{cases} x_1 = -2 - 2x_2, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

这里 x_2 称为自由未知量, 它可以任意取值, 因此方程组有无穷多组解. 我们把这样的解称为原方程组的一般解.

例 2 解方程组



$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

[解] 对增广矩阵进行初等行变换

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} &\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

因为此矩阵所对应的阶梯形方程组中的第三个方程,无论 x_1, x_2, x_3 取什么值,都不可能使之成为恒等式,所以这个阶梯形方程组无解,从而原方程组也无解.

对于线性方程组(1),如果常数项 $b_1, b_2, \dots, b_m$ 不全为零,则称它为非齐次线性方程组;如果常数项 $b_1, b_2, \dots, b_m$ 全为零,即 $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$,则称它为齐次线性方程组. 容易看出,对于齐次线性方程组,对它施行初等变换后,得到的新方程组仍然是齐次线性方程组. 基于这个事实,在解齐次线性方程组时,每步工作只需对它的系数矩阵 A 进行初等行变换,化成阶梯形矩阵后,再回到常数项为零的阶梯形方程组去求解.

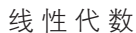
例3 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

[解] 对系数矩阵进行初等行变换

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{bmatrix} &\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3-r_2]{r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-\frac{1}{3})r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

取对应于此矩阵的同解方程组,移项后得



$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \frac{5}{3}x_4, \\ x_2 = -2x_3 - \frac{4}{3}x_4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \frac{5}{3}x_4, \\ x_2 = -2x_3 - \frac{4}{3}x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases} \quad (x_3, x_4 \text{ 可以任意取值})$$

§2 齐次线性方程组

[illegible]

它的系数矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$; 记

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

则方程组(10),可借助于矩阵的乘法以及两个向量相等的概念,简单地写成向量方程

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (11)$$

若 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$ 是方程组(10)的一个解, 则

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$



称为方程组(10)的一个解向量,它也就是向量方程(11)的一个解.

显然,凡齐次线性方程组总是有解的,因为至少 n 维零向量就是它的一个解向量. 我们知道,一个齐次线性方程组当它的方程个数等于未知量的个数,且系数行列式不等于零时,由克莱姆法则,它有且仅有零解;而上节例3中的齐次线性方程组除了零解之外,还有无穷多个非零解. 那么,自然会引出以下问题:对于一般的齐次线性方程组(10),它只有零解的充分必要条件是什么? 或者说,它有非零解的充分必要条件是什么? 在有多个解的情形下,这些解之间的关系又是怎样的? 这些就是本节要讨论的主要内容.

根据向量方程(11),我们先来讨论解向量的两个基本性质.

性质1 若 $x = \xi_1$ 和 $x = \xi_2$ 均为向量方程(11)的解,则 $x = \xi_1 + \xi_2$ 也是向量方程(11)的解.

[证] 只要验证 $x = \xi_1 + \xi_2$ 满足方程(11).

因为

$$A\xi_1 = 0, \quad A\xi_2 = 0,$$

所以

$$A(\xi_1 + \xi_2) = A\xi_1 + A\xi_2 = 0 + 0 = 0.$$

故 $x = \xi_1 + \xi_2$ 为方程(11)的解.

证毕.

性质2 若 $x = \xi$ 是方程(11)的解, k 为实数,则 $x = k\xi$ 也是方程(11)的解.

[证] 因为 $A\xi = 0$, 所以 $A(k\xi) = kA\xi = k0 = 0$.

故 $x = k\xi$ 为方程(11)的解.

证毕.

我们用 S 表示齐次线性方程组(10)的解集合,则由性质1和性质2知道,集合 S 对向量的加法和数乘两种运算封闭,所以集合 S 是一个向量空间,称为齐次线性方程组(10)的解空间. 显然,对于只有零解的齐次线性方程组,它的解空间 S 只含一个零向量,故为0维向量空间.

由性质1和性质2可知:只要齐次线性方程组(10)有非零解,它就肯定有无穷多个解,而且这个解集合 S 是一个维数大于零的向量空间. 我们自然会问,这个解空间 S 的维数是多少? 能否找到它的一个基? 怎样找它的一个基? 为此我们引入齐次线性方程组的基础解系的概念.

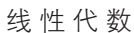
定义1 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ 是齐次线性方程组(10)的 k 个解向量,如果满足

(i) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ 是线性无关的;

(ii) 方程组(10)的任一个解向量都能表示为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ 的线性组合.

则称 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ 为齐次线性方程组(10)的一个基础解系.

由定义可知,方程组(10)的一个基础解系,实际上就是它的解空间的一个基,下面给出求方程组(10)的基础解系的具体方法.



设方程组(10)的系数矩阵 A 的秩 $R(A) = r$, 不妨设 A 在左上角的 r 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

用 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 表示 A 的行向量组. 由假设知 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是 A 的行向量组的一个最大线性无关组, 所以 $\alpha_j (j = r + 1, \dots, m)$ 均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 又基于假设 A 的左上角 r 阶子式不等于零, 因此 A 可通过一系列初等行变换而变为

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $c_{\ddot{u}}(i = 1, 2, \cdots, r)$ 均不为零.

显然方程组(10)与下面方程组是同解的:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n , \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n , \\ \\ c_{rr}x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n . \end{array} \right. \quad (12)$$

如果 $R(A) = r = n$, 则方程组 (12) 的右端全为零, 这时它只有零解, 即方程组 (10) 只有零解, 当然也就不存在基础解系, 此时解空间 S 只含一个零向量, 为 0 维向量空间. 如果 $R(A) = r < n$, 任给 $x_{r+1}, \dots, x_n$ 一组值, 则方程组 (12) 的右端为确定的常数. 由于

[illegible]

根据克莱姆法则,方程组(12)可以唯一地确定出 $x_1, x_2, \dots, x_r$ 的值,将它们合在一起,就得到方程组(12)——也就是方程组(10)的一个解向量,记为



$$\xi = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

现在分别取

$$\begin{bmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

对于这 $n-r$ 组数,由方程组(12)可求得对应的 $n-r$ 个解,设依次为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{r1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{r2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} b_{1,n-r} \\ b_{2,n-r} \\ \vdots \\ b_{r,n-r} \end{bmatrix}.$$

从而得到方程组(10)的 $n-r$ 个解向量:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \xi_{n-r} = \begin{bmatrix} b_{1,n-r} \\ \vdots \\ b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

由于 $n-r$ 个 $n-r$ 维向量

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$



是线性无关的,所以每个向量添加 r 个分量而得到的 $n-r$ 个 n 维向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 也是线性无关的. 如果说这 $n-r$ 个解向量就是方程组(10)的一个基础解系,则还需证明方程组(10)的任一个解向量都可由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性表示,下面我们做这一步的工作.

设

$$x = \xi = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

是方程组(10)的任一解向量,当然它也是方程组(12)的解向量. 我们令

$$\eta = \lambda_{r+1}\xi_1 + \lambda_{r+2}\xi_2 + \dots + \lambda_n\xi_{n-r},$$

由于 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是方程组(10)的解向量,所以它们的线性组合 η 也是方程组(10)的解向量,经过计算得

$$\eta = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix},$$

其中 $d_j = \lambda_{r+1}b_{j1} + \lambda_{r+2}b_{j2} + \dots + \lambda_nb_{j,n-r} (j=1, 2, \dots, r)$. 比较 η 与 ξ ,它们都是方程组(10)——也就是方程组(12)的解向量. 因为它们后面的 $n-r$ 个分量对应相等,由方程组(12)得知, η 与 ξ 的前面 r 个分量也必然对应相等,即 $d_j = \lambda_j (j=1, 2, \dots, r)$. 从而这两个解向量完全一样,即 $\eta = \xi$,也就是

$$\xi = \lambda_{r+1}\xi_1 + \lambda_{r+2}\xi_2 + \dots + \lambda_n\xi_{n-r}.$$

这样就证明了 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 确是方程组(10)的一个基础解系,即 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是解空间 S 的一个基,从而可得解空间 S 的维数是 $n-r$.

上面的证明过程提供了一种求齐次线性方程组的基础解系的方法.

实际上,求基础解系的方法还可以一般化,即在方程组(12)中, $(x_{r+1}, \dots, x_n)$ 可任取 $n-r$ 个线性无关的 $n-r$ 维向量,由此可相应地求得基础解系. 任意一个基础解系都是解





$$\begin{aligned} & \stackrel{r_3-r_2}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{(-\frac{1}{4})r_2}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \stackrel{r_1-r_2}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

显见 $R(A)=2$, 故它的基础解系所含解向量的个数为 $n-r=4-2=2$, 取同解方程组, 并移项得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{4}x_4, \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{4}x_4. \end{cases}$$

取

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

解得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix}.$$

从而得到一个基础解系

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

因此通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$, 即



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中 k_1, k_2 为任意实数.

顺便指出,也可以从方程组的一般解形式直接得到向量形式的通解. 例4中的系数矩阵经过初等行变换变成简化阶梯形矩阵后,即得方程组的一般解:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{4}x_4; \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{4}x_4; \\ x_3 = x_3; \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

令 $x_3 = k_1, x_4 = k_2$, 并写成向量形式, 则通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k_1, k_2 \in \mathbf{R}),$$

其中

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

为所给方程组的一个基础解系.

例5 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t & t \\ 1 & t & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $Ax = 0$ 的解空间维数为2, 求 $Ax = 0$ 的通解.

[解] 因为 $Ax = 0$ 的解空间维数为2, 所以 $4 - R(A) = 2$, 从而 $R(A) = 2$.



$$\text{又 } A \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t & t \\ 0 & t-2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-(t-2)r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t & t \\ 0 & 0 & -(t-1)^2 & -(t-1)^2 \end{bmatrix},$$

故 $t = 1$. 这时

$$A \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

从而方程组 $Ax = 0$ 化为同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = -x_3 - x_4. \end{cases}$$

$$\text{取 } \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 得}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

于是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

故方程组 $Ax = 0$ 的通解为

$$x = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2,$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

例 6 设四元齐次线性方程组

$$\text{I: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}, \quad \text{II: } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases},$$

求: (1) 方程组 I 与 II 的基础解系;

(2) 方程组 I 与 II 的公共解.

[解] (1) 方程组 I 的系数矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 且

$$A \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$



即方程组 I 化为同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$.

取 $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 得方程组 I 的基础解系为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

方程组 II 的系数矩阵为 $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 且

$$B \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

即方程组 II 化为同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -x_4, \\ x_2 = x_3 - x_4. \end{cases}$

取 $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 得方程组 II 的基础解系为

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(2) 显然方程组 I 与 II 构成的联立方程组

$$\text{III:} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

的解为方程组 I 与 II 的公共解.

方程组 III 的系数矩阵为 $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 且



$$\begin{aligned} C &\cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &\cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

即方程组 III 化为同解方程组
$$\begin{cases} x_1 = -x_4, \\ x_2 = x_4, \\ x_3 = 2x_4. \end{cases}$$

取 $x_4 = 1$, 得方程组 III 的基础解系为

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

故方程组 I 与 II 的公共解为 $x = k\xi$, 其中 k 为任意常数.

例 7 设 A, B 为 n 阶方阵且 $AB = O$, 证明 $R(A) + R(B) \leq n$.

[证] 令 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 则由 $AB = O$, 得

$$(A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_n) = (0, 0, \dots, 0).$$

从而

$$A\beta_j = 0 (j = 1, 2, \dots, n),$$

即 $\beta_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解.

又齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间维数为 $n - R(A)$,

于是

$$R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \leq n - R(A),$$

即

$$R(B) \leq n - R(A),$$

故

$$R(A) + R(B) \leq n.$$





若方程组(13)有解,就意味着向量 $\boldsymbol{b}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示. 由此可知: 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n, \boldsymbol{b}$ 是等价的, 它们的秩是相等的, 故方程组(13)的系数矩阵 A 与它的增广矩阵 $\bar{A}$ 的秩也相等.

反之, 若方程组(13)的系数矩阵 A 与增广矩阵 $\bar{A}$ 的秩相等, 不妨设 $R(A) = R(\bar{A}) = r (0 < r \leq n)$, 即向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n, \boldsymbol{b}$ 的秩都等于 r . 不妨又设 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_r$ 是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的一个最大线性无关组, 则它也是 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n, \boldsymbol{b}$ 的一个最大线性无关组, 从而 $\boldsymbol{b}$ 也可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示, 于是 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示, 因此方程组(13)有解.

综上所述, 有

定理二 非齐次线性方程组(13)有解的充要条件是它的系数矩阵 A 与它的增广矩阵 $\bar{A}$ 的秩相等, 即 $R(A) = R(\bar{A})$.

以下再来讨论非齐次线性方程组的通解结构.

如果把方程组(13)中的常数项都换成0, 便得到向量方程:

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \quad (15)$$

式(15)称为方程组(13)所对应的齐次线性方程组.

根据向量方程(14)和(15), 以下讨论非齐次线性方程组解向量的两个基本性质.

性质3 设 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}_1$ 及 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}_2$ 都是方程(14)的解, 则 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2$ 为方程(15)的解.

[证] 因为 $A\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{b}, \quad A\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{b},$

所以 $A(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2) = A\boldsymbol{\eta}_1 - A\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \mathbf{0},$

故 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2$ 为方程(15)的解. 证毕.

性质4 设 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}$ 是方程(14)的解, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$ 是方程(15)的解, 则 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}$ 是方程(14)的解.

[证] 因为 $A\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{b}, \quad A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0},$

所以 $A(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}) = A\boldsymbol{\eta} + A\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{b} + \mathbf{0} = \boldsymbol{b},$

故 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}$ 为方程(14)的解. 证毕.

由性质可知, 若求得方程(14)的一个解 $\boldsymbol{\eta}^*$, 则方程(14)的任一个解 $\boldsymbol{x}$ 总可以表示为

$$\boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi},$$

其中 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$ 为方程(15)的解. 当 $\boldsymbol{\xi}$ 取遍方程(15)的全部解时, 就得到了方程(14)的全部解. 因此, 若设 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组(13)所对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 则方程组(13)的全部解向量可表示为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}^* + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \dots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$



其中 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$ 为任意实数, $\boldsymbol{\eta}^*$ 是方程组 (13) 的任意一个解向量, $\boldsymbol{\eta}^*$ 称为方程组 (13) 的特解. 上式称为方程组 (13) 的通解.

鉴于以上的分析和结论, 在此强调以下两点:

(i) 非齐次线性方程组 (13) 有解的充要条件是 $R(A) = R(\bar{A})$. 如果 $R(A) < R(\bar{A})$, 则方程组 (13) 无解; 如果 $R(A) = R(\bar{A}) = n$, 由于方程组 (13) 所对应的齐次线性方程组 (15) 只有零解, 故由性质 3 可得方程组 (13) 有唯一解; 如果 $R(A) = R(\bar{A}) < n$, 由于方程组 (13) 所对应的齐次线性方程组 (15) 有无穷多个解, 故由性质 4 可知方程组 (13) 有无穷多个解.

(ii) 求解非齐次线性方程组一般要经历三个步骤: ① 计算系数矩阵及增广矩阵的秩; ② 求出它的一个特解 $\boldsymbol{\eta}^*$; ③ 求出它所对应的齐次线性方程组的基础解系, 最后写出它的通解. 但用初等行变换解非齐次线性方程组时, 只需注意到增广矩阵 $\bar{A}$ 是在系数矩阵 A 的基础上添上常数项那一列而构成的矩阵, 记为 $\bar{A} = (A, \boldsymbol{b})$, 用初等行变换把 $\bar{A}$ 化为阶梯形矩阵的同时, 也把 A 经初等行变换化为阶梯形矩阵. 这样, 就把解非齐次线性方程组的三个步骤统一在一个框架内进行了.

例 8 求方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7. \end{cases}$$

[解] 对增广矩阵 $\bar{A}$ 做初等行变换,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{bmatrix} \\ &\cong \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -14 & 4 & 8 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\cong \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

可见 $R(A) = R(\bar{A}) = 2$, 故方程组有解, 并取同解方程组, 且移项后得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4, \\ x_2 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4. \end{cases}$$

取 $x_3 = x_4 = 0$, 得方程组的一个特解

$$\boldsymbol{\eta}^* = \begin{bmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

再取方程组所对应的齐次线性方程组的同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4, \\ x_2 = \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4. \end{cases}$$

取

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

解得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix}.$$



于是对应的齐次线性方程组的基础解系为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

所以方程组的通解为

$$x = \eta^* + k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意实数}),$$

即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意实数}).$$

解非齐次线性方程组,也可以从它的一般解形式而得到向量形式的通解. 例8的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4, \\ x_2 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

令 $x_3 = k_1, x_4 = k_2$, 则向量形式的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意实数}),$$

其中



$$\boldsymbol{\eta}^* = \begin{bmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

是方程组的一个特解,而

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

就是方程组所对应的齐次线性方程组的一个基础解系.

例 9 求解方程

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 18, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ 10x_1 + 3x_3 = 80. \end{cases}$$

[解] 对增广矩阵 $\bar{A}$ 做初等行变换,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 18 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 10 & 0 & 3 & 80 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 18 \\ 0 & 10 & -11 & -34 \\ 0 & 5 & -\frac{11}{2} & -17 \\ 0 & 20 & -22 & -10 \end{bmatrix} \\ &\cong \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 18 \\ 0 & 10 & -11 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

可见, $R(A) = 2, R(\bar{A}) = 3$, 故方程组无解.

例 10 当 λ 取何值时, 线性方程组



$$\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + \lambda x_2 - x_3 = -\lambda, \\ -x_1 - x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解、有无穷多解、无解.

[解法 1] 对增广矩阵 $\bar{A}$ 做初等行变换,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 & -\lambda \\ -1 & -1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\lambda & -\lambda^2 \\ -1 & \lambda & -1 & -\lambda \\ \lambda & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\lambda & -\lambda^2 \\ 0 & \lambda+1 & -(\lambda+1) & -\lambda(\lambda+1) \\ 0 & -(\lambda+1) & \lambda^2-1 & \lambda^3+1 \end{bmatrix} \\ &\cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\lambda & -\lambda^2 \\ 0 & \lambda+1 & -(\lambda+1) & -\lambda(\lambda+1) \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda-2 & \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\lambda & -\lambda^2 \\ 0 & \lambda+1 & -(\lambda+1) & -\lambda(\lambda+1) \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-2) & (\lambda+1)(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(1) 当 $\lambda \neq -1, 2$ 时, 增广矩阵为

$$\bar{A} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\lambda & -\lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-2 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix},$$

从而 $R(A) = R(\bar{A}) = 3$, 所以方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda = -1$ 时,

$$\bar{A} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

从而 $R(A) = R(\bar{A}) = 1 < 3$, 所以方程组有依赖于 $n - r = 3 - 1 = 2$ 个任意常数的无穷多解.

(3) 当 $\lambda = 2$ 时,



$$\bar{A} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

从而 $R(A) = 2, R(\bar{A}) = 3$, 所以方程组无解.

[解法 2] 因为

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2),$$

- (1) 当 $\lambda \neq -1, \lambda \neq 2$ 时, $|A| \neq 0$, 方程组有唯一解;
- (2) 当 $\lambda = -1$ 时, 把 $\lambda = -1$ 代入原方程组, 求解类似于解法 1;
- (3) 当 $\lambda = 2$ 时, 把 $\lambda = 2$ 代入原方程组, 求解类似于解法 1.

例 11 设四元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 A 的秩为 3, η_1, η_2, η_3 为 $Ax = b$ 的三个解, 且

$$\eta_1 + \eta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \eta_2 + \eta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

求 $Ax = b$ 的通解.

[解] 因为 $4 - R(A) = 4 - 3 = 1$,

所以齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系含 1 个解向量.

又 η_1, η_3 为 $Ax = b$ 的解, 所以 $\eta_1 - \eta_3$ 为 $Ax = 0$ 的解.

$$\eta_1 - \eta_3 = (\eta_1 + \eta_2) - (\eta_2 + \eta_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

故 $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 为 $Ax = 0$ 的基础解系.



显然 $\eta^* = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 为 $Ax = b$ 的一个特解,

因此 $Ax = b$ 的通解为 $x = \eta^* + k\xi$, 其中 k 为任意常数.



习题四

1. 求下列方程组的一般解.

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 8, \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 16. \end{cases}$$

2. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系.

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

3. 求下列齐次线性方程组的通解.

$$(1) \begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases}$$



$$(2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

4. 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 证明: $\xi_1 + \xi_2, \xi_2, \dots, \xi_r$ 也是 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

5. 求下列非齐次线性方程组的通解.

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -2; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -1; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 13, \\ 4x_1 - x_2 + 9x_3 = -6; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8, \\ 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 7. \end{cases}$$

6. 问 λ 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = \lambda, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda + 2, \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 2\lambda + 3 \end{cases}$$

有解, 并求出它的解.

7. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 η_1, η_2, η_3 是它的三个解向量, 且



第五章



相似矩阵及二次型



二次型的理论起源于化二次曲线和二次曲面的方程为标准形式的问题,二次型就是二次齐次多项式,它的理论在数学和物理以及其他许多学科中都有重要的应用,而在线性代数和工程技术的一些问题的研究中,常遇到要将一个矩阵化为相似对角形的问题.本章在介绍向量的内积,矩阵的特征值、特征向量和相似矩阵等概念及性质后,将讨论二次型的标准化及二次型的一些基本性质.



§ 1 向量的内积

在解析几何中我们看到,向量的长度和夹角等度量性质都可以通过向量的数量积来表示.这里,我们将三维空间向量的数量积概念推广到 n 维向量空间.

定义 1 设有 n 维向量

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

$$\text{令} \quad [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n, \quad (1)$$

则称 $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积.

内积是向量的一种运算,可用矩阵的乘法来表示,即



$$[\alpha, \beta] = \alpha' \beta.$$

当 $n = 3$ 时, (1) 式就是三维空间的向量的数量积在直角坐标系下的坐标表达式, 所以 n 维向量的内积是数量积的一种推广, 至于向量的长度和夹角也可以类似三维空间的情形来定义.

下面我们给出 n 维向量内积的几个基本性质 (读者可利用定义自行验证):

(i) 对称性: 对任意向量 α, β , 有 $[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha]$;

(ii) 可加性: 对任意三个向量 α, β 和 γ , 有

$$[\alpha + \gamma, \beta] = [\alpha, \beta] + [\gamma, \beta];$$

(iii) 齐次性: 对任意向量 α, β 及实数 λ , 有

$$[\lambda \alpha, \beta] = \lambda [\alpha, \beta].$$

根据内积的定义, 若 $\beta = \alpha$, 则

$$[\alpha, \alpha] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 0,$$

当且仅当 $\alpha = 0$ 时, $[\alpha, \alpha] = 0$.

定义 2 非负实数 $\sqrt{[\alpha, \alpha]}$ 称为向量 α 的长度 (或范数), 并记为 $\|\alpha\|$, 即

$$\|\alpha\| = \sqrt{[\alpha, \alpha]} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}. \quad (2)$$

向量的长度具有下列基本性质:

(i) 非负性: 对任意的向量 α , 恒有

$$\|\alpha\| \geq 0.$$

当且仅当 $\alpha = 0$ 时, 有

$$\|\alpha\| = 0.$$

(ii) 齐次性: 对任意向量 α 的实数 λ , 有

$$\|\lambda \alpha\| = |\lambda| \|\alpha\|.$$

(iii) 三角不等式: 对任意两个向量 α 与 β , 有

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|.$$

当 $\|\alpha\| = 1$ 时, 称向量 α 为单位向量. 任意非零向量 α 都可以化为单位向量, 事实上

$$\frac{1}{\|\alpha\|} \alpha$$

就是一个单位向量, 通常把用非零向量 α 的长度倒数乘向量 α 的过程称为将向量 α 单位化.

为了引入夹角的概念, 下面介绍许瓦兹 (Schwarz) 不等式, 即对于任意向量 α, β 有



$$|[\alpha, \beta]| \leq \|\alpha\| \|\beta\|. \quad (3)$$

[证] 若 $\alpha = 0$, 不等式显然成立. 设 $\alpha \neq 0$, 则对任意实数 t , 有

$$\|t\alpha + \beta\|^2 = [t\alpha + \beta, t\alpha + \beta] \geq 0,$$

即

$$t^2 \|\alpha\|^2 + 2t[\alpha, \beta] + \|\beta\|^2 \geq 0.$$

由于 α 和 β 为给定的向量, 所以上述关于 t 的二次三项式的判别式

$$\Delta = 4[\alpha, \beta]^2 - 4\|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 \leq 0,$$

即

$$[\alpha, \beta]^2 \leq \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2,$$

故

$$|[\alpha, \beta]| \leq \|\alpha\| \|\beta\|.$$

由许瓦兹不等式, 当 $\|\alpha\| \neq 0, \|\beta\| \neq 0$ 时

$$\left| \frac{[\alpha, \beta]}{\|\alpha\| \|\beta\|} \right| \leq 1.$$

于是可定义向量夹角.

定义 3 非零 n 维向量 α 与 β 的夹角 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 规定为

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{[\alpha, \beta]}{\|\alpha\| \|\beta\|}, \quad (4)$$

显然, $0 \leq \langle \alpha, \beta \rangle \leq \pi$.

例 1 设 $\alpha = (-1, 3, -5, 1)^T, \beta = (2, -1, 2, -3)^T$, 求 $[\alpha, \beta]$ 及 $\langle \alpha, \beta \rangle$.

[解] $[\alpha, \beta] = (-1) \times 2 + 3 \times (-1) + (-5) \times 2 + 1 \times (-3) = -18$.

因为 $\|\alpha\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-5)^2 + 1^2} = 6,$

$$\|\beta\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2},$$

所以 $\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{[\alpha, \beta]}{\|\alpha\| \|\beta\|} = \arccos \frac{-18}{6 \cdot 3\sqrt{2}}$

$$= \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\pi}{4}.$$

当 $[\alpha, \beta] = 0$ 时, $\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\pi}{2}$, 称向量 α 与 β 正交(或互相垂直).

规定: 零向量与任何向量都正交.



例2 设 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, 若 $\beta = \lambda\alpha + \gamma$, 且 γ 与 α 正交, 求 λ 和 γ .

[解] 由 $\beta = \lambda\alpha + \gamma$, 得

$$\gamma = \beta - \lambda\alpha = \begin{bmatrix} -4 - \lambda \\ 2 \\ 3 + 2\lambda \end{bmatrix}.$$

因为 γ 与 α 正交, 所以 $[\gamma, \alpha] = 0$. 即

$$(-4 - \lambda) \times 1 + 2 \times 0 + (3 + 2\lambda) \times (-2) = 0,$$

故 $\lambda = -2$, 且 $\gamma = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

向量的正交是向量之间的一种重要关系, 有广泛的应用.

定义4 一组非零向量如果它们两两正交, 则称这组非零向量为正交向量组.

正交向量组具有以下性质:

定理一 正交向量组是线性无关组.

[证] 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是正交向量组, 存在实数 $k_1, k_2, \dots, k_r$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = \mathbf{0}.$$

用 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 与等式两边做内积, 并注意到 $[\alpha_i, \alpha_j] = 0 (i \neq j)$, 即得

$$k_i[\alpha_i, \alpha_i] = 0.$$

又因 $\alpha_i \neq \mathbf{0}$, 故 $[\alpha_i, \alpha_i] \neq 0$, 从而 $k_i = 0 (i = 1, 2, \dots, r)$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是线性无关组. 证毕.

这个定理也说明, 在 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中, 正交向量组所包含的向量个数不能超过 n 个. 当然, 线性无关组不一定是正交向量组.

定理二 若向量 β 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 分别都正交, 则 β 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的任一线性组合

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r$$

也正交.

[证] 由于 $[\beta, \alpha_i] = 0 (i = 1, 2, \dots, r)$, 则根据内积运算的基本性质(ii)和(iii), 对任意实数 $k_1, k_2, \dots, k_r$ 有

$$[\beta, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r]$$



$$\begin{aligned} &= k_1[\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1] + k_2[\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2] + \cdots + k_r[\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_r] \\ &= k_1 \times 0 + k_2 \times 0 + \cdots + k_r \times 0 = 0, \end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r$ 正交.

证毕.

向量空间 $V(V \subset \mathbf{R}^n)$ 的基是向量空间的极大线性无关组, 向量空间中的任意向量都可以用基线性表示. 下面定义向量空间的正交基和正交规范基.

定义5 设 V 是 r 维向量空间, 向量组 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ 是 V 的一个基. 如果 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ 两两正交, 则称 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ 是 V 的一个正交基. 如果 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ 两两正交, 且都是单位向量, 则称 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ 是 V 的一个正交规范基(或标准正交基).

例如, n 维单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 就是 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个正交规范基.

向量组

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

是 $\mathbf{R}^4$ 的一个正交规范基.

自然地我们会问, 如何求向量空间的正交规范基? 我们先考虑这样一个问题: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V 的一个基, 如何从这个基出发去构造 V 的一个正交规范基? 这个问题通常称为把一个基正交规范化.

为此, 先构造对应的正交基:

设所构造的正交基是 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$, 其中

$$\text{令} \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1,$$

由于 $\boldsymbol{\beta}_2$ 的构造与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1$ 有关, 不妨设 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_2\boldsymbol{\beta}_1$, 则由 $\boldsymbol{\beta}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1$ 正交, 有

$$[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2] = [\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 + k_2\boldsymbol{\beta}_1] = [\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2] + k_2[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1] = 0,$$

即

$$k_2 = -\frac{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]},$$

所以



$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\beta_1, \alpha_2]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1.$$

类似可依次推得:

$$\beta_i = \alpha_i - \frac{[\beta_1, \alpha_i]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\beta_2, \alpha_i]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2 - \cdots - \frac{[\beta_{i-1}, \alpha_i]}{[\beta_{i-1}, \beta_{i-1}]} \beta_{i-1},$$

其中 $i = 2, \cdots, r$.

通过以上方法,能达到将 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 正交化的目的,然后再将它们单位化,就可得到 V 的一个正交规范基:

$$e_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|} \beta_1, e_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|} \beta_2, \cdots, e_r = \frac{1}{\|\beta_r\|} \beta_r.$$

例 3 把 $\mathbf{R}^3$ 的一个基

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

化为正交规范基.

[解] 令 $\beta_1 = \alpha_1$,

取

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\beta_1, \alpha_2]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\beta_1, \alpha_3]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\beta_2, \alpha_3]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

再单位化,得 $\mathbf{R}^3$ 的一个正交规范基:

$$e_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$



读者不妨验证一下,前面给出的 $\mathbf{R}^4$ 的一个正交规范基可由下面向量组通过正交规范化得到:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

上面所讨论的正交规范基的求法,通常称为施密特(Schmidt)正交化过程.下面,我们进一步讨论:给定向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 如何求 $\mathbf{R}^n$ 的一个正交规范基? 先看一个例题.

例 4 已知 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 求非零向量 α_2, α_3 , 使 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两正交.

[解] 依题意所求向量 α_2, α_3 应满足方程

$$\alpha_1'x = 0,$$

即

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

它的基础解系为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

把基础解系正交化,即取

$$\alpha_2 = \xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_3 = \xi_2 - \frac{[\alpha_2, \xi_2]}{[\alpha_2, \alpha_2]} \alpha_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

显然, α_2, α_3 是方程组 $\alpha_1'x = 0$ 的两个解向量, 即 $\alpha_1'\alpha_2 = \alpha_1'\alpha_3 = 0$, 因此非零向量 α_2, α_3 即为所求.

一般地, 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个正交向量组, 且 $r < n$, 总可以添上



$n - r$ 个向量 $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$, 使之成为 $\mathbf{R}^n$ 的一个正交基. 方法是:

构造齐次线性方程组:

$$\begin{cases} \alpha_1' x = 0, \\ \alpha_2' x = 0, \\ \dots\dots \\ \alpha_r' x = 0. \end{cases}$$

由于其系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_r' \end{bmatrix}$$

的秩为 r , 该方程组的基础解系必含有 $n - r$ 个解向量, 设为 $\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \dots, \xi_n$, 将基础解系正交化得到 $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$, 不难看出, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个正交基, 如果再把它们单位化, 便得到 $\mathbf{R}^n$ 的一个正交规范基.

定义 6 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$, 如果满足

$$A'A = E,$$

则称 A 为正交矩阵.

由于

$$A'A = E \Leftrightarrow A' = A^{-1},$$

所以 A 为正交矩阵的充要条件是 $A' = A^{-1}$.

又注意到, 由定义 6 及矩阵乘法, 有

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

所以 A 为正交矩阵的充要条件是 A 的列向量都是单位向量, 且两两正交.

考虑到 $A'A = E$ 与 $AA' = E$ 等价, 所以上述结论对 A 的行向量也成立.

由此可见, 正交矩阵 A 的 n 个列(行)向量构成向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个正交规范基, 同时, 由正交规范基作为列(行)所构成的矩阵是正交矩阵.

不难验证, 矩阵



$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

是正交矩阵.

正交矩阵还具有以下性质(读者可自行证明):

- (i) 正交矩阵 A 的行列式 $|A| = \pm 1$;
- (ii) 若 A 是正交矩阵, 则 A', A^{-1}, A^* 也是正交矩阵;
- (iii) 若 A, B 是 n 阶正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵.

定义 7 设 P 为正交矩阵, 则称线性变换 $Y = PX$ 为正交变换.

正交变换具有以下性质:

- (i) 正交变换保持向量的长度不变.

事实上, 设 $Y = PX$ 为正交变换, 则有

$$\|Y\| = \sqrt{Y'Y} = \sqrt{X'P'PX} = \sqrt{X'X} = \|X\|.$$

- (ii) 正交变换保持向量的内积不变.

事实上, 设 $\beta_1 = P\alpha_1, \beta_2 = P\alpha_2$, 其中 P 为正交矩阵, 则有

$$[\beta_1, \beta_2] = [P\alpha_1, P\alpha_2] = (P\alpha_1)'(P\alpha_2) = \alpha_1'P'P\alpha_2 = \alpha_1'\alpha_2 = [\alpha_1, \alpha_2].$$

例如, 平面直角坐标系的旋转变换

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

便是正交变换的一个实例.



§ 2 特征值与特征向量

这一节引入特征值和特征向量的概念, 主要是为了研究矩阵与对角矩阵相似问题, 也为用正交变换将一个二次型化为标准形提供方便. 另外, 特征值和特征向量在某些数学学科中也有重要应用.

定义 8 设 A 为 n 阶方阵, 如果存在数 λ 及非零向量 x , 使得

$$Ax = \lambda x, \quad (5)$$

则称数 λ 为方阵 A 的一个特征值, 非零向量 x 称为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.



下面我们根据定义 8, 探讨特征值与特征向量的计算方法.

(5) 式也可写为

$$(\lambda E - A)x = 0. \quad (6)$$

而齐次线性方程组(6) 有非零解的充要条件是其系数行列式

$$|\lambda E - A| = 0. \quad (7)$$

(7) 式的左端是 λ 的 n 次多项式, 称为方阵 A 的特征多项式; 而(7) 式是以 λ 为未知数的 n 次方程, 称为方阵 A 的特征方程. 显然, 方阵 A 的特征值就是特征方程的解. 由于一元 n 次方程在复数范围内恒有解, 其个数为 n (重根按重数计算), 因此 n 阶方阵一定有 n 个特征值.

设 $\lambda = \lambda_i$ 为其中一个特征值, 则由方程

$$(\lambda_i E - A)x = 0$$

可求得非零解 $x = p_i$, 那么 p_i 便是 A 的对应于特征值 λ_i 的特征向量.

可以看出, 一个特征值对应无穷多个特征向量, 事实上, 对应特征值 λ 的任何有限个特征向量 $p_1, p_2, \dots, p_t$ 的任一非零线性组合

$$k_1 p_1 + k_2 p_2 + \dots + k_t p_t \neq 0$$

也是特征值 λ 对应的特征向量. 但是, 一个特征向量只能对应一个特征值, 这是不难证明的.

综上所述, 求方阵 A 的特征值与特征向量的步骤如下:

(i) 求方阵 A 的特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的所有根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 它们就是 A 的全部特征值;

(ii) 对每一个特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 求出齐次线性方程组

$$(\lambda_i E - A)x = 0$$

的基础解系, 便是 A 的对应于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量, 而对应于 λ_i 的全部特征向量就是此基础解系的所有非零线性组合.

例 5 求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

的特征值和特征向量.

[解] 因为 A 的特征方程为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0,$$



所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$.

对 $\lambda_1 = 4$, 对应的齐次线性方程组为

$$(4E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

即

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

它的基础解系为

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

所以 A 对应于 $\lambda_1 = 4$ 的全部特征向量为 $k_1\mathbf{p}_1 (k_1 \neq 0)$.

对 $\lambda_2 = -2$, 对应的齐次线性方程组为

$$(-2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

即

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

它的基础解系为

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix},$$

所以 A 对应于 $\lambda_2 = -2$ 的全部特征向量为 $k_2\mathbf{p}_2 (k_2 \neq 0)$.

例 6 求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

的特征值和特征向量.

[解] 因为 A 的特征方程为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 & 1 \\ 7 & \lambda - 5 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)^2(\lambda - 4) = 0,$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4$.

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, 对应的齐次线性方程组为

$$(2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

即

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & -7 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$



它的基础解系为

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

所以 A 对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ 的全部特征向量为 $k_1 p_1 (k_1 \neq 0)$.

对 $\lambda_3 = 4$, 对应的齐次线性方程组为

$$(4E - A)x = 0,$$

即

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

它的基础解系为

$$p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

所以 A 对应于 $\lambda_3 = 4$ 的全部特征向量为 $k_2 p_2 (k_2 \neq 0)$.

例 7 求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

的特征值和特征向量.

[解] 因为 A 的特征方程为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1) = 0,$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$.

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 对应的齐次线性方程组为

$$(2E - A)x = 0,$$

即

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

它的基础解系为



$$p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

所以 A 对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 的全部特征向量为 $k_1 p_1 + k_2 p_2$ (k_1, k_2 不全为零).

对 $\lambda_3 = -1$, 对应的齐次线性方程组为

$$(-E - A)x = 0,$$

即

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0,$$

它的基础解系为

$$p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

所以 A 对应于 $\lambda_3 = -1$ 的全部特征向量为 $k_3 p_3$ ($k_3 \neq 0$).

例 8 设 A 为幂等矩阵(即满足 $A = A^2$), 证明: 它的特征值只能是 0 或 1.

[证] 设 λ 是 A 的任意特征值, p 是 A 对应于 λ 的特征向量, 则有

$$Ap = \lambda p.$$

等式两边同时左乘矩阵 A , 得

$$A^2 p = \lambda Ap.$$

注意到, $A = A^2$ 及 $Ap = \lambda p$, 有

$$\lambda p = \lambda^2 p,$$

即

$$(\lambda^2 - \lambda)p = 0.$$

因为特征向量 $p \neq 0$, 故

$$\lambda^2 - \lambda = 0,$$

所以 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$.

下面介绍有关特征值与特征向量的一些重要性质.

定理三 设 λ 为矩阵 A 的特征值, 则 $k\lambda, \lambda^2$ 分别为矩阵 kA, A^2 的特征值.

[证] 设 α 为矩阵 A 对应于特征值 λ 的特征向量, 则

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

于是

$$k(A\alpha) = k(\lambda\alpha), \quad A(A\alpha) = A(\lambda\alpha),$$



即 $(kA)\alpha = (k\lambda)\alpha$, $A^2\alpha = \lambda A\alpha = \lambda(\lambda\alpha) = \lambda^2\alpha$.

故 $k\lambda, \lambda^2$ 分别为矩阵 kA, A^2 的特征值, 且对应的特征向量都为 α .

更一般地, 有

定理四 设 λ 为矩阵 A 的特征值, $f(x)$ 为一多项式, 则 $f(\lambda)$ 为矩阵 $f(A)$ 的特征值.

定理五 设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的所有特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (重根按重数计算),

则有

$$(1) \lambda_1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn};$$

$$(2) \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = |A|.$$

例 9 设 3 阶方阵 A 的所有特征值为 $-1, 1, 2, B = A^3 - 3A + E$, 求 $|B|$.

[解] 由定理四得方阵 B 的所有特征值为

$$\lambda_1 = (-1)^3 - 3 \times (-1) + 1 = 3;$$

$$\lambda_2 = 1^3 - 3 \times 1 + 1 = -1;$$

$$\lambda_3 = 2^3 - 3 \times 2 + 1 = 3.$$

故由定理五, 得

$$|B| = 3 \times (-1) \times 3 = -9.$$

定理六 设 α, β 是矩阵 A 对应于两个不同特征值的特征向量, 则 α 与 β 线性无关.

[证] 设 α, β 分别是特征值 λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) 所对应的特征向量, 则

$$A\alpha = \lambda_1\alpha, \quad A\beta = \lambda_2\beta.$$

设有数 k_1, k_2 , 使

$$k_1\alpha + k_2\beta = 0. \quad (8)$$

等式两边同时左乘 A , 得

$$k_1(A\alpha) + k_2(A\beta) = 0,$$

即

$$k_1\lambda_1\alpha + k_2\lambda_2\beta = 0. \quad (9)$$

由 (9) - $\lambda_2 \times (8)$, 得

$$k_1(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha = 0.$$

因为 $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0, \alpha \neq 0$, 从而 $k_1 = 0$. 同理可得 $k_2 = 0$, 故 α, β 线性无关. 证毕.

仿此证法, 用数学归纳法可得到更一般的结论 (读者不妨自己证明).

定理七 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是矩阵 A 对应于不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 的特征向量, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关.

定理八 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 是矩阵 A 的不同特征值, 而 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik_i}$ 是 A 对应于



特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 的线性无关的特征向量, 则向量组 $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1k_1}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2k_2}, \dots, \alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \dots, \alpha_{rk_r}$ 也线性无关.

这几个定理说明, 将矩阵 A 的对应不同特征值的线性无关的特征向量合在一起, 仍然是线性无关的.



§ 3 相似矩阵

定义 9 设 A, B 都是 n 阶方阵, 如果存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 A 相似于 B , 或称 B 是 A 的相似矩阵, 记为 $A \sim B$; 可逆矩阵 P 称为相似变换矩阵.

定义中, 用 P^{-1} , P 分别左乘和右乘 A 的过程称为对 A 进行相似变换.

“相似”作为矩阵之间的一种关系, 满足

- (i) 反身性: $A \sim A$;
- (ii) 对称性: 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;
- (iii) 传递性: 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

请读者自己验证.

由于对角矩阵是矩阵中最简单的一种, 而且它的特征值就是其主对角线上的元素 (这很容易验证), 所以讨论相似矩阵时, 我们最关心的是一个矩阵是否与对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

相似.

定理九 相似矩阵有相同的特征多项式.

[证] 设 n 阶方阵 A 与 B 相似, 即存在可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$. 于是

$$\begin{aligned} |\lambda E - B| &= |\lambda E - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda E - A)P| \\ &= |P^{-1}| |\lambda E - A| |P| = |P^{-1}P| |\lambda E - A| \\ &= |\lambda E - A|. \end{aligned}$$

证毕.

由定理九也得到: 相似矩阵有相同的特征值. 所以如果方阵 A 与对角矩阵 Λ 相似, 那么其特征值就是对角矩阵 Λ 的主对角线上的元素.

任何矩阵是否都能与对角矩阵相似呢? 回答是否定的, 那么矩阵与对角矩阵相似的



充要条件是什么?

设 $A \sim \Lambda$, 即存在可逆矩阵 $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, 使

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

两端同时左乘 P , 得

$$AP = P\Lambda,$$

即

$$A(p_1, p_2, \dots, p_n) = (p_1, p_2, \dots, p_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

由分块矩阵的运算可得

$$(Ap_1, Ap_2, \dots, Ap_n) = (\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \dots, \lambda_n p_n),$$

于是有

$$Ap_i = \lambda_i p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

可见, λ_i 是 A 的特征值, 而 P 的列向量 p_i 就是 A 对应于特征值 λ_i 的特征向量 (线性无关).

反之, 如果 A 有 n 个对应于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的线性无关的特征向量, 即有

$$Ap_i = \lambda_i p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

令

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n),$$

则 P 可逆, 且上式两端同时左乘 A , 得

$$\begin{aligned} AP &= A(p_1, p_2, \dots, p_n) \\ &= (\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \dots, \lambda_n p_n) \\ &= (p_1, p_2, \dots, p_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= P\Lambda, \end{aligned}$$

从而

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

这表明 A 与 Λ 相似, 于是我们有

定理十 n 阶方阵 A 与对角矩阵相似的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.



根据上节定理七及本节定理十,有

推论 设 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值,则 A 必与对角矩阵相似.

定理十及其上面的推导过程也给出了构造相似变换矩阵 P 及对角矩阵 Λ 的方法,具体步骤为

(1) 求出 n 阶方阵 A 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$;

(2) 对每个 λ_i , 解齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)x = 0$, 求出方阵 A 的 n 个线性无关的特征向量 $p_1, p_2, \dots, p_n$;

(3) 取 $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$,

则 $P^{-1}AP = \Lambda$.

其中 p_i 与 λ_i 的排列顺序应保持一致.

我们回过头来看看上节例 5、例 6 和例 7 中所给出的矩阵与对角矩阵的相似问题.

在例 5 中,二阶方阵 A 有两个不同的特征值,它必与对角矩阵相似,且相似变换矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

显然

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & \\ & -2 \end{bmatrix}.$$

在例 6 中,三阶方阵 A 有重根,且只能找到两个线性无关的特征向量,所以 A 不可能与对角矩阵相似.

在例 7 中,三阶方阵 A 虽有重根,但能找到三个线性无关的特征向量,所以它必与对角矩阵相似,且相似变换矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

显然

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix}.$$



从上面的讨论可看到,一个 n 阶方阵 A 是否与对角矩阵相似,关键是 A 是否有 n 个线性无关的特征向量,那么一个 n 阶方阵 A 应具备什么条件才具有 n 个线性无关的特征向量? 如果 A 的特征值不相同,问题得到肯定的回答;如果 A 的特征值有重根,问题就变得复杂,我们对此不做一般性的讨论,但在下节我们将仅讨论实对称矩阵的情形.

最后,我们注意到,若 $A \sim B$,即存在可逆矩阵 P ,使 $A = PBP^{-1}$,则

$$A^m = (PBP^{-1})^m = PB^mP^{-1} \quad (m \text{ 为正整数}).$$

例 10 已知

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

求 A^{100} .

[解] 易于求得, A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$, 对应的特征向量分别为

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

令

$$P = (p_1, p_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

则

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

且

$$A = P \begin{bmatrix} 2 & \\ & 4 \end{bmatrix} P^{-1},$$

所以

$$\begin{aligned} A^{100} &= P \begin{bmatrix} 2 & \\ & 4 \end{bmatrix}^{100} P^{-1}, \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{100} & \\ & 4^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^{99} + 2 \cdot 4^{99} & 2^{99} - 2 \cdot 4^{99} \\ 2^{99} - 2 \cdot 4^{99} & 2^{99} + 2 \cdot 4^{99} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



例 11 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, 试问 A 能否对角化? 若能, 求相似变换矩阵 P

及对角矩阵 Λ , 使 $P^{-1}AP = \Lambda$.

[解] 因为 A 的特征方程为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6) = 0,$$

所以矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$.

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 解方程组 $(2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 得矩阵 A 对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 的线性无关的特征向量为

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

对 $\lambda_3 = 6$, 解方程组 $(6E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 得矩阵 A 对应 $\lambda_3 = 6$ 的线性无关的特征向量为

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

由于矩阵 A 有 3 个线性无关的特征向量, 故 A 可对角化.

$$\text{取 } P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{bmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 12 设三阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$, 对应的特征向量分别为

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

求方阵 A .

[解] 由于方阵 A 有 3 个不同的特征值, 故 A 可对角化.

$$\text{取 } P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$



且

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

故

$$\begin{aligned} A &= P \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



§4 实对称矩阵的相似矩阵

上节讨论了一般矩阵的对角化问题. 实对称矩阵是一类十分重要的矩阵, 本节专门讨论它与对角矩阵的相似问题, 为此先讨论实对称矩阵的两个重要性质.

性质 1 实对称矩阵的特征值都是实数.

[证] 设 A 是实对称矩阵 ($A' = A$), λ 是 A 的任一特征值, $\mathbf{x}$ 是 A 对应特征值 λ 的特征向量 (可能是复向量), 则

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}).$$

两端取共轭, 因为 $\bar{A} = A$, 得

$$A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}.$$

两端再取转置, 因为 $A' = A$, 得

$$\bar{\mathbf{x}}'A = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}'.$$

两端同时右乘 $\mathbf{x}$, 得

$$\lambda\bar{\mathbf{x}}'\mathbf{x} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}'\mathbf{x},$$

即

$$(\lambda - \bar{\lambda})\bar{\mathbf{x}}'\mathbf{x} = 0.$$



因为 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 所以 $\overline{\mathbf{x}}'\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \overline{x_i}x_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \neq 0$, 故 $\lambda - \overline{\lambda} = 0$, 即 $\lambda = \overline{\lambda}$, 这说明 λ 是实数. 证毕.

性质 2 设 A 是实对称矩阵, 则对应于 A 的不同特征值的特征向量必正交.

[证] 设 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 分别是 A 对应特征值 λ_1, λ_2 的特征向量 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), 即有

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1, \quad A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2.$$

于是

$$\begin{aligned}\lambda_1\mathbf{p}_1'\mathbf{p}_2 &= (\lambda_1\mathbf{p}_1')\mathbf{p}_2 = (A\mathbf{p}_1)'\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1'A'\mathbf{p}_2 \\ &= \mathbf{p}_1'(A\mathbf{p}_2) = \mathbf{p}_1'(\lambda_2\mathbf{p}_2) = \lambda_2\mathbf{p}_1'\mathbf{p}_2,\end{aligned}$$

即

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{p}_1'\mathbf{p}_2 = 0.$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 故

$$\mathbf{p}_1'\mathbf{p}_2 = 0,$$

即 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 正交. 证毕.

定理十一 设 λ 是实对称矩阵 A 的 k 重特征值, 那么 A 对应于 λ 的所有特征向量中, 其最大线性无关组所包含的向量个数恰为 k .

定理十一说明, 若 λ 是实对称矩阵 A 的 k 重特征值, 那么齐次线性方程组

$$(\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

的基础解系所含向量的个数恰为 k , 所以实对称矩阵的 k 重特征值必对应于 k 个线性无关的特征向量. 再由定理八知, n 阶实对称矩阵必有 n 个线性无关的特征向量, 从而有

推论 实对称矩阵必与对角矩阵相似.

如果把 A 对应于特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 的 k_i 个特征向量

$$\mathbf{p}_{i1}, \mathbf{p}_{i2}, \dots, \mathbf{p}_{ik_i}$$

正交规范化, 得到

$$\mathbf{e}_{i1}, \mathbf{e}_{i2}, \dots, \mathbf{e}_{ik_i},$$

它们依然是 A 对应于 λ_i 的两两正交的单位特征向量. 把所有这些向量合在一起就得到 A 的 n 个两两正交的单位特征向量, 用它们作为矩阵的列向量就构造出了一个正交矩阵 P , 显然 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵, 且该对角矩阵的主对角线上的元素是 A 的全部特征值 (重根按重数计算). 从而有

定理十二 对任何实对称矩阵 A , 必存在正交矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

定理十二及其上面说明不仅揭示了实对称矩阵一定能对角化, 而且告诉了用于对角化的正交矩阵 P 的构造方法. 求正交矩阵 P 的具体步骤为:

(i) 求出 n 阶实对称矩阵 A 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$;



(ii) 对每个 λ_i 解齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)x = 0$, 求出 A 的 n 个线性无关的特征向量

$p_1, p_2, \dots, p_n$;

(iii) 将 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 正交规范化得 $e_1, e_2, \dots, e_n$;

(iv) 写出正交矩阵 $P = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

例 13 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix},$$

求正交矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

[解] 先求 A 的特征值与特征向量, 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10) = 0,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$.

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 对应的齐次线性方程组为

$$(E - A)x = 0.$$

即

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

其基础解系为

$$p_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

对 $\lambda_3 = 10$, 对应的齐次线性方程组为

$$(10E - A)x = 0,$$

即

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

其基础解系为



$$p_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

再将 p_1, p_2, p_3 正交规范化. 先将 p_1, p_2 正交化, 得

$$\beta_1 = p_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\beta_2 = p_2 - \frac{[\beta_1, p_2]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

再将 β_1, β_2 单位化, 得

$$e_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

将 p_3 单位化, 得

$$e_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

于是所求正交矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

且



$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{bmatrix}.$$

例 14 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1, 1, -1$, 且 A 对应特征值 -1 的特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, 求矩阵 A .

[解] 设 A 对应特征值 1 的特征向量为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, 则由实对称矩阵性质 2 得

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

解之得 A 对应特征值 1 的线性无关的特征向量为

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{取 } P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则}$$

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

$$\text{故 } A = P\Lambda P^{-1}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

由于正交矩阵 P 满足 $P^{-1} = P'$, 所以 $P^{-1}AP = P'AP$. 一般地, 我们有

定义 10 设 A, B 都为 n 阶方阵, 如果存在可逆矩阵 P , 使

$$P'AP = B,$$

则称 A 与 B 相合(或合同).

“相合”作为矩阵之间的一种关系, 也满足反身性、对称性和传递性.

根据定理十二及正交矩阵的性质知, 实对称矩阵必定与对角矩阵相合. 可以证明, 对角矩阵必与形如

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

的对角矩阵相合, 所以有

推论 任一实对称矩阵必与某 A_0 型的对角矩阵相合(其中 1 与 -1 的个数分别是 A 的特征值中正特征值的个数与负特征值的个数).



§5 二次型及其标准形

在解析几何中, 可将二次曲线和二次曲面的方程化为只含平方项的标准形, 以便于识别其类型和研究其性质.

例如, 对二次曲线方程

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1,$$



我们可以通过选择适当的坐标旋转变换

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta. \end{cases}$$

把方程化为标准形

$$mx'^2 + ny'^2 = 1.$$

这就使我们容易识别曲线的类型,研究曲线的性质.

定义 11 n 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ &\quad + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为(n 元)二次型,把它改写成

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ &\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ &\quad + \dots \\ &\quad + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j, \end{aligned}$$

其中 $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$.

若令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

则二次型 f 可用矩阵表示为

$$f = \mathbf{x}' A \mathbf{x},$$

其中 A 为实对称矩阵,我们称此实对称矩阵 A 为二次型 f 的矩阵;称 f 为实对称矩阵 A 的二次型;称实对称矩阵 A 的秩为二次型 f 的秩.

显然,二次型与实对称矩阵之间存在一一对应的关系.

例如,二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2x_3 + 3x_3^2$$

的矩阵表达式为



$$f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}' \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \text{ 其中 } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

我们把只含平方项的二次型称为标准形. 显然, 标准形与对角矩阵存在一一对应关系.

若 a_{ij} 为复数, 称 f 为复二次型; 若 a_{ij} 为实数, 则称 f 为实二次型. 显然, 实二次型的矩阵是实对称矩阵. 下面仅讨论实二次型的情形.

如果 P 是可逆矩阵, $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 是 n 维向量, 我们称 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ 为可逆变换.

设二次型 $f = \mathbf{x}'A\mathbf{x}$, 有一个可逆变换 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, 把 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ 代入 f 中, 则有

$$f = \mathbf{x}'A\mathbf{x} = (P\mathbf{y})'A(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}'(P'AP)\mathbf{y}.$$

因为

$$(P'AP)' = P'A'P = P'AP,$$

所以 $P'AP$ 仍是实对称矩阵, 由于 P 可逆, 故 P' 也可逆, 从而 $P'AP$ 与 A 的秩相等, 即

$$R(P'AP) = R(A).$$

由此可见, 讨论二次型 $f = \mathbf{x}'A\mathbf{x}$ 经可逆变换 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ 化为标准形的问题, 实际上转化为寻找可逆矩阵 P , 使 $P'AP$ 为对角矩阵的问题.

由定理十二知, 对任一实对称矩阵 A , 总存在正交矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵, 又因 P 为正交矩阵 ($P' = P^{-1}$), 故 $P'AP$ 为对角矩阵, 且该对角矩阵的主对角线上的元素就是 A 的特征值, 从而有下面的定理.

定理十三 设二次型 $f = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$), 则存在正交变换 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, 使 f 化为标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 f 的矩阵 $A = (a_{ij})$ 的特征值.

例 15 试确定一个正交变换 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, 将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2$$

化为标准形.

[解] 二次型 f 的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix},$$



根据上节例 13 的结果, A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$, 对应的特征向量为

$$p_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

将 p_1, p_2, p_3 正交规范化, 得

$$e_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{3}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

令

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

则 $x = Py$ 为所求正交变换, 它将二次型 f 化为

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2.$$

利用正交变换是将二次型 f 化为标准型的一种方法, 它具有保持向量长度不变和几何形状不变的优点. 而化二次型为标准形还有其它方法, 下面通过实例再介绍一种把二次型化为标准形的方法, 即拉格朗日 (Lagrange) 配方法.

例 16 用配方法将例 15 中所给出的二次型化为标准形, 并求所用的变换矩阵.

[解] 由于 f 中含变量 x_1 的平方项, 故将含 x_1 的项归并起来配方得

$$\begin{aligned} f &= 2(x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3) + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 - 2x_2^2 + 4x_2x_3 - 2x_3^2 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2, \end{aligned}$$

这样, 右端除第一项外已不再含 x_1 ; 再将含 x_2 的项归并起来继续配方, 得

$$\begin{aligned} f &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2^2 - \frac{4}{3}x_2x_3\right) + 3x_3^2 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2. \end{aligned}$$



$$\text{令} \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = x_2 - \frac{2}{3}x_3, \\ y_3 = x_3. \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{1}{3}y_3, \\ x_2 = y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

取

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (|P| = 1 \neq 0),$$

于是通过线性变换 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, 将 f 化为标准形

$$f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2.$$

注意到, 由于 P 可逆, 故所用的线性变换是可逆变换, 但其显然不是正交变换.如果二次型 f 中不含任一变量的平方项, 只含两个变量的乘积项, 则可按下面例 17 所示方法进行配方.**例 17** 化二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为标准形, 并求所用的变换矩阵.**[解]** 在 f 中不含任一变量的平方项, 由于含有 x_1x_2 , 故令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

取

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (|B| = -2 \neq 0).$$

则可逆变换 $\mathbf{x} = B\mathbf{y}$ 将二次型 f 化为

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3,$$

上式配方, 得

$$f = 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2,$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3, \\ z_2 = y_2 - 2y_3, \\ z_3 = y_3. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} y_1 = z_1 + z_3, \\ y_2 = z_2 + 2z_3, \\ y_3 = z_3. \end{cases}$$



取

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (|C| = 1 \neq 0),$$

于是可逆变换 $y = Cz$, 将二次型 f 化为

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2.$$

显然, 将二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 化为标准形

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$$

所施行的线性变换为

$$x = By = BCz.$$

故所用的变换矩阵为

$$P = BC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

因为 $|P| = |BC| = -2 \neq 0$, 所以所用的线性变换是可逆变换.

通过可逆变换 $x = Py$, 将二次型 $f = x'Ax$ 化为标准形 $f = y'\Lambda y$ (Λ 为对角矩阵), 由于 $R(A) = R(\Lambda)$, 所以标准形中的项数等于矩阵 A 的秩, 即二次型的秩确定了它的标准形中的项数.



§6 正定二次型

从上节例 15 和例 16 知, 二次型 f 的标准形不是唯一的, 它随着所用的可逆变换不同而相异, 但这些标准形中所含的项数是相等的, 都等于二次型的秩. 不仅如此, 在限定可逆变换为实变换时, 二次型 f 的标准形中正平方项的个数 (称为 f 的正惯性指数) 是不变的, 从而负平方项的个数 (称为负惯性指数) 也是不变的, 而且二次型 f 的正惯性指数与负惯性指数之和等于 f 的秩.

上述用定理的形式来表示, 即

定理十四 设实二次型 $f = x'Ax$ 的秩为 r , 且有两个实可逆变换

$$x = Py \quad \text{及} \quad x = Cz.$$

使

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 \quad (\lambda_i \neq 0);$$

$$f = k_1 z_1^2 + k_2 z_2^2 + \cdots + k_r z_r^2 \quad (k_i \neq 0);$$

则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 中正数的个数与 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 中正数的个数相等.



这个定理称为惯性定理,证略.

定理十四说明,实二次型 f 对应的实对称矩阵 A 与对角矩阵相合,其中该对角矩阵的主对角线上的正元素的个数等于 f 的正惯性指数,负元素的个数等于 f 的负惯性指数,从而进一步有 A 与如下对角矩阵

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

相合,其中 ± 1 的总个数等于 A 的秩, 1 的个数为 f 的正惯性指数, -1 的个数为 f 的负惯性指数.

定义 12 设有 n 元实二次型 $f = \mathbf{x}'A\mathbf{x}$,如果对任何非零向量

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

都有

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}'A\mathbf{x} > 0 \text{ (或 } < 0 \text{)},$$

则称 f 为正定二次型(或负定二次型),正定二次型的矩阵称为正定矩阵,负定二次型的矩阵称为负定矩阵.在实二次型中,正定二次型占有特殊地位,它具有广泛的应用,下面重点讨论正定二次型的判别条件.

定理十五 n 元实二次型 $f = \mathbf{x}'A\mathbf{x}$ 为正定的充要条件是它的正惯性指数为 n .

[证] 设可逆变换 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$,使

$$f = \mathbf{x}'A\mathbf{x} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

先证充分性.

已知 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, P 为可逆矩阵,故对任意给定的 n 维列向量 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,有 $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,于是



$$f = \mathbf{x}'A\mathbf{x} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 > 0.$$

再证必要性,用反证法.

假设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 中有不大于零的数,不妨设 $\lambda_i \leq 0$. 取 $\mathbf{y}_0$ 为第 i 个分量为 1 的单位向量,那么对应于 $\mathbf{y}_0$,由可逆变换 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ 得到

$$\mathbf{x}_0 = P\mathbf{y}_0,$$

可知 $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$,故得

$$f = \mathbf{x}_0' A \mathbf{x}_0 = \lambda_i \leq 0,$$

这与 f 为正定二次型矛盾,即 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$,所以 f 的正惯性指数为 n .

定理十五说明,实二次型是正定的充要条件是它对应的实对称矩阵与对角矩阵相合,而且该对角矩阵的主对角线上的元素全为正数.

推论 1 实二次型 $f = \mathbf{x}'A\mathbf{x}$ 为正定的充要条件是 A 的所有特征值均为正数.

推论 2 实对称矩阵 A 正定的充要条件是存在可逆矩阵 P ,使 $P'AP = E$.

推论 2 说明,正定的实对称矩阵与单位矩阵相合.

下面再介绍一种判别正定二次型的方法,用这种方法判别二次型的正定性比较方便.

定理十六 实二次型 $f = \mathbf{x}'A\mathbf{x}$ 为正定的充要条件是 A 的各阶顺序主子式都大于零. 即

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

此定理称为霍尔维茨(Hurwitz)定理,证略.

由定理十六,显然正定矩阵 A 满足 $|A| > 0$.

显然,若二次型 f 为正定的,则 $-f$ 是负定的;反之,若 f 是负定的,则 $-f$ 是正定的. 所以,从判别正定二次型的充要条件可知,判别负定二次型有以下四个等价命题:

- (i) n 元实二次型 $f = \mathbf{x}'A\mathbf{x} < 0 (\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$;
- (ii) 二次型 f 的负惯性指数等于 n ;
- (iii) 二次型 f 的矩阵 A 的所有特征值均小于零;
- (iv) 二次型 f 的矩阵 A 的奇数阶顺序主子式为负,而偶数阶顺序主子式为正,即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1r} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

**例 18** 判别二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

是否正定.

[解] 二次型 f 的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$|3| = 3 > 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad |A| = 28 > 0,$$

所以 f 是正定的.

例 19 t 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4tx_2x_3 + 5x_3^2$$

是正定的.

[解] 二次型 f 的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2t \\ -1 & 2t & 5 \end{bmatrix},$$

由 f 的正定性, A 的各阶顺序主子式应满足:

$$|1| = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2t \\ -1 & 2t & 5 \end{vmatrix} = -(4t^2 + 4t - 3) > 0,$$

则

$$-\frac{3}{2} < t < \frac{1}{2},$$

故当 $-\frac{3}{2} < t < \frac{1}{2}$ 时, f 是正定的.

设 $f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ 为二元正定二次型, 则方程 $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = c (c > 0)$ 可通过正交变换 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ 化为 $my_1^2 + ny_2^2 = c (m > 0, n > 0)$, 这表明方程 $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = c$ 的图形是以原点为中心的椭圆, 这个椭圆当 $c \rightarrow 0$ 时收缩到原点.



习题五

1. 设

$$\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

试求它们的长度、内积和夹角.

2. 在 $\mathbf{R}^4$ 中求一单位向量,使之与向量

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

都正交.

3. 已知

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & a \\ b & c & d \\ e & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

是正交矩阵,求 a, b, c, d, e .

4. 将 $\mathbf{R}^3$ 的一个基

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

化为正交规范基.

5. 求由下列向量生成的 $\mathbf{R}^4$ 的子空间的正交基.

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}.$$



(提示:先求出最大无关组)

6. 设 $\mathbf{x}$ 为 n 维向量, 且 $\mathbf{x}'\mathbf{x} = 1$, 证明: $H = E - 2\mathbf{x}\mathbf{x}'$ 是对称的正交矩阵.

7. 设 A, B 都是 n 阶正交矩阵, 证明:

(1) $|A| = \pm 1$;

(2) A', A^{-1}, A^*, AB 也是正交矩阵.

8. 求下列方阵的特征值与特征向量.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix};$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix};$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. 证明: (1) n 阶对合矩阵 A (即满足 $A^2 = E$) 的特征值只能为 1 或 -1 ;

(2) 设 A 是 n 阶方阵, 则零是 A 的特征值的充要条件是 $|A| = 0$;

(3) 若 $\lambda (\lambda \neq 0)$ 是 A 的特征值, 则 $\frac{1}{\lambda}, \frac{|A|}{\lambda}$ 分别是 A^{-1}, A^* 的特征值;

(4) 设 λ_1, λ_2 是 A 的两个互异的特征值, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 是 A 分别对应于 λ_1, λ_2 的特征向量, 则 $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 不是 A 的特征向量.

10. 已知 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 1, $-3, -3$, 与特征值 1 对应的特征向量为 $\mathbf{p}_1 = (1, -1, 1)'$, 求特征值 -3 对应的特征向量及矩阵 A .

11. 将矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

对角化, 并求 A^{2000} .

12. 求正交矩阵 P , 使下列实对称矩阵对角化.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

13. 证明: 若 $A \sim B, C \sim D$, 则



$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & C \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B & O \\ O & D \end{bmatrix}.$$

14. 求正交变换 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, 使下列二次型标准化.

(1) $f = 5x_1^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$;

(2) $f = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

15. 用配方法将下列二次型化为标准形, 并指出所用的可逆变换.

(1) $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$;

(2) $f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

16. 证明: (1) 若 A, B 是同阶正定矩阵, 则 $A + B$ 也是正定矩阵;

(2) 若 A 是正定矩阵, 则 A^{-1}, A^* 也是正定矩阵;

(3) 二次型 $f = \mathbf{x}'A\mathbf{x}$ 在 $\|\mathbf{x}\| = 1$ 时的最大值为方阵 A 的最大特征值.

17. 判别下列二次型的正定性.

(1) $f = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(2) $f = x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2$.

18. t 取何值时, 实二次型

$$f = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3$$

是正定的.

第六章



线性空间与线性变换



线性空间与线性变换是线性代数中最基本的概念. 在第二章中, 我们把有序数组叫作向量, 并介绍过向量空间的概念, 在这一章中, 我们要把这些概念推广, 使向量及向量空间的概念更具一般性, 因而这章内容更抽象, 其结果则有更广泛的应用.



§ 1 线性空间及其子空间

1. 线性空间

在第二章中, 我们知道 n 维向量可定义加法和数乘两种运算, 且服从八条运算规律. 我们自然会问是否只有 $\mathbf{R}^n$ 中向量才可定义加法和数乘两种运算, 而且满足相应的八条运算规律? 请看以下几个例子.

例 1 设集合 P_3 为不高于二次的实系数多项式的全体多项式 (非零常数可以称作零次多项式, 零叫作零多项式), 它们的运算按通常多项式的加法与多项式乘以实数的乘法来定义, 任意两个这种多项式 $a_1x^2 + b_1x + c_1, a_2x^2 + b_2x + c_2$ 的和, 以及这种多项式与实数的乘积仍为不高于二次的实系数多项式, 而且这两种运算满足这八条运算规律.

例 2 在所有实 $n \times m$ 矩阵集合 $\mathbf{R}^{n \times m}$ 中, 按照通常矩阵加法与数乘运算构成可得:

若 $A, B \in \mathbf{R}^{n \times m}$, 则 $A + B \in \mathbf{R}^{n \times m}$; $kA \in \mathbf{R}^{n \times m}$, 其中 $k \in \mathbf{R}$ 且易验证这两种运算满足这八条运算规律.

例 3 设在 $[a, b]$ 上全体连续函数组成的集合记为 $C[a, b]$, 按照函数通常的加法和



实数与函数乘法,有

若 $f, g \in C[a, b]$, 则 $f + g \in C[a, b]$; $kf \in C[a, b]$, 其中 $k \in \mathbf{R}$.

易验证这两种运算满足这八条运算规律.

在此还可以举出许多例子,而且这些例子都有一个共性,即集合有加法和数乘两种运算,而且满足相同的八条运算规律.我们抓住其共性,把研究范围扩大,使讨论结果适用于多种不同对象的集合,便引入了线性空间的概念.

定义 1 设 V 是一个非空集合, $\mathbf{R}$ 是实数域,在 V 中定义两种运算:

(1) 加法. 对任意两个元素 $\alpha, \beta \in V$, 总存在唯一的一个元素 $\gamma \in V$ 与之对应,称为 α 与 β 的和,记为 $\gamma = \alpha + \beta$,并满足四条运算规律:

$$(i) \alpha + \beta = \beta + \alpha;$$

$$(ii) (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$$

$$(iii) V \text{ 中存在零元素 } 0, \text{ 对任一 } \alpha \in V, \text{ 都有 } \alpha + 0 = \alpha;$$

$$(iv) \text{ 对任一 } \alpha \in V, \text{ 存在元素 } \beta \in V, \text{ 使得 } \alpha + \beta = 0, \text{ 称 } \beta \text{ 为 } \alpha \text{ 的负元素, 记为 } \beta = -\alpha.$$

(2) 数量乘法(简称数乘). 对任意元素 $\alpha \in V$ 及任意实数 $\lambda \in \mathbf{R}$, 总存在唯一的元素 $\delta \in V$ 与之对应,称为 λ 与 α 的积,记为 $\delta = \lambda\alpha$ (或 $\alpha\lambda$),并满足四条运算规律:

$$(v) 1\alpha = \alpha;$$

$$(vi) \lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha;$$

$$(vii) (\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha;$$

$$(viii) \lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta.$$

则称集合 V 为 $\mathbf{R}$ (实数域) 上的线性空间(或向量空间),简称为线性空间(或向量空间). V 中的元素不论其本来的性质如何,统称为(实)向量.

简言之,凡满足八条运算规律的加法及数乘运算,就称为线性运算;凡定义了线性运算的集合,就称为线性空间(或向量空间).

在第二章中,我们把有序数组称为向量,并对它定义了加法和数乘运算,指出了运算满足上述八条运算规律,最后把对于运算为封闭的有序数组的集合称为向量空间.显然,那些只是现在定义的特殊情形.比较起来,现在的定义有了很大的推广.

(1) 向量不一定是有序数组;

(2) 线性空间中的加法和数乘运算只要求满足八条运算规律,当然也就不一定是有序数组的加法及数乘运算.

前面讲的三个例子,在规定相应的加法与数乘运之后都是线性空间.

下面再举两个线性空间的例子.



例4 设集合 L_n 为含有 n 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的一次型

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

的全体, 这里 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是实数, 即

$$L_n = \{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \mid x_i \text{ 是变量}, a_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

两个一次型的和与一次型乘以实数的乘积

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) + (b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n)$$

$$= (a_1 + b_1)x_1 + (a_2 + b_2)x_2 + \dots + (a_n + b_n)x_n,$$

$$\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) = (\lambda a_1)x_1 + (\lambda a_2)x_2 + \dots + (\lambda a_n)x_n$$

仍为一次型, 可以验证, L_n 的元素对于这两种运算满足上述八种运算规律, 即 L_n 构成线性空间.

例5 设 $\mathbf{R}^+$ 表示所有正实数构成的集合, 任取 $a, b \in \mathbf{R}^+, \lambda \in \mathbf{R}$, 定义: $a \oplus b = ab$, $\lambda \circ a = a^\lambda$, 证明: $\mathbf{R}^+$ 为 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

[证] 任取 $a, b, c \in \mathbf{R}^+, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$, 则有

$$(1) a \oplus b = ab = ba = b \oplus a;$$

$$(2) (a \oplus b) \oplus c = (ab) \oplus c = (ab)c = a(bc) = a \oplus (bc) = a \oplus (b \oplus c);$$

$$(3) \text{零元素为 } 1, \text{ 且 } a \oplus 1 = a \times 1 = a;$$

$$(4) a \text{ 的负元素为 } \frac{1}{a}, \text{ 且 } a \oplus \frac{1}{a} = a \times \frac{1}{a} = 1;$$

$$(5) 1 \circ a = a^1 = a;$$

$$(6) \lambda \circ (\mu \circ a) = \lambda \circ a^\mu = (a^\mu)^\lambda = a^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \circ a;$$

$$(7) (\lambda + \mu) \circ a = a^{\lambda+\mu} = a^\lambda a^\mu = a^\lambda \oplus a^\mu = \lambda \circ a \oplus \mu \circ a;$$

$$(8) \lambda \circ (a \oplus b) = \lambda \circ (ab) = (ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda = a^\lambda \oplus b^\lambda = \lambda \circ a \oplus \lambda \circ b.$$

所以 $\mathbf{R}^+$ 为 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

$$\text{在上述线性空间中, } \frac{1}{4} \circ (2 \oplus 8) = \frac{1}{4} \circ 16 = 16^{\frac{1}{4}} = 2.$$

下面举一个不是线性空间的例子. 例如, n 次多项式全体

$$Q[x]_n = \{P(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0 \mid a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbf{R} \text{ 且 } a_n \neq 0\}$$

对于通常的多项式加法和数乘运算不构成线性空间. 这是因为 $0P(x) = 0x^n + \dots + 0x + 0 \notin Q[x]_n$, 即 $Q[x]_n$ 对运算不封闭.

下面讨论线性空间的性质.

我们知道在 $\mathbf{R}^n$ 中存在唯一的零向量, 对于任何向量 α 的负向量也是唯一的. 在一般



的线性空间 V 中, 同样具有这些性质.

(1) 零元素是唯一的.

[证] 设 $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ 是线性空间 V 中两个零元素, 因为 $\mathbf{0}_1$ 是零元素, 故有

$$\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2.$$

又因 $\mathbf{0}_2$ 也是零元素, 故有

$$\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1,$$

所以

$$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2.$$

(2) 任一元素的负元素是唯一的.

[证] 设元素 α 有两个负元素 β, γ , 即 $\alpha + \beta = \mathbf{0}, \alpha + \gamma = \mathbf{0}$, 于是

$$\beta = \beta + \mathbf{0} = \beta + (\alpha + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma = \mathbf{0} + \gamma = \gamma.$$

(3) $0\alpha = \mathbf{0}, k\mathbf{0} = \mathbf{0}, (-1)\alpha = -\alpha$.

这条性质请读者自己证明.

(4) 如果 $\lambda\alpha = \mathbf{0}$, 则 $\lambda = 0$ 或 $\alpha = \mathbf{0}$.

[证] 若 $\lambda \neq 0$, 在 $\lambda\alpha = \mathbf{0}$ 两边同乘以 $\frac{1}{\lambda}$, 得

$$\frac{1}{\lambda}(\lambda\alpha) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

而

$$\frac{1}{\lambda}(\lambda\alpha) = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)\alpha = 1\alpha = \alpha,$$

所以

$$\alpha = \mathbf{0}.$$

2. 子空间

定义 2 设 V 是一个线性空间, W 是 V 的一个非空子集, 如果 W 对于 V 中所定义的加法和数乘两种运算仍构成一个线性空间, 则称 W 为 V 的子空间.

V 的一个非空子集要满足什么条件才构成子空间? 对此我们有下述定理.

定理一 设 V 为线性空间, W 是 V 的非空子集, 则 W 为 V 的子空间的充要条件是 W 对于 V 中的两种运算都是封闭的.

也就是说:

(1) 若 $\alpha, \beta \in W$, 则 $\alpha + \beta \in W$;

(2) 若 $\alpha \in W, \lambda \in \mathbf{R}$, 则 $\lambda\alpha \in W$.

[证] 必要性是显然的, 现在证充分性. 因为 W 是 V 的子集, 所以对于原有的两种运



算, W 中的向量显然满足加法性质的前两条及数乘性质的四条. 于是只需证明 W 中零元素以及任一元素 α 的负元素 $-\alpha$ 一定存在, 这只要在定理的条件(2) 中分别令 $\lambda = 0$ 及 $\lambda = -1$ 即可, 因此定理成立. 证毕.

有了这样一条定理, 判断 V 中一个非空子集 W 是否构成子空间就只要验证 W 对于 V 的加法与数乘运算是否封闭就可以了.

显然, 在线性空间中, 由单个零向量构成的子集是一子空间, 叫作零子空间. 线性空间 V 本身也是 V 的一个子空间.

例 6 在所有 2×3 矩阵组成的线性空间 $\mathbf{R}^{2 \times 3}$ 中, 下述子集

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}$$

对于矩阵加法与数乘运算是封闭的, 故 W_1 是 $\mathbf{R}^{2 \times 3}$ 中的一子空间.

但 $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ 且 } a + b = 1 \right\}$ 就不是 $\mathbf{R}^{2 \times 3}$ 的子空间. 请读者自己

验证.



§ 2 维数、基与坐标

在第二章中, 对于向量空间 V 我们引进了基与维数的概念, 由此可把任一向量通过基来表示, 从而给出了向量空间 V 的构造. 对于一般的线性空间同样也存在这些问题, 即它的结构是怎样的?

在第二章讨论基与维数之前介绍了 n 维有序数组 (n 维向量) 的线性组合、线性相关与线性无关等概念, 这些概念以及有关性质只涉及线性运算, 因此对于一般线性空间的向量仍然适用, 以后我们将直接引用这些概念和性质. 第二章提出的基与维数的概念, 这当然也适用于一般的线性空间, 这是线性空间的主要特性, 特叙述如下:

定义 3 在线性空间 V 中, 如果存在 n 个线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 且 V 中任一向量均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 那么称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是线性空间 V 的一组基, n 称为线性空间 V 的维数.

维数为 n 的线性空间称为 n 维线性空间, 记作 V_n .

若知 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V_n 的一组基, 则 V_n 的任一向量均可由其来线性表示, 即 V_n 可表示为

$$V_n = \{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}.$$



这就较清楚地显示了线性空间 V_n 的构造.

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 V_n 的一组基, 则对任何 $\alpha \in V_n$, 都有一组有序数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 使

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n,$$

并且这组数是唯一的. 事实上, 若另有一组数 $y_1, y_2, \dots, y_n$, 使

$$\alpha = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \dots + y_n\alpha_n,$$

则 $(x_1 - y_1)\alpha_1 + (x_2 - y_2)\alpha_2 + \dots + (x_n - y_n)\alpha_n = \mathbf{0}$.

因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 故 $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$.

反之, 任给一组有序数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 总有唯一的元素

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n \in V_n.$$

这样, V_n 的元素 α 与有序数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 之间存在着一种一一对应的关系, 于是我们有

定义 4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是线性空间 V_n 的一组基, 对于任一元素 $\alpha \in V_n$, 总有唯一确定的一组有序数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 使

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n,$$

则称有序数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为向量 α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 这个基下的坐标, 并记作

$$(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

例 7 不高于二次的实系数多项式全体与零多项式构成一个三维线性空间, $\alpha_1 = x^2$, $\alpha_2 = x$, $\alpha_3 = 1$ 就是它的一组基, 而任一不高于二次的多项式

$$\alpha = ax^2 + bx + c$$

都可表示为 $\alpha = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3$, 因此 α 在这个基下的坐标为 (a, b, c) .

例 8 复数 $a + bi$ 的全体 $(a, b \in \mathbf{R})$ 构成一个二维的线性空间, $\alpha_1 = [1]$, $\alpha_2 = [i]$ 可以作为该空间的一组基, 而任一复数 $a + bi$ 在 α_1, α_2 下的坐标为 (a, b) .

建立坐标后, 就把抽象的向量 α 与具体的有序数组向量 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 联系在一起, 并且还可把 V_n 中抽象的线性运算与数组向量的线性运算联系起来.

设 $\alpha, \beta \in V_n$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V_n 的一组基, 从而有

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n, \quad \beta = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \dots + y_n\alpha_n.$$

于是

$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1)\alpha_1 + (x_2 + y_2)\alpha_2 + \dots + (x_n + y_n)\alpha_n,$$

$$\lambda\alpha = (\lambda x_1)\alpha_1 + (\lambda x_2)\alpha_2 + \dots + (\lambda x_n)\alpha_n.$$

即 $\alpha + \beta$ 的坐标是

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n),$$



$\lambda \alpha$ 的坐标是

$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n) = \lambda (x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

总之,设在 n 维线性空间 V_n 中取定一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 则 V_n 中的向量 α 与向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中的向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 之间就有一个一一对应的关系, 且这个对应关系具有如下性质:

设 $\alpha \leftrightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n), \beta \leftrightarrow (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 则

$$(1) \alpha + \beta \leftrightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n);$$

$$(2) \lambda \alpha \leftrightarrow \lambda (x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

这样, 就可以用具体的有序数组来处理抽象的向量问题.

定义 5 设 V 与 V' 是两个线性空间, 如果存在 V 到 V' 的一个一一对应的映射 f , 且满足以下条件:

$$(1) f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta);$$

$$(2) f(\lambda \alpha) = \lambda f(\alpha).$$

其中 α, β 是 V 中任意向量, λ 是实数, 则称 V 与 V' 同构, f 称为同构映射.

从前面的讨论及定义 5 知, 任何一个 n 维线性空间都与 $\mathbf{R}^n$ 同构. 从线性代数角度来看, 同构的线性空间不管其具体元素如何, 也不管其线性运算如何规定, 都可以看作是相同的, 而不加区别.

根据定义容易证明从 V 到 V' 的同构映射 f 有如下性质:

$$(i) f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, f(-\alpha) = -f(\alpha);$$

(ii) V 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关当且仅当 V' 中向量组 $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \cdots, f(\alpha_n)$ 线性相关.

由此有下述定理.

定理二 两个线性空间 V, V' 同构的充要条件是它们的维数相同.

[证] 若 V, V' 同构, 由性质(ii) 可知它们一定有相同维数. 反之, 若它们有相同维数 n , 令 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 V 的一组基, $\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots, \alpha'_n$ 为 V' 的一组基, 定义 V 到 V' 的映射 f 为

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \alpha'_i,$$

则易证 f 是 V 到 V' 的一个同构映射, 从而 V 与 V' 同构.

证毕.

根据上述定理可知线性空间的结构完全被它的维数所确定.





[证] 因

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\alpha = x_1'\alpha_1' + x_2'\alpha_2' + \cdots + x_n'\alpha_n' = (\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n') \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}. \quad (6)$$

将式(2)代入式(6)中,便有

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) C \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}. \quad (7)$$

比较式(5)与式(7),且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关,故有关系式(4).

证毕.

这个定理的逆命题也成立,即若任一向量在两组基下的坐标满足坐标变换公式(4),则这两组基满足基变换公式(2).

例9 设 $\mathbf{R}^3$ 中向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(1, -2, 3)$,另一组基为

$$\begin{cases} \alpha_1' = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ \alpha_2' = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \\ \alpha_3' = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3. \end{cases}$$

求 α 在基 $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$ 下的坐标.

[解] 因为过渡矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

其逆矩阵



$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

故

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} &= C^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

即 α 在基 $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$ 下的坐标为 $(-2, 1, 2)$.



§4 线性变换

定义 6 设有两个非空集合 A, B , 如果对于 A 中任一元素 α 按照一定的规则, 总有 B 中一个确定的元素 β 和它对应, 那么这个对应规则称为从集合 A 到集合 B 的变换 (或映射). 我们常用外文字母表示一个变换, 比如把上述变换记作 F , 并记

$$\beta = F(\alpha).$$

设 $\alpha_1 \in A, F(\alpha_1) = \beta_1$, 就说变换 F 把元素 α_1 变为 β_1 , β_1 称为 α_1 在变换 F 下的像, α_1 称为 β_1 在变换 F 下的源, A 称为变换 F 的源集. 像的全体所构成的集合称为像集, 记作 $F(A)$, 即

$$F(A) = \{\beta = F(\alpha) \mid \alpha \in A\}.$$

显然, $F(A) \subset B$.

变换的概念是函数概念的推广. 比如函数 $f(x) = ax, x \in \mathbf{R}, a$ 是实常数, 就可以看成是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 自身上的一个变换. 这个变换有一个很好的特性, 即线性性, 其特征是:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad x, y, \lambda \in \mathbf{R}.$$

例 10 设 $F(X) = AX$, 其中 A 是一个 n 阶方阵, X 是 $\mathbf{R}^n$ 中的元素, 则 F 是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 自



身上的一个变换,且 F 具有与线性函数 $f(x) = ax$ 相类似的性质:

$$F(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = A(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = A\mathbf{X} + A\mathbf{Y} = F(\mathbf{X}) + F(\mathbf{Y}),$$

$$F(\lambda \mathbf{X}) = A(\lambda \mathbf{X}) = \lambda A\mathbf{X} = \lambda F(\mathbf{X}).$$

上述两个具有一个共性,即线性性,这种变换称为线性变换.

定义 7 设 V_n, U_m 分别是实数域上的 n 维和 m 维线性空间, F 是一个从 V_n 到 U_m 的变换,如果 F 满足

$$(1) \text{ 对任意 } \alpha, \beta \in V_n, F(\alpha + \beta) = F(\alpha) + F(\beta),$$

$$(2) \text{ 对任意 } \alpha \in V_n, \text{ 任意 } \lambda \in \mathbf{R}, \text{ 有 } F(\lambda \alpha) = \lambda F(\alpha),$$

则称 F 是从 V_n 到 U_m 的线性变换.

简言之,线性变换就是保持线性组合对应的变换,或者说保持加法运算与数乘运算不变的变换.

特别是在定义 7 中,如果 $U_m = V_n$,那么 F 是一个从线性空间 V_n 到自身的线性变换,称为线性空间 V_n 中的线性变换.

下面我们只讨论线性空间 V_n 中的线性变换.

设 F 是 V_n 中的线性变换,它具有如下基本性质:

$$(i) F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, F(-\alpha) = -F(\alpha);$$

$$(ii) \text{ 任给 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in V_n, \text{ 有}$$

$$F(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m) = \lambda_1 F(\alpha_1) + \lambda_2 F(\alpha_2) + \dots + \lambda_m F(\alpha_m);$$

$$(iii) \text{ 若 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \text{ 线性相关,则 } F(\alpha_1), F(\alpha_2), \dots, F(\alpha_m) \text{ 也线性相关};$$

这些性质请读者自己证明. 性质 (iii) 的逆命题一般是不成立的,即由 $F(\alpha_1), F(\alpha_2), \dots, F(\alpha_m)$ 线性相关推不出 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

$$(iv) \text{ 线性变换 } F \text{ 的像集 } F(V_n) \text{ 是 } V_n \text{ 的一个子空间,称为线性变换 } F \text{ 的像空间};$$

[证] 设 $\beta_1, \beta_2 \in F(V_n)$,则存在 $\alpha_1, \alpha_2 \in V_n$,使

$$F(\alpha_1) = \beta_1, \quad F(\alpha_2) = \beta_2,$$

从而

$$\beta_1 + \beta_2 = F(\alpha_1) + F(\alpha_2) = F(\alpha_1 + \alpha_2) \in F(V_n) \quad (\text{因 } \alpha_1 + \alpha_2 \in V_n);$$

$$\lambda \beta_1 = \lambda F(\alpha_1) = F(\lambda \alpha_1) \in F(V_n) \quad (\text{因 } \lambda \alpha_1 \in V_n).$$

由于 $F(V_n) \subset V_n$,且由以上证明知它对 V_n 中的线性运算封闭,故它是 V_n 的子空间.

证毕.

$$(v) \text{ 使 } F(\alpha) = \mathbf{0} \text{ 的 } \alpha \text{ 的全体}$$

$$S_F = \{\alpha \mid \alpha \in V_n, \text{ 且 } F(\alpha) = \mathbf{0}\}$$



也是 V_n 的子空间, S_F 称为线性变换 F 的核.

[证] $S_F \subset V_n$, 且若 $\alpha_1, \alpha_2 \in S_F$, 即

$$F(\alpha_1) = 0, F(\alpha_2) = 0,$$

则 $F(\alpha_1 + \alpha_2) = F(\alpha_1) + F(\alpha_2) = 0$, 所以 $\alpha_1 + \alpha_2 \in S_F$.

若 $\alpha_1 \in S_F, \lambda \in \mathbf{R}$, 则 $F(\lambda\alpha) = \lambda F(\alpha_1) = 0$, 所以 $\lambda\alpha_1 \in S_F$.

以上表明 S_F 对线性运算封闭, 所以 S_F 也是 V_n 的子空间.

证毕.

例 11 由关系式

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

确定了 xOy 平面上的一个变换, 它显然是一个线性变换, 其几何意义是 F 把任一向量按逆时针方向旋转 θ 角.

例 12 记 $P[x]_n$ 为次数不超过 n 的多项式与零多项式构成的全体, 则它按照通常多项式的加法和实数与多项式的乘法运算构成一个线性空间. 在线性空间 $P[x]_2$ 中

(1) 微分运算 D 是一个线性变换. 这是因为, 任取

$$\alpha = a_1x^2 + b_1x + c_1 \in P[x]_2,$$

$$\beta = a_2x^2 + b_2x + c_2 \in P[x]_2,$$

有

$$D(\alpha) = 2a_1x + b_1 \in P[x]_2,$$

$$D(\beta) = 2a_2x + b_2 \in P[x]_2,$$

$$\begin{aligned} D(\alpha + \beta) &= D[(a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + c_1 + c_2] \\ &= 2(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2) \\ &= (2a_1x + b_1) + (2a_2x + b_2) \\ &= D(\alpha) + D(\beta); \end{aligned}$$

$$D(\lambda\alpha) = D(\lambda a_1x^2 + \lambda b_1x + \lambda c_1) = \lambda(2a_1x + b_1) = \lambda D(\alpha).$$

(2) 若 $F(\alpha) = c_1$, 则 F 也是一个线性变换. 这是因为

$$F(\alpha + \beta) = c_1 + c_2 = F(\alpha) + F(\beta);$$

$$F(\lambda\alpha) = \lambda c_1 = \lambda F(\alpha).$$

(3) 若 $F_1(\alpha) = 1$, 则 F_1 是个变换, 但不是线性变换.

这是因为

$$F_1(\alpha + \beta) = 1,$$

而

$$F_1(\alpha) + F_1(\beta) = 1 + 1 = 2,$$

故

$$F_1(\alpha) + F_1(\beta) \neq F_1(\alpha + \beta).$$



§5 线性变换的矩阵

设 F 是 $\mathbf{R}^n$ 中的线性变换, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的单位向量组, 则对任意

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n,$$

$$\begin{aligned} \text{有} \quad F(\boldsymbol{\alpha}) &= F[(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)\boldsymbol{\alpha}] \\ &= F(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \dots + a_n\mathbf{e}_n) \\ &= a_1F(\mathbf{e}_1) + a_2F(\mathbf{e}_2) + \dots + a_nF(\mathbf{e}_n) \\ &= (F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_2), \dots, F(\mathbf{e}_n))\boldsymbol{\alpha} = A\boldsymbol{\alpha}. \end{aligned}$$

反之, 由上节例 10 知, 由关系式 $F(\boldsymbol{\alpha}) = A\boldsymbol{\alpha}$ ($\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^n$, A 是 n 阶方阵) 确定了 $\mathbf{R}^n$ 中的一个线性变换, 所以 $\mathbf{R}^n$ 中任何线性变换 F 都能用关系式

$$F(\boldsymbol{\alpha}) = A\boldsymbol{\alpha} \quad (\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^n)$$

表示, 其中 $A = (F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_2), \dots, F(\mathbf{e}_n))$. 这样, 在 $\mathbf{R}^n$ 内全体线性变换所构成的集合与全体 n 阶方阵所构成的集合之间确定了一个一一映射, 事实上这个映射是一同构映射.

把上面的讨论推广到一般的线性空间上也有类似的结论.

1. 线性变换在给定基下的矩阵表示

在 V_n 内取定一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 则 V_n 内任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

对 V_n 内的一个线性变换 F , 有

$$F(\boldsymbol{\alpha}) = x_1F(\boldsymbol{\alpha}_1) + x_2F(\boldsymbol{\alpha}_2) + \dots + x_nF(\boldsymbol{\alpha}_n).$$

这说明, 只要知道了 $F(\boldsymbol{\alpha}_1), F(\boldsymbol{\alpha}_2), \dots, F(\boldsymbol{\alpha}_n)$, 那么任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 F 作用下的像 $F(\boldsymbol{\alpha})$ 也就确定了, 所以一个线性变换取决于它对一组基的作用.

定理四 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 V_n 的一组基.

(1) 若 V_n 中的线性变换 F_1, F_2 满足

$$F_1(\boldsymbol{\alpha}_i) = F_2(\boldsymbol{\alpha}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

则 $F_1 = F_2$, 即任意 $\boldsymbol{\alpha} \in V_n$, 有 $F_1(\boldsymbol{\alpha}) = F_2(\boldsymbol{\alpha})$.

(2) 任给 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n \in V_n$, 存在唯一的线性变换 F , 使

$$F(\boldsymbol{\alpha}_i) = \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$





其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

则称矩阵 A 为线性变换 F 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵.

显然, 矩阵 A 是由基的像 $F(\alpha_1), F(\alpha_2), \cdots, F(\alpha_n)$ 唯一确定, 即由线性变换 F 唯一确定. 这样, 对 V_n 中线性变换集合 $L(V_n)$ 中任一元素 F , 在全体 n 阶方阵所成的集合 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 中都可以找到唯一确定的元素 A 与之对应.

如果要求出一个线性变换 F 在一个基下的矩阵, 那只要设法将 $F(\alpha_i)$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) 表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的线性组合就可以了.

例 13 在线性空间 $P[x]_3$ 中取定一组基

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = x, \quad \alpha_3 = x^2, \quad \alpha_4 = x^3,$$

求求导运算 D 在该基下的矩阵.

[解] 因为

$$\begin{cases} D(\alpha_1) = 0 = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4, \\ D(\alpha_2) = 1 = 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4, \\ D(\alpha_3) = 2x = 0\alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4, \\ D(\alpha_4) = 3x^2 = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 3\alpha_3 + 0\alpha_4. \end{cases}$$

故 D 在这组基下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

例 14 设 F 为 $\mathbf{R}^3$ 中的一个线性变换满足

$$F(\epsilon_1) = (-1, 1, 0), \quad F(\epsilon_2) = (2, 1, 1), \quad F(\epsilon_3) = (0, -1, -1),$$

其中 $\epsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\epsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\epsilon_3 = (0, 0, 1)$.

(1) 若取基为 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, 求 F 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 下的矩阵;

(2) 若取基为 $\alpha_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, \alpha_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \alpha_3 = \epsilon_1$, 求 F 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵.

[解] (1) 因为



$$F(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 0\varepsilon_3,$$

$$F(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

$$F(\varepsilon_3) = 0\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

故 F 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \quad F(\alpha_1) = F(\varepsilon_1) + F(\varepsilon_2) + F(\varepsilon_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 0\varepsilon_3,$$

$$F(\alpha_2) = F(\varepsilon_1) + F(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

$$F(\alpha_3) = F(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 0\varepsilon_3.$$

现在再求它们在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标, 因为

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(F(\alpha_1), F(\alpha_2), F(\alpha_3)) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

故

$$\begin{aligned} (F(\alpha_1), F(\alpha_2), F(\alpha_3)) &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

因此 F 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

由上例可见, 同一个线性变换在不同的基下矩阵一般不相同.

2. 线性变换在不同的基下的矩阵之间的关系

例 14 中已经指出, 同一个线性变换在不同的基下的矩阵一般是不一样的, 现在我们



来寻求它们之间的关系.

定理五 设 F 是线性空间 V_n 中的线性变换, F 在 V_n 的两组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 及 $\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_n'$ 下的矩阵分别为 A 与 B , 由基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_n'$ 的过渡矩阵为 C , 则 $B = C^{-1}AC$.

[证] 因为

$$(\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_n') = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C,$$

且

$$\begin{aligned} F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A, \\ F(\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_n') &= (\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_n')B. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} F(\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_n') &= F[(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C] = [F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)]C \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)AC. \end{aligned}$$

另一方面

$$F(\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_n') = (\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_n')B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)CB,$$

从而

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)AC = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)CB.$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 故有

$$AC = CB.$$

C 可逆, 因而有

$$B = C^{-1}AC.$$

证毕.

这定理表明同一个线性变换 F 在不同的基下的矩阵 A, B 是相似的, 且两组基之间的过渡矩阵 C 就是相似变换矩阵.

例 15 设 V_2 中的线性变换 F 在基 α_1, α_2 下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

求 F 在基 α_2, α_1 下的矩阵.

[解] 因为

$$(\alpha_2, \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

即过渡矩阵为



$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{求得 } C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

于是 F 在基 α_2, α_1 下的矩阵为

$$\begin{aligned} B &= C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

定义 9 线性变换 F 的像空间 $F(V_n)$ 的维数,称为线性变换 F 的秩.

显然,若 A 是 F 的矩阵,则 F 的秩就是 $R(A)$.

若 F 的秩为 r ,则 F 的核 S_F 的维数为 $n - r$.



习题六

1. 验证:

(1) 2 阶方阵的全体 S_1 ;

(2) 主对角线上的元素之和等于 0 的 2 阶方阵的全体 S_2 ;

(3) 2 阶对称方阵的全体 S_3 .

对于矩阵的加法和乘数运算构成线性空间,并写出每个线性空间的一组基.

2. 下列函数集合对通常的函数加法与数乘运算是否构成线性空间?

(1) $A = \{ae^x + be^{-x} \mid a, b \in \mathbf{R}\}$;

(2) $B = \{ae^x + be^{-x} + 2 \mid a, b \in \mathbf{R}\}$.

3. 在所有的三元实数组 (x, y, z) 的集合中,定义加法与乘法如下:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_2, y_1 + y_2, z_2);$$

$$\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

问是否构成线性空间?

4. 下述集合按通常的加法与数乘运算,哪些是 $\mathbf{R}^4$ 的子空间?

(1) $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - x_2 = 2\}$;

(2) $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_3 = x_1 + 2x_2, x_4 = x_1 - 3x_2\}$;

(3) $C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = 0, x_2 = -x_4\}$.

5. 设 W 是线性空间 V 的一个子空间,证明:若 W 与 V 的维数相等,则 $W = V$.

6. 下列哪几个向量组是 $\mathbf{R}^3$ 的基? 把向量 $\alpha = (1, 2, 3)$ 表示为那组基的线性组合.



- (1) $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)$, $\alpha_3 = (0, 1, 0)$;
(2) $\alpha_1 = (1, 2, 2)$, $\alpha_2 = (2, 1, 3)$, $\alpha_3 = (0, 0, 0)$;
(3) $\alpha_1 = (-2, 1, 3)$, $\alpha_2 = (-1, 2, 3)$, $\alpha_3 = (-1, -4, -3)$.

7. 在 $\mathbf{R}^3$ 中, 取两组基:

$$\alpha_1 = (1, 2, 1), \quad \alpha_2 = (2, 3, 3), \quad \alpha_3 = (3, 7, 1);$$
$$\beta_1 = (3, 1, 4), \quad \beta_2 = (5, 2, 1), \quad \beta_3 = (1, 1, -6).$$

试求坐标变换公式.

8. 在 $\mathbf{R}^4$ 中取两组基:

$$\alpha_1 = (1, 2, -1, 0), \quad \alpha_2 = (1, -1, 1, 1), \quad \alpha_3 = (-1, 2, 1, 1), \quad \alpha_4 = (-1, -1, 0, 1);$$
$$\beta_1 = (2, 1, 0, 1), \quad \beta_2 = (0, 1, 2, 2), \quad \beta_3 = (-2, 1, 1, 2), \quad \beta_4 = (1, 3, 1, 2).$$

- (1) 求由前一组基到后一组基的过渡矩阵;
(2) 求 $\alpha = (1, 0, 0, 0)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标.

9. 说明 xOy 平面上变换 $F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的几何意义, 其中

$$(1) A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (4) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. 在 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 中定义变换如下:

$$F(\alpha) = A\alpha - \alpha A, \alpha \in \mathbf{R}^{2 \times 2}.$$

其中 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 为一个固定二阶方阵.

- (1) 证明 F 是 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 中的一个线性变换;
(2) 在 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 中取一组基:

$$\varepsilon_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

求 F 在该基下的矩阵.

11. 若线性变换 F 在基 $\alpha_1 = (1, 1, 0)$, $\alpha_2 = (1, 0, 1)$, $\alpha_3 = (1, 1, 1)$ 下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$\alpha_1' = (1, 1, 2)$, $\alpha_2' = (2, 2, 1)$, $\alpha_3' = (1, 2, 2)$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的另一组基, 求线性变换 F 在该基下的矩阵.



12. 设 F_1, F_2 均为线性空间 V_n 中的线性变换, 使 V_n 中每个向量 α 与 $F_1(\alpha) + F_2(\alpha)$ 对应的变换 F 称为 F_1 与 F_2 的和, 记为

$$F = F_1 + F_2,$$

即

$$F(\alpha) = (F_1 + F_2)(\alpha) = F_1(\alpha) + F_2(\alpha).$$

(1) 证明 F 也是线性变换;

(2) 若在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下, F_1, F_2, F 的矩阵分别为 A, B, C , 证明

$$C = A + B.$$

13. 设 F_1 为线性空间 V_n 中的线性变换, $\lambda \in \mathbf{R}$, 使 V_n 中每个向量 α 与 $\lambda F_1(\alpha)$ 对应的变换 F 称为 λ 与 F_1 的积, 记为

$$F = \lambda F_1,$$

即

$$F(\alpha) = (\lambda F_1)(\alpha) = \lambda F_1(\alpha).$$

(1) 证明 F 也是线性变换;

(2) 若 F_1 与 F 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵分别是 A, B , 证明 $B = \lambda A$.

附录一



n 阶行列式另一种定义



一、 n 级排列

定义 1 由 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

例如, 312 为一个 3 级排列, 14532 为一个 5 级排列, $12 \cdots n$ 为一个 n 级排列等. n 级排列 $12 \cdots n$ 称为标准排列.

由排列组合的知识可知, n 级排列总数为 $n!$.

定义 2 在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_k \cdots i_l \cdots i_n$ 中, 若 $i_k > i_l$, 则称 i_k 与 i_l 构成一个逆序. 而一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序总数称为该排列的逆序数, 记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

例如, $\tau(312) = 2, \tau(14532) = 5, \tau[n(n-1) \cdots 21] = \frac{n(n-1)}{2}$.

定义 3 逆序数为奇数的排列称为奇排列, 逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例如, 排列 312 为偶排列, 排列 14532 为奇排列.

定义 4 若将排列 $i_1 i_2 \cdots i_k \cdots i_l \cdots i_n$ 中的 i_k 与 i_l 交换得到排列 $i_1 i_2 \cdots i_l \cdots i_k \cdots i_n$, 这种变换称为对换.

例如, 排列 14532 经 4 与 2 对换得到排列 12534.

这时 $\tau(12534) = 2$, 即排列 12534 为偶排列. 于是奇排列 14532 经 4 与 2 对换后得到偶排列 12534, 更一般地

定理一 一个排列经过一次对换后, 排列改变奇偶性.

[证] 先证相邻对换的情形.



设排列 $\cdots jk \cdots$ 经过 j 与 k 对换后变成排列 $\cdots kj \cdots$, 其中“ $\cdots$ ”表示排列中那些不动的数. 由于排列 $\cdots jk \cdots$ 与排列 $\cdots kj \cdots$ 除了 j 与 k 的顺序改变外, 所有不动的数“ $\cdots$ ”与 j, k 的顺序没有改变. 因此, 当 $j > k$ 时有 $\tau(\cdots jk \cdots) = \tau(\cdots kj \cdots) + 1$; 当 $k > j$ 时有 $\tau(\cdots jk \cdots) = \tau(\cdots kj \cdots) - 1$. 故一个排列经过一次相邻对换后, 排列改变奇偶性.

再证一般对换的情形.

设排列 $\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots$ 经过 j 与 k 对换后变成排列 $\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots$, 则排列 $\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots$ 可经 $s+1$ 次相邻对换变成排列 $\cdots i_1 i_2 \cdots i_s k j \cdots$, 而排列 $\cdots i_1 i_2 \cdots i_s k j \cdots$ 可经 s 次相邻对换变成排列 $\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots$, 故排列 $\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots$ 可经 $2s+1$ 次相邻对换变成排列 $\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots$. 由于 $2s+1$ 为奇数, 而每经过一次相邻对换改变排列的奇偶性. 因此, 经过奇数次相邻对换, 排列改变奇偶性. 证毕.

推论 1 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数, 偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

[证] 由定理 1 可知, 排列对换次数就是排列奇偶性的变化次数, 而标准排列是偶排列 (逆序数为 0), 故一个奇排列变成标准排列其对换次数为奇数, 一个偶排列变成标准排列其对换次数为偶数. 证毕.

推论 2 n 级排列中, 奇排列与偶排列的个数相同, 且为 $\frac{n!}{2}$.

[证] 设奇排列个数为 s , 偶排列个数为 t . 则由定理 1 可知, 将 s 个奇排列中某两个数对换得到 s 个偶排列, 故 $s \leq t$. 同理将 t 个偶排列中某两个数对换得到 t 个奇排列, 故 $t \leq s$. 于是, $s = t$.

又因为 n 级排列总数为 $n!$, 所以 $s + t = 2s = n!$, 即 $s = t = \frac{n!}{2}$. 证毕.

例 1 确定 i, j 的取值, 使得排列 215 i 7 j 946 为偶排列.

[解] 由排列的定义可知, $i = 3, j = 8$ 或 $i = 8, j = 3$.

当 $i = 3, j = 8$ 时, $\tau(215 i 7 j 946) = 9$.

故由定理 1 可知, $i = 8, j = 3$.



二、 n 阶行列式

由第一章第一节中的线性方程组知识可得, 二阶行列式、三阶行列式有如下定义.

定义 5 二阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$



定义 6 三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

上述二阶行列式、三阶行列式的定义具有共同特征:

(1) 二阶行列式是 $2! = 2$ 项的代数和, 其中每一项都是取自不同行不同列的两个元素的乘积. 三阶行列式是 $3! = 6$ 项的代数和, 其中每一项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积.

(2) 代数和中的每一项的正负号都是这样确定的: 当行指标取成标准排列时, 由列指标构成排列的奇偶性确定, 偶排列取正, 奇排列取负.

由上面分析, 我们可以将二阶行列式、三阶行列式分别定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}.$$

其中 $\sum_{j_1 j_2}$ 表示对 1, 2 这两个数构成的所有排列 $j_1 j_2$ 取和, $\sum_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对 1, 2, 3 这三个数构成的所有排列 $j_1 j_2 j_3$ 取和.

把二阶行列式、三阶行列式定义进行推广, 可以定义 n 阶行列式.

定义 7 n 阶行列式定义为

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

其中 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对 1, 2, $\cdots$, n 这 n 个数构成的所有排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 取和.

例 2

计算上三角形行列式 $D_n =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$



[解] 由 n 阶行列式定义, 有

$$D_n = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

下面考虑展开式中的非零项.

当 $j_n \neq n$ 时, $a_{nj_n} = 0$, 从而 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = 0$, 故 $j_n = n$.

当 $j_{n-1} \neq n-1, n$ 时, $a_{n-1, j_{n-1}} = 0$, 从而 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = 0$, 故 $j_{n-1} = n-1$ 或 $j_{n-1} = n$. 又 $j_n = n$, 因此 $j_{n-1} = n-1$.

同理可得

$$j_{n-2} = n-2, \cdots, j_2 = 2, j_1 = 1.$$

因此

$$D_n = (-1)^{\tau(12 \cdots n)} a_{11} a_{12} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

例 3 计算四阶行列式 $D_4 =$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

[解] 类似例 2, 有

$$\begin{aligned} D_4 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)} a_{14} a_{23} a_{32} a_{41} \\ &= (-1)^6 a_{14} a_{23} a_{32} a_{41} = a_{14} a_{23} a_{32} a_{41}. \end{aligned}$$

例 4 写出四阶行列式中含因子 $a_{11} a_{23}$ 的项.

[解] 由行列式定义可知, 含因子 $a_{11} a_{23}$ 的项为

$$\begin{aligned} &(-1)^{\tau(1324)} a_{11} a_{23} a_{32} a_{44} \text{ 或 } (-1)^{\tau(1342)} a_{11} a_{23} a_{34} a_{42}, \\ &\text{即} \quad -a_{11} a_{23} a_{32} a_{44} \text{ 或 } a_{11} a_{23} a_{34} a_{42}. \end{aligned}$$

在行列式定义 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 中, 每一项相乘的 n 个元素的行指标固定取 n 级标准排列. 事实上, 数的乘法是可交换的, 这 n 个元素的次序可以改变的, 故 n 阶行列式中通项一般可写成

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n},$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是两个 n 级排列.



下面讨论 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 的符号.

由于排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 可经过若干次对换变成标准排列 $12 \cdots n$, 因此适当交换 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 中因子的位置可得到

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} = a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}.$$

由于交换 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 中的两个因子, 对应的行指标的排列、列指标的排列均做了一次对换. 从而行指标排列与列指标排列逆序之和的奇偶性不变, 于是有

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(12 \cdots n) + \tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} = (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)}.$$

而 $(-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)}$ 正是行列式展开式中项 $a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}$ 的符号, 故有

$$(-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

由上面分析, 得 n 阶行列式的等价定义.

$$(1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n},$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是两个 n 级排列.

当 $i_1 i_2 \cdots i_n = 12 \cdots n$ 时即为定义 7.

取 $j_1 j_2 \cdots j_n = 12 \cdots n$, 有

$$(2) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$



三、行列式性质 1、性质 2 的证明

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

$$[\text{证}] \quad \text{设 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$b_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

由行列式定义, 有



$$D' = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}.$$

而由行列式等价定义(2), 有

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$$

故

$$D = D'.$$

证毕.

性质 2 互换行列式的两行(列), 行列式的值变号.

[证] 设行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$ 是由行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 交换第

i 行与第 j 行得到的, 则当 $k \neq i, j$ 时, $b_{kl} = a_{kl}$; 当 $k = i, j$ 时, $b_{il} = a_{jl}, b_{jl} = a_{il}$.

由行列式定义, 有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{l_1 \cdots l_i \cdots l_j \cdots l_n} (-1)^{\tau(l_1 \cdots l_i \cdots l_j \cdots l_n)} b_{1l_1} \cdots b_{il_i} \cdots b_{jl_j} \cdots b_{nl_n} \\ &= \sum_{l_1 \cdots l_i \cdots l_j \cdots l_n} (-1)^{\tau(l_1 \cdots l_i \cdots l_j \cdots l_n)} b_{1l_1} \cdots b_{jl_j} \cdots b_{il_i} \cdots b_{nl_n} \\ &= - \sum_{l_1 \cdots l_j \cdots l_i \cdots l_n} (-1)^{\tau(l_1 \cdots l_j \cdots l_i \cdots l_n)} a_{1l_1} \cdots a_{il_j} \cdots a_{jl_i} \cdots a_{nl_n} \\ &= -D. \end{aligned}$$

证毕.

附录二



怎样用 MATLAB 解线性代数问题



一、MATLAB 简介

MATLAB 的首创者 Cleve Moler 博士在数值分析特别是在数值线性代数的领域中很有影响. 1980 年前后, Moler 博士在 New Mexico 大学讲授线性代数课程时发现了用其他高级语言编程极为不便, 便构思并开发了 MATLAB (Matrix Laboratory, 即矩阵实验室), 用 FORTRAN 语言编写了集命令翻译、科学计算于一身的一大套交互式软件系统. 不过, 现在的 MATLAB 已经用 C 语言做了完全的改写. 在 MATLAB 下, 矩阵的运算变得异常的容易, 后来的版本中又增添了丰富多彩的图形图像处理及多媒体功能.

目前, MATLAB 已经成为国际上最流行的控制系统计算辅助设计的软件工具, 现在的 MATLAB 已经不仅仅是一个“矩阵实验室”了, 它已经成为一种具有广泛应用前景的全新的计算机高级编程语言了.

MATLAB 是以复数矩阵作为基本编程单元的一种程序设计语言, 它提供了各种矩阵的运算与操作, 并有较强的绘图功能, 所以得以广为流传. MATLAB 是一个高度的集成系统, 在控制界、生物医学工程、语音处理、图像信号处理、雷达工程、信号分析、计算机技术等各行各业中都有极广泛的应用.

MATLAB 语言可以轻易地再现 C 语言或 FORTRAN 语言几乎全部的功能, 所以即使用户不懂 C 或 FORTRAN 这样的程序设计语言, 照样可以设计出功能强大、界面优美、稳定可靠的高质量程序来, 且开发周期得以大大地缩短.



因篇幅关系,本书只介绍 MATLAB 在矩阵处理方面的一些基本功能和应用,关于 MATLAB 的更多知识可查阅有关专门的资料.

MATLAB 既可以在 MS-DOS 下运行,也可以在 MS-Windows 下运行,此外还可以在一些其他环境如 X-Windows 下运行,所以一般来说,MATLAB 并不受机器及环境的限制.

目前比较流行的 MATLAB 版本是 MATLAB 5.0,Windows 用户可以用鼠标左键双击 MATLAB 的执行程序相应图标的方法来启动程序,这时将出现命令窗口的界面显示,在界面下的 $\gg$ 标志为 MATLAB 的命令提示符,用户可以在 $\gg$ 提示符下输入 MATLAB 命令.如果用户是第一次使用 MATLAB,则建议首先在 $\gg$ 提示符下键入 DEMO 命令,它将启动 MATLAB 的演示程序,用户可以在此演示程序中看到 MATLAB 所提供的强大的运算和绘图功能(有些 MATLAB 版本没有 $\gg$ 提示符).

MATLAB 5.0 版是一个高度集成的语言环境,在它的界面下可以编写程序、运行程序并跟踪调试程序.在 MATLAB 命令窗口的界面下有一个菜单条,其中提供了很多有用的功能,如其中的 File(文件管理)菜单和 Options(选项)菜单下都有很多子菜单项.

MATLAB 界面下 Windows(窗口管理)选项允许用户在各个 MATLAB 窗口中做直接的切换,如果同时打开了若干个不同的窗口,则可以给出所有打开窗口名的列表,用户可以直接从列表中选择想调到前台的窗口.运行完 MATLAB 之后,就可以在提示符下键入 exit 或 quit 命令来退出 MATLAB 环境,并回到 Microsoft Windows 的界面下,当然也可以通过选中 File|Exit MATLAB 菜单项来退出 MATLAB 环境.



二、MATLAB 基本语句结构

MATLAB 实际上可以认为是一种解释性语言,用户可以在 MATLAB 工作环境下键入一个命令,也可以由它定义的语言编写一个或多个应用程序,这样 MATLAB 软件对此命令或程序中各条命令进行翻译,然后在 MATLAB 环境下对它进行处理,最后返回运算结果. MATLAB 以复数矩阵为最基本的运算单元,既可以对它整体地进行处理,也可以对它的某个或某些元素进行单独的处理,所以操作起来比较方便. MATLAB 语言最基本的赋值语句结构为

变量名列表 = 表达式

其中左边的变量名列表为 MATLAB 语句的返回值,等号右边的是表达式的定义,它可以是 MATLAB 允许的矩阵运算,也可以包含 MATLAB 下的函数调用.

等号右边的表达式可以由分号结束,也可以由逗号或换行号结束,但它们的含义是不同的.如果用分号结束,则左边的变量结果将不在屏幕上显示出来,否则将把左边返回



矩阵的内容全部显示出来.

和 C 语言类似, MATLAB 是区分变量名的大小写的 (casesensitive), 例如在 MATLAB 下, 可以用 `Abc`, `ABC`, `abc` 来表示不同的矩阵名, 但在实际编程时还应慎重, 尽量避免这样的变量命名方式.

MATLAB 和 C 语言不同, 在调用函数时, MATLAB 允许一次返回多个结果 (亦即多个矩阵), 这时等号左边是由 `[]` 括起来的矩阵列表, 例如: `[L,U]=LU(A)`.

在 MATLAB 环境下, 矩阵输入的方式是很直观的, 如矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ 的输入方式为}$$

$$A = [1,2,3;4,5,6;7,8,9]$$

其中同一行中的内容用逗号分隔, 而采用分号来表示换行. 按这种格式输入矩阵 `A` 后, 矩阵的内容将在屏幕上按照下面的格式显示出来.

```
>> A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
A=1 2 3
```

```
4 5 6
```

```
7 8 9
```

如果在上面赋值式子的末尾加一个分号, 则矩阵的内容就不在屏幕上显示了. 所以用户可以通过是否在语句末加分号的方式来决定运算的结果是否显示出来, 这样就可以使得不必要的中间结果部分不被显示出来.

在一般情况下, 用于同行中分隔的逗号是可以由空格来代替的. 其实, MATLAB 的矩阵输入格式并不是很严格, 在语句中多加入一些空格将不会影响整个赋值结果, 此外前面的矩阵还可以等价地由下面两种方式来输入:

```
>> A=[1 2 3;4 5 6
```

```
7 8 9];
```

```
>> A=[1 2 3;4 5,...
```

```
6;7 8,9];
```

其中, 在前一种输入方法中, 第二行的末尾用一个回车键来表示换行, 它的作用和一个分号是一致的. 如果用户采用后面一种输入方式, 则第一行末尾给出的三个点号 (`...`) 称为续行符号, 它表示下面的一行应该紧接在前一行, 在语句相当长, 难以由一行表示出来时, 往往需要采用这样的续行符号, 将一条语句分隔成几行来表示.



向量的输入是一般矩阵输入的特殊情况,例如下面的两条命令:

```
>>V1=[1 2 3,4]
```

```
>>V2=[1; 2; 3; 4]
```

可以简单地输入下面给出的行向量和列向量.

```
V1=1 2 3 4      V2= 1
                    2
                    3
                    4
```

除了表示向量和矩阵之外,利用 MATLAB 当然容易地表示标量了.学会了矩阵的基本表示方法之后,就可以容易地理解下面的输入方式和结果了.

```
>> A=[A;[1 3 5]]
```

```
A=1 2 3
    4 5 6
    7 8 9
    1 3 5
```

这种方法的作用是在原来 A 矩阵的下面再附加上一个行向量[1 3 5].如果矩阵各行的元素个数不相同时,例如写成 A=[A;[1 2]],这样出现下面错误信息

```
>> A=[A;[1 2]]
```

```
??? All rows in the bracketed expression must have the same number of columns.
```

提示该矩阵有误(行中元素个数不匹配),并给出一声鸣叫.

在变量赋值语句中,等号左边的矩阵名列表和等号一起可以省略,这时将把返回的矩阵名设置为 ans 变量.ans 也是一个保留的 MATLAB 字符串,它表示上面一个式子的返回结果.例如,如果键入[1,2,3;4,5,6],将产生下面的输出

```
>>[1,2,3;4,5,6]
ans=1 2 3
    4 5 6
```

这时 MATLAB 会自动地将该矩阵赋给 ans 变量,这样用户就可以对 ans 变量进行直接操作了.



三、矩阵运算

矩阵运算是 MATLAB 的基础. MATLAB 语言对矩阵进行处理的能力是极强的.



1. 矩阵转置

矩阵的转置用符号“'”来表示和实现.

例如: $A = [1\ 2\ 3; 4\ 5\ 6; 7\ 8\ 9]$

转置矩阵 $B = A'$, 则

$B =$

1 4 7

2 5 8

3 6 9

再如直接对向量转置运算:

$\gg [-1\ 0\ 2]'$

结果为

$\text{ans} =$

-1

0

2

如果 z 是复数矩阵, 则 z' 为它的复数共轭转置, 非共轭转置使用 z' 或 $\text{conj}(z')$ 求得.

2. 矩阵加和减

矩阵的加减运算使用的是“+”或“-”运算符, 而矩阵必须具有相同阶数才可进行加、减运算. 例如, A 是 3×3 矩阵, X 是 3×1 矩阵, 就不能进行 $A+X$ 运算.

$A = [1\ 2\ 3$
4 5 6
7 8 9]

$B = [1\ 4\ 7$
2 5 8
3 6 9]

则 $C = A+B$ 是可行的, 值为

$C =$
2 6 10
6 10 14
10 14 18

可见矩阵的加减运算是对其元素的加减运算.



如果运算对象是一个标量即 1×1 矩阵,它可以和其他不同阶数的矩阵进行加减运算,如:

```
>>x=[-1 0 2];
```

```
>>y=x-1
```

```
y=
```

```
-2 -1 1
```

3. 矩阵乘法

矩阵乘法用“*”表示.当两矩阵中前一矩阵的列数和后一矩阵的行数相同时,可以进行乘法运算,这与数学上的形式是一致的.两个相同维数向量的内积(数学上称为点积,标量乘)也可用这种乘法来实现.

```
例如:x=[-1 0 2]'
```

```
y=[-2 -1 1]'
```

则运算 $x' * y$ 和 $y' * x$ 都将得到结果:

```
ans =
```

```
4
```

MATLAB 中对于计算向量的叉乘(矢积)没有特别地给出,但是通过编写 M 文件可以很容易地计算.

在 MATLAB 中可进行矩阵和标量相乘,标量可以是被乘数,矩阵和标量相乘是进行矩阵中的每个元素都与此标量相乘的运算.

```
例如:计算 pi * x,其中 x=[-1 0 2]
```

```
ans =
```

```
-3.1416 0 6.2832
```

4. 矩阵除法

在 MATLAB 中有两种矩阵除法符号:“\”和“/”分别表示左除和右除,如果 A 矩阵是非奇异方阵,则 $A \setminus B$ 和 B/A 运算可以实现. $A \setminus B$ 等效于 A 的逆左乘 B 矩阵,也就是 $\text{inv}(A) * B$, B/A 等效于 A 的逆右乘 B 矩阵.

通常 $X = A \setminus B$ 是 $A * X = B$ 的解,

$X = B/A$ 是 $X * A = B$ 的解;

一般 $A \setminus B \neq B/A$.

5. 矩阵的乘方

A^P 的意思是 A 的 P 次方.如果一个方阵,P 是一个标量,且 P 是大于 1 的整数,则 A



的 P 次幂即为 A 自乘 P 次,如果 P 不是整数,则计算涉及特征向量的问题. 例如,若 $[V, D] = \text{eig}(A)$, 则

$$A^P = V * D.^P / V$$

这里 V 和 D 分别为矩阵 A 的特征向量和特征值矩阵.

如果 P 是矩阵而 A 是标量,以及 A, P 都是矩阵,则 A^P 都是错误的.



四、向量和下标

MATLAB 的下标具有很重要的功能,可以在对矩阵的行、列或子矩阵处理时使用,也可以用来产生向量. 使用向量和下标,会使运算更为清晰和方便.

1. 产生向量

在 MATLAB 中“:”是一个重要的字符,如 $x = 1:5$ 即产生一个 1 ~ 5 单位增量的行向量:

```
>>x=1:5
```

```
x=
```

```
1 2 3 4 5
```

也可以产生单位增量小于 1 的行向量,方法是把增量放在起始和结尾量的中间,如:

```
>>y=0:pi/4:pi
```

即产生一个从 0 到 π 的行向量,单位增量是 $\pi/4=0.7854$,所以

```
y=
```

```
0 0.7854 1.5708 2.3562 3.1416
```

也可以产生单位为负数的行向量,如:

```
>>z=6:-1:1
```

```
z=
```

```
6 5 4 3 2 1
```

“:”也可以用来产生简易的表格. 为了产生纵向表格形式,首先要用它产生行向量,然后进行转置,再利用所得的列向量计算出另一列向量,即可合成有两列的矩阵. 例如:

```
>>x=(0:0.2:1)';
```

```
>>y=exp(-x).*sin(x);
```

```
>>[x,y]
```

```
ans=
```



0	0
0.2000	0.1627
0.4000	0.2610
0.6000	0.3099
0.8000	0.3223
1.0000	0.3096

2. 下标

单个的矩阵元素可在括号中用下标来表达. 例如, 已知:

$A =$

```
1  2  3
4  5  6
7  8  9
```

则

$A(2,3) = 6$

$A(3,1) = 7$

对于矩阵来说, 向量下标可以将矩阵中邻近或不邻近元素构成一新的矩阵; 假设 A 是一个 10×10 的矩阵, 则 $A(1:5,3)$ 指 A 中由前五对对应第三列元素组成的 5×1 子矩阵, 又如 $A(1:5,7:10)$ 是前 5 行对应最后 4 列组成的 5×4 子矩阵.

使用“:”代替下标, 可以表示所有的行或列.

如: $A(:,3)$ 代表第三列元素组成的子矩阵, $A(1:5,:)$ 代表由前 5 行所有元素组成的子矩阵.

对于子矩阵的赋值语句, “:”有更明显的优越性. 如:

$A(:, [3,5,10]) = B(:, 1:3)$ 表示将 B 矩阵的前三列, 赋值给 A 矩阵的第三、第五和第十列.

通常如果 v 和 w 具有整数性质的向量, 则 $A(v,w)$ 通过取出行下标 v 和列下标 w 对应的 A 的元素而形成新的矩阵.

于是, $A(:, n:-1:1)$ 即为由原来矩阵 A 中取 n 到 1 负增长的列的元素组成一个新的矩阵, 其行数仍为原来 A 矩阵的行数, 列数为 n .

如果 $v = 2:2:n$

$w = [3 \ 1 \ 4 \ 1 \ 6]$

此时, $A(v,w)$ 是合法的, 但并不排除出问题的可能性. 进一步分析 $A(:)$ 的赋值语句的右



边,表示将 A 的所有元素在一个长的列向量中展成串,如 $A=[1\ 2;3\ 4;5\ 6]$

$b=A(:)$

则结果为

$A=$

1 2

3 4

5 6

$b=$

1

2

3

4

5

6

在赋值语句左边 $A(:)$ 可以重新组成与刚才的 A 具有相同阶数的矩阵,这相当于在原来的 A 未被清除的情况下,用新的元素置换,实际上起着一种提供格式的作用.

例如:

$\gg A(:)=11:16$

$A=$

11 14

12 15

13 16

这时 A 矩阵已被新的内容所取代了,即由 11 至 16 这 6 个新元素取代原来矩阵中的元素,重新组成 3×2 矩阵.



五、矩阵函数

MATLAB 的数学处理能力很大一部分是由它的矩阵函数扩展而来的. 关于 MATLAB 库函数的功能可以从求助信息 Help 或举例中找到. MATLAB 矩阵函数主要有三角分解、正交变换、奇异值分解和特征值等几方面的内容.

1. 三角分解

最基本的分解是将一个方阵表示成两个基本三角阵的乘积,其中一个三角阵为上三



角矩阵,另一个为下三角矩阵,这种分解通常被称为“LU”分解,这里使用的算法是高斯变量消去法.

分解的因数 `lu` 函数中得到,利用这种分解,求逆(`inv`)可得到逆矩阵,求 `det` 可得到行列式的值,它也是求解线性方程的基础,或是方阵“/”和“\”两种矩阵除法的基础. 例如:

```
>>A=[1 2 3
      4 5 6
      7 8 0]
```

LU 分解,用 MATLAB 赋值语句

```
>>[L,U]=lu(A)
```

给出:L=

```
0.1429    1.0000    0
0.5714    0.5000    1.0000
1.0000     0         0
```

U=

```
7.0000    8.0000    0.0000
0         0.8571    3.0000
0         0         4.5000
```

注:L 是转换了的对角线为一下三角矩阵,U 是上三角矩阵. 逆运算可证明 LU 分解的正确性,由 $L * U$ 生成 A:

```
>>L * U
```

ans =

```
1 2 3
4 5 6
7 8 0
```

求逆由下式给出:

```
X=inv(A)
```

```
>>X=inv(A)
```

X=

```
-1.7778    0.8889   -0.1111
 1.5556   -0.7778    0.2222
-0.1111    0.2222   -0.1111
```



从三角分解转换的求逆是精确的: $X = \text{inv}(U) * \text{inv}(L)$ 取得了与上式直接求逆相同的值. 行列式的值由下式给出:

```
>>d = det(A)
```

```
d = 27
```

由三角分解的因数矩阵计算行列式的值:

```
>>d = det(L) * det(U)
```

```
d =
```

```
27.0000
```

注意到两种 d 的显示格式不一样. 这是因为当 MATLAB 做 $\text{det}(A)$ 运算时, A 的所有元素都是以整数形式给出, 运算中也出现了小数, 故结果也为整数, 而用分解的因数矩阵计算 d 时, 因数 L, U 中的元素已非全整数, 故这样产生的 d 也不是整数.

如线性联立方程. 取

```
b =
```

```
1
```

```
3
```

```
5
```

解方程 $Ax = b$, 用 MATLAB 矩阵除法得到 (A 矩阵仍如上述给出的).

```
>>x = A\b
```

```
x =
```

```
0.3333
```

```
0.3333
```

```
0.0000
```

实际上也可以用分解得到的两个三角矩阵求解.

```
>>y = L\b
```

```
>>x = U\y
```

其中间结果为

```
y =
```

```
5.0000
```

```
0.2857
```

```
0.0000
```

2. 正交变换



“QR”分解对方阵和长方矩阵都很有用,它表示为正交矩阵和上三角矩阵的乘积.

例如:

A =

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

是一个秩亏损(降秩)矩阵,中间列是其他两列的平均,秩和亏损值由“QR”分解得出.

$\gg [Q,R] = \text{qr}(A)$

Q =

-0.0776	-0.8331	0.5444	0.0005
-0.3105	-0.4512	-0.7709	0.0351
0.5433	-0.0694	0.0913	-0.8317
-0.7762	0.3124	0.3178	0.4461

R =

-12.8841	-14.5916	-2.0826
0	0	0.0000
0	0	0

容易验证 $Q * R$ 的值就是原矩阵 A. 观察 R 矩阵的三角结构,其对角线的下半部给出 0, 在对角线上 R(3,3) 元素为零值,说明 R 与原来 A 矩阵不是满秩的.

“QR”分解可以解决方程多于未知数的线性系统问题,例如:

b =

1
3
5
7

线性系统 $Ax=b$ 具有三个未知数和四个线性方程. 在最小二乘意义下的最优化结果是计算

$x = A/b$

屏幕会给警告信息:

Warning: Rank deficient (秩亏损) rank = 2, tol = 1.4594E-014

及输出结果:



x =

0.5000

0.0000

0.1667

量 tol 是决定 R 的对角线上元素被忽略时使用的允许误差. 使用 QR 分解, 分成两步求解未知的 x:

$\gg y = Q' * b;$

$\gg x = Ry$

如果用 $A * x$ 来验证计算结果, 我们将发现在舍入误差范围内其值等于 b, 这就告诉我们, 虽然联立方程 $Ax = b$ 是超且缺秩的, 但其结果是一致的. x 向量的解有无穷多个, QR 分解到的仅是其中的一个 QR 分解也是函数 null(零) orth(正交化) 的基础, 对零空间和给定的正交矩阵它可产生一个正交基.

3. 奇异值分解

在 MATLAB 中三重赋值语句

$$[U, S, V] = \text{svd}(A)$$

其中 svd 为奇异值分解, 在奇异值分解中产生三个因数矩阵 U, S 和 V:

$$A = U * S * V'$$

矩阵 U 和矩阵 V 是正交矩阵, 矩阵 S 是对角矩阵, 而且 svd(A) 恰好返回 S 的对角元素, 就是 A 的奇异值.

其他几种函数也可被进行奇异值分解, 这包括广义逆矩阵 pinv(A)、秩 rank(A)、欧几里得矩阵范数 norm(A, 2) 和条件数 cond(A).

4. 特征值

如果 A 是 $n \times n$ 矩阵, n 个 λ 值满足式 $Ax = \lambda x$, 则 λ 为 A 的特征值, x 为 A 的特征向量.

计算特征值使用 eig(A), 以列向量形式返回特征值. 如果 A 是实对称矩阵, 特征值为实数, 如果 A 不对称, 特征值通常为复数. 例如:

A =

0 1

-1 0

eig(A) 产生;

ans =



0.0000+1.0000i

0.0000-1.0000i

求解特征值和特征向量可以用双赋值语句得到:

$[X, D] = \text{eig}(A)$

D 的对角元素是特征值, X 为矩阵, 它的列是相应的特征向量, 以使得 $A * X = X * D$.

如果 A 是对称矩阵, 则 X 为正交矩阵, $X^{-1}AX = D$.

计算特征值的中间结果有两种形式:

Hessenberg 形式 $\text{hess}(A)$;

Schur 形式为 $\text{schur}(A)$. Schur 形式用来计算矩阵的超越函数, 例如 $\text{sqrtm}(A)$ 和 $\text{logn}(A)$.

如果 A 和 B 是方阵, 函数由求解广义特征值方程 $Ax = Bx$, 返回一个含有广义特征值的向量.

双赋值语句获得特征向量:

$[X, D] = \text{eig}(A, B)$

产生特征值为对角阵 D 的对角元素. 满秩矩阵 X 的列阵相应于特征向量, 使 $A * X = B * X * D$, 中间结果由 $\text{qz}(A, B)$ 提供.

5. 矩阵的秩

用函数 rank 求矩阵的秩. MATLAB 计算秩有用 $\text{rref}(A)$ 法、对于非方阵 A 的 A/B 有 $\text{orth}(A)$ 、 $\text{null}(A)$ 方法及广义逆矩阵 $\text{pinv}(A)$ 方法等几种不同的方法. 由于采用三种不同舍入规则三种算法, 所以有可能对同一矩阵得到三个不同的值.

利用 $\text{rref}(A)$, A 的秩为非零行的数值目, rref 算法是三种定秩算法中最简单的一个, 但是最不可靠. $\text{pinv}(A)$ 是基于奇异值的算法, 它消耗时间最多, 但也最为可靠. 另外在计算满秩时 $\text{rank}(A)$ 也十分有用.

6. 矩阵的正交化和零化空间

如果矩阵 A 不是满秩矩阵, 且矩阵 Z 为正交矩阵, 亦即它满足 $Z' * Z = E$, 如果矩阵 Z 可以使得

$$AZ = 0,$$

则称矩阵 Z 为化零空间.

MATLAB 中提供了求取正交矩阵 $\text{orth}()$ 和化零矩阵 $\text{null}()$ 的函数, 这两个矩阵的调用方式分别为

$$Q = \text{orth}(A), \quad Z = \text{null}(A)$$



其中前一个函数由矩阵 A 构成一个正交基,亦即它的各列可以构成 A 矩阵的各列同样的空间,且 Q 的各列为正交的. 调用 MATLAB 提供的 `null()` 函数可以获得前面提及的化零空间,如果 A 为满秩矩阵,则不存在这样的矩阵 Z ,这时 `null()` 函数将返回一个空的矩阵.



六、举例

```
>>A=[1,2,-1;3,1,0;-1,0,-2]
```

```
A=
```

```
1 2 -1
3 1 0
-1 0 -2
```

```
>>det(A)
```

```
ans =
```

```
9
```

`det(A)` 表示行列式 $|A|=9$

```
>>inv(A)
```

```
ans =
```

```
-0.2222    0.4444    0.1111
0.6667   -0.3333   -0.3333
0.1111   -0.2222   -0.5556
```

`inv(A)` 表示 A 的逆 A^{-1}

```
>>B=[3,2,1,1;1,2,-3,2;4,4,-2,3]
```

```
B=
```

```
3 2 1 1
1 2 -3 2
4 4 -2 3
```

```
>>rank(B)
```

```
ans =
```

```
2
```

`rank(B)` 表示 B 的秩

```
>>C=[-2,1,1;0,2,0;4,1,3]
```

```
C=
```



```
-2  1  1
    0  2  0
    4  1  3
```

```
>>poly(C)
```

```
ans =
```

```
1    -3    -8    20
```

C 的特征多项式为 $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 8\lambda + 20$

```
>>eig(C)
```

```
ans =
```

```
-2.7016
```

```
3.7016
```

```
2.0000
```

```
>>[V,D]=eig(C)
```

```
V =
```

```
-0.8186    -0.1728    0.0000
```

```
0          0          0.7071
```

```
0.5743    -0.9850   -0.7071
```

```
D =
```

```
-2.7016         0         0
```

```
0          3.7016         0
```

```
0          0          2.0000
```

$CD=DV$ D 是对角阵

```
>>A=[1,2,2;2,1,2;2,2,1]
```

```
A =
```

```
1    2    2
```

```
2    1    2
```

```
2    2    1
```

```
>>[P,B]=eig(A)
```

```
P =
```

```
0.7737    -0.2609    0.5774
```

```
-0.6128    -0.5396    0.5774
```

```
-0.1609     0.8005    0.5774
```



B =

-1.0000	0	0
0	-1.0000	0
0	0	5.0000



七、函数分类索引

1. 基本的数字函数

SIN	正弦
SINH	双曲正弦
ASIN	反正弦
ASINH	反双曲正弦
COS	余弦
COSH	双曲余弦
ACOS	反余弦
ACOSH	反双曲余弦
TAN	正切
TANH	双曲正切
ATAN	反正切
ATANH	反双曲正切
SEC	正割
SECH	双曲正割
ASEC	反正割
ASECH	反双曲正割
CSC	余割
CSCH	双曲余割
ACSC	反余割
ACSCH	反双曲余割
COT	余切
COSTH	双曲余切
ACOT	反余切
ACOTH	反双曲余切



EXP	指数函数
LOG	自然函数
LOG ₁₀	以 10 为底的对数
SQRT	平方根
ABS	绝对值或字符串到数字的转换
ANGLE	相角
CONJ	复数共轭
IMAG	复数虚部
REAL	复数实部
FIX	朝零方向取整
FLOOR	朝负无穷方向取整
CEIL	朝正无穷方向取整
ROUND	四舍五入到最接近的整数
REM	除后余数
SIGN	符号函数

2. 矩阵分析

RANK	矩阵的秩(矩阵线性无关行数或列数)
DET	行列式计算
TRACE	矩阵的迹(矩阵对角线元素之和)
NULL	零空间
ORTH	正交化
RRTH	产生一个阶梯状或减缩行的矩阵
\AND/	线性方程的解;用“help slash”
CHOL	Cholesky 分解
LU	用高斯消去法得系数矩阵
INV	矩阵求逆
QR	正交三角阵分解
QRDELETE	从正交分解中消去一列
QRINSERT	在正交分解中插入一列
NNLS	非负最小二乘法
PINV	伪逆
LSCOV	在已知协方差情况下的最小二乘解



EIG 特征值和特征向量的计算

POLY 特征多项式的系数

SVD 奇异值分解

注意:这些函数使用时都用小写,具体使用可借助 help 命令.如 help gr 可查询 gr 的使用方法.



练习

试用 MATLAB 语言求解下列各题.

1. 求下列矩形的秩、行列式、特征根、特征向量.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}; \quad (2) B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. 求方程组的解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

3. 求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵.

4. 解矩阵方程

$$X \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. 求向量组 $\alpha_1 = (1, -2, 2, 3), \alpha_2 = (-2, 4, -1, 3), \alpha_3 = (-1, 2, 0, 3), \alpha_4 = (0, 6, 2, 3), \alpha_5 = (2, -6, 3, 4)$ 的最大线性无关组.

习题



参考答案



习题一

$$1. (1) M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$A_{12} = -M_{12}, A_{31} = M_{31}, A_{33} = M_{33};$$

$$(2) M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix},$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$A_{12} = -M_{12}, \quad A_{31} = M_{31}, \quad A_{33} = M_{33}.$$

$$2. (1) 18; \quad (2) (-1)^{n-1} n!.$$

$$3. (1) 48; \quad (2) 900; \quad (3) 1; \quad (4) 0; \quad (5) 5; \quad (6) 4abcdef;$$

$$(7) r^2 \sin \varphi; \quad (8) abcd + ab + cd + ad + 1.$$

$$4. (1) a^{n-2}(a^2 - 1); \quad (2) [x + (n-1)a](x-a)^{n-1};$$

$$(3) 0; \quad (4) \prod_{n \geq i > j \geq 1} (j-i);$$



$$(5) (a^2 - b^2)^n.$$

5. 略.

$$6. (1) x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = -1;$$

$$(2) x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = -5, x_4 = -2;$$

$$(3) x = a, y = b, z = c.$$

$$7. f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7.$$

$$8. \lambda = 1 \text{ 或 } \lambda = -1.$$



习题二

$$1. (19, 1, 0).$$

2. β_1, β_3 不能;

$$\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + 0\alpha_4;$$

$$\beta_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\alpha_3 + 3\alpha_4.$$

3. 略.

4. 略.

5. 略.

6. 线性相关.

7. 略.

8. 当 $c \neq 5$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

当 $c = 5$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 且 $\alpha_3 = \frac{11}{7}\alpha_1 + \frac{1}{7}\alpha_2$.

9. (1) 不存在相关性;

(2) 线性无关;

(3) 线性相关;

(4) 线性相关;

(5) 线性无关.

10. 不对.

11. 略.

12. 不一定.

13. α_1, α_4 , 秩为 2.

14. (1) 能; (2) 不能.



15. 略.

16. 构成一个向量空间.

$$17. \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$



习题三

$$1. (1) \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 8 & 2 \\ 3 & 7 & 9 & 13 \end{bmatrix};$$

$$(2) \begin{bmatrix} 14 & 13 & 8 & 7 \\ -2 & 5 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix};$$

$$(3) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & -5 \end{bmatrix};$$

$$(4) \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & \frac{10}{3} & 2 & 2 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2. 3AB - 2A = \begin{bmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{bmatrix}, \quad A'B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$3. (1) 4; \quad (2) \begin{bmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{bmatrix}; \quad (3) \begin{bmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & -6 \end{bmatrix};$$

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}; \quad (5) \begin{bmatrix} -6 & 29 \\ 5 & 32 \end{bmatrix}.$$

$$4. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$



$$5. \begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$6. (1) \begin{bmatrix} -9 & 0 & 6 \\ -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 9 \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 不一定成立.

$$7. (1) \text{ 取 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0, \text{ 而 } A^2 = 0;$$

$$(2) \text{ 取 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 有 } A \neq 0, A \neq E, \text{ 而 } A^2 = A;$$

$$(3) \text{ 取 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 有 } X \neq Y \text{ 而 } AX = AY.$$

$$8. A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3\lambda & 1 \end{bmatrix}, \dots, A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k\lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

$$9. A^k = \lambda^{k-2} \begin{bmatrix} \lambda^2 & k\lambda & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & \lambda^2 & k\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

10. 略.

11. 略.

$$12. (1) \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{bmatrix};$$

$$(3) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}; \quad (4) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



$$13. (1) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

14. 略.

$$15. A^{-1} = \frac{1}{2}(A - E); \quad (A + 2E)^{-1} = \frac{1}{4}(3E - A).$$

$$16. \begin{bmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$17. \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

18. 36.

19. (1)2; (2)3; (3)3.

20. (1) 线性相关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为它的一个最大无关组;

(2) 线性相关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为它的一个最大无关组;

(3) 线性相关, α_1, α_3 为它的一个最大无关组.

$$21. (1) \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix};$$

$$(3) \begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & -20 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



$$22. (1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$23. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$24. \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}.$$

25. 略.

$$26. (1) x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0;$$

$$(2) x_1 = -5, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 4.$$

$$27. (1) \text{最大无关组为 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \text{ 且 } \alpha_4 = -\frac{1}{3}\alpha_1 - \frac{1}{3}\alpha_2 - \frac{1}{3}\alpha_3;$$

$$(2) \text{最大无关组 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \text{ 且 } \alpha_3 = \alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_5 = 3\alpha_1 - 8\alpha_2 + 6\alpha_4.$$

$$28. (1) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$(2) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$



习题四

$$1. (1) \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = \frac{4}{3}x_3, \\ x_3 = x_3 \quad (x_3 \text{ 为任意实数}); \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 + x_4, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = 1, \\ x_4 = x_4 \quad (x_2, x_4 \text{ 为任意实数}). \end{cases}$$



$$2. (1) \xi = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -3 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (2) \xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$3. (1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数};$$

$$(2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{其中 } k_1, k_2, k_3 \text{ 为任意常数};$$

4. 略.

$$5. (1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数};$$

$$(2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数};$$

$$(3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{其中 } k \text{ 为任意常数};$$



(4) 无解.

6. 当 $\lambda = 1$ 时有解, 通解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

7. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

8. 略.

9. 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 3$ 时有唯一解. 解为

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = \frac{4 - \lambda}{3 - \lambda}, \\ x_3 = \frac{1}{3 - \lambda}. \end{cases}$$

当 $\lambda = 3$ 时无解.

当 $\lambda = 1$ 时有无穷解, 通解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 k_1, k_2 为任意常数.

10. 略.

11. 略.



习题五

1. $\|\alpha\| = \sqrt{6}$, $\|\beta\| = \sqrt{2}$, $[\alpha, \beta] = -3$, $\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{5}{6}\pi$.

2. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.



$$3. a = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad d = 0, \quad e = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$4. \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

$$5. \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

6. 略.

7. 略.

$$8. (1) \lambda_1 = -1, \quad k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} (k_1 \neq 0); \quad \lambda_2 = 4, \quad k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} (k_2 \neq 0);$$

$$(2) \lambda_1 = -7, \quad k_1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} (k_1 \neq 0);$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 2, \quad k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (k_2, k_3 \text{ 不全为零});$$

$$(3) \lambda_1 = -2, \quad k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (k_1 \neq 0);$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2, \quad k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (k_2, k_3, k_4 \text{ 不全为零}).$$

9. 略.



$$10. \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -4 & -5 & -4 \\ 4 & -4 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$11. \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 - 2^{2000} & -1 + 2^{2000} & -1 + 2^{2000} \\ 0 & 3 \cdot 2^{2000} & 0 \\ 4 - 2^{2000} & -1 + 2^{2000} & -1 + 2^{2002} \end{bmatrix}.$$

$$12. (1) P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix};$$

$$(2) P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

13. 略.

$$14. (1) P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}, \quad f = 10y_1^2 + y_2^2 + y_3^2;$$

$$(2) P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad f = -2y_1^2 + 7y_2^2 + 7y_3^2.$$

$$15. (1) f = y_1^2 + y_2^2, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y};$$



$$(2) f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z}.$$

16. 略.

17. (1) 负定的; (2) 正定的.

18. $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$.



习题六

1. 各个线性空间的基可取为

$$(1) \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(2) \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(3) \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. (1) 是; (2) 不是.

3. 是.

4. (1) 不是; (2) 是; (3) 是.

5. 略.

6. (1) 是, $\alpha = 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3$;

(2) 不是;

(3) 不是.

$$7. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix},$$

$$\text{或} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 19 & \frac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\frac{63}{2} \\ 7 & 10 & \frac{99}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$



$$8. (1) C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(2) \frac{1}{13}(3, 5, -2, -3).$$

9. (1) 关于 y 轴对称;

(2) 投影到 y 轴;

(3) 关于直线 $y = x$ 对称;

(4) 逆时针方向旋转 90° .

10. (1) 略.

$$(2) \begin{bmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{bmatrix}.$$

$$11. \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 14 & -6 \\ 7 & 14 & 9 \\ 0 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

12. 略.

13. 略.