

习题一



一、实数集 R 上定义函数 f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 , 对 $\forall x, y \in R$,
 $f_1(\langle x, y \rangle) = x + y$, $f_2(\langle x, y \rangle) = x - y$, $f_3(\langle x, y \rangle) = xy$,
 $f_4(\langle x, y \rangle) = \max\{x, y\}$, $f_5(\langle x, y \rangle) = |x - y|$,

问: (1) 哪些是 R 上的二元运算,

(2) 哪些满足交换律, 哪些满足结合律,

(3) 哪些在 R 上的二元运算有么元,

(4) 哪些在 R 上的二元运算有零元。



解答一

解: $f_1(\langle x, y \rangle) = x + y$, 是二元运算, 满足交换律,
满足结合律, 么元为0, 无零元,

$f_2(\langle x, y \rangle) = x - y$, 是二元运算, 不满足交换律,
不满足结合律, 无么元, 无零元,

$f_3(\langle x, y \rangle) = xy$, 是二元运算, 满足交换律,
满足结合律, 么元为1, 零元为0,

$f_4(\langle x, y \rangle) = \max\{x, y\}$, 是二元运算, 满足交换律,
满足结合律, 无么元, 无零元,

$f_5(\langle x, y \rangle) = |x - y|$, 是二元运算, 满足交换律,
不满足结合律, 无么元,





习题二

二、以下是否为代数系统，属于哪种代数系统

(1) $S_1 = \{1, 1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, 4\}$ ，乘法运算；

(2) $S_2 = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$ ，加法运算；

(3) $S_3 = \{0, 1\}$ ，乘法运算；

(4) $S_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ ，小于等于关系；

(5) $S_5 = \{1, 2, 3, 6\}$ ，整除关系。



习题三、四



三、设 $G = \{a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$

G 上运算 $*$ 为矩阵的乘法运算

(1) 找出 G 的全部子群;

(2) 在同构意义下 G 是四阶循环群还是 *Klein* 四元群?

四、设 $S = Q \times Q$, Q 为有理数, 定义 S 上二元运算 $*$,
对 $\forall \langle a, b \rangle, \langle x, y \rangle \in S$, 有 $\langle a, b \rangle * \langle x, y \rangle = \langle ax, ay + b \rangle$,

问(1) $*$ 是否可交换, 可结合?

(2) $*$ 是否有么元? 有的话, 是什么?

(3) 哪些元素存在逆元, 是什么?



解答三



$$G = \left\{ a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

解: a 是关于矩阵乘法的幺元, $\langle a \rangle = \{a\}$

$b^2 = a$, b 是二阶元, $\langle b \rangle = \{a, b\}$

$c^2 = b$, $c^3 = d$, $c^4 = a$, c 是四阶元,

$\langle c \rangle = \{a, b, c, d\}$

$d^2 = b$, $d^3 = c$, $d^4 = a$, d 是四阶元,

$\langle d \rangle = \{a, b, c, d\}$

G 共有3个不同的子群。

G 是四阶循环群, 其中 c, d 都是生成元。



解答四



$$\langle a, b \rangle * \langle x, y \rangle = \langle ax, ay + b \rangle$$

解: $\langle a, b \rangle * \langle x, y \rangle = \langle ax, ay + b \rangle,$

$$\langle x, y \rangle * \langle a, b \rangle = \langle xa, xb + y \rangle,$$

不满足交换律,

$$(\langle a, b \rangle * \langle x, y \rangle) * \langle u, v \rangle = \langle axu, axv + ay + b \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle * (\langle x, y \rangle * \langle u, v \rangle) &= \langle a, b \rangle * \langle xu, xv + y \rangle \\ &= \langle axu, axv + ay + b \rangle, \end{aligned}$$

满足结合律,





解答四

$$\langle a, b \rangle * \langle x, y \rangle = \langle ax, ay + b \rangle$$

解： 设存在么元为 $\langle e_1, e_2 \rangle$ ， 则有

$$\langle e_1, e_2 \rangle * \langle x, y \rangle = \langle e_1 x, e_1 y + e_2 \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, y \rangle * \langle e_1, e_2 \rangle = \langle x e_1, x e_2 + y \rangle = \langle x, y \rangle$$

可解得 $e_1 = 1, e_2 = 0$ ， 么元为 $\langle 1, 0 \rangle$ ，

设 $\langle x, y \rangle$ 的逆元为 $\langle u, v \rangle$ ， 则有

$$\langle x, y \rangle * \langle u, v \rangle = \langle x u, x v + y \rangle = \langle 1, 0 \rangle$$

$$\langle u, v \rangle * \langle x, y \rangle = \langle u x, u y + v \rangle = \langle 1, 0 \rangle$$

可解得 $u = 1/x, v = -y/x, (x \neq 0)$





解答四

$$\langle a, b \rangle * \langle x, y \rangle = \langle ax, ay + b \rangle$$

解： 设存在幺元为 $\langle e_1, e_2 \rangle$ ， 则有

$$\langle e_1, e_2 \rangle * \langle x, y \rangle = \langle e_1 x, e_1 y + e_2 \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, y \rangle * \langle e_1, e_2 \rangle = \langle x e_1, x e_2 + y \rangle = \langle x, y \rangle$$

可解得 $e_1 = 1, e_2 = 0$ ， 幺元为 $\langle 1, 0 \rangle$ ，

设 $\langle x, y \rangle$ 的逆元为 $\langle u, v \rangle$ ， 则有

$$\langle x, y \rangle * \langle u, v \rangle = \langle x u, x v + y \rangle = \langle 1, 0 \rangle$$

$$\langle u, v \rangle * \langle x, y \rangle = \langle u x, u y + v \rangle = \langle 1, 0 \rangle$$

可解得 $u = 1/x, v = -y/x, (x \neq 0)$

