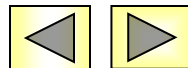




§ 1.3 等值演算

一、等值演算的概念

二、常用的重要等值公式





§ 1.3 等值演算

一、等值演算的概念

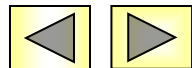
等值公式

设 A, B 为两命题公式，若等价式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，称 A 与 B 等值。记作： $A \Leftrightarrow B$

等值关系是自反的、对称的和传递的，因而为等价关系。用真值表可以验证公式等值。

等值演算

按一定方法寻找某个复合命题公式的等值式的过程。



§ 1.3 等值演算

例5：判断命题公式是否等值

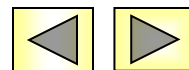
$$\neg(p \vee q) \text{ 与 } \neg p \vee \neg q$$

不等值

真值分析如下：

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0

表1.5



§ 1.3 等值演算

二、常用的重要等值公式

$$1、A \Leftrightarrow \neg (\neg A)$$

双重否定律

$$2、A \Leftrightarrow A \vee A$$

$$3、A \Leftrightarrow A \wedge A$$

幂等律

$$4、A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$

$$5、A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

交换律

$$6、(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

$$7、(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$

结合律





§ 1.3 等值演算

$$8、A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$9、A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

分配律

$$10、\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$11、\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

德摩根律

$$12、A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$$

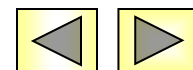
$$13、A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$$

吸收律

$$14、A \vee 1 \Leftrightarrow 1$$

$$15、A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$

零律



§ 1.3 等值演算

$$16、A \vee 0 \Leftrightarrow A$$

$$17、A \wedge 1 \Leftrightarrow A$$

$$18、A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$$

$$19、A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$$

$$20、A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$21、A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

$$22、A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

$$23、A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$$

$$24、(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$$

同一律

排中律

矛盾律

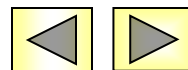
蕴涵等值式

等价等值式

假言易位

等价否定等值式

归谬论

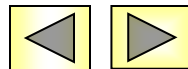




§ 1.3 等值演算

以上24个等值式必须熟记，并注意其中所含的 A, B, C 可以是任意的一个命题公式，因而每个公式是一个模式，可以代表无数多个同类型的命题公式。

利用24个基本等值式，不用真值表法也可以推演出很多等值式。





§ 1.3 等值演算

此外，在进行等值演算时，常常用到：

置换规则

设 $\Phi(A)$ 是含命题公式 A 的命题公式, $\Phi(B)$ 是用 B 置换了 $\Phi(A)$ 中的 A 之后得到的命题公式。若 $A \Leftrightarrow B$, 则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$ 。



§ 1.3 等值演算

例6：验证下列等值式

$$(1) (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$$

$$(2) p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

解题思想：

可以从左或右的任一个公式开始演算；演算的每一步都要用置换定理。

§ 1.3 等值演算

例6：验证下列等值式

$$(1) (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$$

$$\text{解： } (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

蕴涵等值式

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$$

分配律

$$\Leftrightarrow \neg (p \vee q) \vee r$$

德摩根律

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$$

蕴涵等值式



§ 1.3 等值演算

例6：验证下列等值式

$$(2) p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

解： p

$$\Leftrightarrow p \wedge 1$$

同一律

$$\Leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q)$$

排中律

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

分配律



§ 1.3 等值演算

例7：判别下列公式的类型

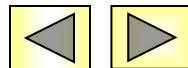
$$(1) (p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$$

$$(2) (p \vee \neg p) \rightarrow ((q \wedge \neg q) \wedge r)$$

$$(3) (p \rightarrow q) \wedge \neg p$$

解题思想：

真值表法和等值演算都可以用来判别公式的类型，但等值演算更为简单快捷。



§ 1.3 等值演算

例7: 判别下列公式的类型

$$(1) (p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$$

重言式

$$\begin{aligned} \text{解: } (1) &\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q \\ &\Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg p) \vee q \\ &\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \vee q \\ &\Leftrightarrow (1 \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee q \\ &\Leftrightarrow (\neg q \vee \neg p) \vee q \\ &\Leftrightarrow 1 \vee \neg p \\ &\Leftrightarrow 1 \end{aligned}$$

蕴涵等值式

德·摩根律

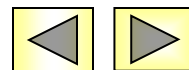
德·摩根律

分配律

同一律

分配律

零律



§ 1.3 等值演算

例7: 判别下列公式的类型

$$(2) (p \vee \neg p) \rightarrow ((q \wedge \neg q) \wedge r)$$

矛盾式

解: $(2) \Leftrightarrow 1 \rightarrow ((q \wedge \neg q) \wedge r)$

排中律

$$\Leftrightarrow 1 \rightarrow (0 \wedge r)$$

矛盾律

$$\Leftrightarrow 1 \rightarrow 0$$

零律

$$\Leftrightarrow 0$$



§ 1.3 等值演算

例7：判别下列公式的类型

$$(3) (p \rightarrow q) \wedge \neg p$$

可满足式

解： $(3) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg p$

蕴涵式

$$\Leftrightarrow \neg p$$

吸收律

真值分析如下：

p	q	$\neg p$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

