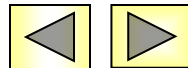




§ 1.4 范式

一、范式的概念

二、主析取范式与主合取范式



§ 1.4 范式

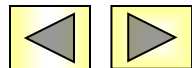
一、范式的概念

简单析取式：仅由有限个命题变元或其否定构成的析取式，如 $p \vee q$, $\neg p \vee q$ 。

简单合取式：仅由有限个命题变元或其否定构成的合取式，如 $\neg p \wedge \neg q$ 。

显然：简单析取式是重言式，当且仅当它同时含有一个命题变项及其否定；

简单合取式是矛盾式，当且仅当它同时含有一个命题变项及其否定。





§ 1.4 范式

析取范式： 仅由有限个简单合取式构成的析取式。

如： $A = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$, $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为简单合取式。

合取范式： 仅由有限个简单析取式构成的合取式。

如： $A = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$, $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为简单析取式。

性质：

析取范式为矛盾式，当且仅当构成它的每一个简单合取式都是矛盾式；

合取范式为重言式，当且仅当构成它的每一个简单析取式都是重言式。



§ 1.4 范式

范式存在定理

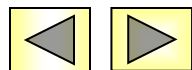
任一命题公式都存在着与之等价的析取范式和合取范式。

求范式的步骤：

- (1) 消去联结词 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 。
- (2) $\neg$ 的消去或内移。利用德·摩根律或双重否定律
- (3) 利用分配律。求析取范式，可利用 $\wedge$ 对 $\vee$ 的分配律；求合取范式，可利用 $\vee$ 对 $\wedge$ 的分配律

基本等值式： $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$$



§ 1.4 范式

例8：求命题公式 $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$ 的合取范式和析取范式。

解：(1) 求析取范式

$$((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \vee r) \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee p$$

$$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee p$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee p$$

$$\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg r)$$



§ 1.4 范式

例8：求命题公式 $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$ 的合取范式和析取范式。

解：(2) 求合取范式

$$((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee p$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q \vee p) \wedge (\neg r \vee p)$$

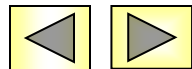
$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg r \vee p)$$





§ 1.4 范式

值得注意的是，任何命题公式的析取范式或合取范式不唯一，因而不能作为命题公式的标准型。为此，进一步引入“主析取范式”、“主合取范式”的概念。它们是用极小项、极大项来定义的。



§ 1.4 范式

二、主析取范式与主合取范式

极小项：含有 n 个命题变元的**简单合取式**，且具有

$$\text{形式： } \overline{P_1} \wedge \overline{P_2} \wedge \cdots \wedge \overline{P_n}$$

极大项：含有 n 个命题变元的**简单析取式**，且具有

$$\text{形式： } \overline{P_1} \vee \overline{P_2} \vee \cdots \vee \overline{P_n}$$

注1：其中 $\overline{P_i}$ 指 p_i 或 $\neg p_i$, $1 \leq i \leq n$

注2：极小项、极大项中必含有 $n-1$ 个联结词

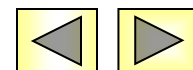
注3： $\overline{P_i}$ 一定位于第 i 个位置，顺序不能乱



§ 1.4 范式

极小项的表示（以3个命题变项为例）：

$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	成真赋值	000 ---- 0, 记作 m_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$		001 ---- 1, 记作 m_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$		010 ---- 2, 记作 m_2
$\neg p \wedge q \wedge r$		011 ---- 3, 记作 m_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$		100 ---- 4, 记作 m_4
$p \wedge \neg q \wedge r$		101 ---- 5, 记作 m_5
$p \wedge q \wedge \neg r$		110 ---- 6, 记作 m_6
$p \wedge q \wedge r$		111 ---- 7, 记作 m_7



§ 1.4 范式

极大项的表示（以3个命题变项为例）：

$$p \vee q \vee r$$

$$p \vee q \vee \neg r$$

$$p \vee \neg q \vee r$$

$$p \vee \neg q \vee \neg r$$

$$\neg p \vee q \vee r$$

$$\neg p \vee q \vee \neg r$$

$$\neg p \vee \neg q \vee r$$

$$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$$

成真赋值

000 ---- 0, 记作 M_0

001 ---- 1, 记作 M_1

010 ---- 2, 记作 M_2

011 ---- 3, 记作 M_3

100 ---- 4, 记作 M_4

101 ---- 5, 记作 M_5

110 ---- 6, 记作 M_6

111 ---- 7, 记作 M_7



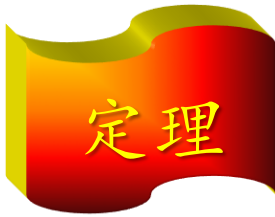
§ 1.4 范式

主析取范式:

命题公式 A 的析取范式中的简单合取式全是极小项。
特别地约定, 矛盾式的主析取范式为 0 。

主合取范式:

命题公式 A 的合取范式中的简单析取式全是极大项。
特别地约定, 重言式的主合取范式为 1 。



定理

任何命题公式的主析取范式和主合取范式一定存在, 并且唯一。



§ 1.4 范式

给定命题公式A的**主析取范式**的求解步骤:

(1) 求A的析取范式A'

(2) 若A'的某简单合取式B中不含命题变项 p_i 或 $\neg p_i$,
则展开B如下:

$$B \Leftrightarrow B \wedge 1 \Leftrightarrow B \wedge (p_i \vee \neg p_i) \Leftrightarrow (B \wedge p_i) \vee (B \wedge \neg p_i)$$

(3) 消去重复出现的命题变项、极小项和矛盾式

(4) 将极小项按下标从小到大的顺序排列



§ 1.4 范式

给定命题公式A的**主合取范式**的求解步骤:

(1) 求A的合取范式A'

(2) 若A'的某简单析取式B中不含命题变项 p_i 或 $\neg p_i$,
则展开B如下:

$$B \Leftrightarrow B \vee 0 \Leftrightarrow B \vee (p_i \wedge \neg p_i) \Leftrightarrow (B \vee p_i) \wedge (B \vee \neg p_i)$$

(3) 消去重复出现的命题变项、极大项和重言式

(4) 将极大项按下标小到大的顺序排列



§ 1.4 范式

例9：求公式 $((p \rightarrow r) \vee q) \wedge (q \rightarrow p)$ 的主析取范式和主合取范式。

解：(1) 求主析取范式

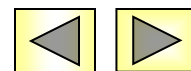
$$((p \rightarrow r) \vee q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p \vee r) \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee p)) \vee (q \wedge (\neg q \vee p))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p) \vee (r \wedge \neg q) \vee (r \wedge p)) \\ \vee ((q \wedge \neg q) \vee (q \wedge p))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg q) \vee (r \wedge p) \vee (q \wedge p)$$



§ 1.4 范式

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg q) \vee (r \wedge p) \vee (q \wedge p)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & ((\neg p \wedge \neg q) \wedge (r \vee \neg r)) \vee ((r \wedge \neg q) \wedge (p \vee \neg p)) \\ & \vee ((r \wedge p) \wedge (q \vee \neg q)) \vee ((q \wedge p) \wedge (r \vee \neg r)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \\ & \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \\ & \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_0 \vee m_5 \vee m_1 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_7 \vee m_6$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$



§ 1.4 范式

例9：求公式 $((p \rightarrow r) \vee q) \wedge (q \rightarrow p)$ 的主析取范式和主合取范式。

解：(2) 求主合取范式

$$((p \rightarrow r) \vee q) \wedge (q \rightarrow p)$$

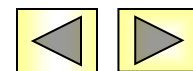
$$\Leftrightarrow ((\neg p \vee r) \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee r \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q \vee r) \wedge ((p \vee \neg q) \vee (r \wedge \neg r))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow M_4 \wedge M_3 \wedge M_2 \Leftrightarrow M_2 \wedge M_3 \wedge M_4$$





§ 1.4 范式

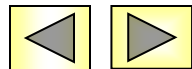
主析取范式（主合取范式）的用途：

- (1) 求命题公式的成真和成假赋值。
- (2) 判断两命题公式是否等值。通过判断两命题公式的主析取范式（主合取范式）是否相等
- (3) 判断命题公式的类型。

A 为重言式，当且仅当 A 的主析取范式含所有极小项

A 为矛盾式，当且仅当 A 的主析取范式不含任何极小项

A 为可满足式，当 A 的主析取范式中至少含一个极小项





§ 1.4 范式

主析取范式（主合取范式）的用途：

- (1) 求命题公式的成真和成假赋值。
- (2) 判断两命题公式是否等值。通过判断两命题公式的主析取范式（主合取范式）是否相等
- (3) 判断命题公式的类型。

A 为重言式，当且仅当 A 的主合取范式不含任何极大项

A 为矛盾式，当且仅当 A 的主合取范式含所有极大项

A 为可满足式，当 A 的主合取范式中至少含一个极大项



§ 1.4 范式

例10：判断下列命题公式的类型

$$(1) \neg(p \rightarrow q) \wedge q$$

矛盾式

$$(2) ((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$$

解：(1) $\neg(p \rightarrow q) \wedge q$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q$$

$$\Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge q$$

$$\Leftrightarrow 0$$



§ 1.4 范式

例10：判断下列命题公式的类型

$$(1) \neg (p \rightarrow q) \wedge q$$

$$(2) ((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$$

重言式

解：(2) $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$

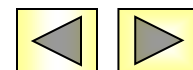
$$\Leftrightarrow \neg ((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee q$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_2 \vee m_1 \vee m_0 \vee m_3$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$$



§ 1.4 范式

主析取范式和主合取范式的关系：

设命题公式含 n 个命题变项，其主析取范式中含 k 个极小项 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ，不含极小项 $m_{j_1}, m_{j_2}, \dots, m_{j_{2^n-k}}$ ，则主合取范式中含极大项 $M_{j_1}, M_{j_2}, \dots, M_{j_{2^n-k}}$

如： A 中含3个命题变项，

$$A \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_6 \vee m_7$$

$$\text{则 } A \Leftrightarrow M_2 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5$$

