

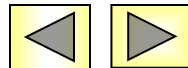


§ 1.6 推理理论

一、推理的概念

二、构造证明法

三、构造证明的技巧



§ 1.6 推理理论

一、推理的概念

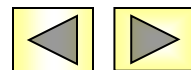
推理：从前提推出结论的思维过程。

前提指已知的命题公式，结论是从前提出发按照一定的推理规则推出的命题公式。

逻辑结论（有效结论）：

若 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$ 为重言式，则称由 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 推出结论 B 的推理是正确的，称 B 是 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的有效结论。

记为 $(A_1, A_2, \dots, A_n) \models B$



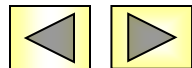
§ 1.6 推理理论

例11: 判断下面各推理是否正确

- (1) 如果天气凉快, 小王就不去
所以小王没去游泳。
- (2) 如果我上街, 我一定去新华书店
所以我没去新华书店。

解题思想:

- (1) 将命题符号化;
- (2) 写出前提、结论和推理的形式结构;
- (3) 用真值表法、等值演算或主析取范式法进行判断。





§ 1.6 推理理论

例11：判断下面各推理是否正确

(1) 如果天气凉快，小王就不去游泳。天气凉快，
所以小王没去游泳。

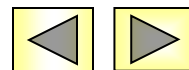
解：设 p ：天气凉快， q ：小王去游泳

前提： $p \rightarrow \neg q, p$

结论： $\neg q$

推理的形式结构为

$$((p \rightarrow \neg q) \wedge p) \rightarrow \neg q \quad (*)$$

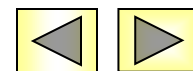


§ 1.6 推理理论

下面判断(*)式是否为重言式

$$\begin{aligned}
 & ((p \rightarrow \neg q) \wedge p) \rightarrow \neg q \\
 \Leftrightarrow & \neg((\neg p \vee \neg q) \wedge p) \vee \neg q \\
 \Leftrightarrow & (\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg p) \vee \neg q \\
 \Leftrightarrow & ((p \wedge q) \vee \neg p) \vee \neg q \\
 \Leftrightarrow & (p \wedge q) \vee \neg p \vee \neg q \\
 \Leftrightarrow & (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \\
 \Leftrightarrow & m_3 \vee m_1 \vee m_0 \vee m_2 \\
 \Leftrightarrow & m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3
 \end{aligned}$$

推理
正
确





§ 1.6 推理理论

例11：判断下面各推理是否正确

(2) 如果我上街，我一定去新华书店。我没上街，
所以我没去新华书店。

解：设 p ：我上街， q ：我去新华书店

前提： $p \rightarrow q, \neg p$

结论： $\neg q$

推理的形式结构为

$$((p \rightarrow q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q \quad (**)$$



§ 1.6 推理理论

下面判断(**)式是否为重言式

$$\begin{aligned} & ((p \rightarrow q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q \\ \Leftrightarrow & \neg((\neg p \vee q) \wedge \neg p) \vee \neg q \\ \Leftrightarrow & (\neg(\neg p \vee q) \vee p) \vee \neg q \\ \Leftrightarrow & ((p \wedge \neg q) \vee p) \vee \neg q \\ \Leftrightarrow & (p \wedge \neg q) \vee p \vee \neg q \\ \Leftrightarrow & (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ \Leftrightarrow & m_2 \vee m_3 \vee m_0 \\ \Leftrightarrow & m_0 \vee m_2 \vee m_3 \end{aligned}$$

推理
不正
确





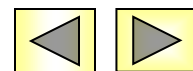
§ 1.6 推理理论

二、构造证明法

证明：描述推理过程的命题公式序列。

推理规则：在推理过程中，构造证明必须在给定的规则下进行，常用的推理如下：

- (1) 前提引入规则：证明的任何步骤上，都可引入前提
- (2) 结论引入规则：证明的任何步骤上，所证明的结论都可作为后续证明的前提
- (3) 置换规则：证明的任何步骤上，命题公式中的任何子命题公式都可以用与之等值的命题公式置换



§ 1.6 推理理论

(4) 假言推理规则: $A \rightarrow B, A \models B$

(5) 附加规则: $A \models A \vee B$

(6) 化简规则: $A \wedge B \models B$

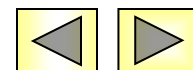
(7) 拒取式规则: $A \rightarrow B, \neg B \models \neg A$

(8) 假言三段论规则: $A \rightarrow B, B \rightarrow C \models A \rightarrow C$

(9) 析取三段论规则: $A \vee B, \neg B \models A$

(10) 构造性二难规则: $A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C \models B \vee D$

(11) 合取引入规则: $A, B \models A \wedge B$



§ 1.6 推理理论

例12: 构造下列推理的证明

(1) 前提: $p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s, \neg s$

结论: r

(2) 前提: $p \vee q, p \rightarrow \neg r, s \rightarrow t, \neg s \rightarrow r, \neg t$

结论: q



§ 1.6 推理理论

例12: 构造下列推理的证明

(1) 前提: $p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s, \neg s$

结论: r

证明: ① $\neg s$

前提引入

② $p \rightarrow s$

前提引入

③ $\neg p$

①②拒取式

④ $p \vee q$

前提引入

⑤ q

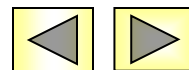
③④析取三段论

⑥ $q \rightarrow r$

前提引入

⑦ r

⑤⑥假言推理



§ 1.6 推理理论

(2) 前提: $p \vee q, p \rightarrow \neg r, s \rightarrow t, \neg s \rightarrow r, \neg t$ 结论: q

证明: ① $\neg t$

前提引入

② $s \rightarrow t$

前提引入

③ $\neg s$

①②拒取式

④ $\neg s \rightarrow r$

前提引入

⑤ r

③④假言推理

⑥ $p \rightarrow \neg r$

前提引入

⑦ $\neg p$

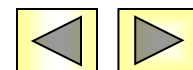
⑤⑥拒取式

⑧ $p \vee q$

前提引入

⑨ q

⑦⑧析取三段论



§ 1.6 推理理论

解题思想：

将命题符号化；写出前提和可能结论；使用构造证明法推演出正确结论。

例13：写出下面推理的证明。

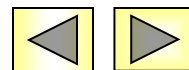
如果今天是星期一，则10点钟要进行离散数学或数据结构考试。如果数据结构课程的老师生病，则不考数据结构。今天是星期一，并且数据结构课程的老师生病，所以今天进行离散数学的考试。

解： 设 p ：今天是星期一；

q ：10点钟要进行离散数学考试；

r ：10点钟要进行数据结构考试；

s ：数据结构课程的老师生病；



§ 1.6 推理理论

例13: 写出下面推理的证明。

$$p \rightarrow (q \vee r)$$

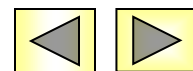
如果今天是星期一, 则10点钟要进行离散数学或数据结构 $s \rightarrow \neg r$ 如果数据结构课程的老师生病, 则不考数 $p \wedge s$]。今天是星期一, 并且数据结构课程的老师生病, 所以今天进行离散数学的考试。 q

解: 设 p : 今天是星期一;

q : 10点钟要进行离散数学考试;

r : 10点钟要进行数据结构考试;

s : 数据结构课程的老师生病;





§ 1.6 推理理论

前提: $p \rightarrow (q \vee r), s \rightarrow \neg r, p \wedge s$

结论: q

证明: ① $p \wedge s$

前提引入

② s

①化简规则

③ $s \rightarrow \neg r$

前提引入

④ $\neg r$

②③假言推理

⑤ p

①化简规则

⑥ $p \rightarrow (q \vee r)$

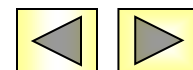
前提引入

⑦ $q \vee r$

⑤⑥假言推理

⑧ q

④⑦析取三段论



§ 1.6 推理理论

三、构造证明的技巧

1、附加前提证明法

当要证明的结论是一蕴涵式时，通过等价公式将结论中的前件变成前提，再证明该命题公式。

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow (A \rightarrow B) \Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge A) \rightarrow B$$

2、归谬法

当要证明结论 B 时，将 $\neg B$ 作为前提使用，推出矛盾的证明方法。

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B \Leftrightarrow \neg (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B)$$





§ 1.6 推理理论

例14：构造下列推理的证明

(1) 前提： $p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg s \vee p, q$

结论： $s \rightarrow r$

(2) 前提： $p \rightarrow (\neg (r \wedge s) \rightarrow \neg q), p, \neg s$

结论： $\neg q$



§ 1.6 推理理论

例14: 构造下列推理的证明

(1) 前提: $p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg s \vee p, q$

结论: $s \rightarrow r$

证明: ① $\neg s \vee p$

前提引入

② s

附加前提引入

③ p

①②析取三段论

④ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

前提引入

⑤ $q \rightarrow r$

③④假言推理

⑥ q

前提引入

⑦ r

⑤⑥假言推理



§ 1.6 推理理论

(2) 前提: $p \rightarrow (\neg(r \wedge s) \rightarrow \neg q)$, p , $\neg s$ 结论: $\neg q$

证明: ① $p \rightarrow (\neg(r \wedge s) \rightarrow \neg q)$

前提引入

② p

前提引入

③ $\neg(r \wedge s) \rightarrow \neg q$

①②假言推理

④ $\neg(\neg q)$

否定结论引入

⑤ q

④置换

⑥ $r \wedge s$

③⑤拒取式

⑦ s

⑥化简

⑧ $\neg s$

前提引入

⑨ $s \wedge \neg s$

⑦⑧合取

