



§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

一、合式公式的概念

原子公式：不出现命题联结词和量词的命题函数

$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, x_i 是个体常项或变项。

合式公式：

- (1) 原子公式是合式公式；
- (2) 若 A, B 是合式公式，则 $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式；
- (3) 若 A 是合式公式，则 $\forall xA, \exists xA$ 也是合式公式；





§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

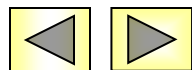
(4) 只有有限次地应用(1) ~ (3)构成的符号串才是合式公式。

合式公式也称谓词公式，简称为公式。

公式中，量词运算优先级高于所有的联结词。

指导变项及辖域：在谓词公式 $\forall xA$, $\exists xA$ 中，称 x 为指导变项，称 A 为相应量词的辖域。

在辖域中， x 的所有出现称为约束出现， A 中非约束出现的其他变项的出现称为自由出现。





§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

例5：指出下列各合式公式中的指导变项、量词的辖域、个体变项的约束情况。

$$(1) \forall x(F(x) \rightarrow \exists yH(x, y));$$

$$(2) \forall x \forall y (R(x, y) \vee L(y, z)) \wedge \exists xH(x, y);$$

$$(3) \forall x(F(x) \wedge \exists xH(x, z) \rightarrow \exists yL(x, y)) \vee H(x, y)。$$



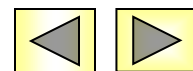


§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

例5：指出下列各合式公式中的指导变项、量词的辖域、个体变项的约束情况。

$$(1) \forall x(F(x) \rightarrow \exists yH(x, y));$$

解：(1) $\exists yH(x, y)$ 中， y 为指导变项， $\exists$ 的辖域为 $H(x, y)$ ，其中 y 是约束出现的， x 是自由出现的。
在整个公式中， x 为指导变项， $\forall$ 的辖域为 $F(x) \rightarrow \exists yH(x, y)$ ， x 、 y 都是约束出现。 x 约束出现2次， y 约束出现1次。



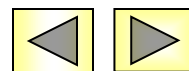


§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

例5：指出下列各合式公式中的指导变项、量词的辖域、个体变项的约束情况。

$$(2) \forall x \forall y (R(x, y) \vee L(y, z)) \wedge \exists x H(x, y)$$

解： $\forall x \forall y (R(x, y) \vee L(y, z))$ 中， x 、 y 为指导变项，两个 $\forall$ 的辖域为 $R(x, y) \vee L(y, z)$ ，其中 x 约束出现1次， y 约束出现2次， z 自由出现1次。在 $\exists x H(x, y)$ 中， x 为指导变项， $\exists$ 的辖域为 $H(x, y)$ ，其中 x 约束出现1次， y 自由出现1次。在整个公式中， x 约束出现2次， y 约束出现2次，自由出现1次， z 自由出现1次。



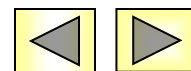


§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

例5：指出下列各合式公式中的指导变项、量词的辖域、个体变项的约束情况。

$$(3) \forall x(F(x) \wedge \exists xH(x, z) \rightarrow \exists yL(x, y)) \vee H(x, y)$$

解：在 $\exists xH(x, z)$ 中， x 为指导变项， $\exists$ 的辖域为 $H(x, z)$ ， x 约束出现， z 自由出现。在 $\exists yL(x, y)$ 中， y 为指导变项， $\exists$ 的辖域为 $L(x, y)$ ，其中 x 自由出现， y 约束出现。在 $\forall x(F(x) \wedge \exists xH(x, z) \rightarrow \exists yL(x, y))$ 中， x 为指导变项， $\forall$ 的辖域为 $F(x) \wedge \exists xH(x, z) \rightarrow \exists yL(x, y)$ ， x 约束出现3次， y 约束出现1次， z 自由出现1次。





§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

二、合式公式的改写

1、换名规则：

将量词辖域中出现的某个约束出现的个体变项及对应的指导变项，改成另一个辖域中未曾出现过的个体变项符号，公式的其余部分不变。

2、代替规则：

对某自由出现的个体变项用与原公式中所有个体变项符号不同的变项符号去代替，且处处代替。

能避免有的个体变项既可约束出现又可自由出现



§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

例6：对下列合式公式使用换名规则或代替规则。

(a) $\forall x \forall y (R(x, y) \vee L(y, z)) \wedge \exists x H(x, y);$

(b) $\forall x (F(x) \wedge \exists x H(x, z) \rightarrow \exists y L(x, y)) \vee H(x, y)。$

解：(a)先换名： $\forall x \forall y (R(x, y) \vee L(y, z)) \wedge \exists u H(u, y)$

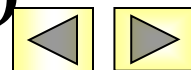
后代替： $\forall x \forall y (R(x, y) \vee L(y, z)) \wedge \exists u H(u, v)$

(b)先换名：

$$\forall x (F(x) \wedge \exists u H(u, z) \rightarrow \exists y L(x, y)) \vee H(x, y)$$

后代替：

$$\forall x (F(x) \wedge \exists u H(u, z) \rightarrow \exists y L(x, y)) \vee H(s, t)$$





§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

三、合式公式的解释

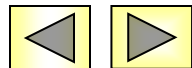
对合式公式中包含的个体变项、命题变项及函数变项分别用特殊的个体常项、命题常项及函数常项取代，构成对合式公式的**解释 I** 。

解释 I 的组成部分：(a) 非空个体域 D ；

(b) D 中一部分特定元素；

(c) D 上一些特定的函数；

(d) D 上一些特定的谓词。





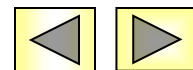
§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

例7：给定解释 I ：(a) $D_I = \{2, 3\}$ ；(b) D_I 中特定元素 $a = 2$ ；(c) 函数 $f(x)$ 为 $f(2) = 3, f(3) = 2$ ；(d) 谓词 $F(x)$ 为 $F(2) = 0, F(3) = 1$ ； $G(x, y)$ 为 $G(i, j) = 1, i, j = 2, 3$ ； $L(x, y)$ 为 $L(2, 2) = L(3, 3) = 1$ ； $L(2, 3) = L(3, 2) = 0$ 。
在解释 I 下，求下列各式的真值。

$$(1) \forall x (F(x) \wedge G(x, a))$$

$$(2) \exists x (F(f(x)) \wedge G(x, f(x)))$$

$$(3) \forall x \exists y L(x, y)$$





§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

例7：给定解释 I ：(a) $D_I = \{2, 3\}$ ；(b) D_I 中特定元素 $a = 2$ ；(c) 函数 $f(x)$ 为 $f(2) = 3, f(3) = 2$ ；(d) 谓词 $F(x)$ 为 $F(2) = 0, F(3) = 1$ ； $G(x, y)$ 为 $G(i, j) = 1, i, j = 2, 3$ ； $L(x, y)$ 为 $L(2, 2) = L(3, 3) = 1$ ； $L(2, 3) = L(3, 2) = 0$ 。
在解释 I 下，求下列各式的真值。

解题思想：若个体域为有限集，如 $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

则 $\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$

$\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$

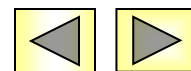
从而合式公式的真值等价于命题公式的真值。



§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

例7：给定解释 I ：(a) $D_I = \{2, 3\}$ ；(b) D_I 中特定元素 $a = 2$ ；(c) 函数 $f(x)$ 为 $f(2) = 3, f(3) = 2$ ；(d) 谓词 $F(x)$ 为 $F(2) = 0, F(3) = 1$ ； $G(x, y)$ 为 $G(i, j) = 1, i, j = 2, 3$ ； $L(x, y)$ 为 $L(2, 2) = L(3, 3) = 1$ ； $L(2, 3) = L(3, 2) = 0$ 。
在解释 I 下，求下列各式的真值。

解：(1) $\forall x (F(x) \wedge G(x, a))$
 $\Leftrightarrow (F(2) \wedge G(2, 2)) \wedge (F(3) \wedge G(3, 2))$
 $\Leftrightarrow (0 \wedge 1) \wedge (1 \wedge 1)$
 $\Leftrightarrow 0 \wedge 1 \Leftrightarrow 0$





§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

例7：给定解释 I ：(a) $D_I = \{2, 3\}$ ；(b) D_I 中特定元素 $a = 2$ ；(c) 函数 $f(x)$ 为 $f(2) = 3, f(3) = 2$ ；(d) 谓词 $F(x)$ 为 $F(2) = 0, F(3) = 1$ ； $G(x, y)$ 为 $G(i, j) = 1, i, j = 2, 3$ ； $L(x, y)$ 为 $L(2, 2) = L(3, 3) = 1$ ； $L(2, 3) = L(3, 2) = 0$ 。
在解释 I 下，求下列各式的真值。

$$\begin{aligned} \text{解：} & (2) \exists x (F(f(x)) \wedge G(x, f(x))) \\ & \Leftrightarrow (F(f(2)) \wedge G(2, f(2))) \vee (F(f(3)) \wedge G(3, f(3))) \\ & \Leftrightarrow (F(3) \wedge G(2, 3)) \vee (F(2) \wedge G(3, 2)) \\ & \Leftrightarrow (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \Leftrightarrow 1 \vee 0 \Leftrightarrow 1 \end{aligned}$$



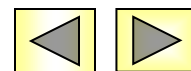


§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

例7: 给定解释 I : (a) $D_I = \{2, 3\}$; (b) D_I 中特定元素 $a = 2$; (c) 函数 $f(x)$ 为 $f(2) = 3, f(3) = 2$; (d) 谓词 $F(x)$ 为 $F(2) = 0, F(3) = 1$; $G(x, y)$ 为 $G(i, j) = 1, i, j = 2, 3$; $L(x, y)$ 为 $L(2, 2) = L(3, 3) = 1$; $L(2, 3) = L(3, 2) = 0$ 。
在解释 I 下, 求下列各式的真值。

解: (3) $\forall x \exists y L(x, y)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\exists y L(2, y)) \wedge (\exists y L(3, y)) \\ &\Leftrightarrow (L(2, 2) \vee L(2, 3)) \wedge (L(3, 2) \vee L(3, 3)) \\ &\Leftrightarrow (1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1) \Leftrightarrow 1 \wedge 1 \Leftrightarrow 1 \end{aligned}$$





§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

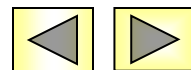
例8：给定解释 N 如下：(a) D_N 为自然数集合；(b) D_N 中特定元素 $a = 0$ ；(c) D_N 上特定函数 $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = x \cdot y$ ；(d) D_N 上特定谓词 $F(x, y)$ 为 $x = y$ 。
在解释 N 下，下列公式那些为真？那些为假？

(1) $\forall x F(g(x, a), x)$;

(2) $\forall x \forall y (F(f(x, a), y) \rightarrow F(f(y, a), x))$;

(3) $\forall x \forall y \exists z F(f(x, y), z)$

(4) $F(f(x, y), f(y, z))$





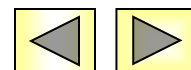
§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

例8：给定解释 N 如下：(a) D_N 为自然数集合；(b) D_N 中特定元素 $a = 0$ ；(c) D_N 上特定函数 $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = x \cdot y$ ；(d) D_N 上特定谓词 $F(x, y)$ 为 $x = y$ 。
在解释 N 下，下列公式那些为真？那些为假？

$$(1) \forall x F(g(x, a), x);$$

解：在解释 N 下， $(1) \Leftrightarrow \forall x F(x \cdot 0, x)$
 $\Leftrightarrow \forall x (0 = x)$

因此(1)为假命题





§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

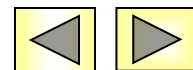
例8：给定解释 N 如下：(a) D_N 为自然数集合；(b) D_N 中特定元素 $a = 0$ ；(c) D_N 上特定函数 $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = x \cdot y$ ；(d) D_N 上特定谓词 $F(x, y)$ 为 $x = y$ 。
在解释 N 下，下列公式那些为真？那些为假？

$$(2) \forall x \forall y (F(f(x, a), y) \rightarrow F(f(y, a), x)) ;$$

解：在解释 N 下， $(2) \Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x, y) \rightarrow F(y, x))$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

因此(2)为真命题





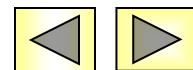
§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

例8：给定解释 N 如下：(a) D_N 为自然数集合；(b) D_N 中特定元素 $a = 0$ ；(c) D_N 上特定函数 $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = x \cdot y$ ；(d) D_N 上特定谓词 $F(x, y)$ 为 $x = y$ 。
在解释 N 下，下列公式那些为真？那些为假？

$$(3) \forall x \forall y \exists z F(f(x, y), z) ;$$

解：在解释 N 下， $(3) \Leftrightarrow \forall x \forall y \exists z F(x + y, z)$
 $\Leftrightarrow \forall x \forall y \exists z (x + y = z)$

因此(3)为真命题





§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

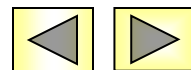
例8：给定解释 N 如下：(a) D_N 为自然数集合；(b) D_N 中特定元素 $a = 0$ ；(c) D_N 上特定函数 $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = x \cdot y$ ；(d) D_N 上特定谓词 $F(x, y)$ 为 $x = y$ 。
在解释 N 下，下列公式那些为真？那些为假？

(4) $F(f(x, y), f(y, z))$ ；

解：在解释 N 下， $(4) \Leftrightarrow F(x + y, y + z)$

$$\Leftrightarrow x + y = y + z$$

真值不确定，因此(4)不是命题





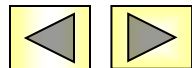
§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

四、合式公式的类型

闭式： 设 A 为任一合式公式，若 A 中无自由出现的个体变项，则称 A 是封闭的合式公式，简称闭式。闭式在各种解释下一定是命题，但反之不然。

合式公式的类型：

设合式公式 A ，若 A 在各种解释下都是真的，则称 A 为**逻辑有效式（或永真式）**；若 A 在各种解释下都是假的，则称 A 为**矛盾式**；若至少存在一个解释使 A 为真，则称 A 为**可满足式**。





§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

代换实例： 设 A_0 是含命题变项 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 的命题公式， $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n 个谓词公式，用 A_i 处处代换 p_i ，所得谓词公式 A 称为 A_0 的代换实例。

命题公式中重言式的代换实例是逻辑有效式，
矛盾式的代换实例是矛盾式。



§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

例9：判断下列公式的类型。

$$(1) \forall x F(x) \rightarrow \exists x F(x) \quad p \rightarrow q$$

$$(2) \forall x F(x) \rightarrow (\forall x \exists y G(x, y) \rightarrow \forall x F(x))$$

$$(3) \neg (F(x, y) \rightarrow R(x, y)) \wedge R(x, y)$$

$$(4) \forall x \exists y F(x, y) \rightarrow \exists x \forall y F(x, y)$$

解：(1) 若 $\forall x F(x)$ 为真，则任意的 $x \in D$ 都有 $F(x)$ 为真，则 $\exists x F(x)$ 为真，于是 $\forall x F(x) \rightarrow \exists x F(x)$ 为真。
因此公式是逻辑有效式。





§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

例9：判断下列公式的类型。

$$(1) \forall x F(x) \rightarrow \exists x F(x) \quad p \rightarrow q$$

$$(2) \forall x F(x) \rightarrow (\forall x \exists y G(x, y) \rightarrow \forall x F(x)) \quad p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$(3) \neg (F(x, y) \rightarrow R(x, y)) \wedge R(x, y) \quad \neg (p \rightarrow q) \wedge q$$

$$(4) \forall x \exists y F(x, y) \rightarrow \exists x \forall y F(x, y)$$

解：(2) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ 是重言式，

因此公式是逻辑有效式。

(3) $\neg (p \rightarrow q) \wedge q$ 是矛盾式，

因此公式是矛盾式。



§ 2.2 一阶逻辑合式公式及解释

例9：判断下列公式的类型。

$$(1) \forall x F(x) \rightarrow \exists x F(x) \quad p \rightarrow q$$

$$(2) \forall x F(x) \rightarrow (\forall x \exists y G(x, y) \rightarrow \forall x F(x)) \quad p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$(3) \neg (F(x, y) \rightarrow R(x, y)) \wedge R(x, y) \quad \neg (p \rightarrow q) \wedge q$$

$$(4) \forall x \exists y F(x, y) \rightarrow \exists x \forall y F(x, y) \quad p \rightarrow q$$

解：(4) 设 D_I 为实数集， $F(x, y)$ 为 $x + y = 0$ ，则

前件 $\forall x \exists y (x + y = 0)$ 为真；后件 $\exists x \forall y (x + y = 0)$ 为假，蕴涵式为假。

因此公式是非逻辑有效的可满足式。

