



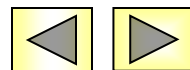
§ 2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

一、谓词演算中常见的等值式

等值式： 设 A 、 B 是两个任意的谓词公式，若 $A \leftrightarrow B$ 是逻辑有效式，称 A 与 B 是等值的。记作： $A \Leftrightarrow B$ ，并称 $A \Leftrightarrow B$ 为等值式。

24个常用的命题演算等值式及其代换实例都是谓词演算中的等值式。

例如： $\forall xA(x) \rightarrow \exists xB(x) \Leftrightarrow \neg \forall xA(x) \vee \exists xB(x)$
 $\exists xH(x, y) \wedge (\neg \exists xH(x, y)) \Leftrightarrow 0$



§ 2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

量词否定
等值式

$$(1) \neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x (\neg A(x))$$

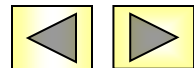
$$(2) \neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x (\neg A(x))$$

实例：“不是所有在北京工作的人都是北京人”

$\Leftrightarrow$ “存在在北京工作的非北京人”；

“不存在永远不犯错的人”

$\Leftrightarrow$ “所有的人都会犯错”。



§ 2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

量词辖域收缩
与扩张等值式

$$(1) \forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee B$$

$$(2) \forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge B$$

$$(3) \forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \rightarrow B$$

$$(4) \forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall xA(x)$$

$$(5) \exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee B$$

$$(6) \exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge B$$

$$(7) \exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \rightarrow B$$

$$(8) \exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists xA(x)$$

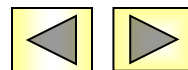
$$\exists x(A(x) \rightarrow B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(\neg A(x)) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg \forall xA(x) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \forall xA(x) \rightarrow B$$



§ 2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

量词分配
等值式

$$(1) \forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$$

$$(2) \exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$$

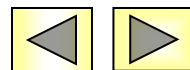
注意： $\forall$ 对 $\vee$ ， $\exists$ 对 $\wedge$ 都不存在分配等值式。

多量词
等值式

$$(1) \forall x \forall yA(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall xA(x, y)$$

$$(2) \exists x \exists yA(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists xA(x, y)$$

注意：其他情况下量词换序后一般不等值。





§ 2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

二、常见等值式的应用

前束范式： 设 A 为任一谓词公式，若 A 具有如下形式：

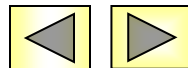
$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_k x_k B$$

则称 A 是前束范式。其中 $Q_i (1 \leq i \leq k)$ 为 $\forall$ 或 $\exists$ ， B 为不含量词的谓词公式。

例： $\forall x \forall y \exists z (L(x, y) \rightarrow F(z))$ 是前束范式，

但 $\neg \forall x (F(x) \rightarrow G(x))$ 不是前束范式。

谓词逻辑中，任何谓词公式的前束范式都存在，
但一般不唯一。



§ 2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

例10：求下列公式的前束范式

$$(1) \forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$$

$$(2) \forall x F(x) \vee \neg \exists x G(x)$$

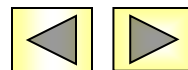
$$(3) \exists x F(x) \rightarrow \forall x G(x)$$

$$(4) (\forall x F(x) \vee \exists y G(y)) \rightarrow$$

$$(5) (\forall x F(x, y) \rightarrow \exists y G(y))$$

解题步骤：

- (1) 消除 $\neg \wedge \vee$ 外的所有联结词；
- (2) 将 $\neg$ 深入到谓词符号前；
- (3) 使所有约束变项符号不同，自由变项与约束变项符号也不同；
- (4) 扩大量词辖域至整个公式。





§ 2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

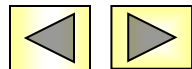
例10：求下列公式的前束范式。

$$(1) \forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$$

$$(2) \forall x F(x) \vee \neg \exists x G(x)$$

$$\begin{aligned} \text{解：} (1) &\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x (\neg G(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x (F(x) \wedge \neg G(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解：} (2) &\Leftrightarrow \forall x F(x) \vee \forall x (\neg G(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x F(x) \vee \forall y (\neg G(y)) \\ &\Leftrightarrow \forall x (F(x) \vee \forall y (\neg G(y))) \\ &\Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \vee \neg G(y)) \end{aligned}$$





§ 2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

例10：求下列公式的前束范式。

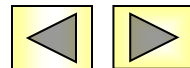
$$(3) \exists x F(x) \rightarrow \forall x G(x)$$

$$\text{解：} (3) \Leftrightarrow \neg \exists x F(x) \vee \forall x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg F(x)) \vee \forall x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg F(x)) \vee \forall y G(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (\neg F(x) \vee G(y))$$



§ 2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

例10：求下列公式的前束范式。

$$(4) (\forall x F(x) \vee \exists y G(y)) \rightarrow \forall x H(x)$$

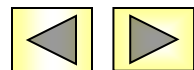
$$\text{解：} (4) \Leftrightarrow \neg (\forall x F(x) \vee \exists y G(y)) \vee \forall x H(x)$$

$$\Leftrightarrow (\neg \forall x F(x) \wedge \neg \exists y G(y)) \vee \forall x H(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x (\neg F(x)) \wedge \forall y (\neg G(y))) \vee \forall x H(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x (\neg F(x)) \wedge \forall y (\neg G(y))) \vee \forall z H(z)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \forall y \forall z (\neg F(x) \wedge \neg G(y) \vee H(z))$$





§ 2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

例10：求下列公式的前束范式。

$$(5) (\forall x F(x, y) \rightarrow \exists y G(y)) \rightarrow \forall x H(x, y)$$

$$\begin{aligned} \text{解: } (5) &\Leftrightarrow \neg (\neg \forall x F(x, y) \vee \exists y G(y)) \vee \forall x H(x, y) \\ &\Leftrightarrow (\forall x F(x, y) \wedge \neg \exists y G(y)) \vee \forall x H(x, y) \\ &\Leftrightarrow (\forall x F(x, y) \wedge \forall y (\neg G(y))) \vee \forall x H(x, y) \\ &\Leftrightarrow (\forall x F(x, u) \wedge \forall y (\neg G(y))) \vee \forall z H(z, u) \\ &\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z (F(x, u) \wedge \neg G(y) \vee H(z, u)) \end{aligned}$$

