



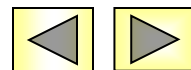
§ 2.4 一阶逻辑推理理论

一、常见推理定律

推理定律：谓词逻辑中，若 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$ 为逻辑有效式，称推理正确。

记 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \Rightarrow B$ ，此式为推理定律。

命题逻辑中的重言蕴涵式在谓词逻辑中的代换实例都是推理定律，等值式亦可产生两个推理定律。



§ 2.4 一阶逻辑推理理论

量词分配推理定律

$$(1) \forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$$

$$(2) \exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$$

$$(3) \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$$

$$(4) \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$$

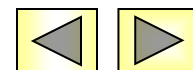




§ 2.4 一阶逻辑推理理论

二、谓词逻辑推理遵循的推理规则

- 1、命题逻辑中的所有推理规则；
- 2、全称量词消去规则($\forall$ -规则)；
- 3、全称量词引入规则($\forall$ +规则)；
- 4、存在量词消去规则($\exists$ -规则)；
- 5、存在量词引入规则($\exists$ +规则)。





§ 2.4 一阶逻辑推理理论

全称量词消去规则($\forall$ -规则)

(1) $\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$, y 不在 $A(x)$ 中约束出现。

(2) $\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$, c 为个体域中任意个体常项。

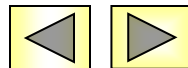
注: x 在 $A(x)$ 中必须是自由出现个体变项。

全称量词引入规则($\forall$ +规则)

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$

注1: y 在 $A(y)$ 中自由出现, 且 y 取任何值时 A 为真;

注2: 取代 y 的 x 不能在 $A(y)$ 中约束出现。





§ 2.4 一阶逻辑推理理论

存在量词引入规则($\exists$ -规则):

$$A(c) \Rightarrow \exists xA(x)$$

注1: c 是特定的个体常项;

注2: 取代 c 的 x 不能已在 $A(c)$ 中出现过。

存在量词消去规则($\exists$ +规则):

$$\exists xA(x) \Rightarrow A(c)$$

注1: c 是使 A 为真的特定个体常项; 注2: c 不曾
在 $A(x)$ 中出现过; 注3: $A(x)$ 中有异于 x 的自由出现
的个体变项时, 此规则不可用。



§ 2.4 一阶逻辑推理理论

例11: 证明苏格拉底三段论 “凡人拉底是人, 所以苏格拉底是要死的”

解: $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 是要死的, 写 a : 苏格拉底,

前提: $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), F(a)$

结论: $G(a)$

证明: ① $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

② $F(a) \rightarrow G(a)$

③ $F(a)$

④ $G(a)$

解题步骤:

(1) 将命题符号化;

(2) 写出前提、结论;

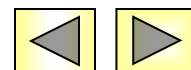
(3) 用推理规则进行推理(构造证明)。

前提引入

① $\forall$ -

前提引入

②③假言推理





§ 2.4 一阶逻辑推理理论

例12：证明“每个学术会的成员都是工人并且是专家，有些成员是青年人，所以有的成员是青年专家”。

解： $F(x)$ ： x 是学术会的成员， $G(x)$ ： x 是工人，

$H(x)$ ： x 是专家， $R(x)$ ： x 是青年人，

前提： $\forall x(F(x) \rightarrow (G(x) \wedge H(x)))$,

$\exists x(F(x) \wedge R(x))$

结论： $\exists x(F(x) \wedge R(x) \wedge H(x))$



§ 2.4 一阶逻辑推理理论

前提: $\forall x(F(x) \rightarrow (G(x) \wedge H(x))), \exists x(F(x) \wedge R(x))$

结论: $\exists x(F(x) \wedge R(x) \wedge H(x))$

证明: ① $\exists x(F(x) \wedge R(x))$

前提引入

② $F(c) \wedge R(c)$

① $\exists$ -

③ $\forall x(F(x) \rightarrow (G(x) \wedge H(x)))$

前提引入

④ $F(c) \rightarrow (G(c) \wedge H(c))$

③ $\forall$ -

⑤ $F(c)$

②化简

⑥ $G(c) \wedge H(c)$

④⑤假言推理

⑦ $H(c)$

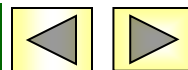
⑥化简

⑧ $F(c) \wedge R(c) \wedge H(c)$

②⑦合取

⑨ $\exists x(F(x) \wedge R(x) \wedge H(x))$

⑧ $\exists$ +





§ 2.4 一阶逻辑推理理论

在前提中，若既有存在量词，又有全称量词，应先引入存在量词。





§ 2.4 一阶逻辑推理理论

例13: 构造下列推理的证明

(1) 前提: $\neg \exists x(F(x) \wedge H(x))$, $\forall x(G(x) \rightarrow H(x))$

结论: $\forall x(G(x) \rightarrow \neg F(x))$

(2) 前提: $\exists xF(x) \rightarrow \forall xG(x)$

结论: $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$



§ 2.4 一阶逻辑推理理论

(1) 前提: $\neg \exists x(F(x) \wedge H(x)), \forall x(G(x) \rightarrow H(x))$

结论: $\forall x(G(x) \rightarrow \neg F(x))$

证明: ① $\neg \exists x(F(x) \wedge H(x))$

前提引入

② $\forall x(\neg F(x) \vee \neg H(x))$

① 置换

③ $\neg F(y) \vee \neg H(y)$

② $\forall$ -

④ $\forall x(G(x) \rightarrow H(x))$

前提引入

⑤ $G(y) \rightarrow H(y)$

④ $\forall$ -

⑥ $H(y) \rightarrow \neg F(y)$

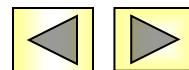
③ 置换

⑦ $G(y) \rightarrow \neg F(y)$

⑤⑥ 假言三段论

⑧ $\forall x(G(x) \rightarrow \neg F(x))$

⑦ $\forall$ +



§ 2.4 一阶逻辑推理理论

(2) 前提: $\exists xF(x) \rightarrow \forall xG(x)$ 结论: $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

证明: ① $\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

否定结论引入

② $\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$

①置换

③ $F(c) \wedge \neg G(c)$

② $\exists-$

④ $F(c)$

③化简

⑤ $\exists xF(x)$

④ $\exists+$

⑥ $\exists xF(x) \rightarrow \forall xG(x)$

前提引入

⑦ $\forall xG(x)$

⑤⑥假言推理

⑧ $G(c)$

⑦ $\forall-$

⑨ $\neg G(c)$

③化简

⑩ $G(c) \wedge \neg G(c)$

⑧⑨合取

