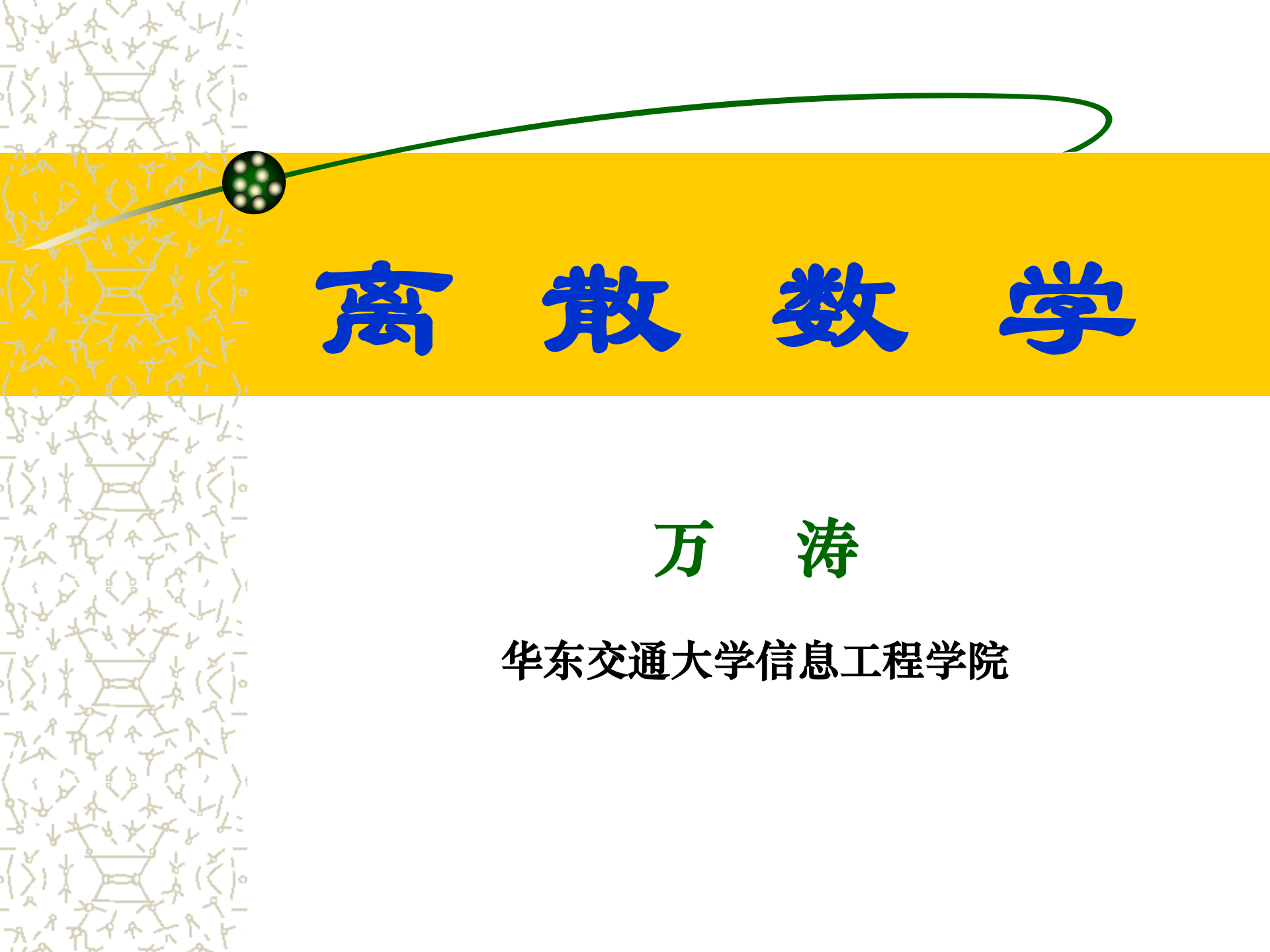




离散数学

万 涛

华东交通大学信息工程学院

第三章 集合的基本概念和运算

§ 3.1 集合的基本概念

§ 3.2 集合的基本运算

§ 3.3 集合中元素的计数



§ 3.1 集合的基本概念

一、集合的概念

集合：一些可确定的可分辨的事物构成的整体。

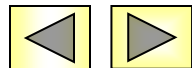
用大写字母 $A, B, C, \dots$ 标记。

集合的元素：一个集合的每一个特定的事物。用小写字母 $a, b, c, \dots$ 标记。

如：(1) 26个英文字母的集合；

(2) 坐标平面上所有点的集合。

规定：集合的元素之间彼此相异，无次序关系。





§ 3.1 集合的基本概念

二、常用的集合

N : 自然数集合(包括0)

Z : 整数集合

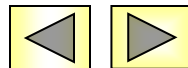
Q : 有理数集合

R : 实数集合

C : 复数集合

$\emptyset$: 空集(不含任何元素)

E : 全集





§ 3.1 集合的基本概念

三、集合的表示方法

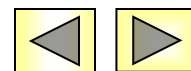
1、**列举法**: 列出集合的所有元素, 元素之间用逗号

隔开。如 $A = \{ a, b, c \}$

2、**描述法**: 用谓词概括该集合中元素的属性。

即: $A = \{ x \mid P(x) \}$

如: $A = \{ x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge 3 < x \leq 6 \}$



§ 3.1 集合的基本概念

四、集合之间的关系

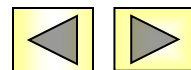
1、**子集**：集合 B 中的每个元素都是集合 A 中的元素，则 B 是 A 的子集，记作 $B \subseteq A$ 。符号化为

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

显然： $A \subseteq A$ ， $\emptyset \subseteq A$

2、**相等集**：如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则 A 与 B 相等。记作 $A = B$ 。符号化为 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

3、**真子集**：如果 $B \subseteq A$ 且 $A \neq B$ ，则 B 是 A 的真子集。记作 $B \subset A$ 。





§ 3.1 集合的基本概念

4、**幂集**：集合 A 的全体子集构成的集合，记作 $P(A)$ 。

符号化为 $P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

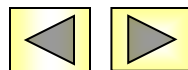
n 元集 A 的幂集 $P(A)$ 含有 2^n 个元素。

例1： $A = \{a, b, c\}$ ，求 A 的幂集 $P(A)$ 。

解：0元子集： $\emptyset$ ，1元子集： $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ ，

2元子集： $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ ，3元子集： $\{a, b, c\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$





§ 3.1 集合的基本概念

例2：计算以下幂集。

(1) $P(\emptyset)$;

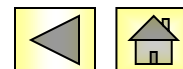
(2) $P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$;

(3) $P(\{1, \{2, 3\}\})$ 。

解：(1) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

(2) $P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

(3) $P(\{1, \{2, 3\}\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{2, 3\}\}, \{1, \{2, 3\}\}\}$



§ 3.2 集合的基本运算

一、几种常见的运算

1、并： $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$

2、交： $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$,

若 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 不交。

3、相对补： $A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$ (B 对 A 的)

4、绝对补： A 对全集 E 的相对补集, 记作： $\sim A$

$$\sim A = E - A = \{ x \mid x \in E \wedge x \notin A \}$$

5、对称差： $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

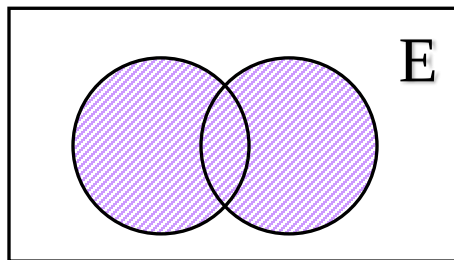


§ 3.2 集合的基本运算

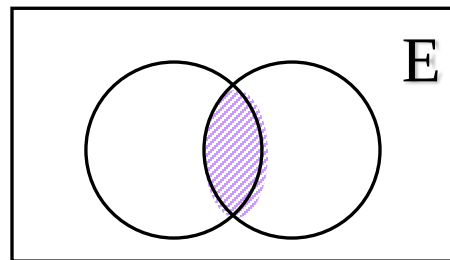
二、文氏图

如：

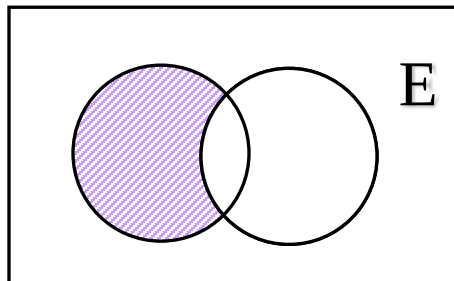
$$A \cup B$$



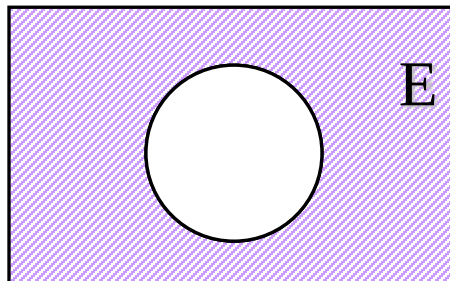
$$A \cap B$$



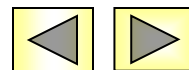
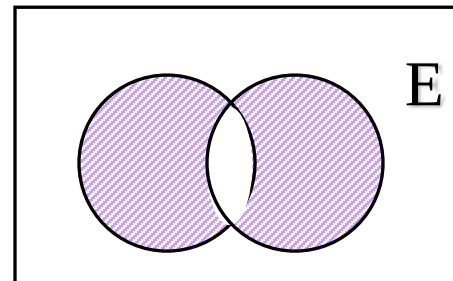
$$A - B$$



$$\sim A$$



$$A \oplus B$$



§ 3.2 集合的基本运算

三、集合算律

(1) 幂等律: $A \cup A = A$

$$A \cap A = A$$

(2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

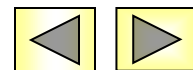
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(3) 交换律: $A \cup B = B \cup A$

$$A \cap B = B \cap A$$

(4) 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$





§ 3.2 集合的基本运算

(5) 同一律: $A \cup \emptyset = A$

$$A \cap E = A$$

(6) 零律: $A \cup E = E$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

(7) 排中律: $A \cup \sim A = E$

(8) 矛盾律: $A \cap \sim A = \emptyset$

(9) 吸收律: $A \cup (A \cap B) = A$

$$A \cap (A \cup B) = A$$



§ 3.2 集合的基本运算

(10) 德·摩根律: $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

$$\sim (B \cup C) = \sim B \cap \sim C$$

$$\sim (B \cap C) = \sim B \cup \sim C$$

$$\sim \emptyset = E$$

$$\sim E = \emptyset$$

(11) 双重否定律: $\sim (\sim A) = A$



§ 3.2 集合的基本运算

四、常用运算性质

$$(1) A \cap B \subseteq A \quad A \cap B \subseteq B$$

$$(2) A \subseteq A \cup B \quad B \subseteq A \cup B$$

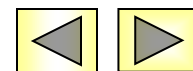
$$(3) A - B \subseteq A$$

$$(4) A - B = A \cap \sim B$$

$$(5) A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$$

$$(6) A \oplus B = B \oplus A$$

$$(7) (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$



§ 3.2 集合的基本运算

$$(8) A \oplus \emptyset = A$$

$$(9) A \oplus A = \emptyset$$

$$(10) A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C$$

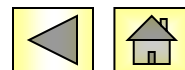
例3: 化简 $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$

解: $\because A \cup B \subseteq A \cup B \cup C$ 和 $A \subseteq A \cup (B - C)$

$$\therefore (A \cup B \cup C) \cap (A \cup B) = A \cup B$$

$$\therefore (A \cup (B - C)) \cap A = A$$

$$\text{原式} = (A \cup B) - A = (A \cup B) \cap \sim A = B - A$$





§ 3.3 集合中元素的计数

基数：集合中元素的个数，用 $|A|$ 表示。

容斥原理：对任意两个有限集 A 和 B ，有

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

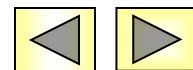
推广1： $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$



§ 3.3 集合中元素的计数

推广2:
$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|$$

推论:
$$\left| \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n} \right| = |E| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$$

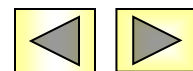




§ 3.3 集合中元素的计数

例4：某班有25个学生，其中14人会打篮球，12人会打排球，6人会打篮球和排球，5人会打篮球和网球，2人会打这三种球，而6个会打网球的人都会打另外一种球(指篮球和排球)，求不会打这三种球的人数？

解：分别用 A, B, C 表示会打篮球、排球、网球的学生集合。依题意有： $|A| = 14$ ， $|B| = 12$ ， $|C| = 6$ ， $|A \cap B| = 6$ ， $|A \cap C| = 5$ ， $|A \cap B \cap C| = 2$ ，且有 $C \subseteq A \cup B$ ，求 $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}|$



§ 3.3 集合中元素的计数

$$\text{于是 } C = C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$$

$$|C| = |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

$$6 = 5 + |B \cap C| - 2$$

$$\text{得 } |B \cap C| = 3$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| \\ &\quad - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 14 + 12 + 6 - 6 - 5 - 3 + 2 = 20 \end{aligned}$$

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |E| - |A \cup B \cup C| = 25 - 20 = 5$$





§ 3.3 集合中元素的计数

例5：一个班有50个学生，第一次考试有26人得5分，第二次考试有21人得5分。如果两次考试都没得5分的有17人，那么在两次考试都得5分的有多少人？

解：分别用 A, B 表示第一次考试得5分和第二次考试得5分的学生集合。

依题意有： $|A| = 26$ ， $|B| = 21$ ， $|\overline{A} \cap \overline{B}| = 17$

$$\begin{aligned} \text{则 } |A \cap B| &= |A| + |B| - |A \cup B| = |A| + |B| - (|E| - |\overline{A} \cap \overline{B}|) \\ &= 26 + 21 - 50 + 17 = 14 \end{aligned}$$

