



§ 4.1 集合的笛卡尔积与二元关系

一、二元关系的概念

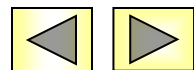
有序对（序偶）：由两个元素 x 和 y 按一定顺序排成的二元组。记作： $\langle x, y \rangle$ 。其中 x 是它的第一元素， y 是它的第二元素。

如平面直角坐标系点的坐标。

特点：(1) 当 $x \neq y$ 时， $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$

(2) $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ 当且仅当 $x = u, y = v$

(1)(2)说明有序对区别于集合。





§ 4.1 集合的笛卡尔积与二元关系

n 元有序对：第一元素是一个 $n-1$ 元有序对的有序对。

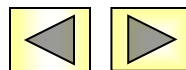
记作： $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ 。

即 $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \langle \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$

笛卡尔积：设 A 、 B 为两集合，以 A 中元素为第一元素， B 中元素为第二元素构成的二元有序对的全体叫做 A 和 B 的笛卡儿积。

记作： $A \times B$

符号化 $A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$





§ 4.1 集合的笛卡尔积与二元关系

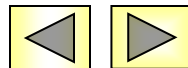
例1: 设 $A = \{a, b\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, 求 $A \times B$, $B \times A$ 。

解: 由笛卡尔积的定义知

$$A \times B = \{ \langle a, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \\ \langle b, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle \}$$

$$B \times A = \{ \langle 0, a \rangle, \langle 0, b \rangle, \\ \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \\ \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle \}$$

一般地, 若 $|A| = m$, $|B| = n$, 则 $|A \times B| = |B \times A| = mn$



§ 4.1 集合的笛卡尔积与二元关系

笛卡尔积运算的性质：

(1) 如果 A, B 中有一个空集，则笛卡儿积是空集，

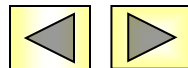
$$\text{即： } \emptyset \times B = A \times \emptyset = \emptyset$$

(2) 当 $A \neq B$ ，且 A, B 都不是空集时，有 $A \times B \neq B \times A$ ，

即笛卡尔积不满足交换律。

(3) 当 A, B, C 都不是空集时，有 $(A \times B) \times C \neq$

$A \times (B \times C)$ ，即笛卡尔积不满足结合律。



§ 4.1 集合的笛卡尔积与二元关系

(4) 笛卡尔积运算对 $\cup$ 或 $\cap$ 运算满足分配律,

$$\text{即 } A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

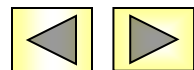
证明: $\langle x, y \rangle \in (B \cup C) \times A \Leftrightarrow x \in B \cup C \wedge y \in A$

$$\Leftrightarrow (x \in B \vee x \in C) \wedge y \in A$$

$$\Leftrightarrow (x \in B \wedge y \in A) \vee (x \in C \wedge y \in A)$$

$$\Leftrightarrow (\langle x, y \rangle \in B \times A) \vee (\langle x, y \rangle \in C \times A)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (B \times A) \cup (C \times A)$$



§ 4.1 集合的笛卡尔积与二元关系

例2: 设 $A = \{1, 2\}$, 求 $P(A) \times A$ 。

解: $P(A) \times A$

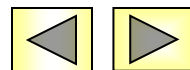
$$= \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \} \times \{1, 2\}$$

$$= \{ \langle \emptyset, 1 \rangle, \langle \emptyset, 2 \rangle, \langle \{1\}, 1 \rangle, \langle \{1\}, 2 \rangle, \langle \{2\}, 1 \rangle, \\ \langle \{2\}, 2 \rangle, \langle \{1, 2\}, 1 \rangle, \langle \{1, 2\}, 2 \rangle \}$$

推广: n 阶笛卡尔积

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

$$= \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n \}$$



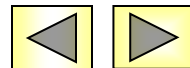


§ 4.1 集合的笛卡尔积与二元关系

二元关系的数学定义：如果一个集合为单集或者它的元素都是二元有序对，则这个集合称为一个二元关系，记作： R

如果 $\langle x, y \rangle \in R$ ，记作 $x R y$

如果 $\langle x, y \rangle \notin R$ ，记作 $x \not R y$





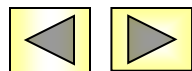
§ 4.1 集合的笛卡尔积与二元关系

从A到B的二元关系： 设A、B为集合， $A \times B$ 的任何子集所定义的二元关系叫做从A到B的二元关系。

特别地，若 $A = B$ ，叫作A上的二元关系。

若 $|A| = n$ ，则 $|A \times A| = n^2$ ， $A \times A$ 的所有子集有 2^{n^2} 个，因此，A上有 2^{n^2} 个不同的二元关系。

A上的3种特殊关系：空关系，全域关系 E_A ，恒等关系 I_A





§ 4.1 集合的笛卡尔积与二元关系

空关系即空集

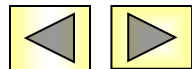
全域关系 $E_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \} = A \times A$

恒等关系 $I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$

例3：设 $A = \{a, b\}$ ，写出 $P(A)$ 上的包含关系 R 。

解： $P(A) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \}$

$$\begin{aligned} R = \{ & \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \{a\} \rangle, \langle \emptyset, \{b\} \rangle, \langle \emptyset, \{a, b\} \rangle, \\ & \langle \{a\}, \{a\} \rangle, \langle \{a\}, \{a, b\} \rangle, \langle \{b\}, \{b\} \rangle, \\ & \langle \{b\}, \{a, b\} \rangle, \langle \{a, b\}, \{a, b\} \rangle \} \end{aligned}$$



§ 4.1 集合的笛卡尔积与二元关系

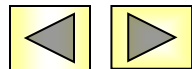
二、二元关系的表示方法

1、关系矩阵

设 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, R 是 A 上的关系,

$$\text{令 } r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } x_i R x_j \\ 0 & \text{若 } x_i \not R x_j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{则 } (r_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix} \text{ 是 } R \text{ 的关系矩阵}$$

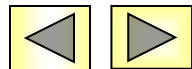




§ 4.1 集合的笛卡尔积与二元关系

2、关系图

以 $V = A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为顶点的集合，以 $E = \{ \langle x_i, x_j \rangle \mid x_i \in A \wedge x_j \in A \wedge x_i R x_j \}$ 为有向边的集合，组成的有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 。



§ 4.1 集合的笛卡尔积与二元关系

例4： 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \}$ 是 A 上的关系，试写出 R 的关系矩阵并画出关系图。

解：

关系矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

关系图

