

§ 5.1 图

一、基本图类与相关概念

1、无向图

无序积： 设 A, B 是两个集合，称 $\{\{a, b\} \mid a \in A \wedge b \in B\}$ 为 A 与 B 的无序积，记作 $A \& B$ 。

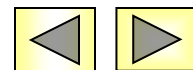
习惯上记 $\{a, b\}$ 为 (a, b) ，有序对记为 $\langle a, b \rangle$ 。

无论 a, b 取值如何，恒有 $(a, b) = (b, a)$

如： $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{3, 4\}$ ，

则 $A \& B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$ ，

$A \& A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ 。



§ 5.1 图

无向图：无向图 G 是一个二元组 $\langle V, E \rangle$ ，其中

(1) V 是一个非空集合，称为顶点集 $V(G)$ ， V 中元素称为顶点或结点；

(2) E 是无序积 $V \times V$ 的多重子集(即集合中的元素可重复出现)，称为边集 $E(G)$ ， E 中元素称为无向边，简称边。

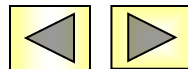
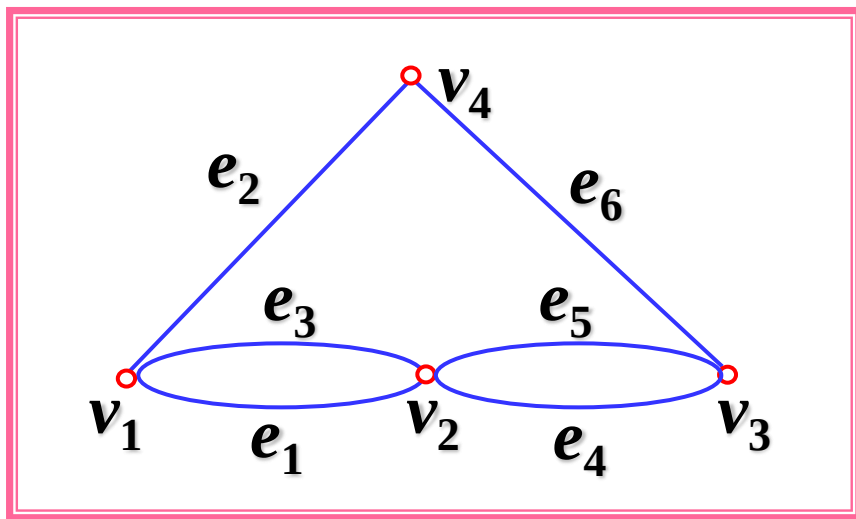


§ 5.1 图

实际上，图是画出来的。画法：用小圆圈表示 V 中顶点，若 $(a, b) \in E$ ，则在顶点 a 与 b 之间连线段。

如： $G = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

$E = \{ (v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4) \}$



§ 5.1 图

2、有向图

有向图：有向图 D 是一个二元组 $\langle V, E \rangle$ ，其中

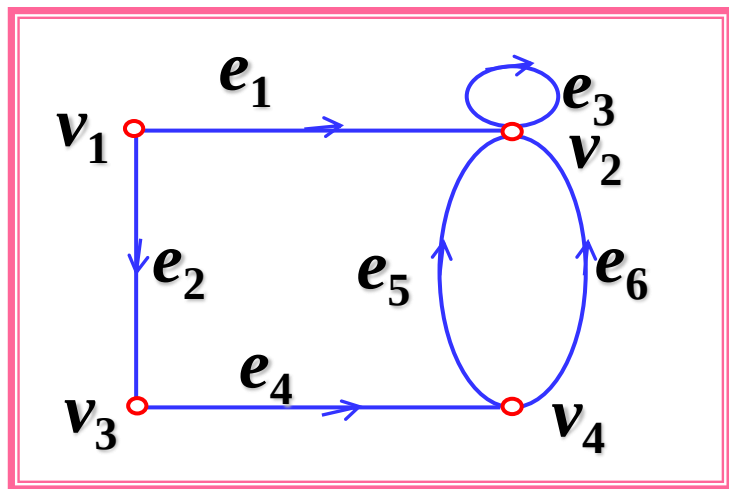
- (1) V 是一个非空集合，称为顶点集 $V(D)$ ；
- (2) E 是笛卡尔积 $V \times V$ 的多重子集，
称为边集 $E(D)$ ， E 中元素称为有向边，
也简称边。



§ 5.1 图

有向图画法：用小圆圈表示 V 中顶点，若 $\langle a, b \rangle \in E$ ，则在顶点 a 与 b 之间画一条有向边，其箭头从 a 指向 b 。

如： $D = \langle V, E \rangle$, $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$, $E = \{ \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_1, v_3 \rangle, \langle v_2, v_2 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle, \langle v_4, v_2 \rangle, \langle v_4, v_2 \rangle \}$



§ 5.1 图

3、相关概念

有限图： V, E 均为有限集。

n 阶图： $|V| = n$ 。

零图： $E = \emptyset$ 。

平凡图： $E = \emptyset$ 且 $|V| = 1$ 。

顶点与边的关联： 若 $e_k = (v_i, v_j) \in E$ ，称 e_k 与 $v_i (v_j)$ 关联。

孤立点： 与任何边都不关联的顶点。

环： $e_k = (v_i, v_j)$ 中，若 $v_i = v_j$ ，则称 e_k 为环。



§ 5.1 图

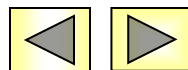
顶点与顶点的相邻： 若 $e_k = (v_i, v_j) \in E$ ，称 v_i 与 v_j 相邻。

若 e_k 为有向边，即 $e_k = \langle v_i, v_j \rangle \in E$ ，

称 v_i 邻接到 v_j ， v_j 邻接于 v_i 。

还称 v_i 是 e_k 的始点， v_j 是 e_k 的终点。

边与边的相邻： 若 e_k 和 e_l 至少有一个公共端点，
则称 e_k 与 e_l 相邻。





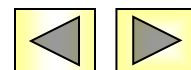
§ 5.1 图

平行边：无向图中，关联一对顶点的无向边多于1条，称这些边为平行边。平行边的条数称为重数。

有向图中，关联一对顶点的有向边多于1条，并且有向边的始点和终点相同，称这些边为平行边。

多重图：含平行边的图。

简单图：既不含平行边也不含环的图。



§ 5.1 图

二、度

1、无向图中的度：

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为无向图，与顶点 v_i 关联的边的条数(每个环计算两次)称为 v_i 的 **度**，记作 $d(v_i)$ 。

2、有向图中的度：

设 $D = \langle V, E \rangle$ 为有向图，以顶点 v_i 为始点的边的条数称为 v_i 的 **出度**，记作 $d^+(v_i)$ 。以顶点 v_i 为终点的边的条数称为 v_i 的 **入度**，记作 $d^-(v_i)$ 。

入度和出度之和称为顶点 v_i 的 **度**，记作 $d(v_i)$ 。

显然 $d(v_i) = d^+(v_i) + d^-(v_i)$ 。



§ 5.1 图

3、最大度：

$$\Delta(G) = \max \{ d(v) \mid v \in V \}$$

4、最小度：

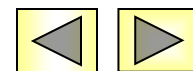
$$\delta(G) = \min \{ d(v) \mid v \in V \}$$

5、度与边数的关系：(握手定理)

任何图中，顶点度数之和等于边数之和的两倍。

$$\text{即：} \sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

任何图中，度为奇数的顶点个数为偶数。



§ 5.1 图

6、出度与入度的关系：

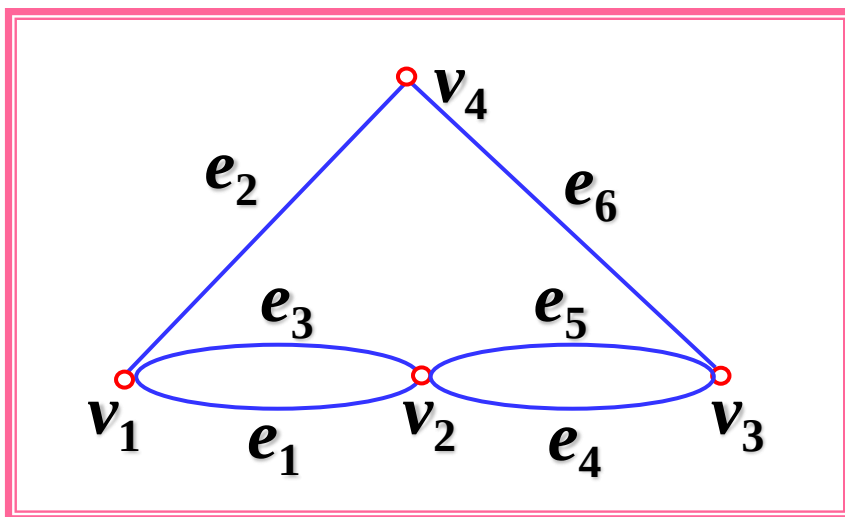
在有向图中，各顶点的入度之和等于各顶点的出度之和。即：
$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|$$

7、度数序列：

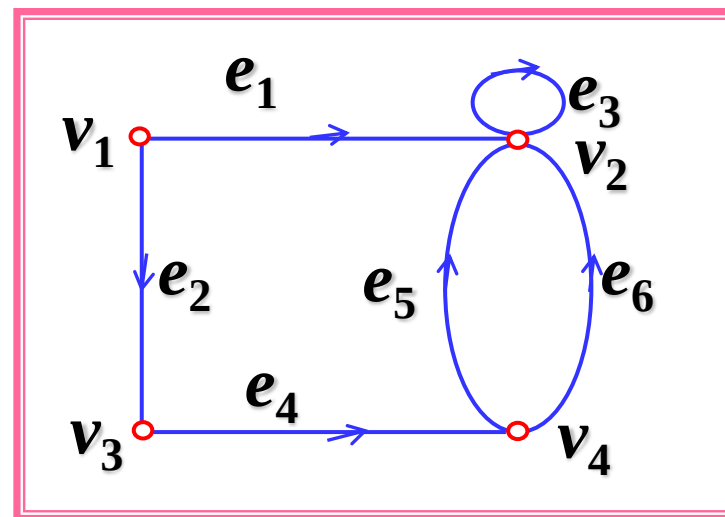
设 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为图 G 的顶点集，
称 $(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$ 为 G 的度数序列。



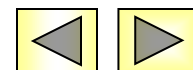
§ 5.1 图



度数序列、度数、
最大度、最小度



度数序列、度数、
最大入度、最大出度





§ 5.1 图

例1：下列哪些能成为图的度数序列。

(1) $\{2, 2, 2, 3, 3\}$, (2) $\{0, 1, 2, 3, 3\}$, (3) $\{1, 3, 4, 4, 5\}$

解：(1), (2), (3)中度为奇数的顶点个数分别是2, 3, 3,
因此由握手定理, (1)能构成图的度数序列,
而(2)和(3)不能。





§ 5.1 图

例2：已知图 G 有10条边，4个3度的顶点，其余顶点的度数均小于等于2，问 G 至少有多少个顶点。

解：图 G 边数为10，由握手定理知， G 中各顶点度数之和为20，4个3度的顶点共占12度，还剩下8度，若其余的顶点都是2度，则需要4个顶点来占用8度，所以图 G 至少有8个顶点。

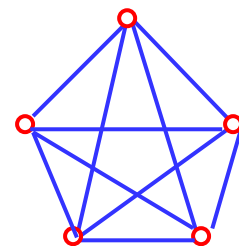


§ 5.1 图

三、完全图

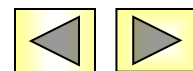
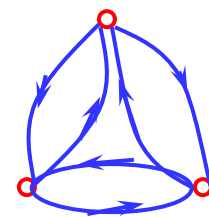
1、无向完全图：

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是 n 阶无向简单图，
若 G 中任何顶点都与其余的 $n-1$ 个顶点相邻，
则称 G 为 n 阶无向完全图。记作 K_n



2、有向完全图：

设 $D = \langle V, E \rangle$ 是 n 阶有向简单图，
若对 $\forall u, v \in V (u \neq v)$ ，既有有向边 $\langle u, v \rangle$ ，
又有有向边 $\langle v, u \rangle$ ，则称 D 为 n 阶有向完全图。



§ 5.1 图

四、子图与母图

设 $G = \langle V, E \rangle$, $G' = \langle V', E' \rangle$ 是两个图。

1、若 $V' \subseteq V$ 且 $E' \subseteq E$,

则称 G' 是 G 的 **子图**, G 是 G' 的 **母图**, 记作 $G' \subseteq G$ 。

2、若 $G' \subseteq G$ 且 $G' \neq G$, 则称 G' 是 G 的 **真子图**。

3、若 $G' \subseteq G$ 且 $V' = V$, 则称 G' 是 G 的 **生成子图**。

4、设 $V_1 \subseteq V$ 且 $V_1 \neq \emptyset$, 以 V_1 为顶点集,

以两端点均在 V_1 中的全体边为边集的 G 的子图,

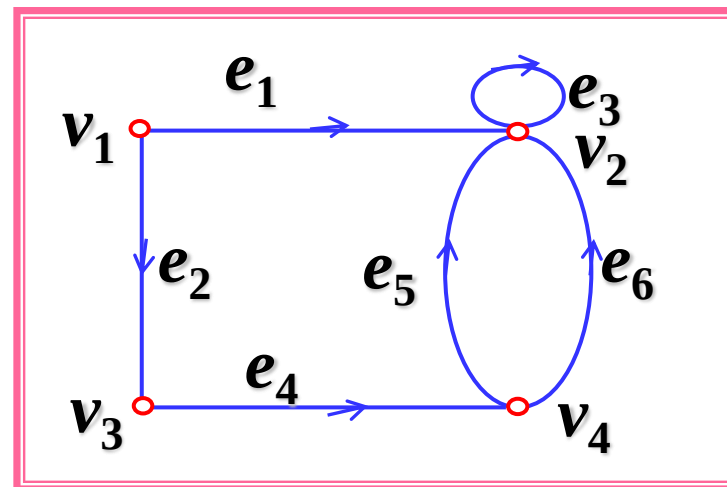
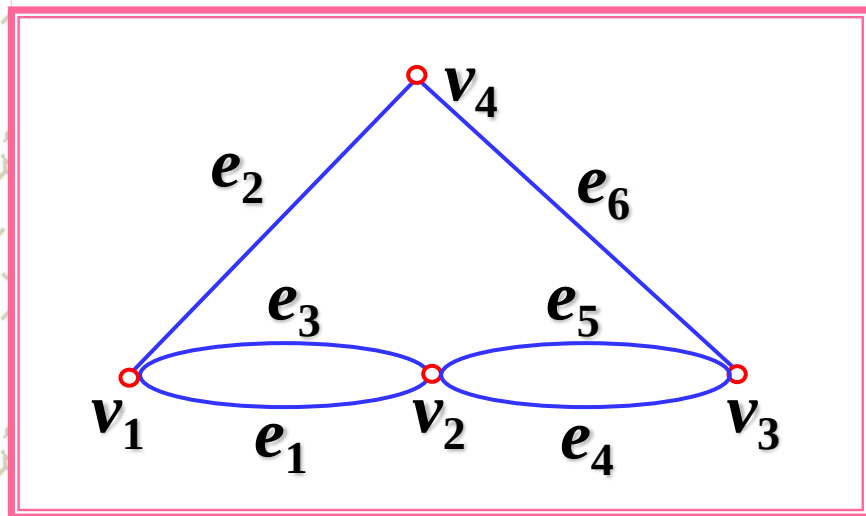
称为 V_1 导出的 **导出子图**。



§ 5.1 图

5、设 $E_1 \subseteq E$ 且 $E_1 \neq \emptyset$ ，以 E_1 为边集，
以 E_1 中边关联的顶点的全体为顶点集的 G 的子图，
称为 E_1 导出的 **导出子图**。

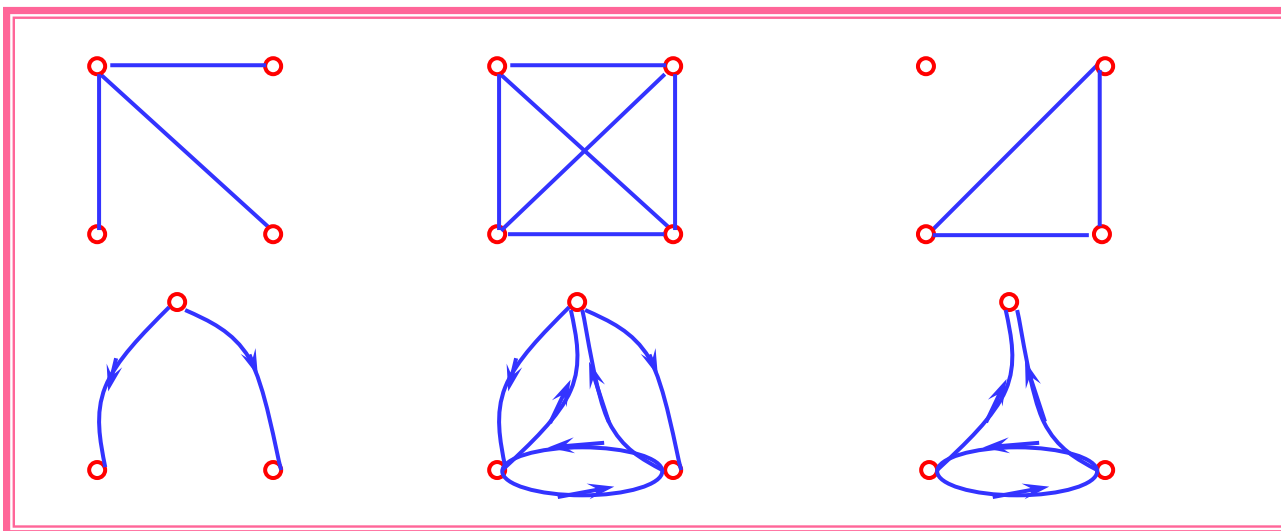
例3：列举下图的子图、生成子图、导出子图。



§ 5.1 图

五、补图

补图： 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一简单图，以 V 为顶点集，以所有能使 G 成为完全图的添加边组成的集合为边集的图，称为 G 相对于完全图的补图，简称 G 的补图。记作 $\overline{G}$



§ 5.1 图

六、图的同构

图的同构：

设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 是两个图，
若存在双射函数 $g: V_1 \rightarrow V_2$ ，使得对于任意的
 $e = (v_i, v_j)$ (或 $\langle v_i, v_j \rangle$) $\in E_1$ 当且仅当 $e' = (g(v_i), g(v_j))$
(或 $\langle g(v_i), g(v_j) \rangle$) $\in E_2$ ，并且 e 与 e' 的重数相同，
则称 G_1 与 G_2 是同构的。记作 $G_1 \cong G_2$

由定义可得两个图同构的必要条件：顶点数目相同，
边数相同，度数相同的顶点数目相等。



§ 5.1 图



例4: (1)画出4个顶点3条边的所有非同构的无向简单图
(2)画出3个顶点2条边的所有非同构的有向简单图

