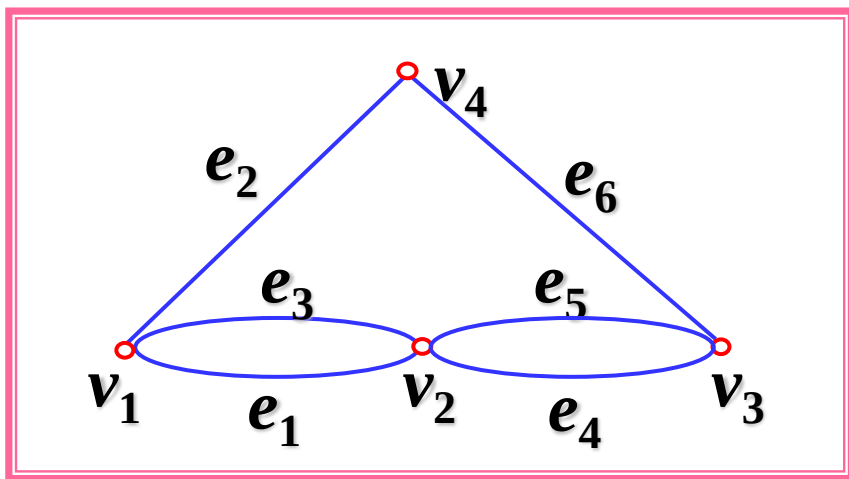


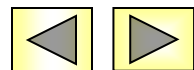
§ 5.4 图的矩阵表示

一、关联矩阵

1、**无向图的关联矩阵**：设无向图 $G = \langle V, E \rangle$,
 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令 m_{ij} 为顶点 v_i
 与边 e_j 的关联次数, 称 $M(G) = (m_{ij})_{n \times m}$ 为 G 的关联矩阵。



$$M(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



§ 5.4 图的矩阵表示

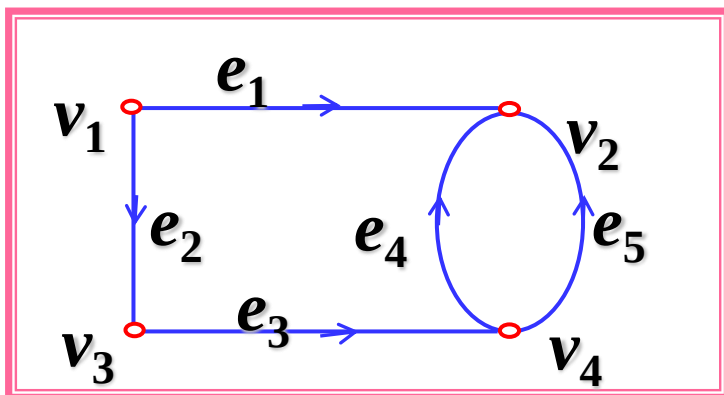
2、有向图的关联矩阵：(仅限有向图无环)

设 $D = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$,

令

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的始点,} \\ 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联,} \\ -1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的终点,} \end{cases}$$

称 $M(D) = (m_{ij})_{n \times m}$ 为 D 的关联矩阵。



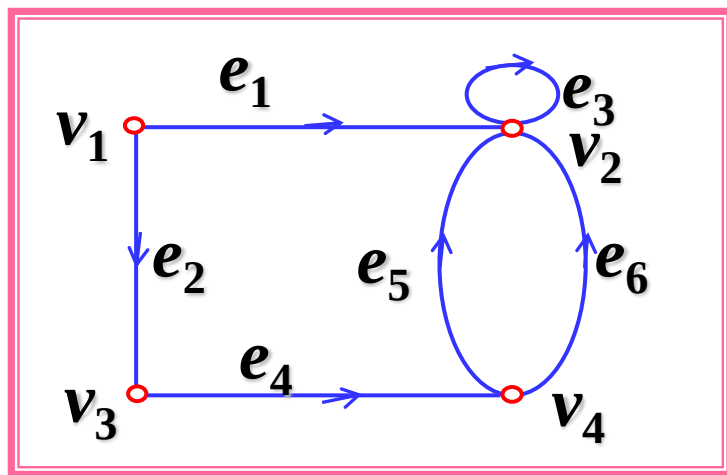
$$M(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



§ 5.4 图的矩阵表示

二、邻接矩阵

邻接矩阵： 设有向图 $D = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|E| = m$, 令 $a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 v_i 邻接到 v_j 的边的条数, 称 $A(D) = (a_{ij}^{(1)})_{n \times n}$ 为 D 的邻接矩阵。



$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



§ 5.4 图的矩阵表示

定理

设 A 为有向图 D 的邻接矩阵, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,
则 A^l ($l \geq 1$)中元素 $a_{ij}^{(l)}$ 为 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数,
 $\sum_{i,j} a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数,
其中 $\sum_i a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路数。

推论

设 $B_r = A + A^2 + \dots + A^r$ ($r \geq 1$), 则 B_r 中元素
 $b_{ij}^{(r)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度小于等于 r 的通路数,
 $\sum_{i,j} b_{ij}^{(r)}$ 为 D 中长度小于等于 r 的通路总数,
其中 $\sum_i b_{ii}^{(r)}$ 为 D 中长度小于等于 r 的回路数。



§ 5.4 图的矩阵表示

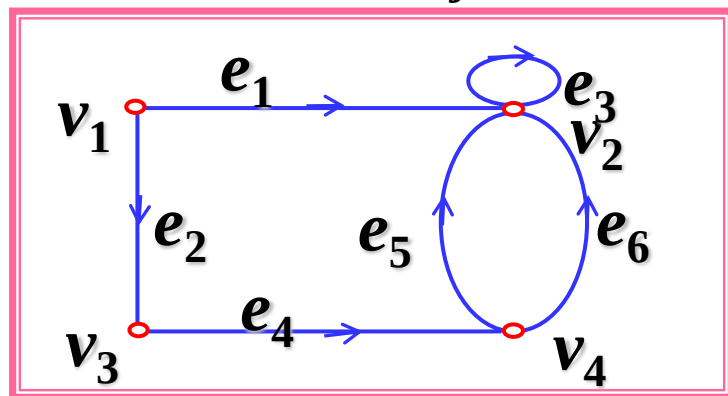
三、可达矩阵

可达矩阵：设有向图 $D = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,

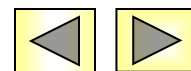
$$\text{令 } p_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 可达 } v_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad (i \neq j),$$

$$p_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

称 $P(D) = (p_{ij})_{n \times n}$ 为 D 的可达矩阵。

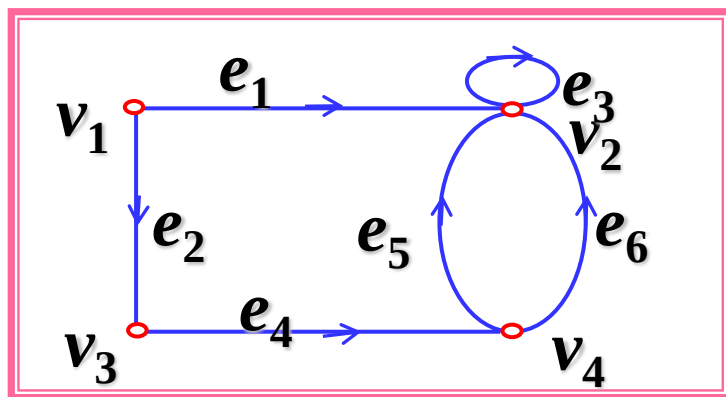


$$P(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



§ 5.4 图的矩阵表示

例5：求出下图中长度为3的通路总数和回路总数。



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

