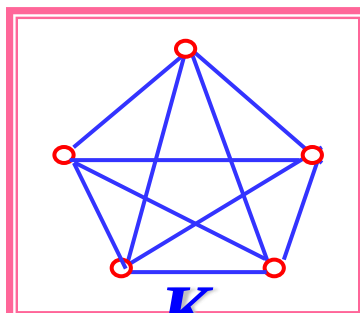
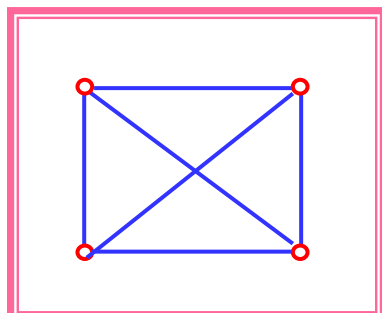
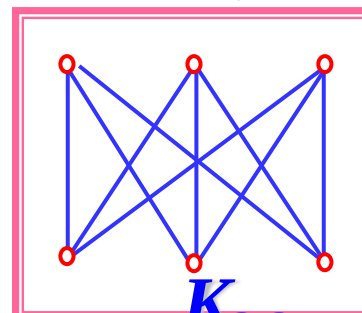
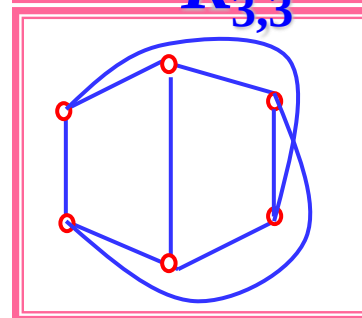
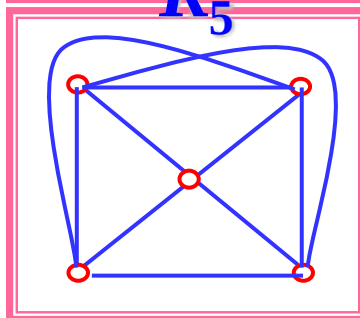
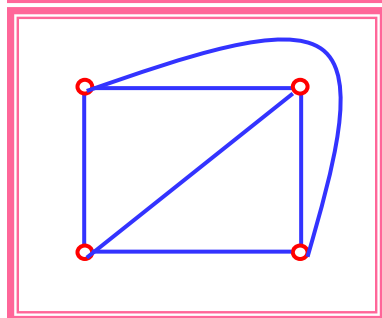


§ 6.4 平面图

一、平面图的基本概念及性质

平面图：图 G 若能够以除顶点外没有边交叉的方式画在平面上，则称 G 为平面图。

画出的没有边交叉的图称为 G 的一个**平面嵌入**。

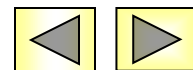
 K_5  $K_{3,3}$ 

§ 6.4 平面图

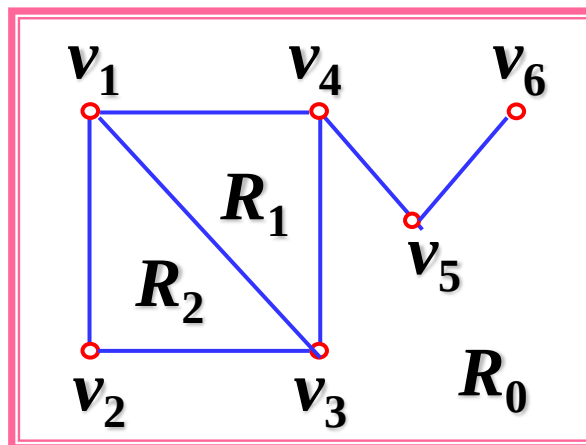
面： 设 G 是一个连通的平面图(G 的某个平面嵌入),
 G 的边将 G 所在的平面划分成若干个区域,
每个区域称为的一个面。

其中面积无限的区域称为**无限面**(或外部面), 记 R_0 ,
面积有限的区域称为**有限面**(或内部面)。

包围每个面的所有边所构成的回路称为该面的边界。
边界的长度称为该面的**次数**, R 的次数记为 $\deg(R)$ 。
对于含 $k(k \geq 2)$ 个连通分支的非连通的平面图,
其无限面 R_0 的边界则由 k 个回路围成。



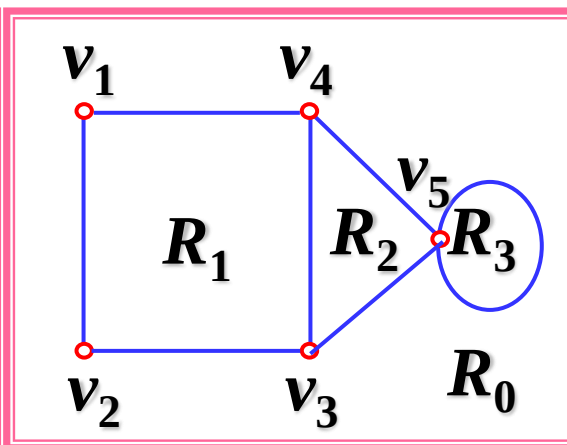
§ 6.4 平面图



$$\deg(R_1) = 3$$

$$\deg(R_2) = 3$$

$$\deg(R_0) = 8$$

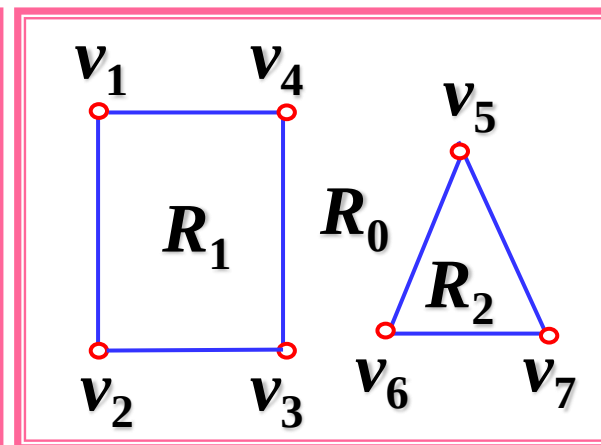


$$\deg(R_1) = 4$$

$$\deg(R_2) = 3$$

$$\deg(R_3) = 1$$

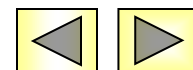
$$\deg(R_0) = 6$$



$$\deg(R_1) = 4$$

$$\deg(R_2) = 3$$

$$\deg(R_0) = 7$$

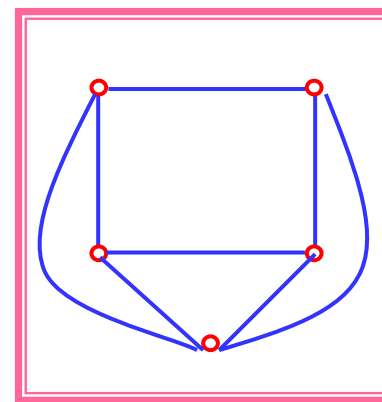
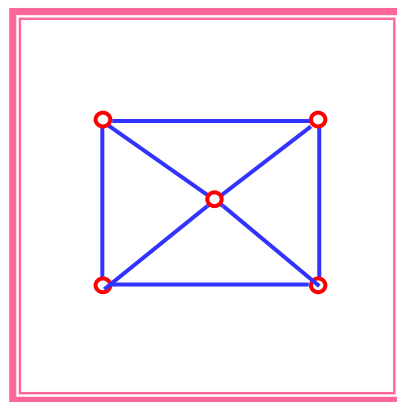
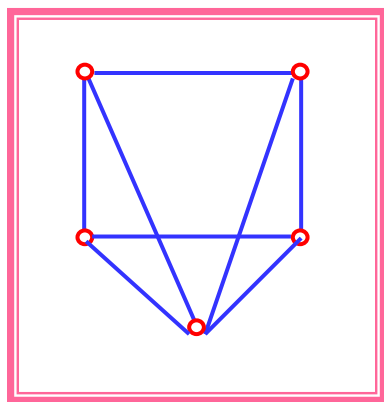


§ 6.4 平面图

定理

在一个平面图 G 中，所有面的次数之和都等于边数 m 的2倍。

即 $\sum_{i=1}^r \deg(R_i) = 2m$ ，其中 r 为面数。

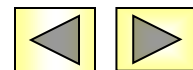


§ 6.4 平面图

极大平面图： 设 G 是一个简单平面图，如果在 G 中任意不相邻的两个顶点之间再加一条边，所得图为非平面图，则称 G 为极大平面图。

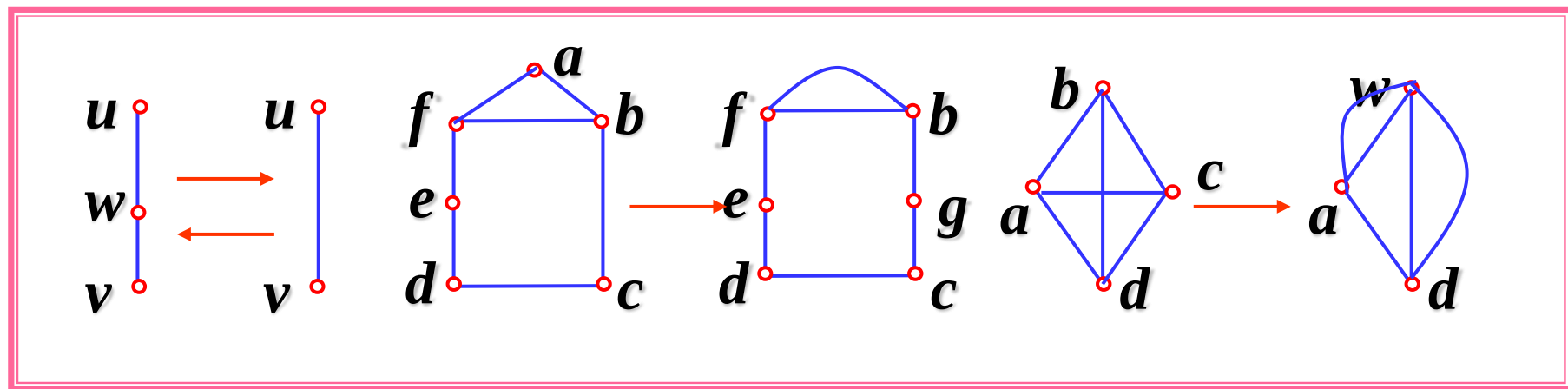
极小非平面图： 若在非平面图 G 中任意删除一条边，所得图为平面图，则称 G 为极小非平面图。

极大平面图的性质：(1) 极大平面图是连通的；
(2) 任何 $n(n \geq 3)$ 阶极大平面图每个面的次数均为3；
(3) 任何 $n(n \geq 4)$ 阶极大平面图 G 均有 $\delta(G) \geq 3$ 。



§ 6.4 平面图

二、平面图的判定



同胚： 如果两个图 G_1 和 G_2 同构，或经过反复插入或消去2度顶点后同构，则称 G_1 与 G_2 同胚。

初等收缩： 图 G 中相邻顶点 u, v 间的收缩，即删除边 (u, v) ，以新的顶点 w 取代 u, v ，使 w 关联 u, v 的一切边(除 (u, v) 外)。



§ 6.4 平面图

判定
定理

一个图是平面图当且仅当它不含与 K_5 同胚子图，也不含与 $K_{3,3}$ 同胚子图。

判定
定理

一个图是平面图当且仅当它没有可以收缩到 K_5 的子图，也没有收缩到 $K_{3,3}$ 的子图。

