



§ 6.5 树

一、无向树

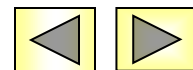
树：连通而不含回路的无向图称为无向树，简称树。

常记做 T 。

叶点：树中度数为1的结点。

枝点（内点）：树中度数大于1的结点。

森林：每个连通分支均是树的非连通无向图。



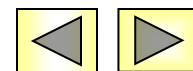
§ 6.5 树

树的 等价 定义

- (1) G 连通且不含回路(G 是树) ;
- (2) G 中无回路, 且 $m = n - 1$, 其中 m 为边, n 为结点数;
- (3) G 是连通的, 且 $m = n - 1$;
- (4) G 中无回路, 但在 G 中任两结点之间增加一条新边, 就得到唯一的一条基本回路;
- (5) G 是连通的, 但删除 G 中任一条边 e 便不连通.
- (6) G 中, 设 T 有 k 片树叶, 于是 $2m \geq k + 2(n - k)$, 则 $2(n - 1) \geq 2n - k$, 则 $k \geq 2$

定理

任意非平凡树 $T(n, m)$ 至少有两片树叶。





§ 6.5 树

二、生成树

生成树：若连通图 G 的某个生成子图是一棵树，
则称该树为 G 的生成树，记做 T_G 。

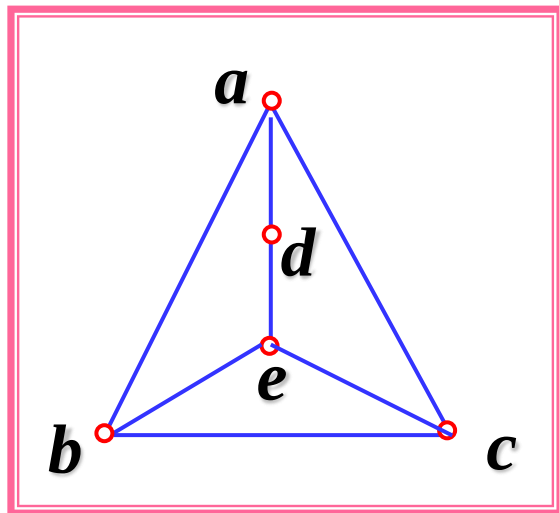
生成树 T_G 的边称为**树枝**。

G 中不在 T_G 中的边称为**弦**。

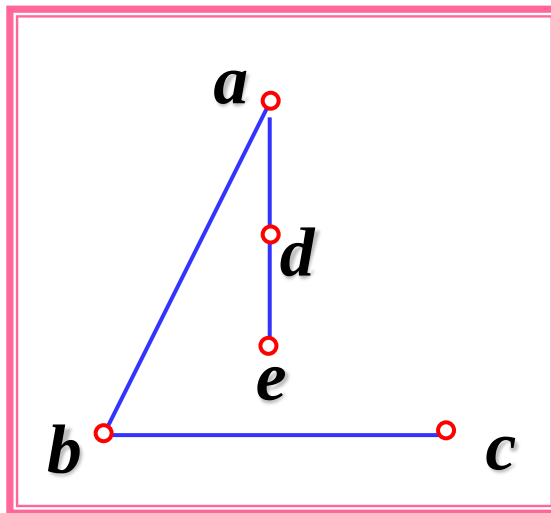
T_G 的所有弦的集合称为**补树**。



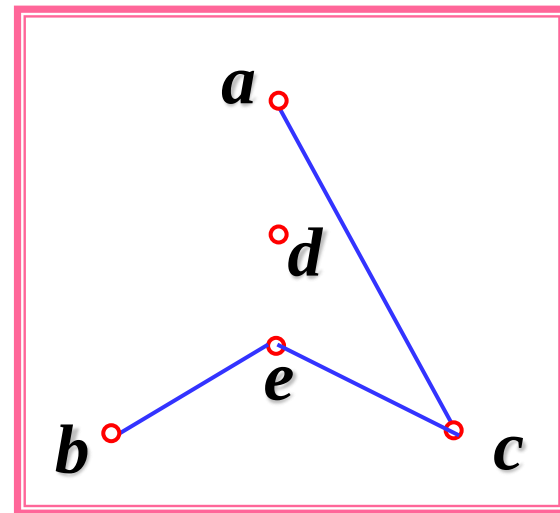
§ 6.5 树



图G



生成树 T_G



生成树 T_G 的补

定理

一个连通图G至少存在一棵生成树。

求解方法：破圈法、避圈法。($m = n - 1$)





§ 6.5 树

三、最小生成树

最小生成树： 设 $G = \langle V, E, W \rangle$ 是连通的带权图， T 是 G 的一棵生成树， T 的每条边权值之和称为 T 的权，记为 $W(T)$ 。 G 的所有生成树中权最小的生成树称为 G 的最小生成树。

求解方法： *Kruskal* 算法、管梅谷算法、逐步短接法。





§ 6.5 树

四、有向树

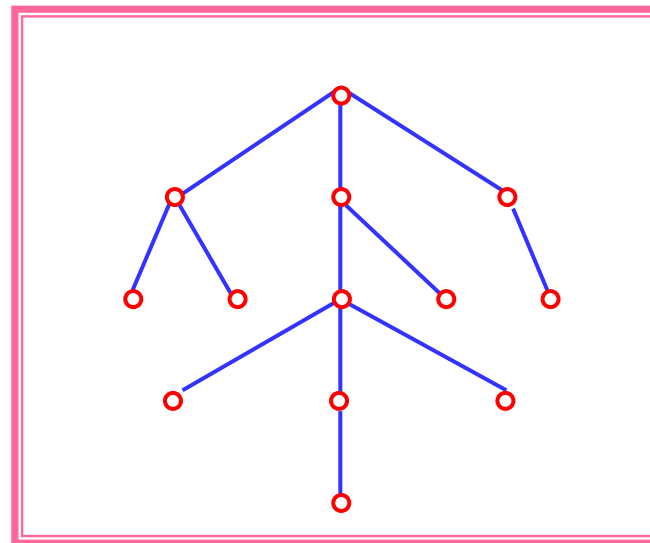
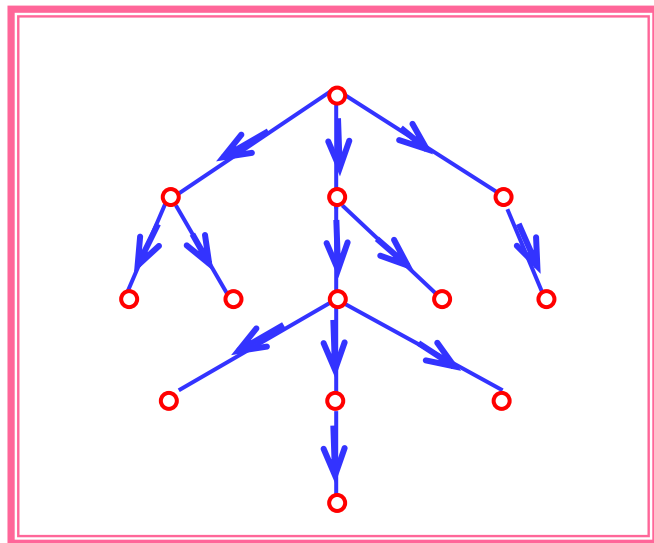
有向树：一个有向图若略去所有有向边的方向后得到的无向图是一棵树，则称该有向图为有向树。

根树：非平凡的有向树，若恰有一个结点的入度为0，其余所有结点的入度均为1，则称为根树。

其中：入度为0的结点称为**树根**，
出度为0的结点称为**树叶**，
入度为1出度大于0的结点为**内点**，
内点和树根统称为**分支点**。



§ 6.5 树



从根树到任一结点的通路长度，称为该结点的**层数**，
所有结点中层数最大的称为**根树的高**。



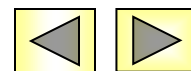
§ 6.5 树

结点间的关系：

- (1) 若从 v_i 到 v_j 可达，则称 v_i 是 v_j 的祖先， v_j 是 v_i 的后代；
- (2) 若 $\langle v_i, v_j \rangle$ 是根树中的有向边，则称 v_i 是 v_j 的父亲， v_j 是 v_i 的儿子；
- (3) 若两结点是同一个结点的儿子，则称它们为兄弟。

有序树：规定了每层结点的次序的根数，称有序树。

根子树：根树 T 中，任一结点 v 及其所有后代导出的子图，称为 T 的以 v 为树根的子树。



§ 6.5 树

m 叉树: 每个分支点至多有 m 个儿子的根树。

m 叉正则树: 每个分支点恰有 m 个儿子的根树。

m 叉完全树: 所有树叶的层数相同, 都等于树高。

最优树:

设 T 是有 t 个叶点的二叉树, 叶点分别带权 $w_1, w_2, \dots, w_t$, 若权为 w_i 的树叶层数为 l_i , 则称 $W(T) = \sum_{i=1}^t w_i \times l_i$ 为二叉树 T 的权, 使 $W(T)$ 取值最小的二叉树 T 称为最优树 (Huffman 树)。

