

§ 7.1 二元运算及其性质

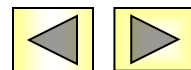
一、二元运算的概念

二元运算： 设 S 为集合，函数 $f: S \times S \rightarrow S$ 称为 S 上的一个二元运算，简称为二元运算。

集合对运算的封闭性： 给定集合 S ，如果对集合上的所有元素进行某种运算后，运算结果仍在 S 中，则称集合 S 对该运算封闭。

如：集合 $\mathbb{Z}$ 对加、减、乘法封闭，但对除法不封闭。

验证运算是否为集合 S 上的二元运算，首先需要验证集合 S 对该运算的封闭性。





§ 7.1 二元运算及其性质

常见二元运算：

- (1) 设 $f: N \times N \rightarrow N$, $f(\langle x, y \rangle) = x + y$, 则 f 是集合 N 上的二元运算。即自然数集合 N 上的加法运算是 N 上的二元运算，但减法不是。
- (2) 整数集合 Z 上的加、减、乘法运算是 Z 上的二元运算，但除法不是。
- (3) 设 $M_n(R)$ 表示所有 n 阶实矩阵的集合，则矩阵的加法和乘法都是 $M_n(R)$ 上的二元运算。





§ 7.1 二元运算及其性质

(4) S 为任意集合, $P(S)$ 为其幂集, 则 $\cup, \cap, -, \oplus$ 都是 $P(S)$ 上的二元运算。

(5) S 为集合, S^S 是 S 上的所有函数的集合, 则合成运算 $\circ$ 是 S^S 上的二元运算。

n 元运算: 设 S 为集合, n 为正整数, 则函数

$f: \underbrace{S \times S \times \dots \times S}_{n\text{个}} \rightarrow S$ 称为 S 上的一个 n 元运算,
简称为 n 元运算。





§ 7.1 二元运算及其性质

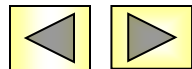
n 元运算通常用符号 $\circ, *, \cdot, \Delta \dots$ 来表示。

如: $f: N \times N \rightarrow N$, 对 $\forall x, y \in N$,

$f(\langle x, y \rangle) = x + y$ 可简记为 $\circ(x, y) = x + y$

或 $x \circ y = x + y$ 。

$g: N \rightarrow N$, $f(x) = y$ 可简记为 $\circ(x) = y$ 。



§ 7.1 二元运算及其性质

有限集上的一元、二元运算也可用运算表给出。

$\circ$	$\circ (a_i)$
a_1	$\circ (a_1)$
a_2	$\circ (a_2)$
$\vdots$	$\vdots$
a_n	$\circ (a_n)$

$\circ$	a_1	a_2	$\dots$	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	$\dots$	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	$\dots$	$a_2 \circ a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	$\dots$	$a_n \circ a_n$



§ 7.1 二元运算及其性质

例1：设 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ，定义 S 上的二元运算如下：

$$x \circ y = (xy) \bmod 5, \quad \forall x, y \in S.$$

求 $\circ$ 的运算表。

$\circ$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

§ 7.1 二元运算及其性质

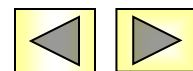
二、二元运算的性质

1、**交换律**：设 $\circ$ 是 S 上的二元运算，若对 $\forall x, y \in S$ 都有 $x \circ y = y \circ x$ ，则称运算 $\circ$ 在 S 上是可交换的。
如： $\mathbb{Z}$ 上的加法满足交换律，但减法不满足交换律。

幂集 $P(S)$ 上的 $\cup, \cap, \oplus$ 满足交换律。

2、**结合律**：设 $\circ$ 是 S 上的二元运算，若对 $\forall x, y, z \in S$ 都有 $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ ，则称运算 $\circ$ 在 S 上是可结合的。

如： $\mathbb{Z}$ 上的减法不满足结合律。幂集 $P(S)$ 上的 $\cup, \cap, \oplus$ 满足结合律。



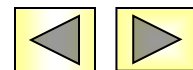


§ 7.1 二元运算及其性质

3、**幂等律**：设 $\circ$ 是 S 上的二元运算，若对 $\forall x \in S$ 都有 $x \circ x = x$ ，则称运算 $\circ$ 适合幂等律。

也即是 S 中的所有元素都是幂等元。

如：幂集 $P(S)$ 上的 $\cup, \cap$ 运算适合幂等律，但 $\oplus$ 运算不适合幂等律。



§ 7.1 二元运算及其性质

4、**分配律**：设 $\circ$ 和 $*$ 是 S 上的两个二元运算，若对

$$\forall x, y, z \in S \text{ 都有 } x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$$

$$\text{和 } (y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x), \text{ 则称运算 } *$$

对 $\circ$ 适合分配律。

如： R 上的乘法对加法满足分配律，加法对乘法不满足分配律。幂集 $P(S)$ 上的 $\cup$ 和 $\cap$ 是相互可分配的。



§ 7.1 二元运算及其性质

5、**吸收律**：设 $\circ$ 和 $*$ 是 S 上的两个可交换的二元运算，若对 $\forall x, y \in S$ ，都有 $x * (x \circ y) = x$ 和 $x \circ (x * y) = x$ ，则称运算 $*$ 和 $\circ$ 满足吸收律。

如：幂集 $P(S)$ 上的 $\cup$ 和 $\cap$ 运算满足吸收律。

6、**消去律**：设 $\circ$ 是 S 上的二元运算，若对 $\forall x, y, z \in S$ ，满足：(1) 若 $x \circ y = x \circ z$ 且 x 不是零元，则 $y = z$ 。
(2) 若 $y \circ x = z \circ x$ 且 x 不是零元，则 $y = z$ 。

则称运算 $\circ$ 满足消去律。



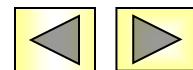
§ 7.1 二元运算及其性质

三、集合 S 的特殊元

1、**左幺元（右幺元）**：设 $\circ$ 是 S 上的二元运算，若存在元素 e_l (或 e_r) $\in S$ ，使得对 $\forall x \in S$ 都有 $e_l \circ x = x$ (或 $x \circ e_r = x$)，则称 e_l (或 e_r) 是 S 中关于运算 $\circ$ 的一个左幺元（或右幺元）。

若 $e \in S$ 关于运算 $\circ$ 既是左幺元又是右幺元，则称 e 为 S 上关于运算 $\circ$ 的幺元。

如：自然数集上的加法运算的幺元是0，乘法运算的幺元是1，幂集 $P(S)$ 上的 $\cup$ 运算和 $\oplus$ 运算的幺元是 $\emptyset$ ， $\cap$ 运算的幺元是 S 。



§ 7.1 二元运算及其性质

定理1

设 e_l, e_r 分别是 S 上关于二元运算 $\circ$ 的左幺元和右幺元, 则有 $e_l = e_r = e$, 且 e 是 S 上关于二元运算 $\circ$ 的唯一幺元。

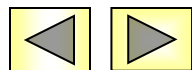
证明: 由 e_l 是左幺元有: $e_l \circ e_r = e_r$,

由 e_r 是右幺元有: $e_l \circ e_r = e_l$,

于是有: $e_r = e_l$, 记 $e_r = e_l = e$

又设 S 上有幺元 e' , 则有: $e' = e' \circ e = e$,

于是 e 是 S 上关于二元运算 $\circ$ 的唯一幺元。

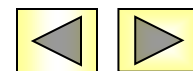


§ 7.1 二元运算及其性质

2、**左零元（右零元）**：设 $\circ$ 是 S 上的二元运算，若存在元素 θ_l (或 θ_r) $\in S$ ，使得对 $\forall x \in S$ 都有 $\theta_l \circ x = \theta_l$ (或 $x \circ \theta_r = \theta_r$)，则称 θ_l (或 θ_r) 是 S 中关于运算 $\circ$ 的一个左零元（或右零元）。

若 $\theta \in S$ 关于运算 $\circ$ 既是左零元又是右零元，则称 θ 为 S 上关于运算 $\circ$ 的零元。

如：自然数集上的加法运算无零元，乘法运算的零元是0，幂集 $P(S)$ 上的 $\cup$ 运算的零元是 S ， $\cap$ 运算的零元是 $\emptyset$ 。



§ 7.1 二元运算及其性质

定理2

设 θ_l, θ_r 分别是 S 上关于二元运算 $\circ$ 的左零元和右零元, 则有 $\theta_l = \theta_r = \theta$, 且 θ 是 S 上关于二元运算 $\circ$ 的唯一零元。

(证明过程与定理1类似)



§ 7.1 二元运算及其性质

3、**左逆元（右逆元）**：设 $\circ$ 是 S 上的二元运算， $e \in S$ 是运算 $\circ$ 的么元，对于 $x \in S$ ，若存在元素 y_l (或 y_r) $\in S$ ，使得 $y_l \circ x = e$ (或 $x \circ y_r = e$)，则称 y_l (或 y_r) 是 x 的左逆元（或右逆元）。

若 $y \in S$ 既是 x 的左逆元又是 x 的右逆元，则称 y 是 x 的逆元，并记为 x^{-1} 。

如：整数集中元素 x 的加法逆元是 $-x$ ，只有1和-1分别有乘法逆元1和-1，其他元素无乘法逆元。



§ 7.1 二元运算及其性质

定理3

设运算 $\circ$ 为 S 上可结合的二元运算, e 是 $\circ$ 的么元, 对于 $\forall x \in S$, 若存在左逆元 y_l 和右逆元 y_r , 则有 $y_l = y_r = y$, 且 y 是 x 的唯一逆元。

证明: 由 y_l 是 x 的左逆元有: $y_l \circ x = e$,

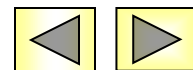
由 y_r 是 x 的右逆元有: $x \circ y_r = e$,

则: $y_l = y_l \circ e = y_l \circ (x \circ y_r) = (y_l \circ x) \circ y_r = e \circ y_r = y_r$,

又设 x 有逆元 y' , 则有:

$$y' = y' \circ e = y' \circ (x \circ y) = (y' \circ x) \circ y = e \circ y = y,$$

于是 $y_l = y_r = y$ 是 S 上 x 关于运算 $\circ$ 的唯一逆元。



§ 7.1 二元运算及其性质

例2：设 $S = \{1, 2, 3\}$ ， S 上定义的二元运算 $\circ$ 和 $*$ 如表所示，试指出 S 中关于 $\circ$ 和 $*$ 存在的特殊元。

$\circ$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

$*$	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	3
3	1	3	2

解：关于 $\circ$ 的幺元是1，无零元，1的逆元是1，
2的逆元是3，3的逆元是2。



§ 7.1 二元运算及其性质

例2：设 $S = \{1, 2, 3\}$ ， S 上定义的二元运算 $\circ$ 和 $*$ 如表所示，试指出 S 中关于 $\circ$ 和 $*$ 存在的特殊元。

$\circ$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

$*$	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	3
3	1	3	2

解：关于 $*$ 的幺元是2，零元是1，1无逆元，
2的逆元是2，3的逆元是3。



§ 7.1 二元运算及其性质

例3: 设 $\circ$ 是实数集 R 上的二元运算, 对 $\forall x, y \in R$ 有 $x \circ y = x + y - 2xy$, 说明 $\circ$ 运算是否为可交换的、可结合的、幂等的, 然后确定关于 $\circ$ 运算的么元、零元和所有可逆元素的逆元。

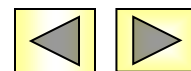
解: 由 $x \circ y = x + y - 2xy$ 和 $y \circ x = y + x - 2yx$

得: $\circ$ 运算是可交换的;

由 $(x \circ y) \circ z = x + y + z - 2xy - 2xz - 2yz + 4xyz$

和 $x \circ (y \circ z) = x + y + z - 2xy - 2xz - 2yz + 4xyz$

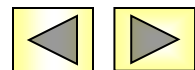
得: $\circ$ 运算是可结合的;



§ 7.1 二元运算及其性质

例3: 设 $\circ$ 是实数集 R 上的二元运算, 对 $\forall x, y \in R$ 有 $x \circ y = x + y - 2xy$, 说明 $\circ$ 运算是否为可交换的、可结合的、幂等的, 然后确定关于 $\circ$ 运算的么元、零元和所有可逆元素的逆元。

解: 由 $x \circ x = x + x - 2x^2 = 2x - 2x^2$,
要使 $x \circ x = x$, 只有 $x = 0$ 或 $1/2$,
不满足对 $\forall x \in R$ 都有 $x \circ x = x$,
于是: $\circ$ 运算不是幂等的;



§ 7.1 二元运算及其性质

例3: 设 $\circ$ 是实数集 R 上的二元运算, 对 $\forall x, y \in R$ 有 $x \circ y = x + y - 2xy$, 说明 $\circ$ 运算是否为可交换的、可结合的、幂等的, 然后确定关于 $\circ$ 运算的么元、零元和所有可逆元素的逆元。

解: 设 e 和 θ 分别是么元和零元,
即对 $\forall x \in R$, 有 $x + e - 2xe = x$ 和 $x + \theta - 2x\theta = \theta$,
解得 $e = 0$ 和 $\theta = 1/2$,
对 $\forall x \in R$, 设 y 是 x 的逆元, 则 $x + y - 2xy = 0$
解得 $y = x/(2x - 1)$, 其中 $x \neq 1/2$ 。

