

§ 7.2 代数系统

一、代数系统的概念

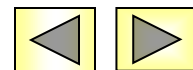
代数系统：非空集合 S 和 S 上的 k 个运算 $f_1, f_2, \dots, f_k$ 组成的系统称为一个代数系统。

记作 $\langle S, f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$ 。

如： $\langle N, + \rangle$, $\langle R, +, \cdot \rangle$, $\langle M_n(R), +, \cdot \rangle$, $\langle P(S), \cup, \cap, \sim \rangle$ 。

有时也在代数系统表达式中加入系统的**代数常数** (即么元或零元)。

如： $\langle N, +, 0 \rangle$, $\langle R, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, $\langle M_n(R), +, \cdot, \theta, E \rangle$,
 $\langle P(S), \cup, \cap, \sim, \emptyset, S \rangle$ 。



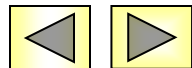
§ 7.2 代数系统

二、子代数系统的概念

子代数系统： 设 $V = \langle S, f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$ 是代数系统， $B \subseteq S$ 且 $B \neq \emptyset$ ，如果 B 对 $f_1, f_2, \dots, f_k$ 都是封闭的，则称 $V' = \langle B, f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$ 是 V 的子代数系统，简称子代数。

若 $B \subset S$ ，则称 V' 是 V 的真子代数。

注意： 当代数系统 V 的表达式中带有代数常数时，子代数 V' 应含有和 V 相同的代数常数。

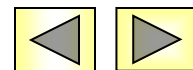




§ 7.2 代数系统

如： $\langle N, + \rangle$ 和 $\langle N - \{0\}, + \rangle$ 都是 $\langle Z, + \rangle$ 的子代数，
但 $\langle N - \{0\}, + \rangle$ 不是 $\langle Z, +, 0 \rangle$ 的子代数。

又如：设 $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in R \right\}$ ，则 $\langle A, \cdot \rangle$ 是 $\langle M_2(R), \cdot \rangle$ 的真子代数。 $M_2(R)$ 中关于 $\cdot$ 运算的幺元是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，
 A 中关于 $\cdot$ 运算的幺元是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，因此 $\langle A, \cdot, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle$ 不是 $\langle M_2(R), \cdot, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ 的子代数。





§ 7.2 代数系统

平凡子代数： 设 $V = \langle S, f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$ 是代数系统，
令 B 是 V 中所有的代数常数构成的集合，
若 B 对 $f_1, f_2, \dots, f_k$ 都是封闭的，
则 $\langle B, f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$ 是 V 的子代数，
称这个子代数及 V 本身是 V 的平凡子代数。

因此，任何代数系统，其子代数一定存在。





§ 7.2 代数系统

例4: 设 $V = \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$, 令 $n\mathbb{Z} = \{ nz \mid z \in \mathbb{Z} \}$, n 为自然数, 则 $\langle n\mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ 是 V 的子代数。

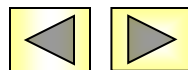
因为, 对 $\forall nk_1, nk_2 \in n\mathbb{Z}$, 有 $nk_1 + nk_2 = n(k_1 + k_2) \in n\mathbb{Z}$, 并且 $0 = n \cdot 0 \in n\mathbb{Z}$, 所以 $n\mathbb{Z}$ 对 V 的运算都是封闭的。

即 $\langle n\mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ 是 $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ 的子代数。

当 $n = 0$ 时, $n\mathbb{Z} = \{0\}$, $\langle \{0\}, +, 0 \rangle$ 是 V 的平凡真子代数;

当 $n = 1$ 时, $n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ 是 V 的平凡子代数;

当 $n \neq 0$ 或 1 时, $\langle n\mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ 是 V 的非平凡真子代数。



§ 7.2 代数系统

三、同态的概念

同态： 设 $V_1 = \langle S_1, \circ \rangle$, $V_2 = \langle S_2, * \rangle$ 是代数系统，

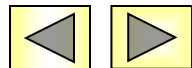
$\circ$ 和 $*$ 是二元运算，如果存在映射 $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$

满足对 $\forall x, y \in S_1$ 有 $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) * \varphi(y)$,

则称 φ 是 V_1 到 V_2 的同态映射，简称同态。

同态象： 设 φ 是 $V_1 = \langle S_1, \circ \rangle$ 到 $V_2 = \langle S_2, * \rangle$ 的同态，

则称 $\langle \varphi(S_1), * \rangle$ 是 V_1 在 φ 下的同态象。



§ 7.2 代数系统

$$V_1 = \langle \{1, 2\}, \circ \rangle$$

$\circ$	1	2
1	1	2
2	2	2

$$V_2 = \langle \{a, b, c\}, * \rangle$$

$*$	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>

设映射 $\varphi: \{1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$,

其中 $\varphi(1) = a$, $\varphi(2) = b$, 则 $\varphi(1 \circ 1) = \varphi(1) = a = a * a$
 $= \varphi(1) * \varphi(1)$, 同理 $\varphi(1 \circ 2) = \varphi(1) * \varphi(2)$,
 $\varphi(2 \circ 1) = \varphi(2) * \varphi(1)$, $\varphi(2 \circ 2) = \varphi(2) * \varphi(2)$ 。



§ 7.2 代数系统

$$V_1 = \langle \{1, 2\}, \circ \rangle$$

$\circ$	1	2
1	1	2
2	2	2

$$V_2 = \langle \{a, b, c\}, * \rangle$$

$*$	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>

设映射 $\varphi: \{1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$,

其中 $\varphi(1) = a$, $\varphi(2) = b$, 则 $\varphi(1 \circ 1) = \varphi(1) = a = a * a$

因此, φ 是 V_1 到 V_2 的同态, 且 V_1 在 φ 下的同态象是 $\langle \{a, b\}, * \rangle$ 。



§ 7.2 代数系统

如: $V_1 = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$, $V_2 = \langle \mathbb{Z}_n, \oplus \rangle$, 其中 $+$ 为普通加法,

$\mathbb{Z}_n = \{ 0, 1, \dots, n-1 \}$, $\oplus$ 为模 n 加法。

即对 $\forall x, y \in \mathbb{Z}_n$, 有 $x \oplus y = (x + y) \bmod n$ 。

令映射 $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $\varphi(x) = x \bmod n$,

于是对 $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, 有 $\varphi(x + y) = (x + y) \bmod n$

$= (x \bmod n + y \bmod n) \bmod n = x \bmod n \oplus y \bmod n$

$= \varphi(x) \oplus \varphi(y)$, 因此 φ 是 V_1 到 V_2 的同态。



§ 7.2 代数系统

四、与同态相关的概念

设 φ 是 $V_1 = \langle S_1, \circ \rangle$ 到 $V_2 = \langle S_2, * \rangle$ 的同态,

(1) 若 φ 是满射的, 则称 φ 为 V_1 到 V_2 的**满同态**。

记为 $V_1 \mathcal{L} V_2$ 。

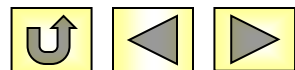
(2) 若 φ 是单射的, 则称 φ 为 V_1 到 V_2 的**单同态**。

(3) 若 φ 是双射的, 则称 φ 为 V_1 到 V_2 的**同构**。

记为 $V_1 \mathcal{L} \equiv V_2$ 。

(4) 若 $V_1 = V_2$, 则称 φ 为 V_1 的**自同态**。

若 φ 又是双射的, 则称 φ 为 V_1 的**自同构**。





§ 7.2 代数系统

例5: 设 $V = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$, 给定 $a \in \mathbb{Z}$, 令 $\varphi_a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$,
 $\varphi_a(x) = ax$, 验证 φ_a 是 V 的自同态。

解: 因为对 $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, 有

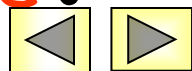
$$\varphi_a(x + y) = a(x + y) = ax + ay = \varphi_a(x) + \varphi_a(y),$$

则 φ_a 是 V 到 V 的同态, 即是 V 的自同态。

当 $a = 1$ (或 -1) 时, 对 $\forall x \in \mathbb{Z}$, 有 $\varphi_1(x) = x$ (或 $\varphi_{-1}(x) = -x$),
而 φ_1 和 φ_{-1} 都是双射的, 则 φ_1 (或 φ_{-1}) 为 V 的自同构。

当 $a = 0$ 时, 对 $\forall x \in \mathbb{Z}$, $\varphi_0(x) = 0$, 称 φ_0 为 V 的零同态。

当 $a \neq \pm 1, 0$ 时, φ_a 是单射的, 称 φ_a 为 V 的单自同态。





§ 7.2 代数系统

例6: 设 $V_1 = \langle R, + \rangle$, $V_2 = \langle R, \times \rangle$, 令 $\varphi: R \rightarrow R$,
 $\varphi(x) = 2^x$, 验证 φ 是 V_1 到 V_2 的单同态。

解: 对 $\forall x, y \in R$, 有

$$\varphi(x + y) = 2^{(x + y)} = 2^x \times 2^y = \varphi(x) \times \varphi(y),$$

则 φ 是 V_1 到 V_2 的同态,

其次, 对于 $\forall x, y \in R$, 当 $x \neq y$ 时, $2^x \neq 2^y$,

即 $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, 则 φ 为单射的,

从而, φ 是 V_1 到 V_2 的单同态。





§ 7.2 代数系统

五、同态概念之推广

具有两个二元运算的代数系统之间的同态：

设代数系统 $V_1 = \langle S_1, \circ, * \rangle$, $V_2 = \langle S_2, \circ', *' \rangle$,

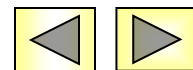
其中 $\circ, *, \circ', *'$ 是二元运算, 若映射 $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$

满足对任意的 $x, y \in S_1$, 有:

$$(1) \varphi(x \circ y) = \varphi(x) \circ' \varphi(y),$$

$$(2) \varphi(x * y) = \varphi(x) *' \varphi(y),$$

则称 φ 是 V_1 到 V_2 的同态。



§ 7.2 代数系统

具有一元运算的代数系统之间的同态：

设代数系统 $V_1 = \langle S_1, \circ, \Delta \rangle$, $V_2 = \langle S_2, \circ', \Delta' \rangle$,

其中 $\circ, \circ'$ 是二元运算, Δ, Δ' 是一元运算,

若映射 $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ 满足对任意的 $x, y \in S_1$, 有:

$$(1) \varphi(x \circ y) = \varphi(x) \circ' \varphi(y),$$

$$(2) \varphi(\Delta(x)) = \Delta'(\varphi(x)),$$

则称 φ 是 V_1 到 V_2 的同态。



§ 7.2 代数系统

具有代数常数的代数系统之间的同态：

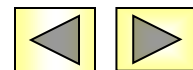
设代数系统 $V_1 = \langle S_1, \circ, k_1 \rangle$, $V_2 = \langle S_2, *, k_2 \rangle$,
其中 $\circ, *$ 是二元运算, $k_1 \in S_1$, $k_2 \in S_2$ 是代数常数。

若映射 $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ 满足下列条件：

(1) $\forall x, y \in S_1$, 有 $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) * \varphi(y)$,

(2) $\varphi(k_1) = k_2$,

则称 φ 是 V_1 到 V_2 的同态。





§ 7.2 代数系统

例7: 设 $V_1 = \langle R, +, 0 \rangle$, $V_2 = \langle R, \times, 1 \rangle$, 令 $\varphi: R \rightarrow R$,
 $\varphi(x) = 2^x$, 验证 φ 是 V_1 到 V_2 的同态。

解: 对 $\forall x, y \in R$, 有

$$\varphi(x + y) = 2^{(x + y)} = 2^x \times 2^y = \varphi(x) \times \varphi(y),$$

$$\text{且 } \varphi(0) = 1,$$

则 φ 是 V_1 到 V_2 的同态。

