

第七章 代数系统

以前学过许多代数：

初等代数、高等代数(线性代数)、
集合代数、命题代数、等等

它们研究的对象分别是实数、矩阵、集合、命题等等，以及在这些对象上定义的各种运算。

这一章我们将代数的研究引导到更高的层次，即抛开具体对象以及具体运算去研究代数——抽象代数。

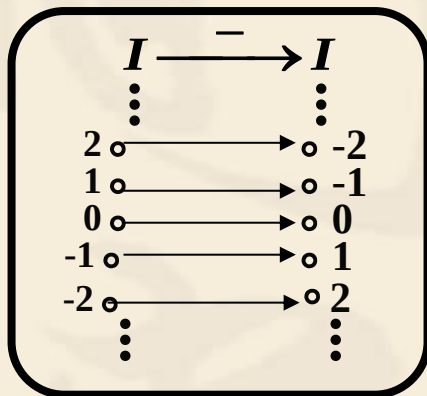
第一节 二元运算基本概念

首先，我们研究运算的概念，看看如何将具体的运算抽象化。

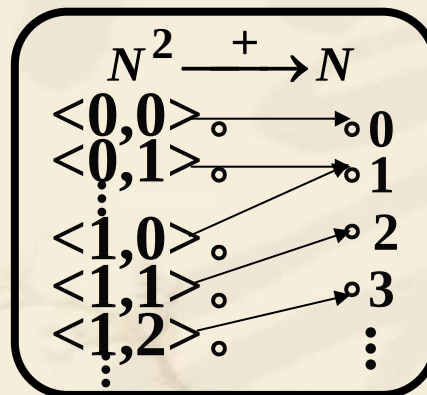
我们先看几个例子：

例

整数集合上的
相反数运算



自然数集合上的
加法运算



集合中任何一个或两个元素都可以进行运算，
且运算的结果惟一。

1、运算的概念

运算 定义

设 X 是集合, $f: X^n \rightarrow Y$ 是个映射, 则称 f 是 X 上的 n 元运算。

($X^n = X \times X \times \dots \times X$ --- n 个 X 的笛卡尔积)

如果 $Y \subseteq X$, 则称运算 f 在 X 上封闭。

特别地, 当 $n=2$ 时, 称 f 是 X 上的二元运算。

思考

减法 $-$ 是自然数集合 N 上封闭的二元运算？

除法 $\div$ 是整数集合 I 上的二元运算？

除法 $\div$ 是实数集合 R 上封闭的二元运算？

2、运算的表示及运算表

- ❖ 解析公式：可以用 $\star$ 、 $*$ 、 $\bullet$ 、 $\blacklozenge$ 、 $\otimes$ 、 $\triangle$ 、 $\circ$ 等表示运算
- ❖ 如果用“ $\star$ ”表示二元运算 f 时，可将 $f(\langle x, y \rangle) = z$ 写成 $x \star y = z$ 。
- ❖ 运算表：用来表示有穷集合上的运算。

$\circ$	a_i
a_1	$a_1 \circ a_1$
a_2	$a_2 \circ a_1$
...	...
...	...
...	...
a_n	$a_n \circ a_1$

$\circ$	a_1	a_2	...	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	...	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	...	$a_2 \circ a_n$
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	...	$a_n \circ a_n$

二元运算表举例

例1 令 $A=\{a,b\}$,
 $\mathcal{P}(A)$ 上的 $\cap$ 运算表如图
所示。

$\cap$	Φ	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
$\{a\}$	Φ	$\{a\}$	Φ	$\{a\}$
$\{b\}$	Φ	Φ	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	Φ	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$

例2 令 $X=\{S,R,A,L\}$, 分别
表示“起始位置”, “向右
转”, “向后转”, “向左
转”; “ $\circ$ ”表示复合运算;

$\circ$	S	R	A	L
S	S	R	A	L
R	R	A	L	S
A	A	L	S	R
L	L	S	R	A

第一节 结束